

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**С.М. Лапач**

# **ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»,  
спеціалізацією «Технологія машинобудування»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2020

Рецензенти: Радченко С. Г., док. техн. наук, проф.  
Кореньков В. М., канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Лашина Ю.В.*, канд. техн. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 10.12.2020 р.)  
за поданням Вченої ради Механіко-машинобудівного інституту (протокол № 4 від 23.11.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Лапач Сергій Миколайович*

# ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Основи наукових досліджень: Виконання лабораторних робіт [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка», спеціалізації «Технологія машинобудування» / С.М. Лапач ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові данні (1 файл: 0,89 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 88 с.

Лабораторні роботи за курсом «Основи наукових досліджень» складаються з двох частин: в першій частині забезпечується отримання навиків з постановки і формалізації наукової проблеми («Формалізація прикладної наукової задачі»; «Формування дерева цілей»; «Діаграма Ісікава: визначення сукупності факторів»). В другій – розв'язання задач оптимізації: лінійне, нелінійне та динамічне програмування, мережне планування, багатокритеріальна оптимізація та задачі на харківських та поглинаючих ланцюгах. В роботах по формалізації наукової проблеми та мережного планування індивідуальне завдання формується за вільним вибором студента при консультативній участі викладача.

© С.М. Лапач, 2020  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

## Зміст

Лабораторна робота №1. <i>Формалізація прикладної наукової задачі</i>	5
Лабораторна робота №2 <i>Формування дерева цілей</i>	9
Лабораторна робота №3 <i>Діаграма Ісікава: визначення сукупності факторів</i>	12
Лабораторна робота №4. <i>Лінійне програмування</i>	15
Лабораторна робота №5 <i>Нелінійне програмування</i>	24
Лабораторна робота №6 <i>Динамічне програмування</i>	33
Лабораторна робота №7 <i>Багатокритеріальна оптимізація</i>	49
Лабораторна робота №8 <i>Стохастичний автомат</i>	57
Лабораторна робота №9 <i>Мережне планування</i>	79

## Лабораторна робота №1

### Формалізація прикладної наукової задачі

#### Мета.

Навчитись формалізувати прикладну наукову задачу.

#### Завдання.

За варіантом.

#### Теоретична частина.

#### Постановка задачі дослідження в предметній галузі.

*Наука начинается только с проблем*

**Карл Поппер «Предположения и опровержения»**

*Прежде всего необходимо установить в чем именно заключается «задача». Это замечание связано с тем, что реальные ситуации редко бывают четко очерченными, а сложное взаимодействие с окружающей средой часто делает точное описание затруднительным.*

Р.Р. Мак-Лоун «Математическое моделирование – искусство применения математики»

В практиці автора багато випадків, коли після довгих перемовин з замовником (дослідником, в інтересах якого повинен працювати спеціаліст по статистичним методам), той признавався, що тепер розуміє, що, виявляється, в своїй задачі, не розібрався. Иногда такие выводы делало вышестоящее руководство, которое ввиду ответственности задачи участвовало в процессе формализации.

**Проблема.** Проблема – невідповідність між бажаним та наявним станом. Від того, як сформульована проблема, залежить весь подальший хід роботи.

**Мета.** Мета – чого потрібно досягнути в результаті роботи. Мета формулюється, виходячи з проблеми (а не навпаки!). При одній і тій же проблемі мета може бути різною.

**Задачі.** Що потрібно зробити, щоб досягти мети. Задачі не повинно бути занадто мало і занадто багато: 5–7.

#### Формалізація задачі

**Місце процесу.** Описується місце процесу як підсистеми в надсистемі. Сукупність зв'язків між досліджуваним процесом і іншими підсистемами надсистеми. Підсистемою якої системи є досліджуваний процес. Місце процесу в системі. Фактори впливу системи на підсистему і навпаки. Графічна схема і її опис.

#### **Чорний ящик (сірий, білий).**

Відображення входів і виходів процесу і їх опис.



**Входи** – це ті фактори зовнішнього середовища, як і ми можемо змінювати за своїм розсудом. До них часто застосовують термін незалежні змінні.

**Виходи** – (залежні змінні, відгуки) фактори дії системи на зовнішнє середовище.

**Контрольовані некеровані фактори** – фактори, які ми змінювати не можемо, але значення яких доступні для контролю (вимірювання).

**Неконтрольовані некеровані фактори** – фактори, які ми не можемо ні змінювати, ні контролювати.

Вважається, що ми не знаємо, як зв'язані вхід і вихід і наше завдання побудувати функцію, яка цей зв'язок відтворює. В концепції чорного ящика постулюється, що всі моделі, які з однаковою точністю описують зв'язок входи-виходи ізоморфні.

Зауважимо, що для складних ситуацій необхідно приймати концепцію сірого, а для імітаційного і об'єктно-орієнтованого моделювання – білого ящика. В них вважається відомою деяка, або вся інформація про зв'язки входи-виходи.

***Залежні змінні (відгуки).***

Повинні задовольняти наступним вимогам

1. Мати фізичну сутність і достатньо повно з точки зору поставленої прикладної мети характеризувати процес.
2. Бути відтворюваними, тобто при повторенні експериментів в номінально однакових умовах результати повинні співпадати з точністю до випадкової помилки.
3. Кожному набору вхідних змінних повинно відповідати одне (з точністю до випадкової помилки) значення відгуку.
4. Повинна вимірюватися не в номінальній шкалі (бажано).

В результаті для кожної залежної змінної повинні бути: найменування; умовне позначення; одиниці виміру; шкала виміру; якщо вимірюється опосередковано, то методика виміру/розрахунку; інформація про форму і особливостях області існування.

***Незалежні змінні (фактори)*** повинні відповідати наступним вимогам:

1. Бути керованими, тобто ми повинні мати можливість встановлювати необхідні їх

- значення;
2. не повинні залежати від інших змінних;
  3. повинні бути детермінованими величинами;
  4. повинні бути однозначні: одному значенню змінної (при інших однакових умовах) повинно відповідати одне (з точністю до випадкової помилки) значення відгуку;
  5. множина незалежних змінних повинна бути повна з точки зору прикладної мети дослідження. Тобто, вибраних факторів (можливо з урахуванням контрольованих некерованих) повинно бути достатньо для опису поведінки системи.

Для кожної незалежної змінної необхідна наступна інформація:

1. Найменування;
2. умовне позначення;
3. одиниці виміру;
4. шкала вимірювання;
5. опис області існування;
6. точність встановлення;
7. очікуваний характер впливу на відгук.

При наявності кількох відгуків множини незалежних змінних можуть співпадати не повністю. Це повинно бути відображено у відповідних описах.

#### ***Контрольовані некеровані змінні.***

Враховуються в тому випадку, коли вони суттєво впливають на відгук. Якщо ми збираємося їх враховувати, то необхідна така ж інформація, як і для незалежних змінних.

#### ***Зафіксовані незалежні змінні.***

До них відносяться ті змінні, які суттєво впливають на відгук, але в даному дослідженні змінюватись не будуть. Обов'язково потрібен їх перелік, опис і обґрунтування фіксації, виходячи з прикладної мети дослідження.

### **Склад звіту**

#### ***1.1. Проблема.***

*Коротко і вичерпно формулюється проблема (в межах 1-2 речень). Може бути додане детальне пояснення обсягом до 0,5-1 сторінки. Проблема – невідповідність між бажаним та наявним станом. Від того, як сформульована проблема, залежить весь подальший хід роботи.*

#### ***1.2. Мета.***

*Викладення мети. Вимоги аналогічні до проблеми. Не забувати, що мети базується на проблемі.*

### **1.3. Задачі.**

*Викладаються задачі, які забезпечують досягнення мети. Оптимальна кількість 5-7 пунктів.*

#### **2.1. Місце процесу.**

*Описується місце процесу як підсистеми в надсистемі. Сукупність зв'язків між досліджуваним процесом і іншими підсистемами надсистеми.*

#### **2.3. Чорний ящик (сірий, білий).**

*Відображення входів і виходів процесу і їх опис.*

## **Лабораторна робота №2**

### **Формування дерева цілей.**

#### **Мета.**

Набути вміння формувати дерево цілей для прикладної наукової задачі.

#### **Завдання.**

Відповідно до завдання.

#### **Теоретичні відомості.**

Для переходу від мети до конкретних показників, які необхідно досягнути, будується дерево цілей. Рекомендується не більше трьох рівнів: нульовий задає стратегічну ціль, перший – тактичні, а другий дозволяє визначити конкретні параметри. Декомпозиція використовується для побудови "дерева цілей", щоб пов'язати генеральну мету зі способами її досягнення. Універсальних методів побудови "дерева цілей" не існує. Способи його побудови залежать від характеру цілі, обраного методологічного підходу, а також від того, хто розробляє "дерево цілей", як він уявляє собі поставлені перед ним завдання, як бачить їхній взаємозв'язок. Основне правило побудови "дерева цілей" - це "повнота редукції" - процес зведення складного явища, процесу або системи до більш простих складових. Для реалізації цього правила використовують такий системний підхід:

- ціль вищого рівня є орієнтиром, основою для розробки (декомпозиції) цілей нижчого рівня;
- цілі нижчого рівня є способами досягнення мети вищого рівня і мають бути представлені так, щоб їхня сукупність зумовлювала досягнення початкової цілі.

Вимоги до побудови "дерева цілей":

1. Цілі кожного рівня повинні бути порівнянні по масштабу і значенню.
2. Формулювання цілей повинне забезпечувати можливість кількісної і якісної оцінки досягнення мети.
3. Повнота редукції: кожна мета певного рівня повинна бути зображена у вигляді підцілей наступного рівня так, щоб сукупність підцілей давала повне уявлення про початкову ціль.
4. Формулюючи цілі різних рівнів необхідно описати бажані результати, а не способи їх отримання.
5. Підцілі кожного рівня повинні бути незалежні одна від однієї і не повинні виходити одна з іншої.
6. Відсутність суперечностей між цілями, що знаходяться на різних рівнях "дерева цілей".
7. Цілі останнього рівня мають бути виражені в конкретних показниках.



8. Забезпечення узгодженості, зв'язку між цілями різного порядку. При цьому слід враховувати наявність двох видів зв'язків між цілями - горизонтальних і вертикальних. Вертикальна координація цілей дає змогу узгоджувати непов'язані між собою напрямки діяльності. Горизонтальна координація забезпечує більш ефективне використання ресурсів.

Цілі можуть бути незалежні, взаємосприяючі, ідентичні, конкурентні, антагоністичні.

Побудова "дерева цілей" будь-яким методом базується на таких якостях цілей, як:

- підпорядкованість - одні цілі обумовлюють інші;
- розгорнутість - здатність зображення якої-небудь загальної мети декількома конкретними цілями;
- співвідносна важливість - різні цілі мають різне значення. Це дозволяє ранжувати цілі, виділяючи серед них більш менш важливі.

Після побудови дерева цілей виконується визначення важливості (пріоритетності) цілей на кожному рівні. Проводиться аналіз цілей для виявлення конкурентних і антагоністичних. Конкурентні мають бути узгоджені, а антагоністичні вилучені з дерева.

Дивись приклади (табл..2.1 і рис.2.1).

Таблиця 1.1. Приклад дерева цілей для планування діяльності<sup>1</sup>

Підвищення терміну експлуатації гільзи циліндрів ДВЗ										
Аналіз можливості нанесення зносостійких покриттів			Оцінка можливості вигладжування чавунних гільз			Аналіз можливості нанесення мікрорельєфу на чавун і зносостійкі покриття		Аналіз терміну служби різних гільз		
Можливості зносостійких покриттів	Особливості процесів нанесення зносостійких покриттів	Обладнання і технічне забезпечення	Характеристики точності і якості процесів	Конструктивні і технологічні особливості процесів	Можливості обладнання і техоснащення	Характеристики якості поверхні після вигладжування	Шляхи забезпечення якості робочої поверхні з регулярним мікрорельєфом	Методи обробки для забезпечення потрібного мікрорельєфу	Методика проведення випробувань гільз	Результати лабораторних і шляхових випробувань

<sup>1</sup> Клепиков В.В. Никишина Н.А. Основы инженерной деятельности: Учебно-методическое пособие –М.: МГИУ, 2008. –160с.

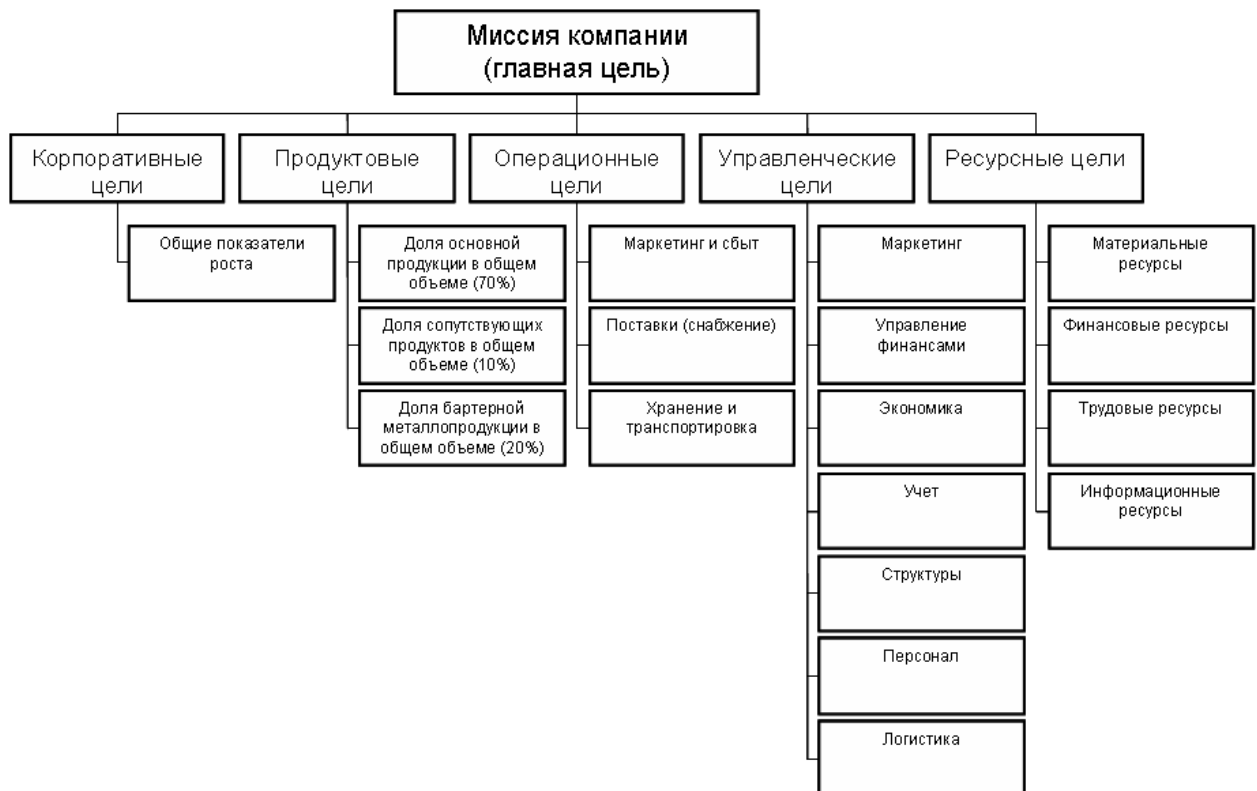


Рис.2.1. Приклад дерева цілей для визначення показників якості

### Склад звіту

1. Завдання.
2. Дерево цілей.
3. Пояснення.

## Лабораторна робота №3

### *Діаграма Ісікава: визначення сукупності факторів*

#### **Мета.**

Навчитись виконувати аналіз прикладної задачі для формування сукупності і ієрархії факторів, які впливають на стан досліджуваної системи.

#### **Завдання.**

Згідно з варіантом.

#### **Теоретичні поняття**

Графічний спосіб дослідження і встановлення суттєвих причинно-наслідкових зв'язків між факторами і показниками стану системи.

Інші назви: *Cause-and-Effect-Diagram, риб'ячий скелет, діаграма причини-наслідок, витоки – гирло.*

Графічний спосіб дослідження і встановлення суттєвих причинно-наслідкових зв'язків між факторами і показниками стану системи.

Робота з діаграмою виконується в кілька етапів:

1. визначення сукупності всіх факторів і причин, які впливають на досліджувану проблему;
2. групування факторів по змістовним і причинно-наслідковим блокам;
3. ранжування факторів в блоках;
4. Аналіз отриманої моделі;
5. Визначення факторів, на які ми не можемо впливати;
6. Визначення не значимих факторів.

Для визначення повного складу факторів використовують мозковий штурм. Для визначення значимості факторів – діаграми Парето, або метод попарних порівнянь.

Стандартні категорії (блоки) причин: людина, методи роботи, механізми, матеріал, контроль, оточуюче середовище.

Діаграма Ісікава будується наступним чином.

1. Визначається проблема. Формулювання розміщується справа в середині листа. Вліво проводиться горизонтальна лінія.
2. По нижнім і верхнім границям листа позначаються основні категорії (блоки) причин і від них проводяться похилі лінії до горизонтальної. Це головні «кості» (гілки) діаграми. Кількість і склад залежать від проблеми.
3. Фактори, які уточнюють основні блоки, додаються як гілки другого і наступних рівнів.

Переваги діаграми Ісікава:

1. дозволяє графічно відобразити взаємозв'язок проблеми і причин, які на неї впливають;
2. дає можливість провести змістовний аналіз ланцюжків взаємозв'язаних причин, які впливають на проблему;
3. зручна для використання і не вимагає високої кваліфікації.

До недоліків цього інструменту відносяться:

1. складність правильного визначення взаємозв'язку проблеми і причин, якщо досліджувана проблема комплексна, тобто є складовою частиною більш складної проблеми;
2. обмежений простір для побудови і відображення всієї сукупності причин.

Приклад діаграми Ісікава для визначення причин нерівномірної товщини покриття, яке наноситься гальванічним способом на металеві деталі (рис.3.1.). Досліджувана проблема – нерівномірність товщини покриття. Причини розподіляються за п'яти основним категоріям: людина, метод, матеріал, механізми, контроль.



Рис.3.1. Приклад діаграми: гальванічне покриття<sup>2</sup>  
(найбільш значущі фактори виділені червоним)

<sup>2</sup> [http://www.kpms.ru/Implement/Qms\\_Ishikawa\\_Chart.htm](http://www.kpms.ru/Implement/Qms_Ishikawa_Chart.htm)

На рис. 3.2. показано фрагмент діаграми з нестандартними категоріями. Використовувалась вона для задачі оптимізації стійкості твердосплавних свердел для свердління плат. Початкова кількість факторів досягала 300. Для побудови моделі в кінцевому рахунку залишилось 19 факторів.

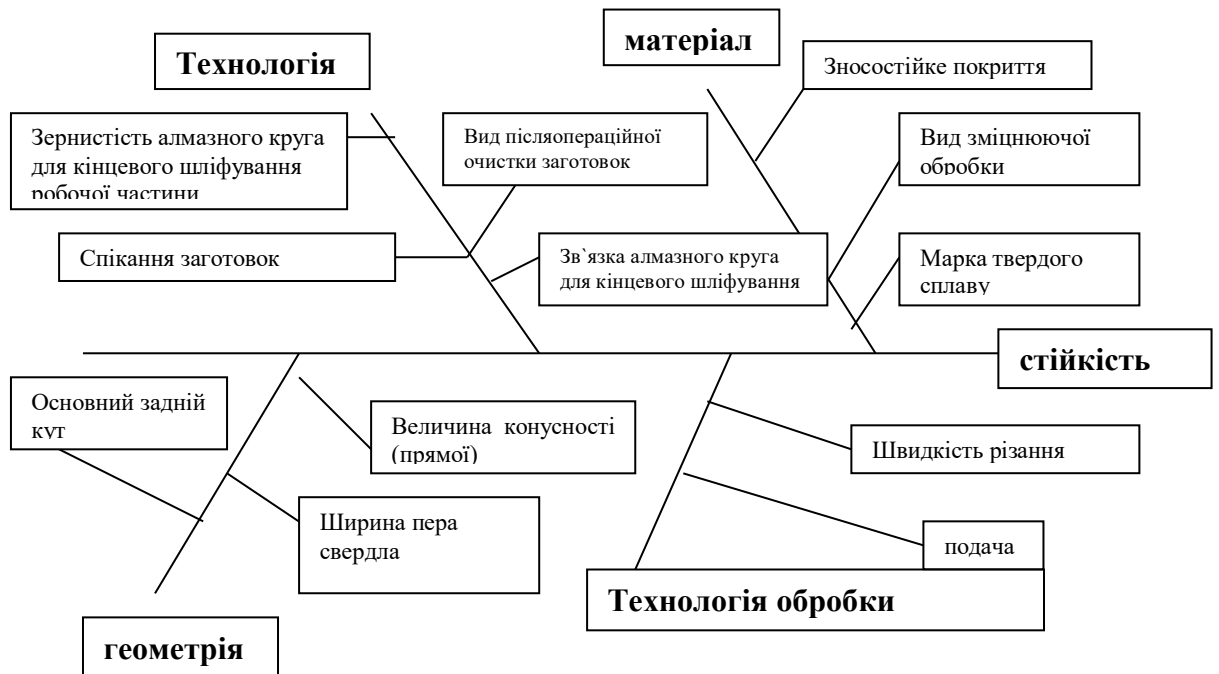


Рис.3.2. Приклад діаграми: свердління плат (скорочений варіант)

#### Склад звіту

1. Завдання.
2. Проблема.
3. Повна діаграма Ісікава.
4. Перелік значущих факторів і обґрунтування їх вибору.

## Лабораторна робота №4

### Лінійне програмування

**Мета.** Навчитись формалізувати оптимізаційну задачу лінійного програмування і розв'язувати її графічним способом і за допомогою поширених ПЗ.

#### Завдання.

Згідно з варіантом виконати розв'язання задачі лінійного програмування графічним способом і за допомогою табличного редактора Excel.

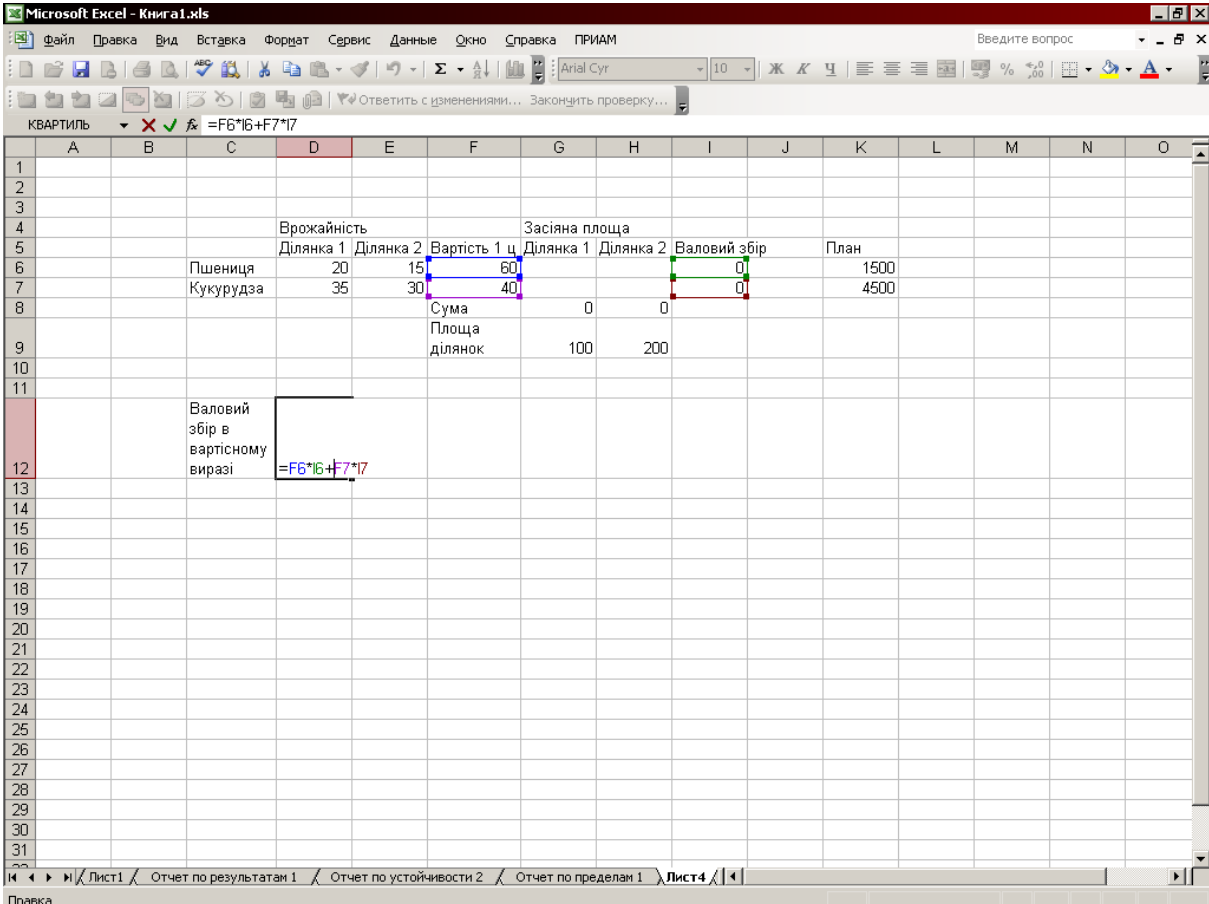
#### Склад звіту

Завдання, розв'язання задачі графічним способом, розв'язання задачі за допомогою табличного редактора Excel.

#### Приклад виконання роботи

**Задача.** Господарство має дві ділянки (100 та 200 га) з різною врожайністю: на першій ділянці врожайність пшениці 20ц/га, на другій – 15ц/га; кукурудзи відповідно 35 і 30ц/га. План по пшениці – 1500ц, а кукурудзи – 4500. Ціна 1ц пшениці – 60, а кукурудзи – 40. Необхідно встановити площі посіву пшениці та кукурудзи на кожній ділянці для отримання максимального валового збору в вартісному виразі.

Спочатку готуємо вихідні дані (див. рис. 4.1).



The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

		Врожайність		Засіяна площа		Валовий збір		План
		Ділянка 1	Ділянка 2	Ділянка 1	Ділянка 2	Ділянка 1	Ділянка 2	
	Пшениця	20	15			0	0	1500
	Кукурудза	35	30			0	0	4500
				Сума		0	0	
				Площа ділянок		100	200	
	Валовий збір в вартісному виразі	=F6*16+F7*17						

Рис.4.1. Підготовка вихідних даних

В комірках G8 (G6+G7) і H8 (H6+H7) розміщуються формули розрахунку суми площі посіву на кожній ділянці, а в комірках I6 (G6\*D6+H6\*E6), I7 (=G7\*D7+H7\*E7) – формули розрахунку валового збору в натуральному вираженні. В комірці D12 – розрахунок валового збору в вартісному вираженні.

Після цього входимо в пункт меню «Сервис», потім вибираємо пункт «Поиск решения». З'являється діалогове вікно, яке показано на рис. 3.2. В ньому необхідно встановити посилання на комірку, в якій знаходиться формула цільової функції: «Установить целевую ячейку» і посилання на комірки, в яких повинен бути розміщений результат – невідомі, які ми шукаємо: «Изменяя ячейки». Також необхідно встановити мету оптимізації, в даному випадку «Максимальному значению». Після цього необхідно ввести обмеження. Для цього клацніть мишкою по кнопці «Добавить». З'явиться вікно введення обмежень (рис.4.3).

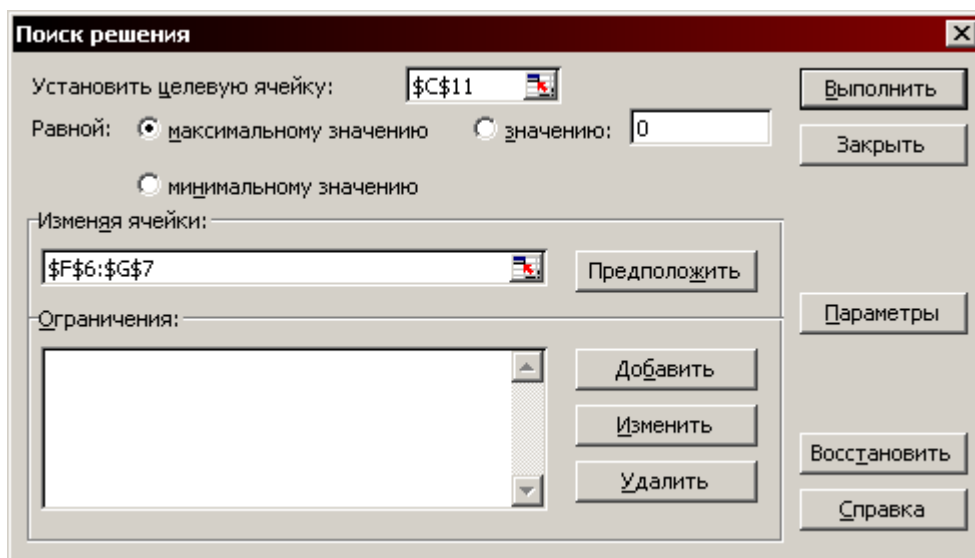


Рис. 4.2. Вікно завдання умов оптимізації (початковий стан)

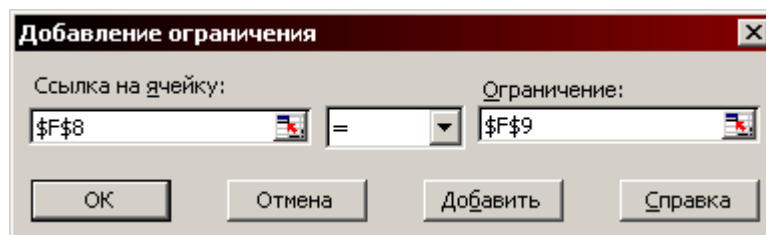


Рис. 4.3. Вікно введення обмежень

В лівій комірці розміщується посилання на комірку, в якій знаходиться розрахункова формула, в центрі – вид обмеження, а справа – значення обмеження чи посилання на комірку, в якому знаходиться це значення. На рис. 4.4 – 4.6 показані варіанти введення обмежень різного виду.

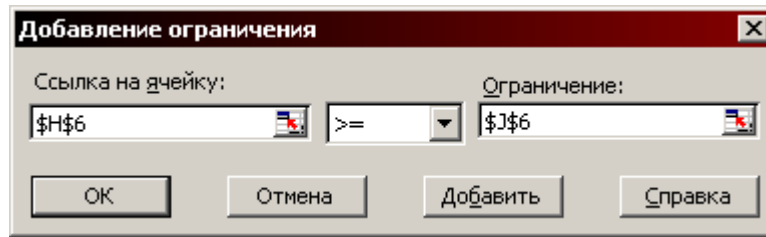


Рис. 4.4. Вікно введення обмежень (варіант)

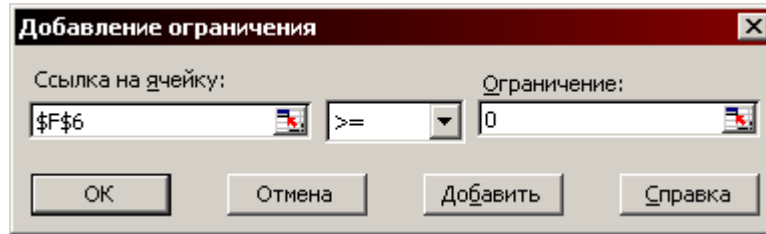


Рис. 4.5. Вікно введення обмежень (варіант)

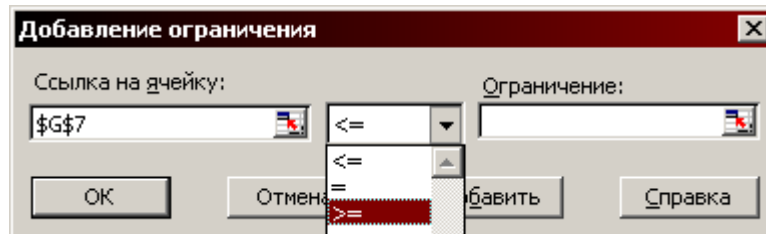


Рис. 4.6. Вікно введення обмежень (вибір виду обмеження)

Після введення всіх даних форма має вигляд, приведений на рис. 4.7.

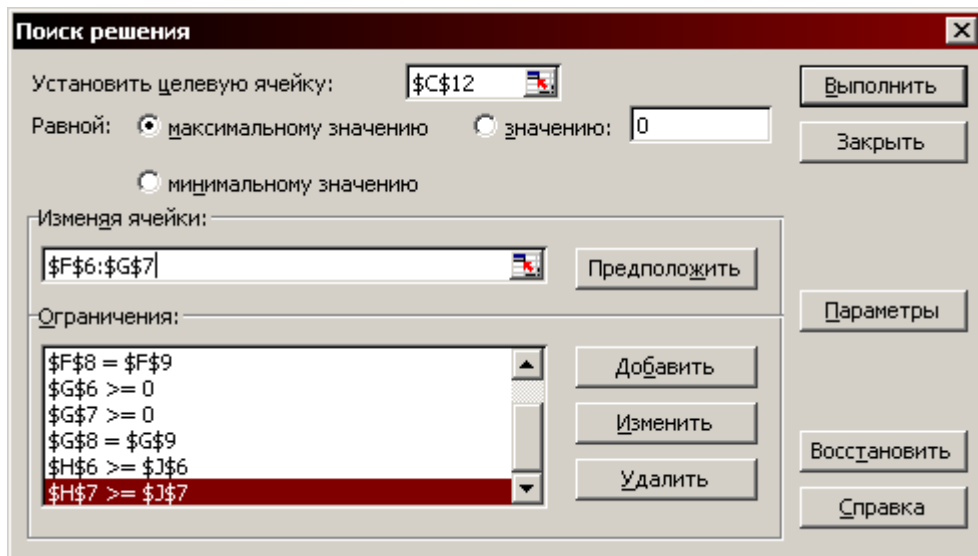


Рис. 4.7. Вікно завдання умов оптимізації (в стані заповнення всіх даних)

Після цього необхідно клацнути по кнопці «Выполнить». Після виконання обчислень з'явиться вікно (рис.4.8).



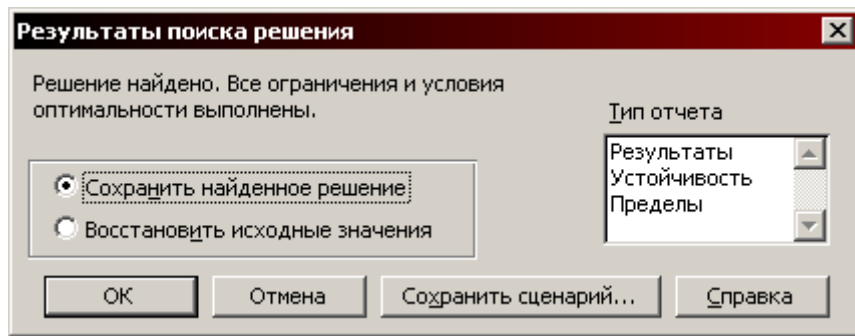


Рис. 4.8. Вікно вибору форми звіту

Після вибору в вікні «Тип отчета» клацніть по кнопці «ОК». Вибрані вами звіти будуть розміщені в новостворених листах. Форма різних видів звітів показана в табл. 4.1 – 4.3.

Табл. 4.1. Звіт «Отчет по результатам»

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$F\$6	Пшеница ділянка 1	0	75
\$G\$6	Пшеница ділянка 2	0	0
\$F\$7	Кукурудза ділянка 1	0	25
\$G\$7	Кукурудза ділянка 2	0	200

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$F\$8	Сума ділянка 1	100	\$F\$8=\$F\$9	не связан.	0
\$G\$8	Сума ділянка 2	200	\$G\$8=\$G\$9	не связан.	0
\$H\$6	Пшеница Валовий збір	1500	\$H\$6>=\$J\$6	связанное	0
\$H\$7	Кукурудза Валовий збір	6875	\$H\$7>=\$J\$7	не связан.	2375
\$F\$6	Пшеница ділянка 1	75	\$F\$6>=0	не связан.	75
\$G\$6	Пшеница ділянка 2	0	\$G\$6>=0	связанное	0
\$F\$7	Кукурудза ділянка 1	25	\$F\$7>=0	не связан.	25
\$G\$7	Кукурудза ділянка 2	200	\$G\$7>=0	не связан.	200

Табл.. 4.2. Звіт «Отчет по устойчивости»

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
\$F\$6	Пшеница ділянка 1	75	0
\$G\$6	Пшеница ділянка 2	0	-150,000041
\$F\$7	Кукурудза ділянка 1	25	0
\$G\$7	Кукурудза ділянка 2	200	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
\$F\$8	Сума ділянка 1	100	1400
\$G\$8	Сума ділянка 2	200	1200
\$H\$6	Пшеница Валовой сбор	1500	-10
\$H\$7	Кукуруза Валовой збір	6875	0

Табл.. 4.3. Звіт «Отчет по пределам»

Ячейка	Целевое Имя	Значение
\$C\$12	Валовий збір в вартісному вираженні ділянка 1	365000

		Целевое	
Ячейка	Имя	Значение	
\$C\$12	Валовий збір в вартісному вираженні ділянка 1	365000	

Изменяемое			
Ячейка	Имя	Значение	
\$F\$6	Пшениця ділянка 1	75	
\$G\$6	Пшениця ділянка 2	0	
\$F\$7	Кукурудза ділянка 1	25	
\$G\$7	Кукурудза ділянка 2	200	

Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
75	365000	75	365000
0	365000	0	365000
25	365000	25	365000
200	365000	200	365000

На рис.4.9 приведено приклад графічного розв'язання задачі лінійного програмування.

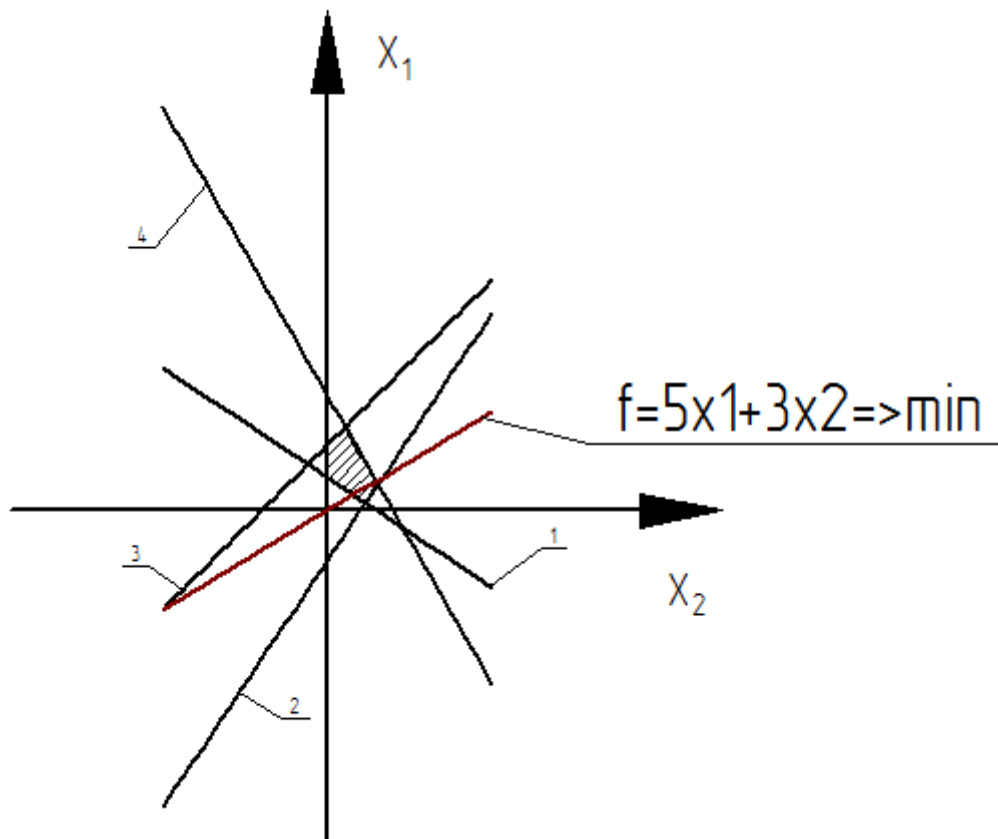


Рис. 4.9. Приклад розв'язання задачі лінійного програмування графічним способом

### Контрольні питання

1. Що таке оптимізація?
2. Способи розв'язання оптимізаційної задачі з обмеженнями.
3. Особливі випадки оптимізаційних задач.
4. Оцінка ефективності оптимізаційних методів.
5. Основні проблеми при оптимізації

6. Сформулювати задачу лінійного програмування.
7. Суть розв'язання задачі лінійного програмування геометричним способом.
8. Приклади типових задач лінійного програмування.

### **Література**

1. Разработка бизнес-приложений в экономике на базе MS EXCEL –М.: ДИАЛОГ\_МИФИ, 2003. –416с.
2. С. Л. Лондар, Р, В. Юрковець Економетрія засобами MS EXCEL –К.: Європейський університет, 2004. –242с.
3. А. А. Мазаракі, Ю.А. Толбатов Математичне програмування в EXCEL –К.: Четверта хвиля, 1998.–208с.

## Варіанти завдань

1.  $f = x_1 - 2x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.  $f = 5x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.  $f = x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4.  $f = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5.  $f = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$f = 3x_1 - 2x_2 \Rightarrow \min$

6. 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7.  $f = x_1 + x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8.  $f = 2x_1 + x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9.  $f = x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ 0,1x_1 - x_2 \leq -2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10.  $f = 2x_1 + x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

11.  $f = -x_1 + x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

12.

$f = 5x_1 - 3x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -6 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$f = x_1 + x_2 \Rightarrow \max$

13. 
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 157 \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 16 \end{cases}$$

14.

$f = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \end{cases}$$

15.

$f = 10x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 33 \\ x_1 + 6x_2 \geq 14 \\ 5x_1 - 4x_2 \geq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$f = x_1 + x_2 \Rightarrow \max$

16. 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

17.

$f = 7x_1 + 6x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

18.

$f = x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 27 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$$

19.

$f = 7x_1 - 2x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

20.  $f = 2x_1 + x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

21.

$f = 2x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

22.

$f = 2x_1 - 4x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 \end{cases}$$

23.

$$f = x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

24.

$$f = 3x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

25.  $f = 2x_1 - x_2 \Rightarrow \max$ 

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 5x_1 + x_2 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ -2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 7x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ -2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 7x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

27.  $f = x_1 - x_2 \Rightarrow \max$ 

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 80 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

28.

$$f = 7x_1 + x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

29.  $f = 7x_1 - x_2 \Rightarrow \min$ 

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 5x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$f = x_1 + x_2 \Rightarrow \min$$

$$30. \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$$

31.  $f = x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$ 

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

32.  $f = 2x_1 + x_2 \Rightarrow \max$ 

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

33.

$$f = 2x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

34.

$$f = 2x_1 - 4x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

35.

$$f = -3x_1 + 6x_2 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

36.

$$f = 3x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 21 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$$

37.  $f = x_1 + x_2 \Rightarrow \max$ 

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

38.  $f = x_1 + x_2 \Rightarrow \max$ 

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

39.

$$f = -2x_1 + x_2 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

40.

$$f = -2x_1 + x_2 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ -3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

41.

$$f = -3x_1 + x_2 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

42.

$$f = 2x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 9 \\ 0 \leq x_2 \leq 6 \end{cases}$$

43.

$$f = x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{array} \right.$$

44.

$$f = x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

45.  $f = 2x_1 - x_2 \Rightarrow \max$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

46.

$$f = 2x_1 - 4x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

47.

$$f = 2x_1 + 7x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 6x_1 + x_2 \leq 60 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 14 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

48.

$$f = 8x_1 + 6x_2 \Rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

49.

 $f = 8x_1 + 6x_2 \Rightarrow \min$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

50.

$$f = 0,99x_1 + 1,21x_2 \Rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,6x_1 + 0,5x_2 \leq 120 \\ 0,05x_1 + 0,09x_2 \leq 75 \\ 0,2x_1 + 0,6x_2 \leq 50 \\ 2x_1 + 2,4x_2 \leq 500 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

## Лабораторна робота №5

### Нелінійне програмування

#### Мета.

Навчитись формалізувати оптимізаційну задачу нелінійного програмування і розв'язувати її за допомогою множників Лагранжа.

#### Завдання.

Згідно з варіантом виконати розв'язання задачі лінійного програмування методом множників Лагранжа.

#### Склад звіту

Завдання, розв'язання задачі «вручну», розв'язання задачі за допомогою табличного редактора Excel, висновки.

#### Теоретичні відомості

До нелінійного програмування відносять задачі, в яких цільова функція і/або обмеження виражені як нелінійні функції.

Одним із способів розв'язання такої задачі є метод множників Лагранжа.

Цей спосіб застосовується в тому випадку, коли обмеження мають вигляд рівнянь.

Нехай цільова функція  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а обмеження має вигляд  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ . Тоді для знаходження умовного екстремуму будується функція Лагранжа  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(b - g(x_1, x_2, \dots, x_n))$ . Таким чином тепер ми можемо розв'язувати задачу як пошук безумовного екстремуму. Взятвши часткові похідні по всім невідомим (включаючи  $\lambda$ ), ми отримаємо систему нелінійних в загальному випадку рівнянь, розв'язок яких дозволить оптимізувати цільову функцію.

Для розширення застосування методу множників Лагранжа обмеження в вигляді нерівностей можливо привести до обмежень в формі рівнянь. Приклади таких формул, приведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1. Формули перетворень обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь

Обмеження	Перетворення
$x_i > a_i$	$x_i = a_i + \exp(z_i)$
$x_i \geq a_i$	$x_i = a_i + z_i^2$
$x_i > x_j, i \neq j$	$x_j = z_j, x_i = z_j + z_i^2$
$a_i \leq x_i \leq b_i$	$x_i = b_i + (a_i - b_i) \sin^2 z_i$ $x_i = (a_i + b_i) / 2 + 0,5(b_i - a_i) \sin z_i$

$a_i < x_i < b_i$	$x_i = b_i + (a_i - b_i) \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} z_i$ $x_i = b_i + \frac{(a_i + b_i) \exp(z_i)}{1 + \exp(z_i)}$
$a \leq x_i \leq b$ $a \leq x_j \leq b$ $x_i \geq x_j, i \neq j$	$x_i = b + (a - b) \sin^2 z_j$ $x_i = b + (a - b) \sin^2 z_j \sin^2 z_i$
$a < x_i < b$ $a < x_j < b$ $x_i > x_j, i \neq j$	$x_i = b + (a - b) \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} z_j$ $x_i = b + (a - b) \frac{1}{\pi^2} \operatorname{arctg} z_j \operatorname{arctg} z_i$
$a_i(x_j) \leq x_i \leq b_j(x_j)$ $i \neq j$	$x_j = z_j$ $x_i = b_i(z_j) + (a_i(z_j) - b_i(z_j)) \sin^2 z_i$
$a_i(x_k) \leq x_i \leq b_i(x_j)$ $i \neq j, i \neq k$	$x_j = z_j$ $x_k = z_k$ $x_i = b_i(z_j) + (a_i(z_k) - b_i(z_j)) \sin^2 z_i$

### Приклад виконання роботи

Завдання. Необхідно мінімізувати загальні витрати  $C = v_1 + v_2$ , якщо залежність окремих витрат від параметрів обчислюється за формулами  $v_1 = a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_1^{2,5}$  і  $v_2 = a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_2^{2,5}$ , а на значення параметрів накладається наступне обмеження  $z = x_1 + x_2$ . Крім того фізично значення параметрів не можуть бути менше нуля.

Будуємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_1^{2,5}) + (a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_2^{2,5}) + \lambda(z - x_1 - x_2)$$

Продиференціювавши її за трьома невідомими, отримуємо нелінійну систему з трьох

$$\text{рівнянь } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = b_1 + 2,5 c_1 x_1^{1,5} - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = b_2 + 2,5 c_2 x_2^{1,5} - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = z - x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

Для розв'язання в середовищі Excel спочатку необхідно підготувати вихідні дані.

Приклад їх підготовки приведено в табл. 5.2 і 5.3.

Таблиця 5.2. Приклад підготовки вихідних даних

	B	C	D	E	F
2			X1	X2	L
3			0	0	0
4		a	2	500	
5		b	5	8	
6		c	8	0,4	
7		V	2	500	502



8					
9		100	0		
10		0	5		
11		0	8		

Таблиця 5.3. Приклад підготовки вихідних даних з формулами

	B	C	D	E	F
2			X1	X2	L
3			0	0	0
4		a	2	500	
5		b	5	8	
6		c	8	0,4	
7		V	=D4+D5*D3+D6*D3^2,5	=E4+E5*E3+E6*E3^2,5	=D7+E7
8					
9		100	=D3+E3		
10		0	=D5+2,5*D6*D3^1,5-F3		
11		0	=E5+2,5*E6*E3^1,5-F3		

Після цього входимо в пункт меню «Сервис», потім вибираємо пункт «Поиск решения». З'являється діалогове вікно, яке показано на рис. 1.2. В ньому необхідно встановити посилання на комірку, в якій знаходиться формула цільової функції: «Установить целевую ячейку» і посилання на комірки, в яких повинен бути розміщений результат – невідомі, які ми шукаємо: «Изменяя ячейки». Також необхідно встановити мету оптимізації, в даному випадку «Максимальному значению». Після цього необхідно ввести обмеження. Для цього клацніть мишкою по кнопці «Добавить». З'явиться вікно введення обмежень (приклади рис.5.1–5.3).

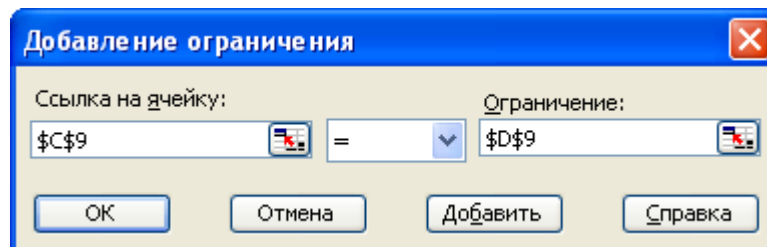


Рис.5.1. Встановлення як обмеження рівняння з системи.

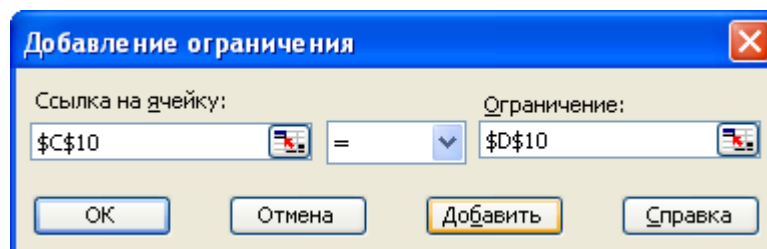


Рис. 5.2. Встановлення обмеження суми

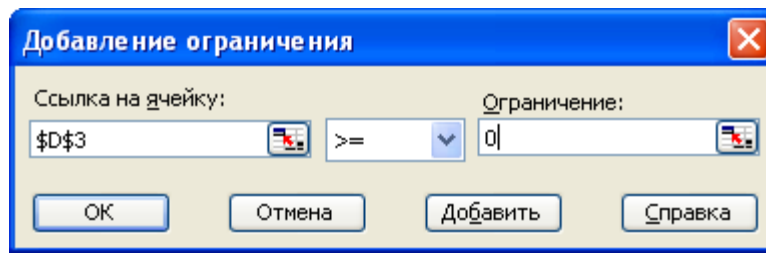


Рис.5.3. Встановлення обмеження значень параметру більше 0.

З введеними всіма даними форма має вигляд, приведений на рис.5.4. Додаткові параметри оптимізації можна задати, вибравши кнопку «Параметры», в формі, показаній на рис.5.6.

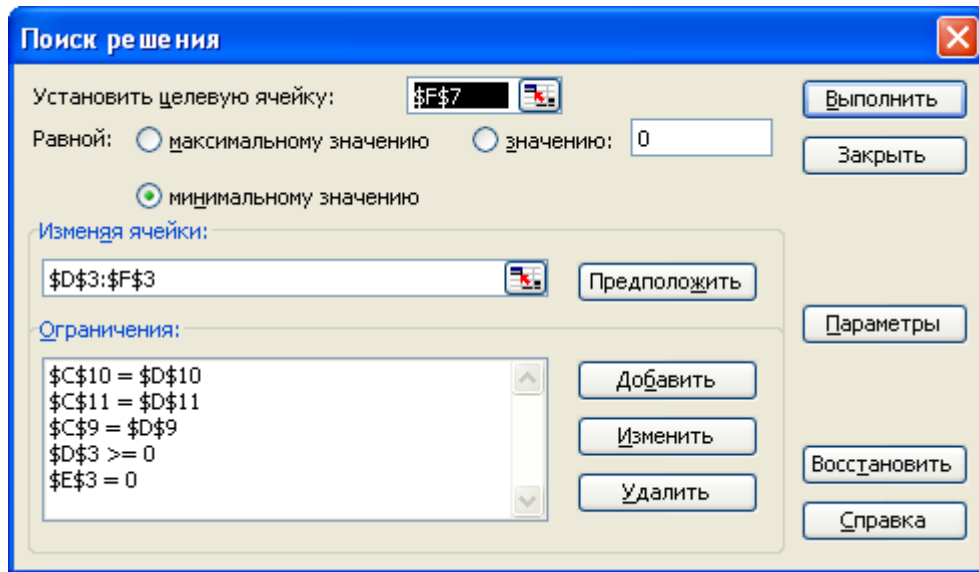


Рис.5.4. Вигляд форми з усіма введеними даними

Після цього необхідно клацнути по кнопці «Выполнить». Після виконання обчислень з'явиться вікно (рис.5.5).

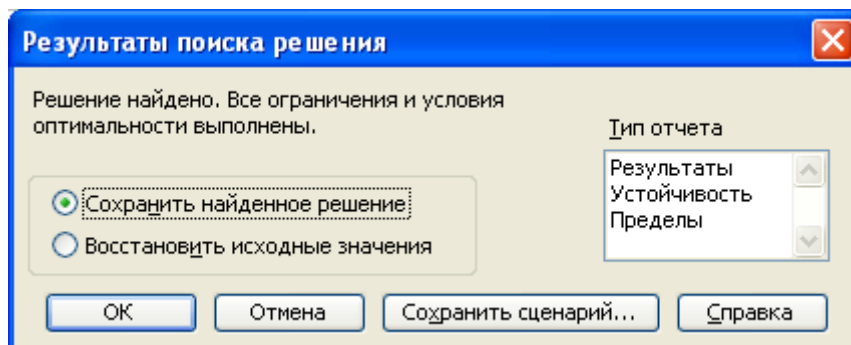


Рис.5.5.

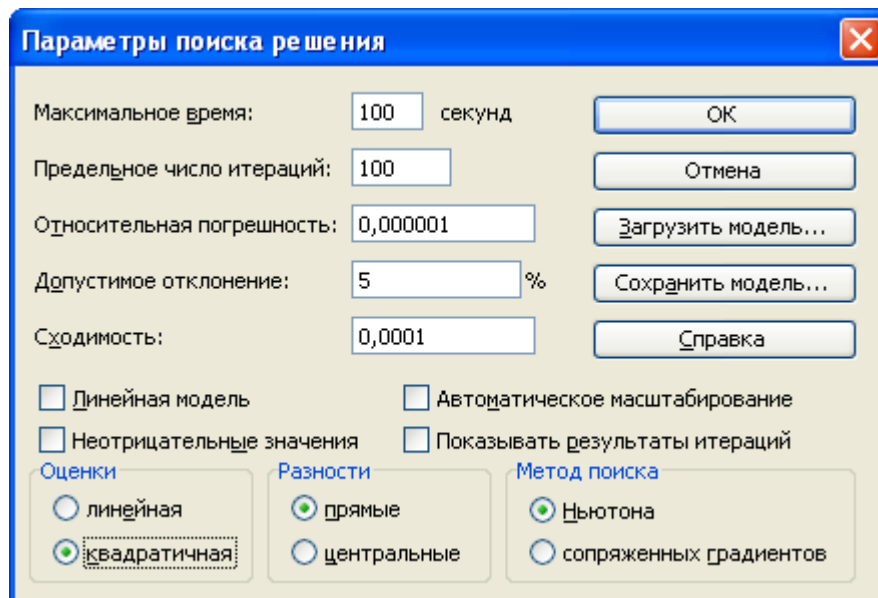


Рис.5.6. Завдання параметрів пошуку розв'язку

Після вибору в вікні «Тип отчета» клацніть по кнопці «ОК». Вибрані вами звіти будуть розміщені в новостворених листах. Форма різних видів звітів показана в табл. 5.4 – 5.6.

Таблица 5.4. Форма звіту про результати оптимізації

**Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам**  
**Рабочий лист: [Книга1.xls]Лист1**  
**Отчет создан: 17.09.2012 11:35:56**

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейк а	Имя	Исходное значение	Результат
\$F\$18	V S	34226,64949	34226,64949

Изменяемые ячейки

Ячейк а	Имя	Исходное значение	Результат
\$D\$9	x1	11,97565582	11,97565582
\$E\$9	x2	88,02434418	88,02434418
\$F\$9	L	833,8557503	833,8557503

Ограничения

Ячейк а	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$D\$6	a	0	\$D\$6=\$C\$6	не связан.	0
\$D\$5	a	7,22323E-08	\$D\$5=\$C\$5	не связан.	0
\$D\$4	a	-5,30748E-07	\$D\$4=\$C\$4	не связан.	0
\$D\$9	x1	11,97565582	\$D\$9>=0	не связан.	11,97565582
\$E\$9	x2	88,02434418	\$E\$9>=0	не связан.	88,02434418

Таблица 5.5.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости  
 Рабочий лист: [Книга1.xls]Лист1  
 Отчет создан: 17.09.2012 11:35:56

Изменяемые ячейки

Ячейк		Результ.	Нормир.
а	Имя	значение	градиент
\$D\$9	x1	11,97565582	0
\$E\$9	x2	88,02434418	0
\$F\$9	L	833,8557503	0

Ограничения

Ячейк		Результ.	Лагранжа
а	Имя	значение	Множитель
\$D\$6	a	0	-832,9757591
\$D\$5	a	7,22323E-08	-0,008482426
\$D\$4	a	-5,30748E-07	0,008482426

Таблица 5.6.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам  
 Рабочий лист: [Книга1.xls]Отчет по пределам 1  
 Отчет создан: 17.09.2012 11:35:56

Целевое		
Ячейк	Имя	Значение
\$F\$18	V S	34226,64949

Изменяемое			Нижний	Целевой	Верхний	Целевой
Ячейк	Имя	Значение	предел	результат	предел	результат
\$D\$9	x1	11,97565582	11,97565582	2 34226,64949	11,97565582	34226,64949
\$E\$9	x2	88,02434418	88,0243441	8 34226,64949	88,02434418	34226,64949
\$F\$9	L	833,8557503	833,855750	3 34226,64949	833,8557503	34226,64949

На рис.5.7 представлена геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування.

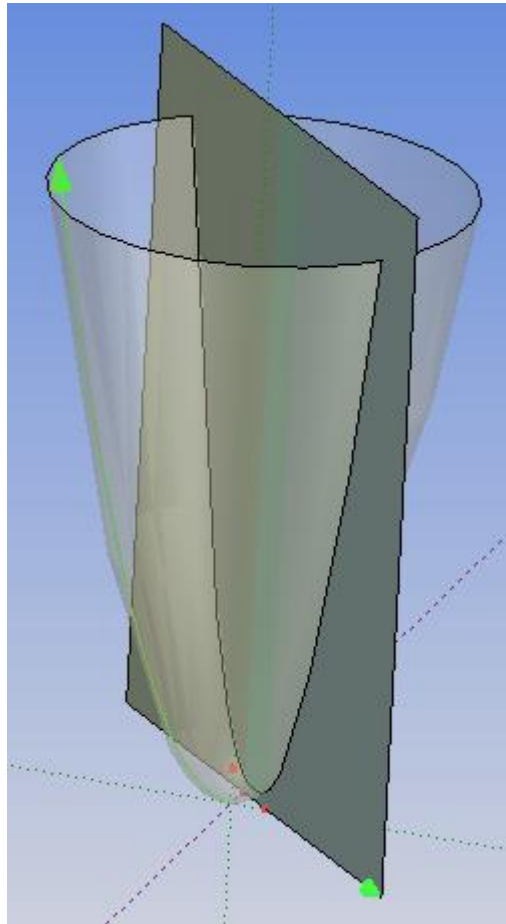


Рис.5.7. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

### **Контрольні питання**

1. Що таке оптимізація?
2. Умовна і безумовна оптимізація. Зведення умовної задачі до безумовної.
3. Особливі випадки оптимізаційних задач.
4. Оцінка ефективності оптимізаційних методів.
5. Основні проблеми при оптимізації
6. Сформулювати задачу нелінійного програмування.
7. Геометрична суть розв'язання задачі нелінійного програмування.
8. Приклади типових задач лінійного програмування.
9. Розв'язання задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа.
10. Застосування методу множників Лагранжа до задач з обмеженнями в вигляді нерівностей.

### **Література**

1. Кузьмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel: Навч. Посіб. – К.:Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. –320с.

## Варіанти завдань

1.  $f = x_1 x_2; x_1 + x_2 = 1$
2.  $f = x_1/2 + x_2/3; x_1^2 + x_2^2 = 1$
3.  $f = x_1^2 + x_2^2; x_1/2 + x_2/3 = 1$
4.  $f = 2x_1 + x_2; x_1^2 + x_2^2 = 4$
5.  $f = x_1 + 3x_2, 2x_1^2 + x_2^2 = 2$
6.  $f = 3x_1 + 2x_2; x_1^2 + 4x_2^2 = 11$
7.  $f = x_1/4 + x_2/5; 2x_1^2 + x_2^2 = 6$
8.  $f = x_1 x_2, 2x_1 + 3x_2 = 4$
9.  $f = x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2 = 1$
10.  $f = 3x_1 x_2, x_1 + x_2 = 10$
11.  $f = 2x_1 x_2, 3x_1 + 2x_2 = 5$
12.  $f = x_1^2/2 + x_2^2, x_1 + x_2/4 = 10$
13.  $f = x_1^2/2 + 3x_2^2, x_1 + x_2 = 6$
14.  $f = x_1^2/4 + 2x_2^2, 3x_1 + 2x_2 = 12$
15.  $F = 2x_1 x_2, x_1 + 2x_2 = 5$
16.  $f = 4x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2/4 = 10$
17.  $f = x_1^2 + 3x_2^2, x_1 + 3x_2 = 6$
18.  $f = x_1^2 + 5x_2^2, 3x_1 + 5x_2 = 12$
19.  $f = x_1 - 2x_2 + 2x_3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$
20.  $f = x_1 x_2^2 x_3^3; x_1 + x_2 + x_3 = 12$
21.  $f = x_1 x_2 + x_2 x_3; x_1^2 + x_2^2 = 2; x_3 + x_2 = 2;$
22.  $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1; x_1^2 + x_2^2 = 4$
23.  $f = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2; x_1 + x_2 = 6;$   
 $x_1, x_2 \geq 0;$
24.  $f = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2 \Rightarrow \min; x_1 + x_2 = 6;$   
 $x_1, x_2 \geq 0;$
25.  $f = x_1^2 - x_2^2 \Rightarrow \min; x_1 - 2x_2 = 4;$
26.  $f = (x_1 - 3)^2 - (x_2 - 5)^2 \Rightarrow \min; x_2 - 2x_1 = 5;$
27.  $f = 2x_1 + 3x_2; x_1^2 + x_2^2 \leq 16, x_{1,2} \geq 0$
28.  $f = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 3, x_1 \leq 4, x_2 \leq 5$   
 $f = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \Rightarrow \min$   
 $x_1 + x_2 = 4$
29.  $x_1 \leq 6$   
 $x_2 \leq 5$   
 $x_{1,2} \geq 0$   
 $f = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow \min$
30.  $x_1 + x_2 = 16$   
 $x_{1,2} \geq 0$
31.  $f = x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max; x_1^2 + x_2^2 = 36, x_{1,2} \geq 0$
32.  $f = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \min; x_1^2 - x_2^2 = 3$   
 $f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 \Rightarrow \min$   
 $x_1 x_2 = 5$
33.  $x_1 \leq 5$   
 $x_2 \leq 6$   
 $x_{1,2} \geq 0$   
 $f = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \Rightarrow \min$
34.  $x_1 + x_2 = 25$   
 $x_{1,2} \geq 0$
35.  $f = -x_1 - 2x_2 \Rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 25, x_{1,2} \geq 0$
36.  $f = -2x_1 - x_2 \Rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 5, x_1 \leq 5, x_2 \leq 4, x_{1,2} \geq 0$   
 $f = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow \min$   
 $x_1 x_2 = 6$
37.  $x_1 \leq 4$   
 $x_2 \leq 5$   
 $x_{1,2} \geq 0$

$$f = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \Rightarrow \min$$

38.  $x_1 + x_2 = 36$   
 $x_{1,2} \geq 0$

39.  $f = 2x_1 + x_2 \Rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 4$   
 40.

$f = 2x_1 + x_2 \Rightarrow \max; x_1^2 + x_2^2 \leq 4, x_1 \leq 7, x_2 \leq 5, x_{1,2} \geq 0$

$$f = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \Rightarrow \min$$

41.  $x_1 + 0,5x_2 = 3$   
 $x_1 \leq 5$   
 $x_2 \leq 4$   
 $x_{1,2} \geq 0$

$$f = (x_1)^2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow \min$$

42.  $x_1 + x_2 + 4$   
 $x_1 \leq 6,5$   
 $x_2 \leq 6,5$   
 $x_{1,2} \geq 0$

43.  $f = -3x_1 - x_2 \Rightarrow \min; x_1^2 + x_2^2 = 9, x_{1,2} \geq 0$

44.  $f = 1x_1 - 2x_2 \Rightarrow \max; x_1^2 + x_2^2 = 2, x_1 \leq 8, x_2 \leq 6$

$$f = (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2 \Rightarrow \max$$

45.  $x_1 + x_2 = 2$   
 $x_1 \leq 3$   
 $x_2 \leq 6$   
 $x_{1,2} \geq 0$

$$f = (x_1 - 2)^2 + (x_2)^2 \Rightarrow \min$$

46.  $x_1 + x_2 = 9$   
 $x_{1,2} \geq 0$

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$$

47.  $5x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 12$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$   
 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0;$

48.  $f = 9x_1 + x_1^2 + 6x_2 + x_2^2$   
 $x_1 + x_2 = 150$

49.  $f = x^2 + y^2$   
 $x - y = -2$

50.  $f = xy$   
 $x^2 + y^2 = 1$

51.  $f = 3x_1 + x_1^2 + 5x_2 + x_2^2 \Rightarrow \min$   
 $x_1 + x_2 = 50$

52.  $f = xy + 3x^2$   
 $x + y + 1 = 0$

53.  $f = 2x + 3y$   
 $x^2 + y^2 = 1$

54.  $f = x^2 - y^2$   
 $2x - y = 3$

55.  $f = x + y + z$   
 $xyz = 1$

56.  $f = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$   
 $x + y + 3 = 0$

$$f = xy^2z^2$$

57.  $x + 2y + 3z = 12$   
 $x, y, z > 0$

58.  $f = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 - x_1 + x_2 \Rightarrow \max$   
 $x_1 - 3x_2 = 4$

## Лабораторна робота №6

### Динамічне програмування

#### Мета.

Навчитись формалізувати оптимізаційну задачу динамічного програмування і розв'язувати її.

#### Завдання.

Згідно з варіантом виконати розв'язання задачі динамічного програмування.

#### Склад звіту

Завдання, послідовність таблиць розв'язання задачі, висновки.

#### Теоретичні відомості

##### Алгоритм

1. Вся множина вершин розбивається на етапи. В перший етап включається вихідна вершина 1. В другу – вершини, в які входять дуги, що виходять з вершини 1. В третю – вершини, в які входять дуги, що виходять з вершин другої множини і т.д.
2. Етапи нумеруються від кінцевого до вихідного.
3. Починаючи з кінцевої вершини знаходиться умовно-оптимальне рішення для кожної вершини етапу: через яку вершину потрібно рухатись, щоб шлях до неї був мінімальний.

#### Приклад виконання роботи

На рис.6.1 представлений граф задачі динамічного програмування.

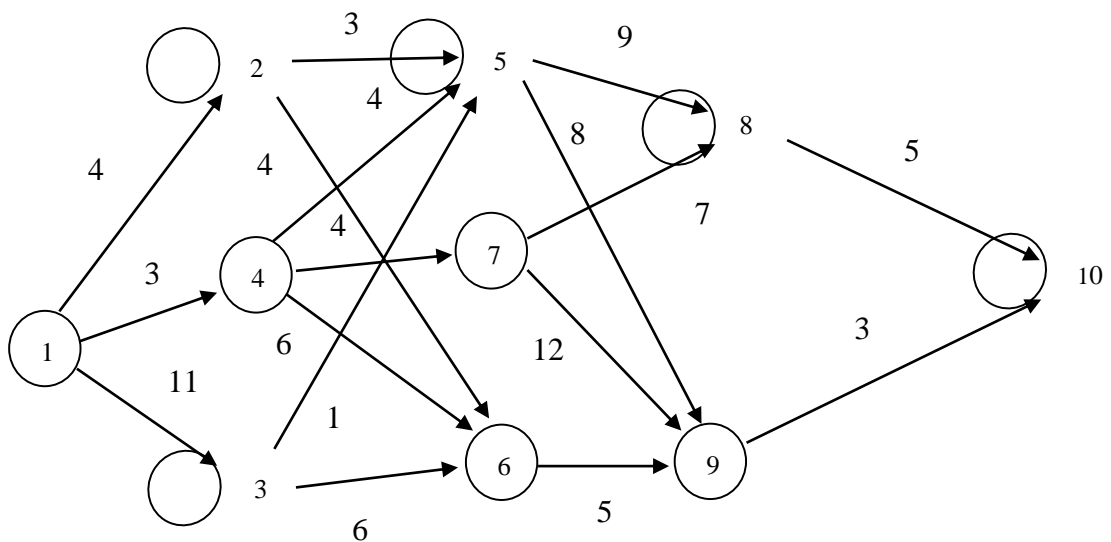


Рис. 6.1. Граф задачі динамічного програмування



Спочатку розіб'ємо вершини на сукупність етапів (табл..6.1).

Таблиця 6.1. Етапи

Етапи	Вершини		
1	1		
2	2	4	3
3	5	7	6
4	8		9
5	10		

Нехай вартість перевезення з вершини  $S$  в вершину  $J$  є вагою відповідної дуги,  $F_n(s)$  мінімальні затрати на перевезення з  $S$  в кінцеву, якщо до кінцевої  $n$  етапів;  $J_n(S)$  номер вершини, через яку потрібно рухатись на етапі  $n$ , щоб вартість була  $F_n(s)$ .

Вершина 10 є останньої. Для попереднього до неї етапу таблиця 6.2 показує пошук умовно оптимального рішення.

Таблиця 6.2. Крок 1

$S/j$	10	$F_1(s)$	$J_1(S)$
8	5+0	5	10
9	3+0	3	10

Таблиці 6.3 – 6.5 показують наступні кроки пошуку оптимізації

Таблиця 6.3. Крок 2.

$S/j$	8	9	$F_2(s)$	$J_2(S)$
5	9+5	8+3	11	9
6	–	5+3	8	9
7	7+5	12+3	12	8

Таблиця 6.4. Крок 3.

$S/j$	5	6	7	$F_3(s)$	$J_3(S)$
2	3+11	4+8	–	12	6
3	1+11	6+8	–	12	5
4	4+11	6+8	3+14	14	6

Таблиця 6.5. Крок 4.

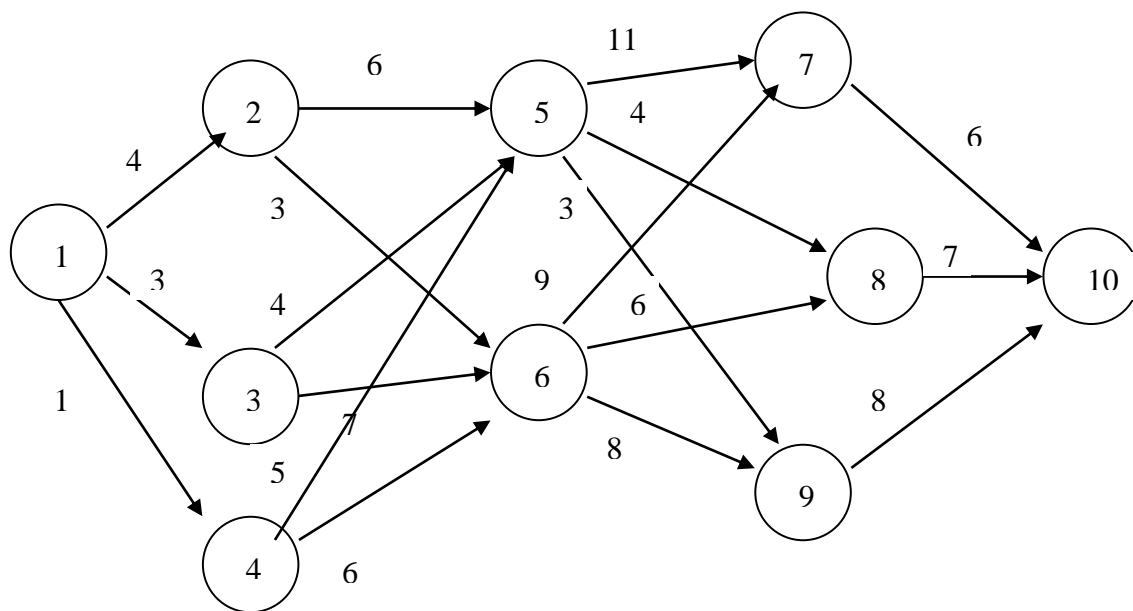
$S/j$	2	3	4	$F_3(s)$	$J_3(S)$
1	4+12	11+12	3+12	16	2

Після того, як ми дійшли до вихідної вершини, необхідно, почавши з цієї вершини побудувати маршрут до кінцевої по вершинам, які відповідають умовно-оптимальним

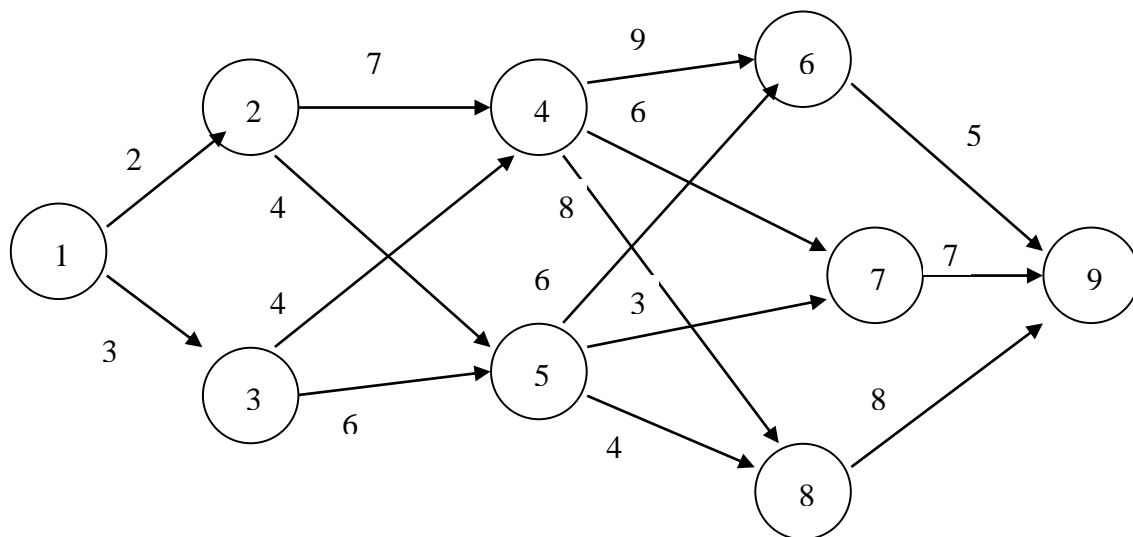
рішенням. В даному випадку це буде 1→2→6→9→10. Цей маршрут і буде відповідати мінімальній вартості, яка вже отримана як  $F_3(s)=16$ .

### Варіанти завдань

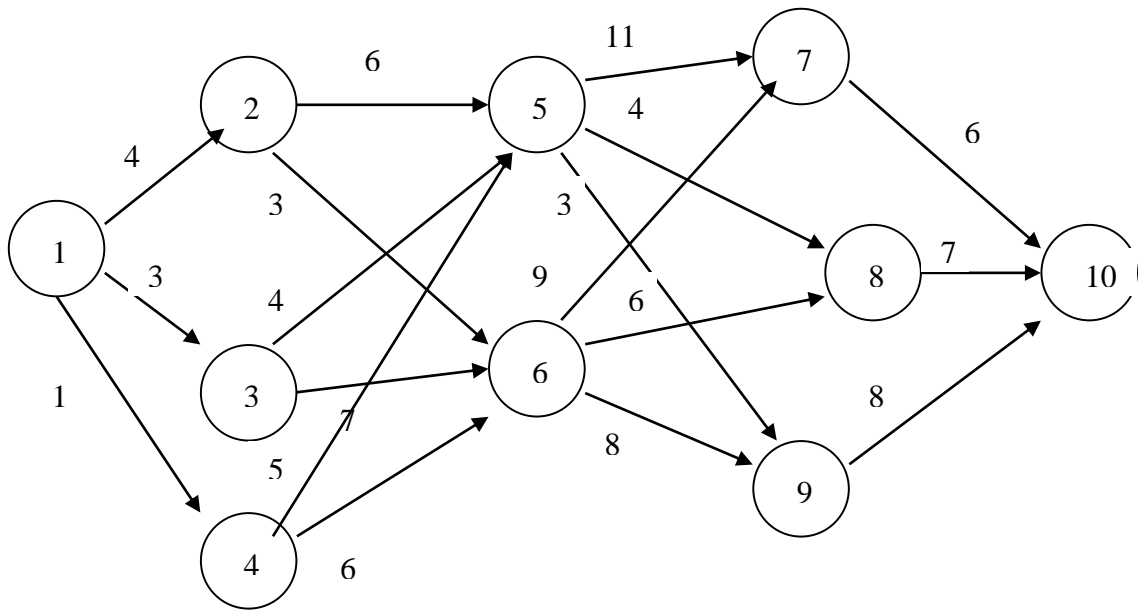
1.



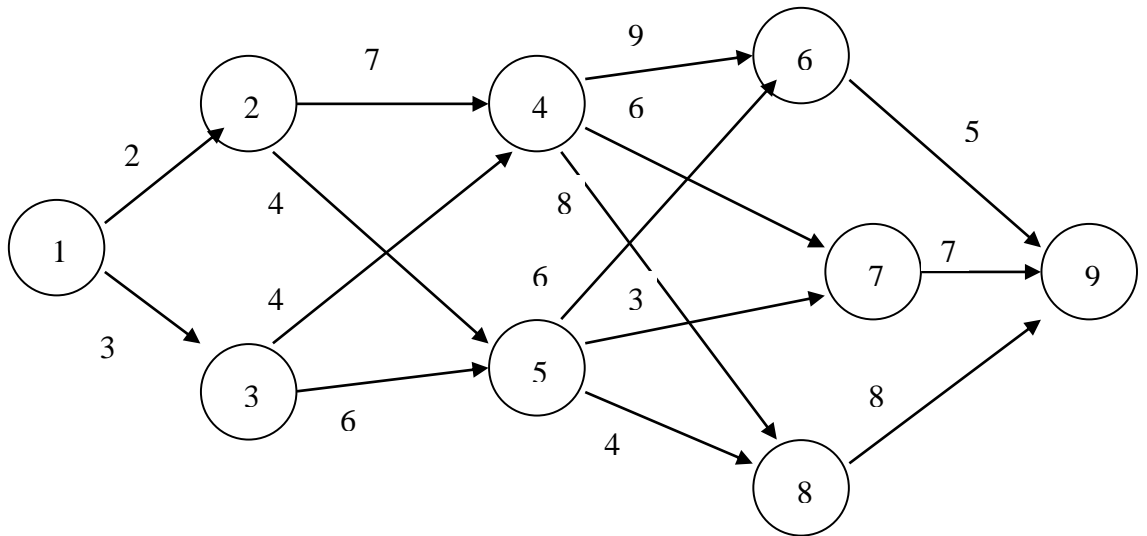
2.



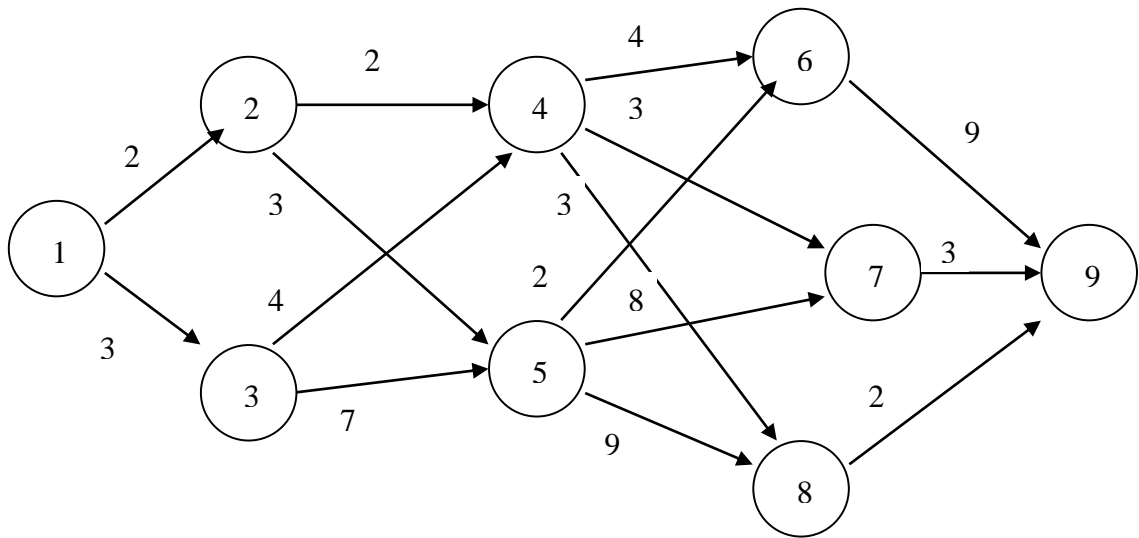
3.



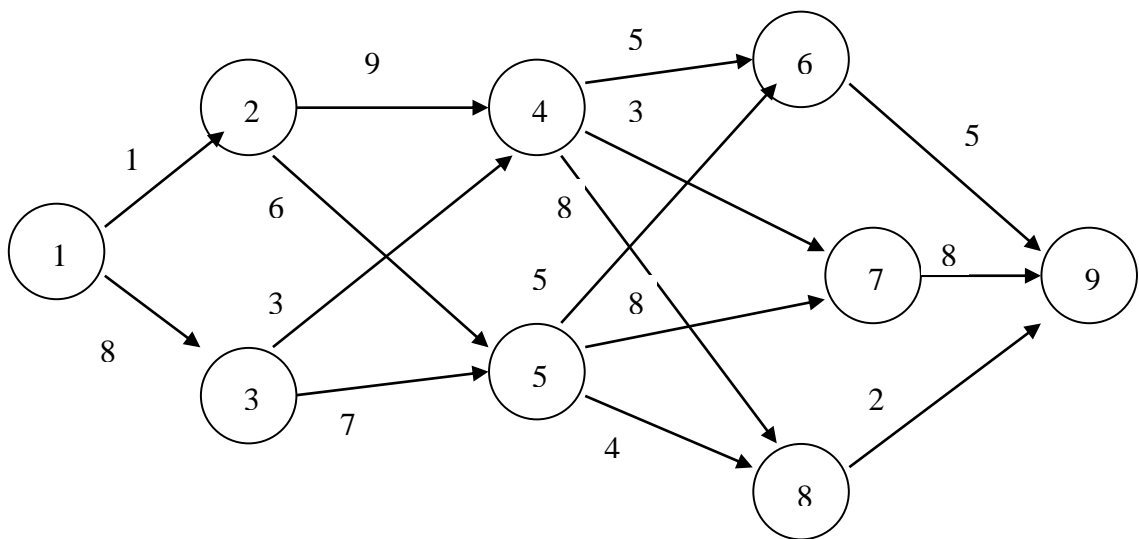
4.



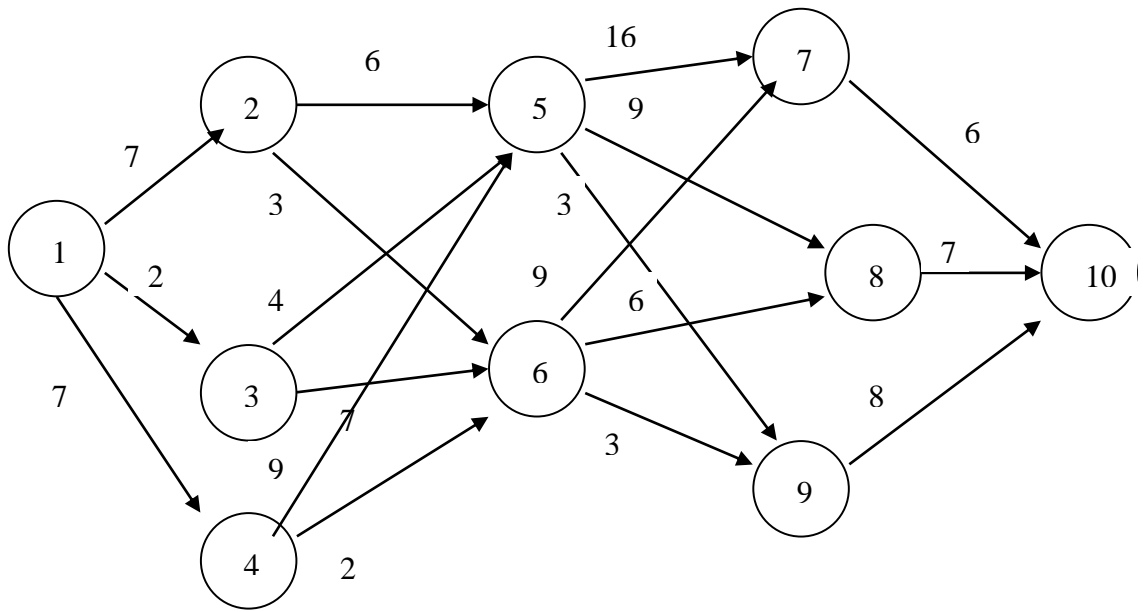
5.



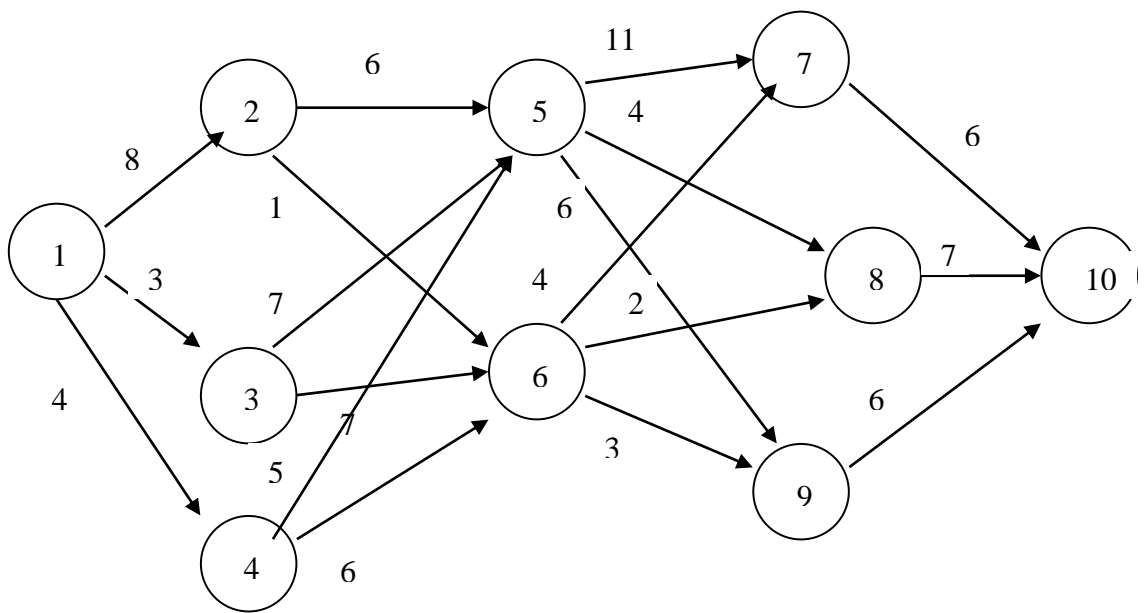
6.



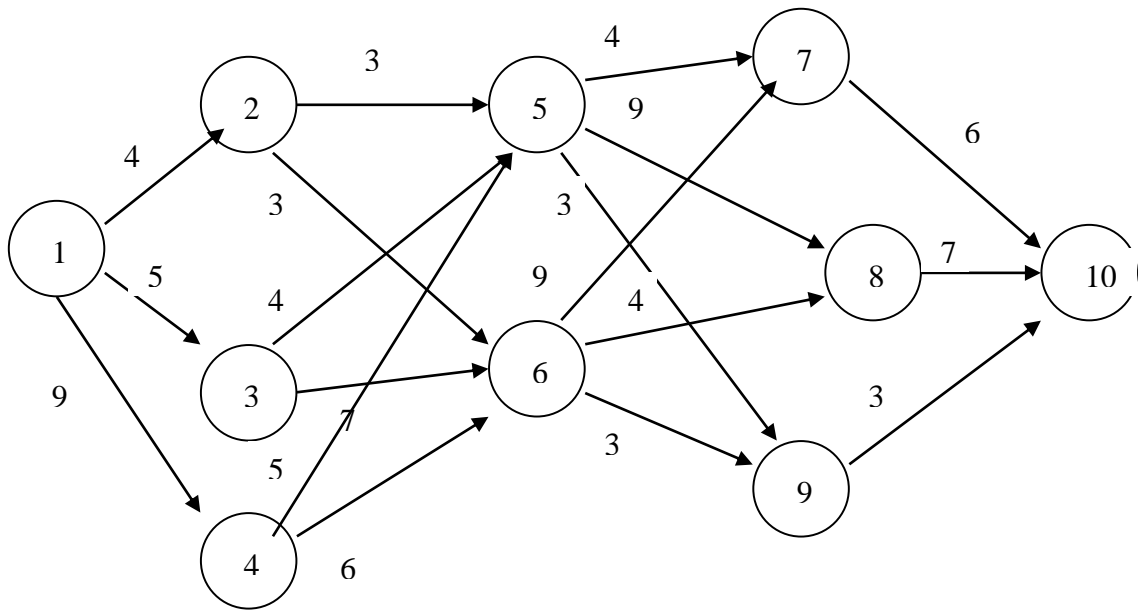
7.



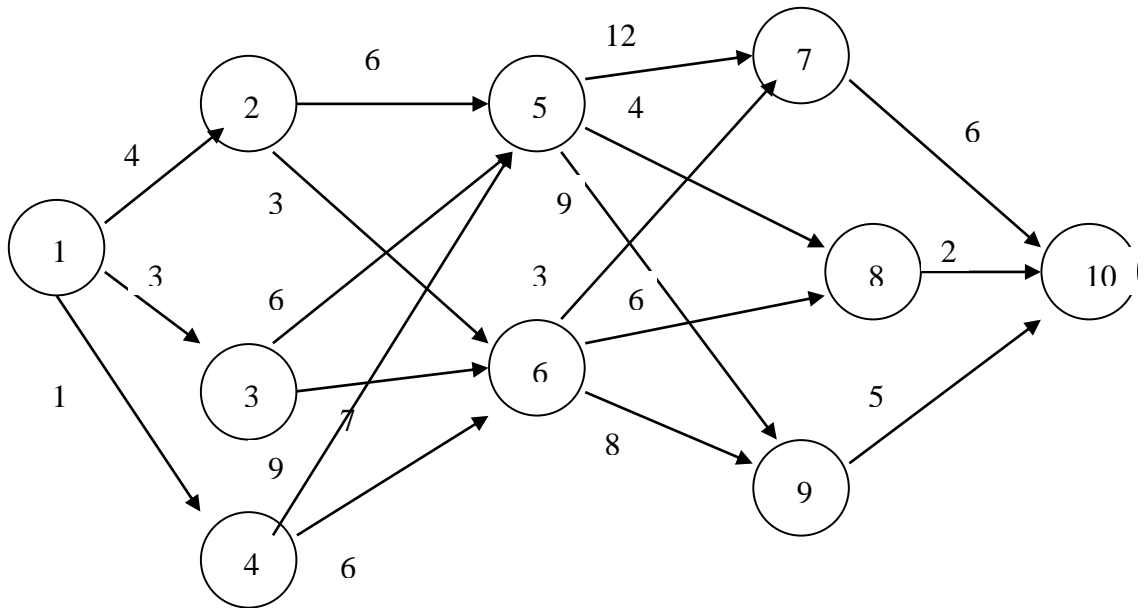
8.



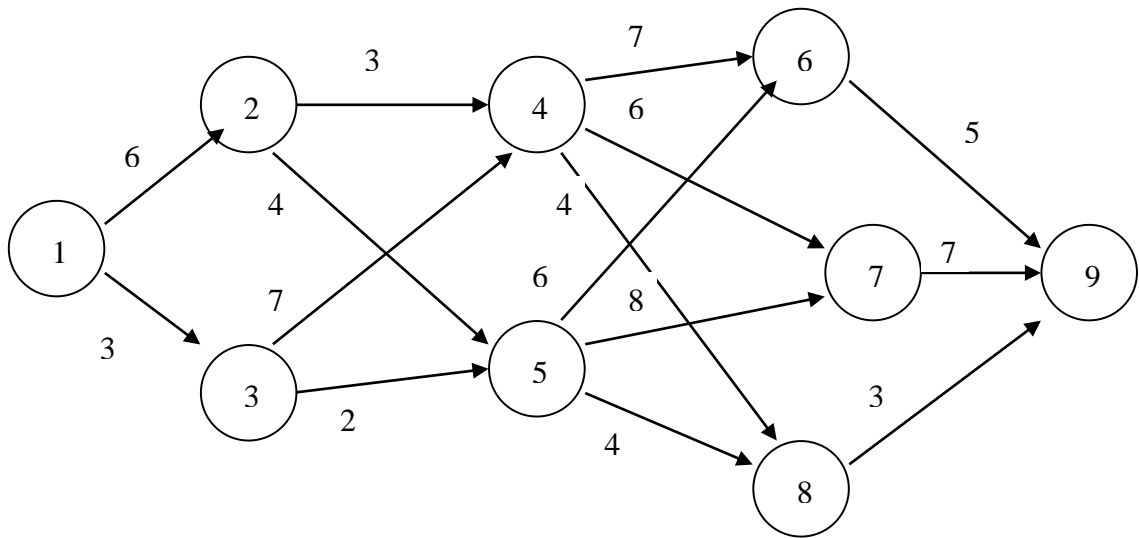
9.



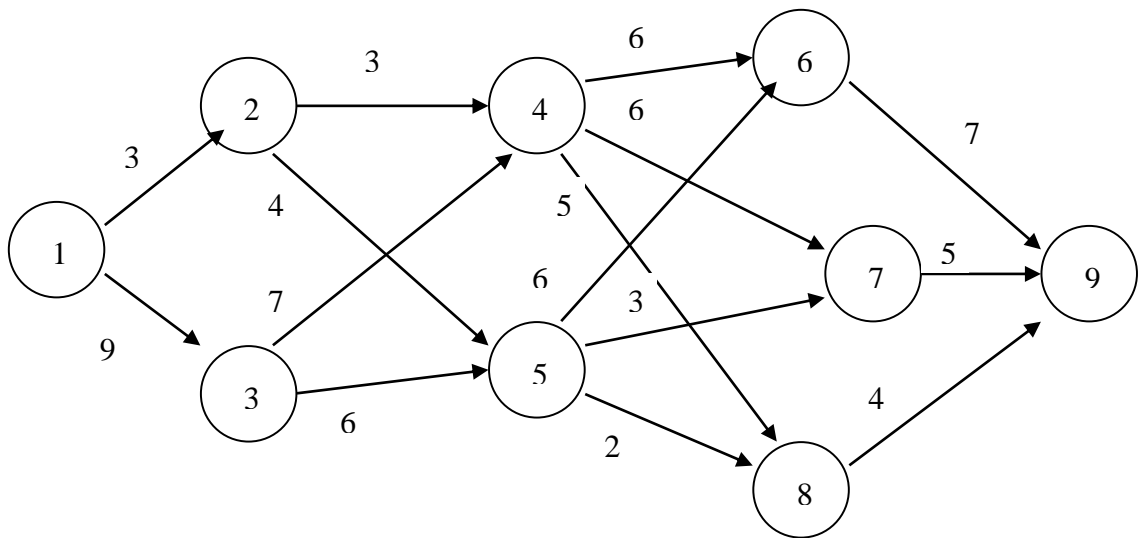
10.



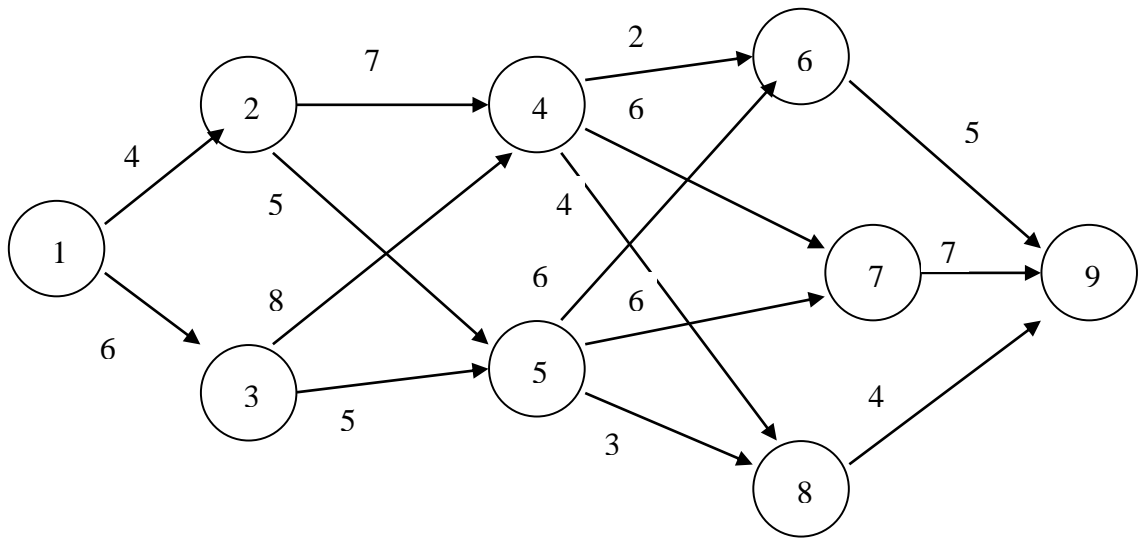
11.



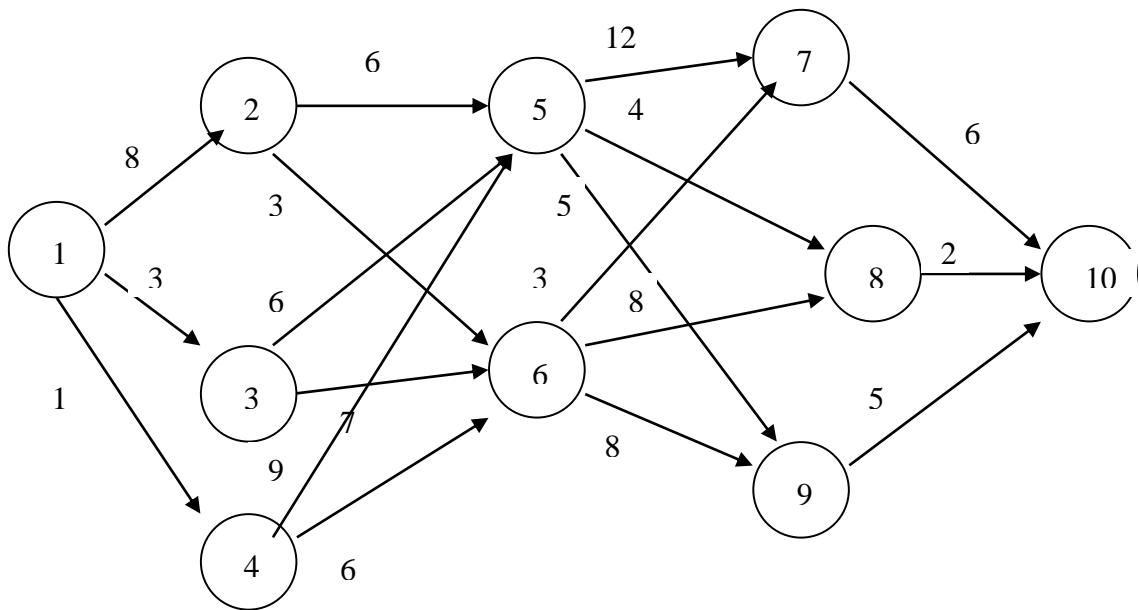
12.



13.

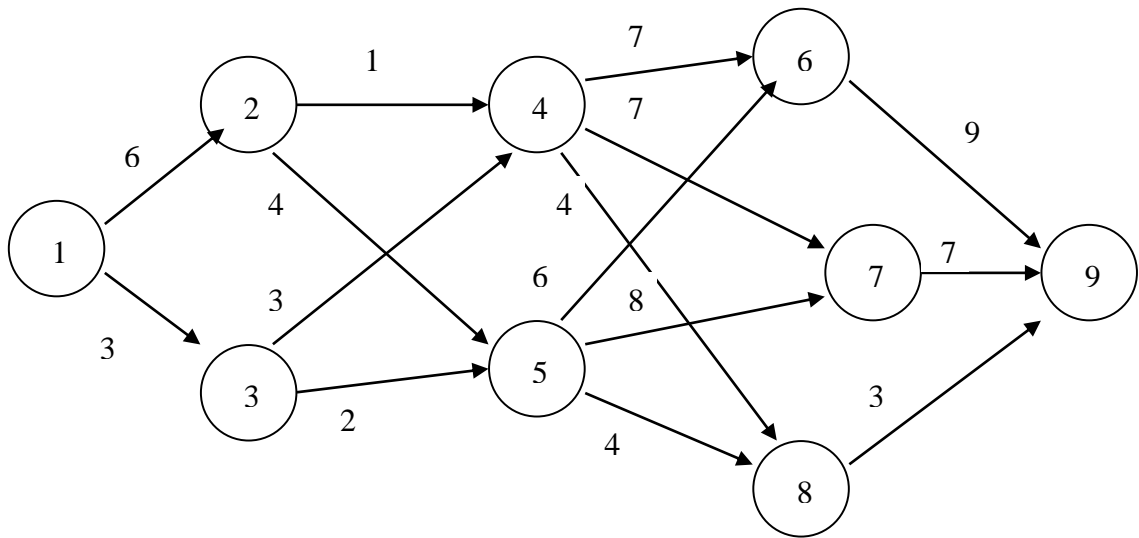


14.

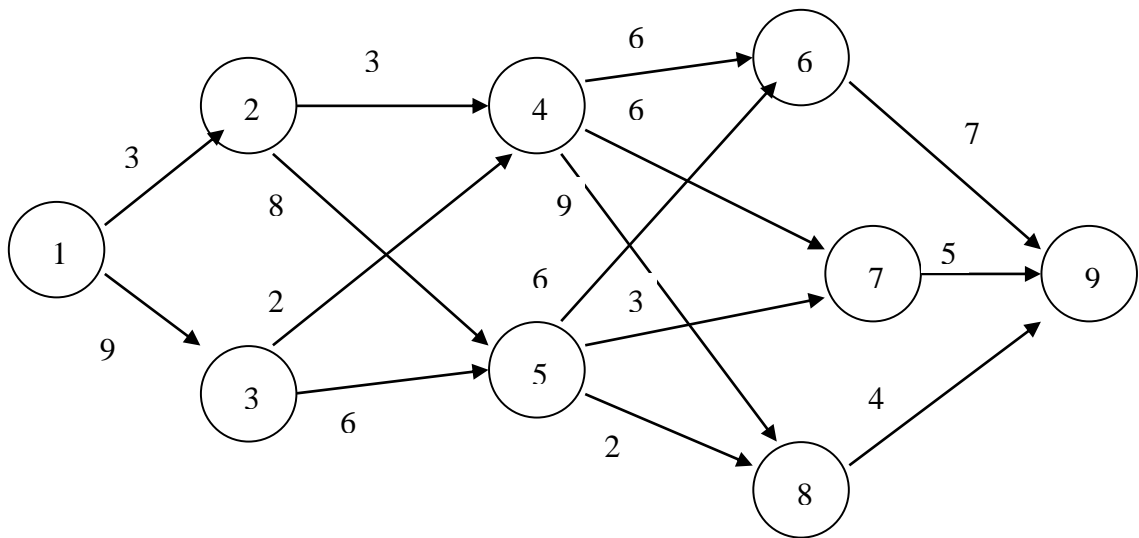




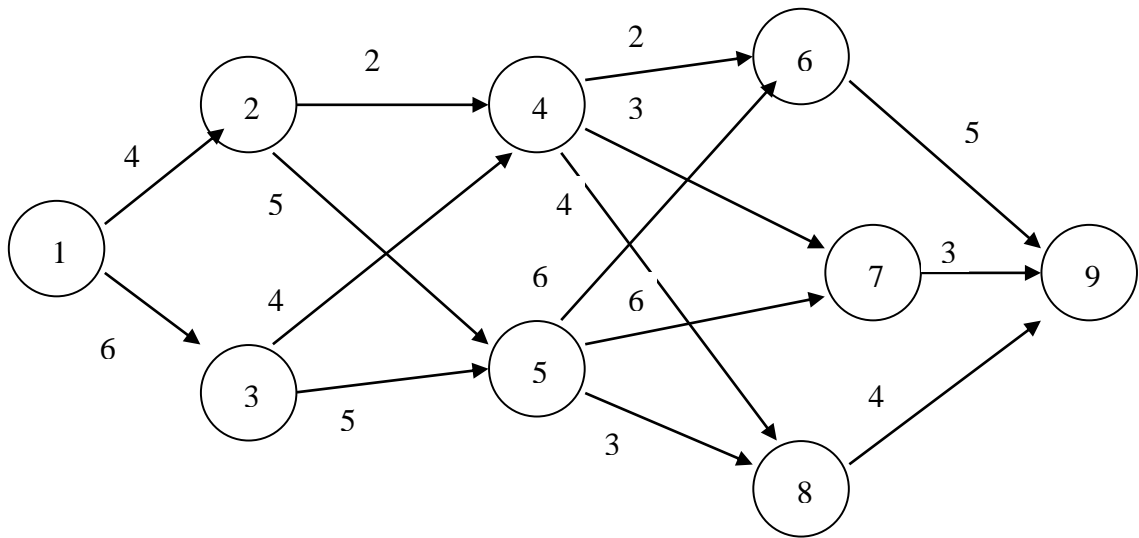
15.



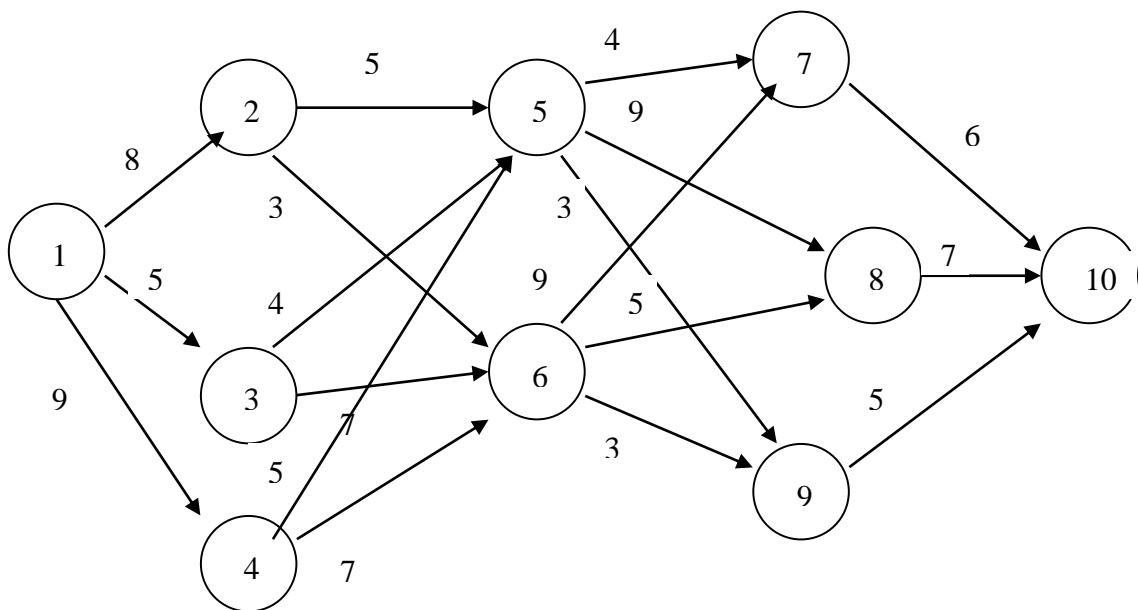
16.



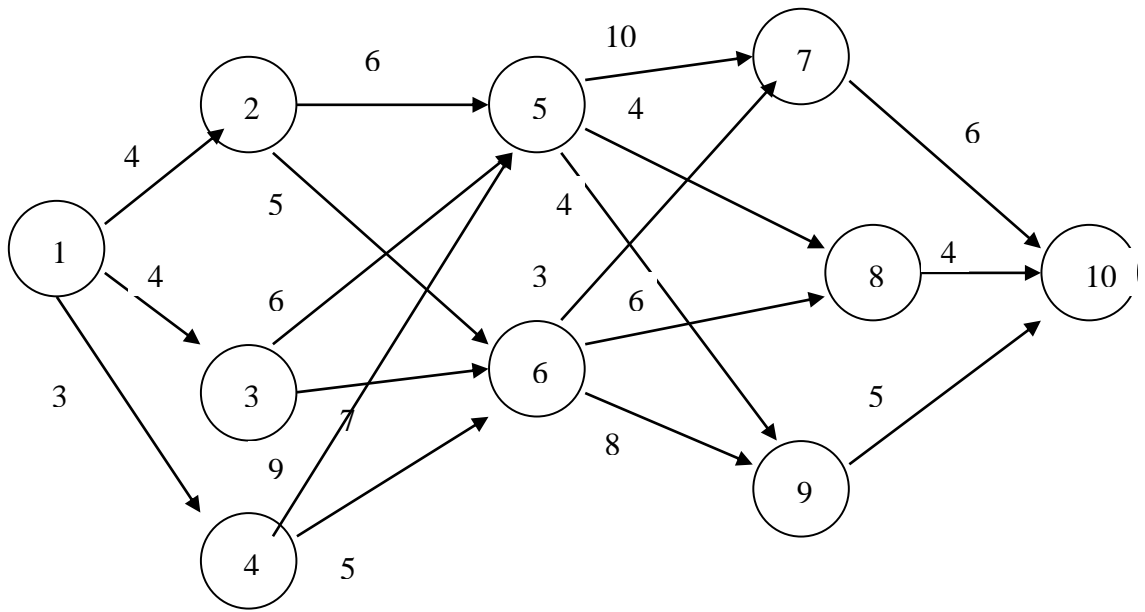
17.



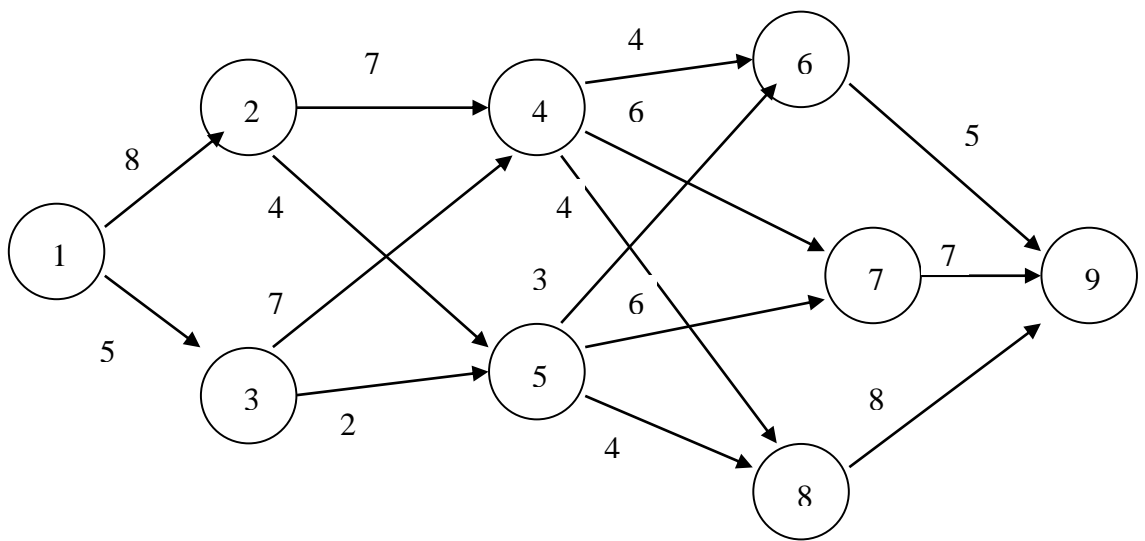
18.



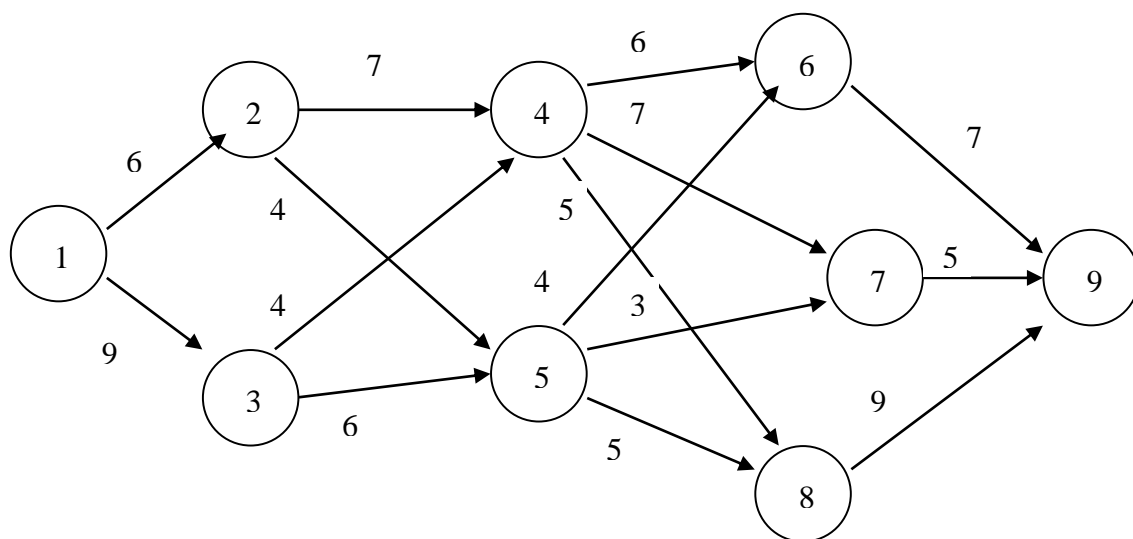
19.



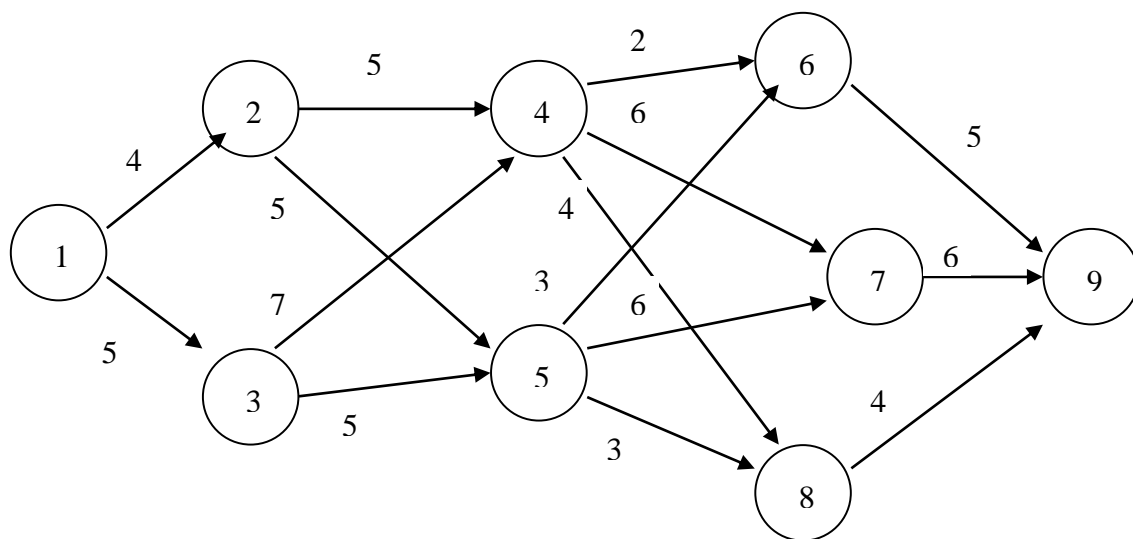
20.



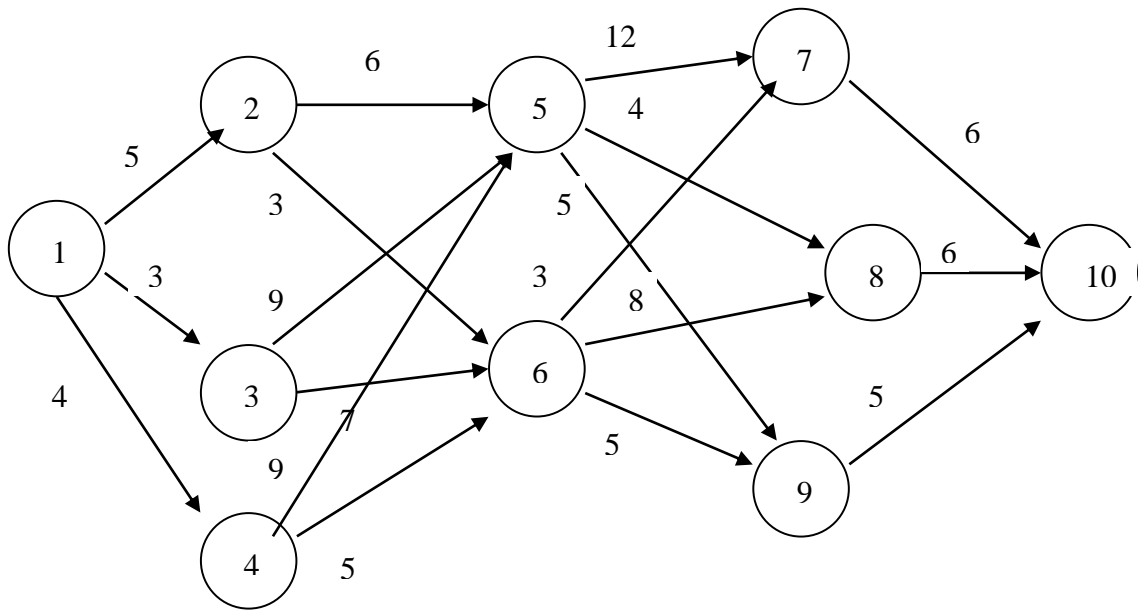
21.



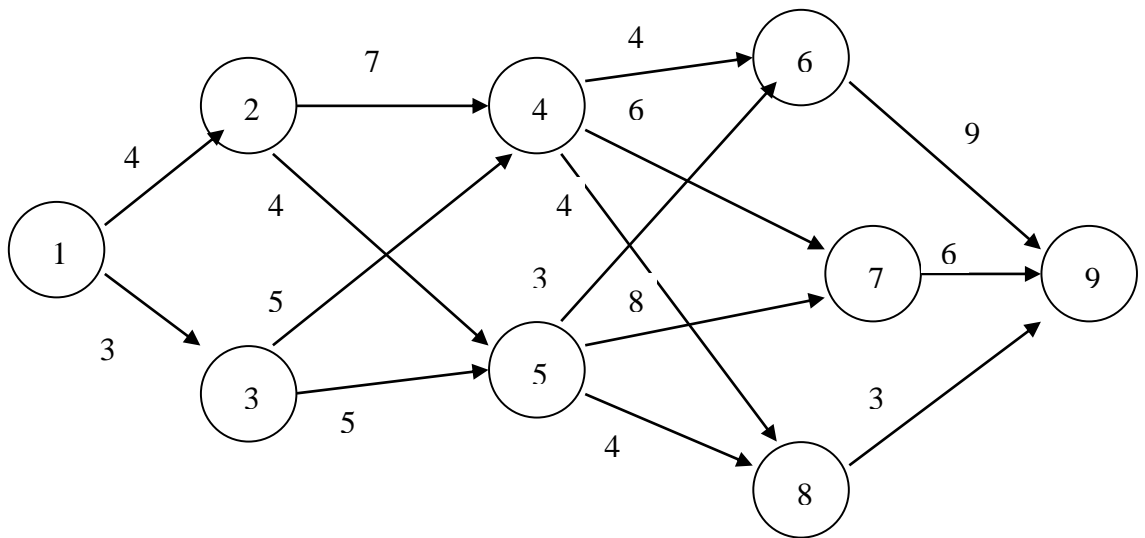
22.



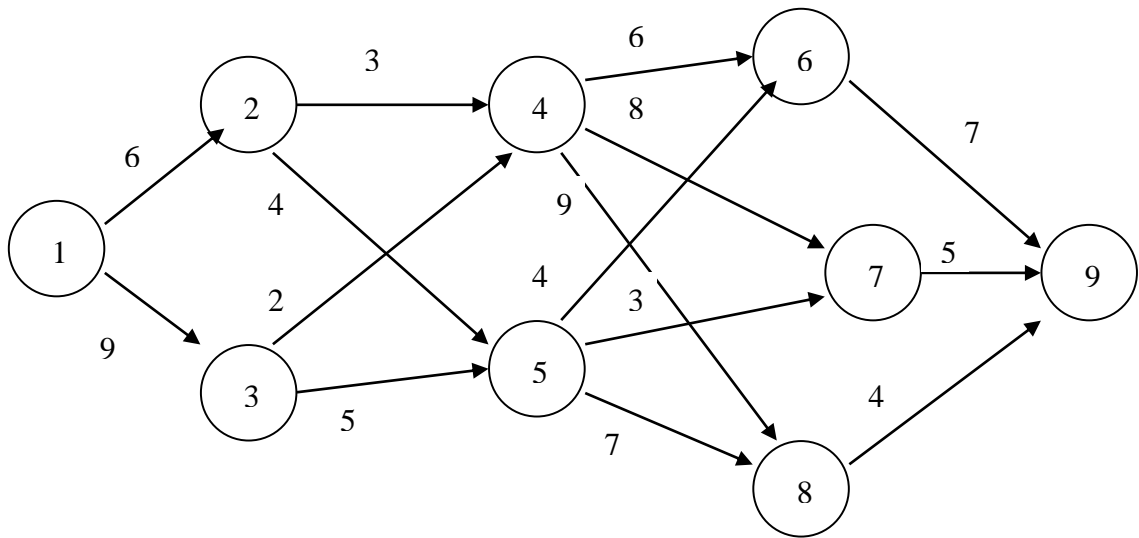
23.



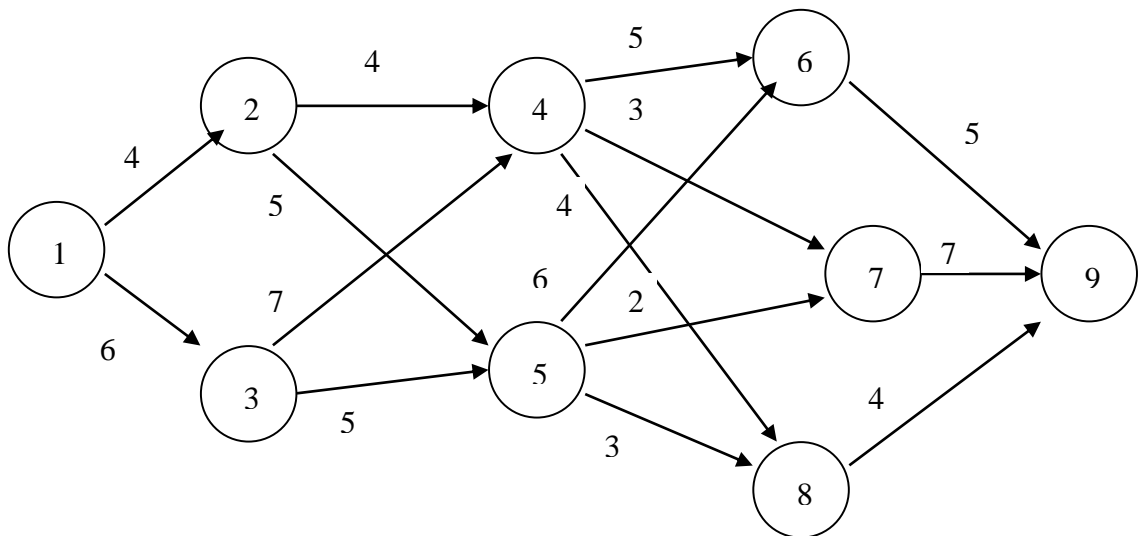
24.



25.



26.



**Контрольні питання**

1. Що таке оптимізація?
2. Способи розв'язання оптимізаційної задачі з обмеженнями.
3. Особливі випадки оптимізаційних задач.
4. Оцінка ефективності оптимізаційних методів.
5. Основні проблеми при оптимізації

6. Сформулювати задачу динамічного програмування.
7. Суть розв'язання задачі динамічного програмування.
8. Алгоритм розв'язання задачі динамічного програмування.
9. Практичний висновок щодо оптимізації багатостадійних процесів із теорії динамічного програмування.

### **Література**

1. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию –Мн.: Вышэйш. школа, 1978. –256с.

## Лабораторна робота №7

### Багатокритеріальна оптимізація

#### Мета.

Навчитись формалізувати і розв'язувати задачу багатокритеріальної оптимізації.

#### Завдання.

Вам необхідно підготувати свою задачу по багатокритеріальному вибору. В ній повинно бути не менш як 6-7 об'єктів, що порівнюються між собою по 5-6 чи більшій кількості показників. До початку роботи з програмою потрібно провести формалізацію задачі, результатом якої будуть дві таблиці. Одна з них повинна містити список всіх об'єктів, значення показників для кожного об'єкту та мету оптимізації по кожному показнику окремо, тобто яке значення даного показника вважається найкращим – мінімальне чи максимальне. Ця таблиця має наступну форму (табл. 7.1).

Таблиця 7.1.

Назви об'єктів	Критерії якості				
	Критерій 1	Критерій 2	Критерій 3	...	Критерій M
Об'єкт 1				...	
Об'єкт 2				...	
...	...	...	...	...	...
Об'єкт N				...	
Мета оптимізації по окремому критерію					

Оскільки в реальних задачах значимість окремих показників для оцінки якості об'єкту різна, то необхідно підготувати таблицю попарного порівняння, буде використана для розрахунку вагових коефіцієнтів (дивись таблицю 7.2). В кожній графі таблиці повинно бути записано значення порівняння двох критеріїв (наприклад, еквівалентно, важливіше тощо). Звертаємо вашу увагу, що ця таблиця не симетрична і порівняння потрібно проводити в напрямку, вказаному стрілкою. Це означає, що в графі, де розміщена стрілка порівнюється “Критерій 2” з “Критерієм 3”, але не навпаки. Враховуючи, використання 9 градацій (як в таблиці 5.1 вимагає певного досвіду та навиків), в лабораторній роботі використовуються тільки три градації порівняння: “А важливіше В”, “В важливіше А”, “А і В рівнозначні”.

Таблиця 7.2

Критерії якості	Критерії якості				
	Критерій 1	Критерій 2	Критерій 3	...	Критерій M
Критерій 1				...	
Критерій 2			⇒	...	
...	...	...	...	...	...
Критерій M				...	



Розв'язати задачу методом введення метрики в простір критеріїв за допомогою спеціального макросу.

### Склад звіту.

Завдання, підготовлені вихідні дані для багатокритеріального вибору з їх описом, результати оптимізації.

### Приклад виконання роботи.

Всі розрахунки виконуються в табличному редакторі Excel за допомогою спеціально розроблених макросів. Тому перед початком роботи необхідно завантажити файл (OW.XLS), в якому є необхідні модулі багатокритеріального вибору.

Спочатку необхідно розрахувати вагові коефіцієнти за допомогою методу попарного порівняння. Для цього потрібно послідовно вибрати пункти меню «Сервис», «Макрос», «Макросы». В вікні, що з'явилося після цього необхідно вибрати макрос Ch\_Weight. Потім з'являється вікно (рис. 7.1).

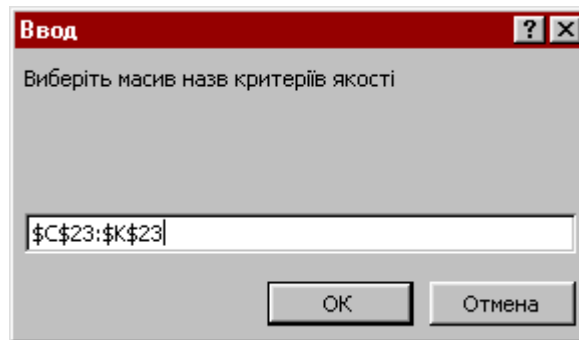


Рис. 7.1 Запит назв критеріїв

Вам необхідно відмітити поля, в яких ви внесли назви критеріїв. Після цього з'являється вікно приведенне на рис.7.2, в якому ви повинні вказати комірку, з якої почнеться виведення результату.

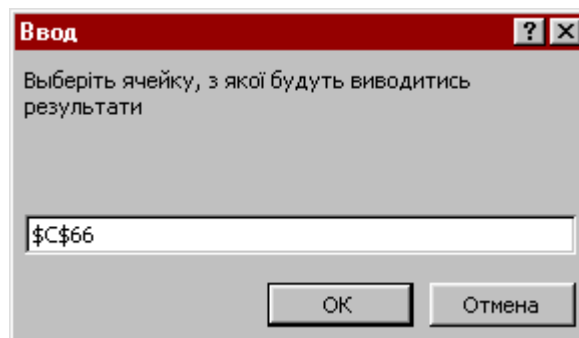


Рис. 7.2 Запит місця виводу результату

Після цього макрос буде запитувати для кожної можливої комбінації пар критеріїв буде запитувати відносно їх взаємної значущості (рис. 7.3).

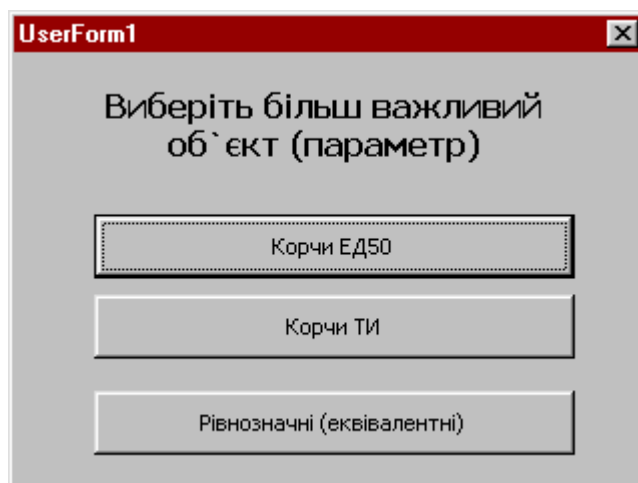


Рис. 7.3 Запит про взаємну значущість

Як відповідь ви мусите вибрати той з критеріїв, який на вашу думку більш важливий, або “Рівнозначні”. Після отримання всіх відповідей макрос видає таблицю вагових коефіцієнтів (табл. 7.3)

Таблиці 7.3. Результати роботи макросу попарного порівняння

Результати ранжування об'єктів методом попарного порівняння

Об'єкти	Вагові коефіцієнти
Корчи ЕД50	0,102777778
Корчи ТИ	0,1
Гор. пл.ЕД50	0,105555556
Гор. пл. ТИ	0,108333333
ПВА ЕД50	0,111111111
ПВА ТИ	0,113888889
Заболєванія	0,116666667
Противопоказанія	0,119444444
Побочные эффекты	0,122222222

Після цього в табличному редакторі Excel необхідно підготувати дані. Приклад підготовки даних приведено на рис. 7.4

A	B	C	D	E	F	G	H
Цели	min	max	min	max	min	max	max
Веса	0,22	0,24	0,22	0,24	0,14	0,15	0,17
Критерии	Анальгезирующая активность		Гор. пл.		Противовоспалительная активнос		
Препарат	Корчи ЕД50	Корчи ТИ	Гор. пл.ЕД50	Гор. пл. ТИ	ПВА ЕД50	ПВА ТИ	Заболєванія
Амизон	14	159	24	93	10	223	5
Аспирин	155	10	480	3	98	16	4
Анальгин	55	60	93	35	90	90	5
Диклофен	5	74	98	3,78	8	46,25	4
Индомета	11	4,27	40	1,18	10	4,7	4
Ибупрофе	170	4,41	370	2	48	15,63	4
Кетопрофе	180	5,11	550	1,67	33	27,88	2
Напроксен	63	9,84	310	2	15	41,33	4
Пироксика	92	3,15	145	2	20	14,5	4

Рис. 7.4 Приклад підготовки вихідних даних

Потім потрібно запустити макрос. Для цього потрібно послідовно вибрати пункти меню «Сервис», «Макрос», «Макросы». В вікні, що з'явилося після цього необхідно вибрати макрос OptObjCh.

Після запуску макросу необхідно відповідати та вводити інформацію через відповідні діалогові вікна.

Спочатку необхідно відмітити той масив комірок, в якому для кожного критерію задається окрема ціль оптимізації, тобто min, або max (рис.7.5).

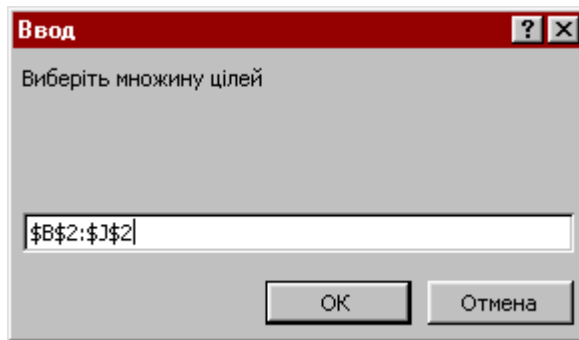


Рисунок 7.5. Запит на введення цілей

Потім вводиться посилання на масив вагових коефіцієнтів, що були попередньо розраховані (рис. 7.6).

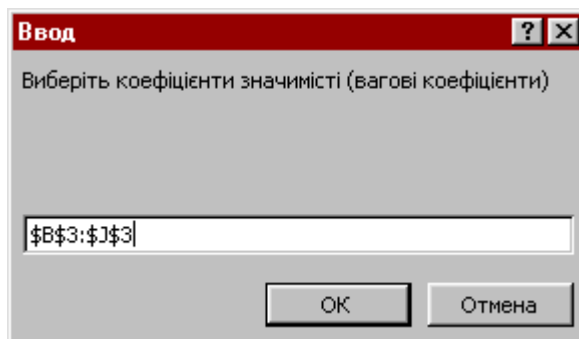


Рисунок 7.6. Запит на введення вагових коефіцієнтів

Далі вводяться посилання на масиви назв критеріїв якості і масив назв об'єктів (рис. 7.7 та 7.8 відповідно).

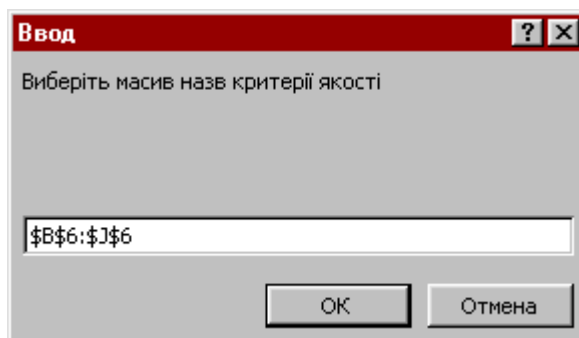


Рисунок 7.7. Введення назв критеріїв якості

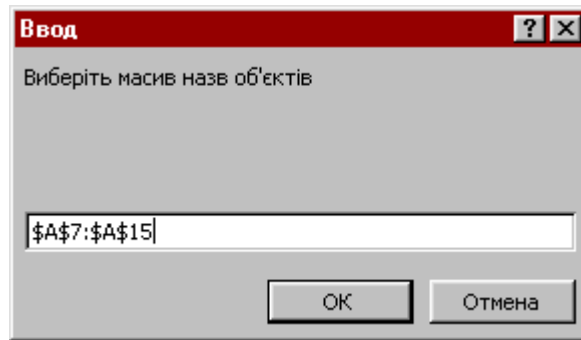


Рисунок 7.8. Введення назв об'єктів

Після цього вводиться посилання на таблицю, яка містить вихідні дані для оптимізації (рис. 7.9).

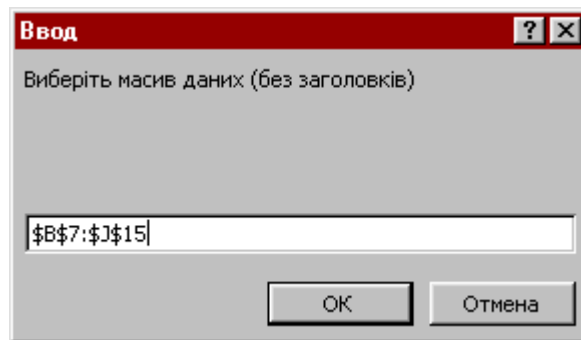


Рисунок 7.9. Введення масиву даних

Останнім вводиться посилання на місце таблиці, починаючи з якого буде виводитися результат (рис. 7.10).

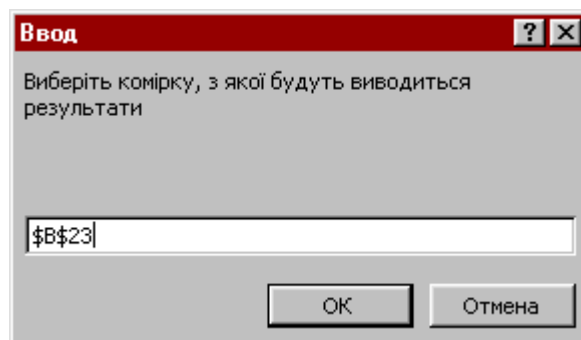


Рисунок 7.10. Запит на місце виведення результату

Даний макрос виконує ще дві операції, тому після вказаного запиту він пропонує обчислити резерв оптимізації (рис. 7.11). Після цього з'являється запит про проведення порівняння двох об'єктів (рис. 7.12). При ствердній відповіді необхідно буде ввести посилання на імена об'єктів, які ви хочете порівнювати (рис. 7.13 та 7.14).

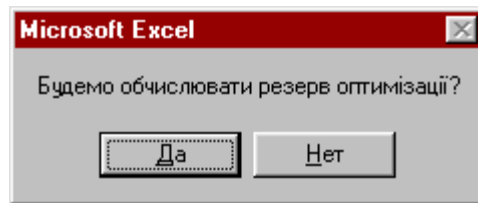


Рисунок 7.11. Запит на необхідність обчислення резерву оптимізації

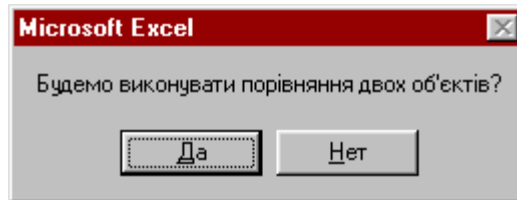


Рисунок 7.12. на необхідність обчислення резерву оптимізації

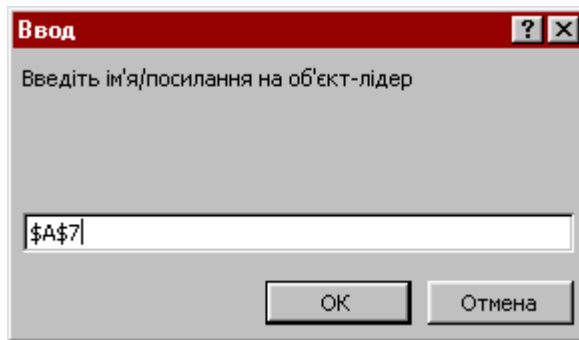


Рисунок 7.13. Запит першого об'єкту для порівняння

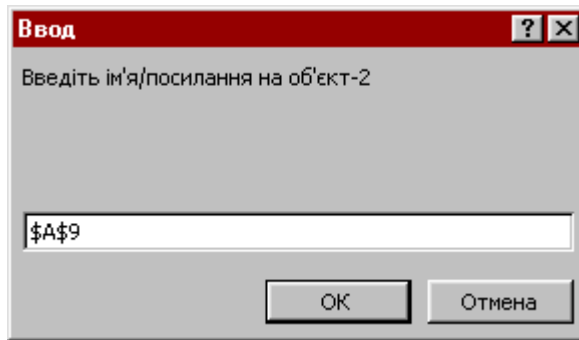


Рисунок 7.14. Запит другого об'єкту для порівняння

Результат роботи макросу по ранжуванню об'єктів приведено в таблиці 7.4.

Таблиця 7.4 Результати ранжування об'єктів (фрагмент)

Результати пошуку оптимального об'єкту					
Критерії	Корчи ЕД50	Корчи ТИ	Гор. пл.ЕД50	Гор. пл. ТИ	ПВА ЕД50
Цілі	min	max	Min	max	min
Вагові коефіцієнти	0,121546961	0,132596685	0,121547	0,132597	0,077348
Об'єкти	Ефективність				
Амизон	0,981034877				
Анальгин	0,500002505				

Диклофенак	0,371265974				
Напроксен	0,255908445				
Пироксикан	0,244281493				
Индометацин	0,228983909				
Аспирин	0,196092261				
Ибупрофен	0,145059271				
Кетопрофен	0,136702912				

Якщо ви відповіли ствердно на запитання про резерв оптимізації, то буде отримана таблиця виду 7.5. Для кожного об'єкту для кожного критерію вказане можливе збільшення його рейтингу, якщо даний критерій довести до оптимального значення.

Таблиця 7.5 Результати обчислення резерву оптимізації (фрагмент).

Доля резерву оптимізації по критеріям				
Критерій	Вагові коефіцієнти	Амизон	Аспирин	Анальгин
Корчи ЕД50	0,121546961	0,017544421	0,11079	0,019041
Корчи ТИ	0,132596685	0	0,152496	0,107762
Гор. пл.ЕД50	0,121546961	0	0,113432	0,003982
Гор. пл. ТИ	0,132596685	0	0,160742	0,106483
ПВА ЕД50	0,077348066	0,001420702	0,095471	0,131021
ПВА ТИ	0,082872928	0	0,091864	0,06036
Заболевания	0,093922652	0	0,012534	0
Противопоказания	0,116022099	0	0,008699	0,056804
Побочные эффекты	0,121546961	0	0,057878	0,014544

Якщо ви відповіли ствердно на запит про порівняння двох об'єктів, то отримаєте результат порівняння як таблицю виду 7.6. В ній для кожного критерію вказане відставання в мірі рейтингу (комплексного критерію).

Таблиця 7.6 Порівняння двох об'єктів

Критерій	Доля відставання
Корчи ЕД50	0,013171589
Корчи ТИ	0,105631118
Гор. пл.ЕД50	0,00412927
Гор. пл. ТИ	0,10445194
ПВА ЕД50	0,120655424
ПВА ТИ	0,06073107
Заболевания	0
Противопоказания	0,057264196
Побочные эффекты	0,014997765

Після закінчення цього етапу роботи можливе моделювання параметрів з метою визначення можливості підвищення рейтингу об'єкту та затрат, необхідних для цього.

### Контрольні питання

1. Існуючі підходи до проблеми багатокритеріальної оптимізації.

2. Метод лінійної згортки критеріїв.
3. Суть методу введення метрики в простір критеріїв.
4. Чому неефективне завдання вагових коефіцієнтів експертом?
5. Суть методу попарних порівнянь.

#### **Література**

1. С.Н. Лапач, А.В. Чубенко, П.Н. Бабиш Статистика в науке и бизнесе –К.: 2002, Морион. – 640с.

## Лабораторна робота №8

### Стохастичний автомат (Марковські ланцюги)

**Мета:** Вивчення ланцюгів Маркова та поглинаючих ланцюгів і способів їх розрахунку.

**Завдання:** за вибраним варіантом розрахувати стан марківського ланцюга через два періоди і в його ергодичний стан. Для поглинаючого ланцюга розрахувати його параметри.

**Склад звіту:** завдання, граф ймовірностей переходів, опис результатів моделювання ланцюгів.

### Теоретичні відомості

Автомат є математичною моделлю деякого пристрою чи системи дискретної дії. Така система деяку кількість вхідних та вихідних каналів і множину внутрішніх станів. Від вхідного сигналу змінюється стан системи та вихідний сигнал. Найбільш часто розглядаються скінчені автомати, в яких ці три множини скінчені.

Автомат розглядається як п'ятірка

$$\{A, X, Y, \delta, \lambda\} \quad (2.1)$$

де  $A$  – скінчена множина внутрішніх станів,  $X$  – скінчена множина вхідних сигналів,  $Y$  – скінчена множина вихідних сигналів;  $\delta: A \times X \rightarrow A$  – однозначна функція переходів (із стану в стан),  $\lambda: A \times X \rightarrow Y$  – однозначна функція виходів.

При невеликій кількості станів автомат часто описують за допомогою діаграми станів автомату (графу станів). Це напрямлений граф, вершини якого відповідають станам, а ребра сигналам, що з'єднують стани; назва ребра є назвою (кодом) сигналу; воно напрямлене від стану, в якому система знаходилася, до стану, в який система перейде під впливом даного сигналу.

На рис. 8.1 зображено автомат, який виконує додавання в двійковій системі числення.

$Q_0$  – стан, в якому немає переносів.

$Q_1$  – стан, в якому виконано додавання одиниці, яка попередньо запам'яталася.

$Q_2$  – стан, в якому виконано два переносу одночасно.

$Q_3$  – стан, в якому запам'яталася одиниця для переносу в старший розряд.

$Q_0$  та  $Q_1$  є кінцевими станами, а  $Q_2$  та  $Q_3$  – проміжними.

Якщо станів багато, то для опису автомату використовують таблиці. Елемент таблиці  $A_{ij}$  містить рядок  $x:y$ , де  $x$  – код сигналу, що переводить систему зі стану  $i$  в стан  $j$ , а  $y$  – вихідний сигнал.



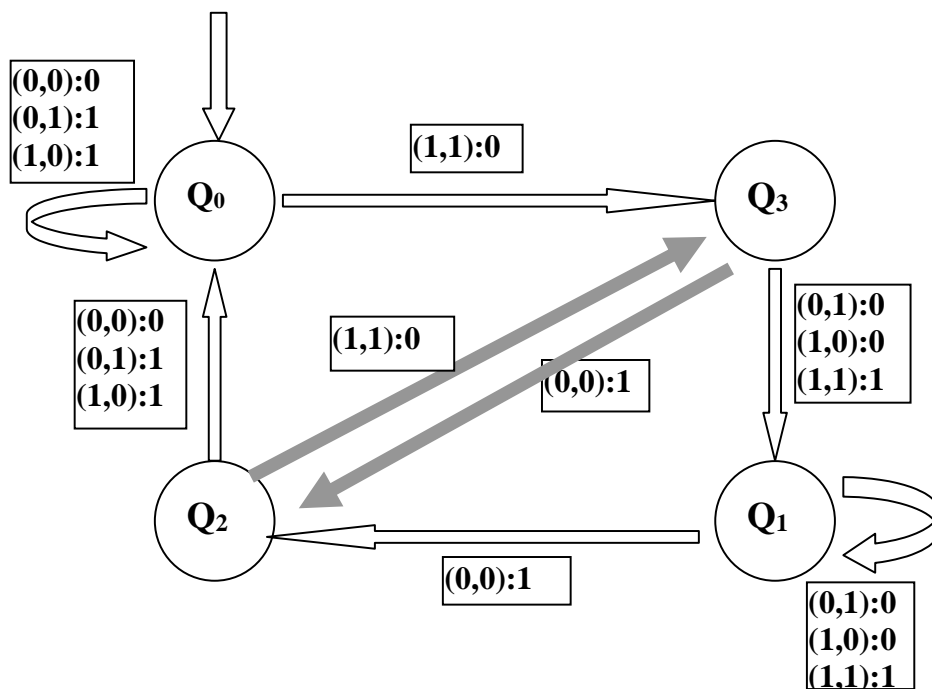


Рис. 8.1 Приклад. Суматор двійкових чисел

Досить широко зустрічаються такі різновиди автомату, у яких перехід із одного стану в інший виконується не детерміновано, а з певною ймовірністю. Такі автомати називаються стохастичними, тому що з зміною стану змінюється розподіл ймовірностей переходів.

**Стохастичний автомат** — це такий процес або об’єкт, який має обмежену кількість станів, в яких він може знаходитись і задані ймовірності переходів з кожного стану в будь-який інший.

Теоретичною базою стохастичного автомату є теорія марківських процесів. Не всі види марківських процесів є стохастичними автоматами. **Марківськими** називаються такі випадкові процеси в довільній системі для яких в будь який момент часу ймовірність переходу системи в інші стани не залежить від того, як система прийшла в даний стан, а залежить тільки від теперішнього стану системи.

Розрізняють наступні види марківських процесів:

- З дискретними станами та дискретним часом (ланцюг Маркова);
- З неперервними станами та дискретним часом (марківські послідовності);
- З дискретними станами та неперервним часом (неперервні ланцюги Маркова);
- З неперервним часом та неперервними станами.

Як стохастичний автомат розглядаються тільки процеси з дискретними станами. Стохастичним автоматом моделюється багато різноманітних процесів: процес загибелі та

розмноження в біологічних системах, вибір покупцем товару в маркетингових дослідженнях тощо. В технічних задачах найбільш часто за допомогою стохастичного автомата моделюють технічний стан різних пристроїв. На рис. 8.2 показано приклад такої моделі, що описує літальний апарат (спрощено з [4]). Тут Г – стан готовності до польоту, КР – капітальний ремонт; С – списання; Р – ремонт; РР – регламентні роботи.

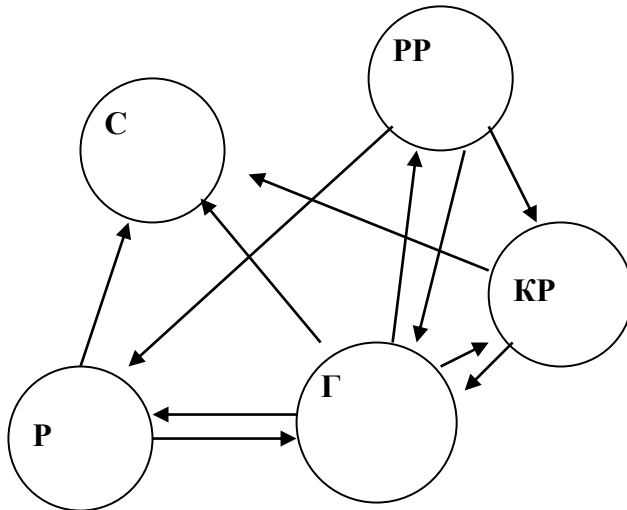


Рис. 8.2 Граф станів літального апарату

### Визначення станів

Нехай  $X$  є підмножина простору станів автомату  $S$ , а  $X'$  – його доповнення до  $S$ .

#### Ергодичні стани.

Якщо кожного стану підмножини  $X$  можна досягти з будь-якого іншого стану цієї підмножини, і ні з якого стану підмножини  $X$  неможливо перейти ні в один зі станів  $X'$ , то  $X$  називається ергодичною множиною станів. Кожен зі станів цієї множини називається *ергодичним станом*.

Якщо процес попав в ергодичну множину станів, то він не може його покинути.

#### Нестійкі стани.

Якщо будь-який стан множини  $X$  досягається із будь-якого стану  $X$  і при цьому можливий перехід хоча б із одного стану  $X$  в стан із  $X'$ , то така множина станів називається нестійкою. Кожен її стан в свою чергу називається *нестійким*.

#### Поглинаючі стани.

Якщо поглинаюча множина складається з одного стану, та такий стан називається поглинаючим. Якщо процес попадає в такий стан, то він залишається в ньому.

Для поглинаючого стану ймовірність переходу в цей же стан  $p_{ii}=1$ , а  $p_{ij}=0 \forall i \neq j$ .

Будь-який марківський ланцюг повинен мати хоча б один ергодичний стан. Нестійких станів взагалі може не бути.

Якщо перехід з одного стану в інший в ергодичній підмножині відбувається через регулярну кількість кроків, то це циклічна ергодична множина.

### Класифікація ланцюгів.

1. Поглинаючі ланцюги Маркова. Це такі ланцюги, в яких стійкі стани є поглинаючими.
2. Ергодичні ланцюги. Це такий ланцюг, який складається з одного ергодичної множини. Розділяються на **циклічні**, в яких процес приходиться в кожен стан через певні інтервали і **регулярні** – неперіодичні ергодичні ланцюги.

Наприклад, автомат описується наступною матрицею переходів:

$$P = \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Тут є дві групи ергодичних станів: в першу входять стани  $s_2$  та  $s_3$ , а в другу –  $s_4$ .

При цьому  $s_4$  є поглинаючим станом.

Простий однорідний ланцюг Маркова визначається вектором ймовірностей станів у початковий момент

$$p = \{p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_{m-1} \quad p_m\} \quad (8.2)$$

і матрицею ймовірностей переходу.

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} & p_{m0} \\ p_{10} & p_{11} & p_{1m} \\ p_{m1} & p_{m2} & p_{mm} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

При цьому для кожного рядка матриці виконується умова

$$\sum_{i=0}^m p_{ki} = 1, \forall k \in \{1..m\} \quad (8.4)$$

Такий ланцюг має наступні властивості:

**Простий** – закон розподілу (рядок матриці) залежить тільки від стану, в якому система знаходиться.

**Однорідний** – якщо ймовірності переходу на певному інтервалі залежать тільки від довжини інтервалу, а не від точки відліку.

$$P(t_i) = P(t_0)P^i(t) \quad (8.5)$$

**Ергодичний** - з кожного стану можна потрапити в будь-який інший.

Для ергодичного ланцюга існує граничний стан, в якому всі рядки матриці однакові.

Для визначення граничного стану розв'язується система рівнянь наступного виду (система рівнянь Колмогорова):

$$\left. \begin{aligned} P_{01}P_{00} + P_{02}P_{20} + \dots + P_{0m}P_{m0} &= P_{01} \\ P_{01}P_{10} + P_{02}P_{11} + \dots + P_{0m}P_{m1} &= P_{02} \\ \dots & \\ P_{01} + P_{02} + \dots + P_{0m} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

При вивченні поведінки ланцюгів звичайно з'ясовуються наступні питання.

1. Ймовірність переходу зі стану  $i$  в стан  $j$  через  $n$  кроків.
2. Очікувана кількість попадань процесу в конкретний нестійкий стан.
3. Середнє значення (і дисперсія) числа кроків, які необхідно зробити процесу для переходу із одного конкретного стану в інший.
4. Ймовірність потрапити із конкретного нестійкого стану в задану ергодичну підмножину станів.
5. Середнє число кроків (і дисперсія), котрі пройде процес перед тим, як потрапити в ергодичну підмножину станів.

### Поглинаючі ланцюги

*Канонічна форма матриці переходів*

Для поглинаючих ланцюгів це така форма матриці, в якій рядки і колонки матриці переставлені таким чином, що поглинаючі стани займають перші рядки та колонки. Ця матриця має наступну структурну форму:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} s & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (8.7)$$

Вона складається ніби з чотирьох матриць, де  $I$  – одинична, а  $0$  – нульова матриці.

*Фундаментальна матриця ланцюга*

Фундаментальна матриця ланцюга визначається наступним чином

$$N = (I - Q)^{-1} \quad (8.8)$$

Елементи матриці показують середню кількість попадань в відповідні стани (номер колонки), якщо рух починати зі стану, що відповідає номеру рядка

Інша необхідна інформація обчислюється з наступних формул

1. Дисперсія числа попадань процесу в деякий заданий стан при певному початковому стані:  $N_2 = N(2N_{diag} - I) - N^3_{sq}$ . (8.9). Елементи матриці показують дисперсію кількості попадань в відповідні стани (номер колонки), якщо рух починає зі стану, що відповідає номеру рядка.
2. Середнє значення та дисперсія числа попадань процесу в заданий нестійкий стан.  $\tau_2 = (2N - I)\tau - \tau^2$ ; (8.10) де  $\tau = N\xi$ , а  $\xi$  – одиничний вектор.
3. Ймовірність того, що процес попаде в заданий поглинаючий стан (номер колонки), якщо він почне рух з заданого нестійкого стану (номер рядка)  $B = NR$ . (8.11)

### Виконання роботи

#### Ергодичний ланцюг.

Входимо в пункт меню «Сервис», потім вибираємо «Макрос», «Макросы». У вікні, що з'явилося, вибрати макрос з іменем МАРКОВ. Після його запуску (рис.8.3) він почне запитувати інформацію.

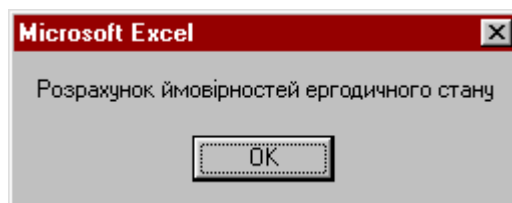


Рис.8.3. Повідомлення про запуск макросу

Спочатку необхідно ввести назви станів (рис.8.4), потім матрицю ймовірностей переходів (рис.8.5) і місце виведення результату (рис.8.6). Потім з'являється запит про необхідність обчислення стану через задану кількість кроків (рис.8.7). У разі ствердної відповіді на це питання необхідно ввести кількість кроків (рис.8.10). Обов'язковим є введення ймовірностей початкового стану (рис.8.9).

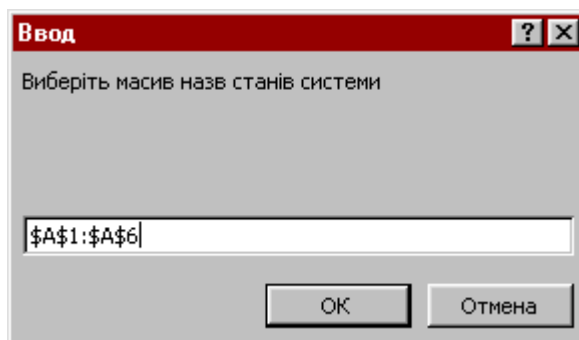


Рис.8.4. Введення назв станів

<sup>3</sup>  $N_{diag}$  – діагональна матриця, головна діагональ якої взята з  $N$ ;  $N_{sq}$  матриця, кожний елемент якої є квадратом відповідного елементу із  $N$

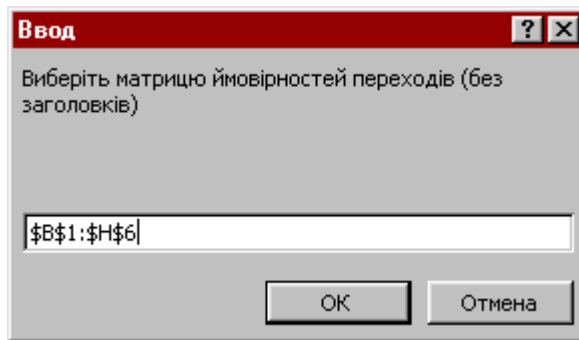


Рис.8.5. Введення матриці ймовірностей переходів

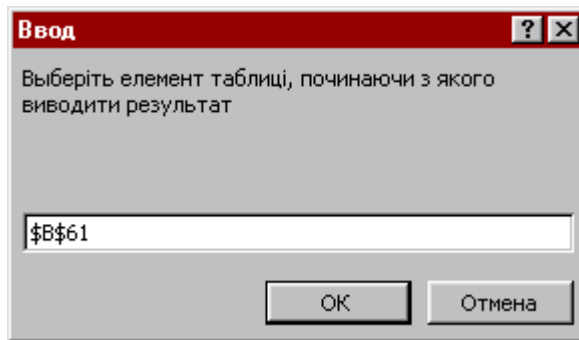


Рис. 8.6. Введення місця виведення результату

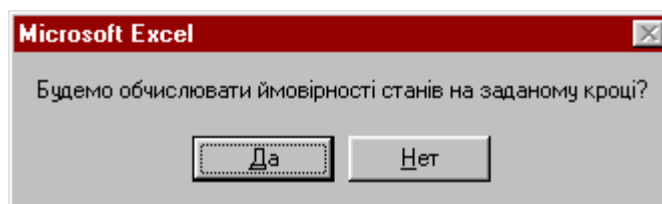


Рис.8.7. Запит на необхідність розрахунку стану через задану кількість кроків

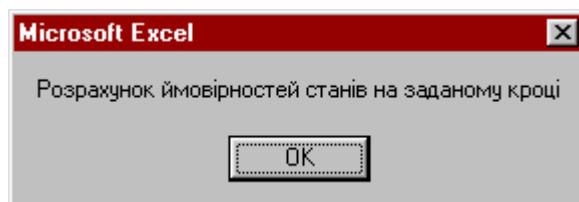


Рис.8.8. Повідомлення про виконання

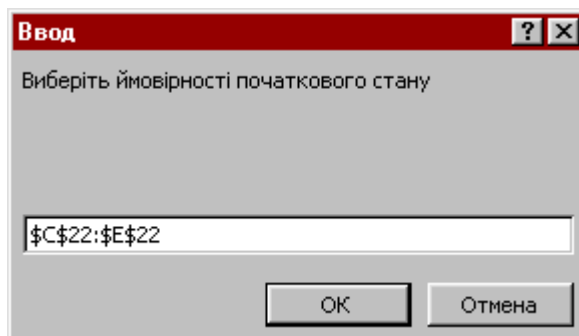
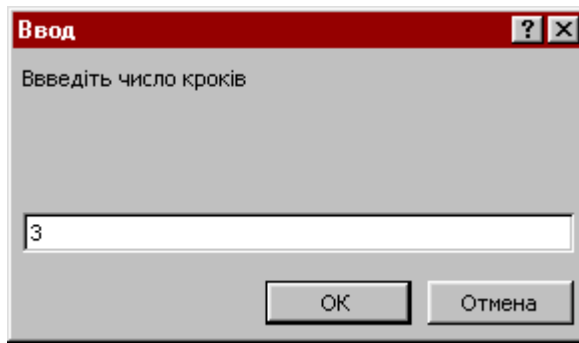


Рис.8.9. Запит на введення вектору початкових ймовірностей станів



Ри.8.10. Запит на введення числа кроків

Результати роботи мають вигляд, представлений в табр.8.1 і 8.2.

Таблиця 8.1. Результати розрахунків ергодичного стану

Результати пошуку ймовірностей ергодичного стану

Стан	Q	W	R
Ймовірність	0,333333	0,533333	0,133333
Кроків:			3
Ймовірність	0,355469	0,524922	0,119609

Таблиця 8.2. Результати розрахунку стану через задане число кроків.

Q	0,5	0,5	0
W	0,3125	0,5	0,1875
R	0	0,75	0,25

#### *Поглинаючий ланцюг*

Нам необхідні операції множення матриць (МУМНОЖ) і знаходження оберненої матриці (МОБР). В використанні цих засобів є деякі особливості. Обидві функції знаходяться в групі математичних функцій. Розглянемо їх використання на прикладі обчислення оберненої матриці.

Вибираємо комірку для розміщення результату. Потім натискаємо на панелі інструментів кнопку «f<sub>x</sub>». В «Мастере функций» (рис.8.11) вибираємо розділ «Математические», а в ньому функцію МОБР і натискаємо «ОК».

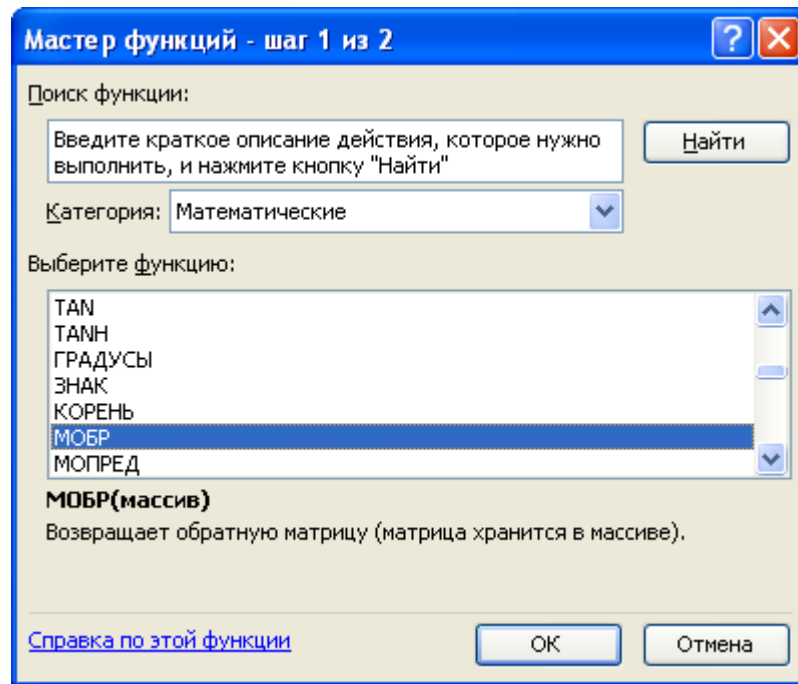


Рис.8.11. Вікно «майстра функцій»

З'являється вікно вибраної функції. В ньому в вікні «Массив» відмічаємо матрицю для якої необхідно визначити обернену і натискаємо «ОК».

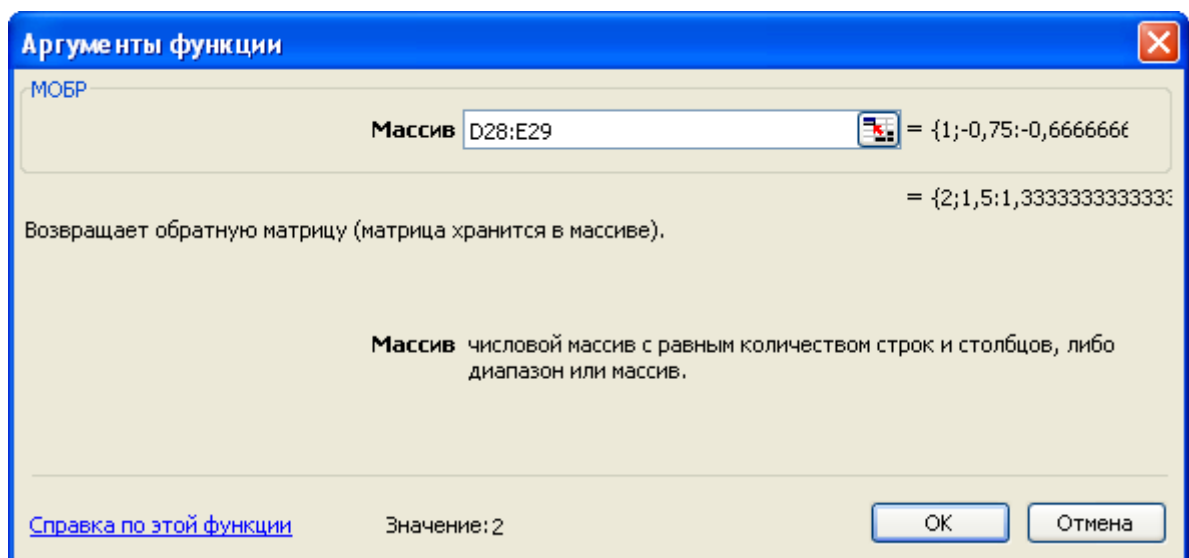


Рис. 8.12. Вікно функції для розрахунку оберненої матриці

Після цього необхідно відмітити масив комірок, який розміром відповідає масиву результату. Верхньою лівою коміркою має бути комірка, в яку ви вводили функцію. В ній зараз має бути число. Після цього натискаєте F2: з'являються сині відмітки. Потім набираєте комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter. В результаті у відміченому масиві буде розміщено результат.

### Приклад

Нехай ми маємо наступну матрицю вихідних даних, яка описує ланцюг.



$$P = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & 0 & 0,37 & 0 & 0,63 \\ s_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_4 & 0,3 & 0 & 0,7 & 0 \end{matrix}$$

Помінявши між собою місцями стовпчики S1 і S3  $P = \begin{matrix} & s_3 & s_2 & s_3 & s_1 \\ s_1 & 0 & 0,37 & 0 & 0,63 \\ s_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_4 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \end{matrix}$ , а потім

рядки S1 і S3, отримаємо канонічну форму матриці переходів  $P = \begin{matrix} & s_3 & s_2 & s_1 & s_4 \\ s_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 0,37 & 0 & 0,63 \\ s_4 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \end{matrix}$ .

Зверніть увагу, що рядки тепер мають нові назви! Як ми бачимо, верхні ліві чотири комірки утворюють одиничну матрицю, праві ліві – нульову, а нижні чотири рядки

утворюють матриці  $R = \begin{matrix} & s_3 & s_2 \\ s_1 & 0 & 0,37 \\ s_4 & 0,7 & 0 \end{matrix}$  і  $Q = \begin{matrix} & s_1 & s_4 \\ s_1 & 0 & 0,63 \\ s_4 & 0,3 & 0 \end{matrix}$ .

Тепер нам необхідно знайти фундаментальну матрицю ланцюга за формулою (8.8). Якщо, наприклад, канонічна матриця знаходиться в комірках C15: F18 (без заголовків станів), то спочатку розраховуємо  $I - Q$ . Для цього в комірку, в якій ми плануємо розмістити результат записуємо =C15–H22 і потім розтягуємо формулу на всі чотири

комірки. Отримуємо  $I - Q = \begin{matrix} & s_1 & s_4 \\ s_1 & 1 & -0,63 \\ s_4 & -0,3 & 1 \end{matrix}$ .

Після цього знаходимо до неї обернену. Використання відповідних функцій описано вище.

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{matrix} & s_1 & s_4 \\ s_1 & 1,233046 & 0,776819 \\ s_4 & 0,369914 & 1,233046 \end{matrix}$$

Тобто, якщо починати рух зі стану S1, то система попаде в середньому 0,78 раз в стан S4 перед тим, як потрапити в один із поглинаючих станів.

Для розрахунку за формулою (8.9) дисперсії числа попадань в певний стан необхідно спочатку побудувати дві допоміжні матриці. Для побудови першої,  $N_{diag}$ , вибирається головна діагональ матриці N, а всі інші елементи заповнюються нулями. Для побудови другої,  $N_{sq}$ , кожен елемент N необхідно піднести до другого степені.

$$N_{diag} = \begin{matrix} & s_1 & s_4 \\ s_1 & 1,233046 & 0 \\ s_4 & 0 & 1,233046 \end{matrix} \quad N_{sqr} = \begin{matrix} & s_1 & s_4 \\ s_1 & 1,520402 & 0,603447 \\ s_4 & 0,136836 & 1,520402 \end{matrix} .$$

Далі виконуємо відповідні операції над отриманими матрицями.

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1,233046 & 0,776819 \\ 0,369914 & 1,233046 \end{bmatrix} \left[ 2 * \begin{bmatrix} 1,233046 & 0 \\ 0 & 1,233046 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,520402 & 0,603447 \\ 0,136836 & 1,520402 \end{bmatrix} \right]$$

Ця матриця дає значення дисперсії до відповідних значень середнього матриці N.

Далі визначаємо середнє значення та дисперсію числа попадань процесу в заданий нестійкий стан за формулою (8.10).

$$\tau = \begin{bmatrix} 1,233046 & 0,776819 \\ 0,369914 & 1,233046 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0099864 \\ 1,602959 \end{bmatrix}, \quad \tau_{sqr} = \begin{bmatrix} 4,0039555 \\ 2,569479 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \left[ 2 * \begin{bmatrix} 1,233046 & 0,776819 \\ 0,369914 & 1,233046 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] * \begin{bmatrix} 2,0099864 \\ 1,602959 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,0039555 \\ 2,569479 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,397507 \\ 1,268559 \end{bmatrix}$$

Тобто, середнє значення числа попадань процесу в стан  $s_1$  до поглинання приблизно 4 при дисперсії цього значення 1,4.

Ймовірність того, що процес попаде в заданий поглинаючий стан (номер колонки), якщо він почне рух з заданого нестійкого стану (номер рядка) за формулою (8.11):

$$B = \begin{bmatrix} 1,233046 & 0,776819 \\ 0,369914 & 1,233046 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0,37 \\ 0,7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,543773 & 0,456227 \\ 0,863132 & 0,136868 \end{bmatrix}$$

Якщо ми запишемо результат з назвами станів, то отримаємо

$$B = \begin{matrix} & s_3 & s_2 \\ s_1 & 0,543773 & 0,456227 \\ s_4 & 0,863132 & 0,126868 \end{matrix} .$$

Це означає, якщо процес почнеться зі стану  $s_1$ , то він з ймовірністю 0,543773 закінчиться в  $s_3$ , або з ймовірністю 0,456227 в  $s_2$ ,

ймовірністю 0,543773 закінчиться в  $s_3$ , або з ймовірністю 0,456227 в  $s_2$ ,

### Варіанти завдань

Таблиця 8.3. Марківські ланцюги

№ варіанту	Ймовірності початкового стану	Матриця ймовірностей переходів					
			a	b	c	d	e
1	0,4000	a	0,1634	0,5724	0,1878	0,0100	0,0665
	0,2000	b	0,4346	0,0654	0,2000	0,1500	0,1499
	0,1000	c	0,5926	0,0111	0,0200	0,0500	0,3263
	0,1500	d	0,3400	0,1702	0,2398	0,0213	0,2288
	0,1500	e	0,1200	0,1757	0,4500	0,2344	0,0199
2	0,2000	a	0,4900	0,0900	0,1500	0,0894	0,1806
	0,3000	b	0,1453	0,2800	0,3700	0,1400	0,0647
	0,1000	c	0,0600	0,1900	0,6961	0,0100	0,0439
	0,2500	d	0,0101	0,5184	0,3100	0,1300	0,0316
	0,1500	e	0,0741	0,4778	0,0168	0,0128	0,4185

3			a	b	c	d	e
	0,1800	a	0,1100	0,3200	0,3400	0,2201	0,0099
	0,3500	b	0,4100	0,2756	0,2262	0,0500	0,0382
	0,1000	c	0,0302	0,2300	0,1040	0,4500	0,1858
	0,1500	d	0,1997	0,1981	0,1728	0,2800	0,1494
0,2200	e	0,5600	0,0438	0,2247	0,0134	0,1581	

4			a	b	c	d	e
	0,1400	a	0,0300	0,0309	0,7706	0,0170	0,1515
	0,4600	b	0,1300	0,2337	0,2859	0,3400	0,0104
	0,1000	c	0,1746	0,1100	0,4750	0,2300	0,0104
	0,1500	d	0,09	0,3827	0,2886	0,0100	0,3187
0,1500	e	0,3617	0,1020	0,3500	0,1230	0,0633	

5			a	b	c	d	e
	0,5500	a	0,1450	0,2300	0,0100	0,1889	0,4261
	0,0500	b	0,0700	0,1645	0,1120	0,5780	0,0754
	0,1000	c	0,0900	0,1200	0,2645	0,4800	0,0455
	0,1500	d	0,1864	0,2200	0,3896	0,1000	0,1040
0,1500	e	0,5135	0,0339	0,0920	0,2350	0,1256	

6			a	b	c	d	e
	0,2500	a	0,2115	0,5684	0,1150	0,0813	0,0237
	0,2000	b	0,5811	0,2200	0,0700	0,0375	0,0913
	0,0500	c	0,1656	0,1100	0,5013	0,0250	0,1981
	0,3500	d	0,6700	0,0300	0,1200	0,1050	0,0750
0,1500	e	0,3057	0,0010	0,1190	0,4730	0,1013	

7			a	b	c	d	e
	0,4000	a	0,0160	0,0530	0,2190	0,5025	0,2094
	0,2000	b	0,0445	0,0941	0,2988	0,5155	0,0471
	0,1000	c	0,4013	0,0372	0,1800	0,2100	0,1716
	0,1500	d	0,0343	0,2226	0,7043	0,0153	0,0235
0,1500	e	0,1242	0,7612	0,0190	0,0837	0,0119	

8			a	b	c	d	e
	0,2000	a	0,0120	0,1778	0,6293	0,1337	0,0472
	0,3000	b	0,0130	0,2482	0,4560	0,2374	0,0454
	0,1000	c	0,1560	0,1959	0,3870	0,2340	0,0271
	0,2500	d	0,2607	0,5230	0,1450	0,0345	0,0368
0,1500	e	0,4957	0,0110	0,3398	0,0299	0,1236	

9			a	b	c	d	e
	0,1800	a	0,0213	0,7718	0,1015	0,0974	0,0080
	0,3500	b	0,0517	0,0050	0,5230	0,4178	0,0024
	0,1000	c	0,4031	0,0670	0,2910	0,0524	0,1864
	0,1500	d	0,0100	0,1354	0,6990	0,1037	0,0519
0,2200	e	0,0150	0,5600	0,0737	0,2147	0,1366	

10		a	b	c	d	e	
	0,1400	a	0,0540	0,5378	0,3300	0,0500	0,0282
	0,4600	b	0,3829	0,1200	0,0134	0,1222	0,3614
	0,1000	c	0,3075	0,0028	0,2100	0,3804	0,0994
	0,1500	d	0,1890	0,1400	0,4637	0,0920	0,1154
0,1500	e	0,3190	0,1200	0,0950	0,4273	0,0387	

11		a	b	c	d	e	
	0,5500	a	0,0700	0,0300	0,3979	0,4951	0,0070
	0,0500	b	0,3420	0,1682	0,2484	0,1568	0,0846
	0,1000	c	0,3600	0,4000	0,0450	0,1751	0,0199
	0,1500	d	0,0370	0,2680	0,3997	0,2050	0,0903
0,1500	e	0,3450	0,0400	0,3953	0,1200	0,0997	

12		a	b	c	d	e	
	0,2500	a	0,5028	0,0010	0,0200	0,4107	0,0654
	0,2000	b	0,3210	0,0112	0,3440	0,3175	0,0064
	0,0500	c	0,3177	0,1480	0,3820	0,1210	0,0313
	0,3500	d	0,2770	0,5588	0,0593	0,0754	0,0294
0,1500	e	0,5018	0,0316	0,0441	0,4166	0,0059	

13		a	b	c	d	e	
	0,4000	a	0,2760	0,4111	0,0505	0,2397	0,0226
	0,2000	b	0,0798	0,0958	0,7169	0,0725	0,0350
	0,1000	c	0,2632	0,0594	0,0939	0,5634	0,0200
	0,1500	d	0,0793	0,4480	0,4269	0,0152	0,0306
0,1500	e	0,2030	0,2456	0,4043	0,0359	0,1111	

14		a	b	c	d	e	
	0,2000	a	0,0646	0,3480	0,0744	0,0688	0,4442
	0,3000	b	0,3159	0,0811	0,0888	0,4565	0,0577
	0,1000	c	0,3492	0,0924	0,2300	0,0937	0,2347
	0,2500	d	0,0707	0,1718	0,0970	0,1613	0,4992
0,1500	e	0,0536	0,3987	0,0697	0,0946	0,3835	

15		a	b	c	d	e	
	0,1800	a	0,3220	0,5418	0,9371	0,8370	-1,6378
	0,3500	b	0,8220	0,0510	0,1881	0,0705	-0,1317
	0,1000	c	0,1546	0,6283	0,4759	0,5176	-0,7765
	0,1500	d	0,4374	0,6874	0,0752	0,3207	-0,5206
0,2200	e	0,2363	0,5943	0,8043	0,9348	-1,5697	

16		a	b	c	d	e	
	0,1400	a	0,3462	0,0760	0,0877	0,4867	0,0033
	0,4600	b	0,1368	0,6700	0,0579	0,1232	0,0121
	0,1000	c	0,3098	0,2047	0,0897	0,3450	0,0508
	0,1500	d	0,0832	0,2758	0,2165	0,0978	0,3267
0,1500	e	0,5013	0,2506	0,0637	0,0978	0,0866	

17		a	b	c	d	e
----	--	---	---	---	---	---

	0,5500	a	0,7888	0,0814	0,1813	0,0993	-0,1508
	0,0500	b	0,0891	0,0513	0,2690	0,0914	0,4993
	0,1000	c	0,0606	0,3905	0,1320	0,3168	0,1001
	0,1500	d	0,0992	0,7039	0,0980	0,0894	0,0096
	0,1500	e	0,0845	0,7020	0,0765	0,0548	0,0822

		a	b	c	d	e	
18	0,2500	a	0,1501	0,3783	0,1652	0,0040	0,3023
	0,2000	b	0,2787	0,3374	0,0967	0,0785	0,2088
	0,0500	c	0,0840	0,5921	0,0990	0,0893	0,1356
	0,3500	d	0,1812	0,0816	0,0998	0,2921	0,3452
	0,1500	e	0,0831	0,5884	0,0547	0,0279	0,2459

		a	b	c	d	e	
19	0,4000	a	0,4579	0,1884	0,1404	0,0973	0,1161
	0,2000	b	0,0985	0,1789	0,2786	0,0913	0,3527
	0,1000	c	0,5813	0,0999	0,0813	0,1793	0,0581
	0,1500	d	0,0840	0,5672	0,0864	0,1858	0,0767
	0,1500	e	0,1009	0,0342	0,3296	0,4412	0,0941

		a	b	c	d	e	
20	0,2000	a	0,3872	0,1805	0,0276	0,3152	0,0896
	0,3000	b	0,5753	0,2342	0,1008	0,0185	0,0711
	0,1000	c	0,0511	0,1240	0,7272	0,0951	0,0026
	0,2500	d	0,6576	0,0246	0,0635	0,1975	0,0567
	0,1500	e	0,6162	0,1786	0,0284	0,1293	0,0474

		a	b	c	d	e	
21	0,1800	a	0,19	0,04	0,67	0,05	0,05
	0,3500	b	0,01	0,22	0,4	0,31	0,06
	0,1000	c	0,07	0,25	0,04	0,55	0,09
	0,1500	d	0,29	0,18	0,12	0,26	0,15
	0,x2200	e	0,45	0,07	0,25	0,08	0,15

		a	b	c	d	e	
22	0,1400	a	0,6519	0,1749	0,0808	0,0917	0,0008
	0,4600	b	0,3440	0,0414	0,1805	0,4097	0,0243
	0,1000	c	0,0712	0,2737	0,2920	0,2682	0,0948
	0,1500	d	0,3677	0,0646	0,3336	0,0947	0,1395
	0,1500	e	0,0981	0,4475	0,0925	0,3442	0,0177

		a	b	c	d	e	
23	0,5500	a	0,0859	0,1687	0,5011	0,1707	0,0736
	0,0500	b	0,0909	0,1539	0,1877	0,5050	0,0624
	0,1000	c	0,0937	0,1722	0,2362	0,4941	0,0039
	0,1500	d	0,5068	0,0553	0,0332	0,0965	0,3083
	0,1500	e	0,2288	0,1868	0,4543	0,1126	0,0176

		a	b	c	d	e	
24	0,2500	a	0,1665	0,0877	0,2399	0,3539	0,1520

	0,2000	b	0,1510	0,0699	0,4257	0,3028	0,0506
	0,0500	c	0,4561	0,3234	0,1020	0,0468	0,0716
	0,3500	d	0,1919	0,0362	0,3458	0,3611	0,0650
	0,1500	e	0,2649	0,0854	0,2921	0,2152	0,1424

25			a	b	c	d	e
	0,1	a	0,23	0,27	0,05	0,1	0,35
	0,025	b	0,06	0,17	0,07	0,55	0,15
	0,1	c	0,07	0,19	0,34	0,14	0,26
	0,05	d	0,01	0,41	0,23	0,06	0,29
	0,725	e	0,08	0,1	0,13	0,26	0,43

26			a	b	c	d	e
	0,31	a	0,08	0,01	0,58	0,24	0,09
	0,01	b	0,09	0,04	0,03	0,18	0,66
	0,12	c	0,24	0,06	0,15	0,25	0,3
	0,32	d	0,2	0,16	0,18	0,04	0,42
	0,24	e	0,395	0,05	0,18	0,075	0,3

27			a	b	c	d	e
	0,32	a	0,14	0,09	0,35	0,34	0,08
	0,05	b	0,51	0,32	0,08	0,03	0,06
	0,14	c	0,47	0,04	0,42	0,02	0,05
	0,39	d	0,13	0,13	0,09	0,08	0,57
	0,1	e	0,03	0,04	0,06	0,38	0,49

28			a	b	c	d	e
	0,12	a	0,33	0,01	0,09	0,27	0,3
	0,33	b	0,03	0,5	0,18	0,08	0,21
	0,01	c	0,57	0,06	0,07	0,25	0,05
	0,22	d	0,27	0,42	0,24	0,01	0,06
	0,32	e	0,49	0,01	0,15	0,02	0,33

29			a	b	c	d	e
	0,09	a	0,27	0,33	0,07	0,06	0,27
	0,17	b	0,42	0,04	0,2	0,09	0,25
	0,07	c	0,02	0,06	0,25	0,08	0,59
	0,62	d	0,37	0,01	0,08	0,53	0,01
	0,05	e	0,08	0,47	0,05	0,31	0,09

30			a	b	c	d	e	
	0,54	a	0,01	0,03	0,08	0,52	0,36	1
	0,16	b	0,08	0,02	0,19	0,02	0,69	1
	0,07	c	0,33	0,14	0,2	0,31	0,02	1
	0,09	d	0,24	0,1	0,01	0,33	0,32	1

	0,14	e	0,07	0,41	0,41	0,07	0,04	1
--	------	---	------	------	------	------	------	---

31			a	b	c	d	e	
	0,4	a	0,09	0,07	0,07	0,06	0,71	1
	0,29	b	0,874786	0,987083	0,329661	0,920924	0,584759	3,697213
	0,07	c	0,24	0,2	0,05	0,42	0,09	1
	0,04	d	0,6	0,15	0,09	0,08	0,08	1
	0,2	e	0,16	0,07	0,14	0,09	0,54	1

32			a	b	c	d	e
	0,3	a	0,06	0,24	0,18	0,45	0,07
	0,02	b	0,05	0,22	0,5	0,12	0,11
	0,31	c	0,13	0,26	0,29	0,01	0,31
	0,1	d	0,18	0,24	0,18	0,02	0,38
	0,27	e	0,31	0,05	0,32	0,21	0,11

33			a	b	c	d	e
	0,07	a	0,05	0,04	0,09	0,32	0,5
	0,15	b	0,28	0,05	0,19	0,47	0,01
	0,35	c	0,01	0,01	0,56	0,02	0,4
	0,19	d	0,02	0,09	0,07	0,08	0,74
	0,24	e	0,09	0,07	0,49	0,26	0,09

34			a	b	c	d	e
	0,19	a	0,06	0,26	0,21	0,09	0,38
	0,01	b	0,12	0,29	0,09	0,19	0,31
	0,39	c	0,18	0,29	0,35	0,04	0,14
	0,4	d	0,4	0,22	0,09	0,09	0,2
	0,01	e	0,07	0,13	0,07	0,31	0,42

35			a	b	c	d	e
	0,27	a	0,18	0,29	0,19	0,04	0,3
	0,09	b	0,35	0,01	0,09	0,07	0,48
	0,04	c	0,07	0,46	0,17	0,23	0,07
	0,34	d	0,33	0,24	0,06	0,2	0,17
	0,26	e	0,05	0,32	0,16	0,37	0,1

36			a	b	c	d	e
	0,25	a	0,04	0,05	0,2	0,35	0,36
	0,28	b	0,02	0,25	0,26	0,08	0,39
	0,41	c	0,05	0,31	0,05	0,33	0,26
	0,05	d	0,23	0,09	0,51	0,07	0,1
	0,01	e	0,38	0,28	0,09	0,15	0,1

37			a	b	c	d	e
	0,22	a	0,25	0,37	0,07	0,12	0,19

	0,4	b	0,07	0,04	0,54	0,06	0,29
	0,3	c	0,03	0,05	0,4	0,24	0,28
	0,01	d	0,07	0,07	0,27	0,55	0,04
	0,07	e	0,18	0,39	0,3	0,07	0,06

38			a	b	c	d	e
	0,22	a	0,5	0,09	0,23	0,09	0,09
	0,32	b	0,03	0,2	0,17	0,59	0,01
	0,05	c	0,06	0,14	0,02	0,26	0,52
	0,06	d	0,08	0,67	0,08	0,08	0,09
	0,35	e	0,07	0,17	0,36	0,17	0,23

39			a	b	c	d	e
	0,08	a	0,42	0,05	0,08	0,06	0,39
	0,09	b	0,34	0,37	0,05	0,23	0,01
	0,01	c	0,04	0,18	0,03	0,36	0,39
	0,69	d	0,06	0,32	0,43	0,11	0,08
	0,13	e	0,26	0,07	0,08	0,37	0,22

40			a	b	c	d	e
	0,57	a	0,13	0,19	0,51	0,08	0,09
	0,18	b	0,15	0,09	0,08	0,07	0,61
	0,1	c	0,5	0,05	0,09	0,06	0,3
	0,08	d	0,29	0,21	0,38	0,09	0,03
	0,07	e	0,39	0,01	0,17	0,11	0,32

41			a	b	c	d	e
	0,4	a	0,23	0,32	0,28	0,06	0,11
	0,09	b	0,08	0,43	0,09	0,28	0,12
	0,17	c	0,35	0,04	0,09	0,34	0,18
	0,1	d	0,08	0,14	0,31	0,3	0,17
	0,24	e	0,07	0,03	0,1	0,53	0,27

42			a	b	c	d	e
	0,01	a	0,2	0,03	0,28	0,24	0,25
	0,3	b	0,3	0,07	0,01	0,22	0,4
	0,52	c	0,15	0,17	0,2	0,09	0,39
	0,06	d	0,24	0,36	0,07	0,09	0,24
	0,11	e	0,08	0,31	0,32	0,01	0,28

43			a	b	c	d	e
	0,4	a	0,06	0,39	0,13	0,04	0,38
	0,08	b	0,29	0,01	0,24	0,31	0,15
	0,13	c	0,24	0,08	0,29	0,33	0,06
	0,2	d	0,25	0,18	0,31	0,12	0,14
	0,19	e	0,23	0,16	0,01	0,2	0,4



44			a	b	c	d	e
	0,09	a	0,19	0,07	0,12	0,54	0,08
	0,34	b	0,19	0,3	0,29	0,05	0,17
	0,4	c	0,02	0,01	0,16	0,75	0,06
	0,05	d	0,04	0,12	0,09	0,41	0,34
	0,12	e	0,01	0,01	0,42	0,33	0,23

45			a	b	c	d	e
	0,1	a	0,25	0,22	0,07	0,4	0,06
	0,12	b	0,18	0,2	0,3	0,02	0,3
	0,38	c	0,21	0,19	0,21	0,2	0,19
	0,22	d	0,14	0,2	0,01	0,15	0,5
	0,18	e	0,2	0,18	0,29	0,11	0,22

46			a	b	c	d	e
	0,24	a	0,01	0,08	0,37	0,14	0,4
	0,22	b	0,09	0,27	0,18	0,1	0,36
	0,19	c	0,22	0,27	0,06	0,22	0,23
	0,12	d	0,2	0,09	0,08	0,28	0,35
	0,23	e	0,37	0,18	0,06	0,37	0,02

47			a	b	c	d	e
	0,03	a	0,03	0,48	0,03	0,01	0,45
	0,48	b	0,36	0,25	0,13	0,16	0,1
	0,1	c	0,23	0,21	0,42	0,03	0,11
	0,36	d	0,23	0,1	0,06	0,31	0,3
	0,03	e	0,32	0,13	0,12	0,22	0,21
	1						

48			a	b	c	d	e
	0,3	a	0,35	0,39	0,13	0,05	0,08
	0,17	b	0,01	0,26	0,2	0,4	0,13
	0,23	c	0,1	0,32	0,17	0,05	0,36
	0,07	d	0,31	0,23	0,32	0,12	0,02
	0,23	e	0,03	0,22	0,06	0,39	0,3

49			a	b	c	d	e
	0,24	a	0,17	0,15	0,24	0,15	0,29
	0,31	b	0,18	0,21	0,19	0,15	0,27
	0,01	c	0,26	0,23	0,23	0,25	0,03
	0,3	d	0,17	0,1	0,24	0,31	0,18
	0,14	e	0,25	0,05	0,08	0,09	0,53

50			a	b	c	d	e
	0,21	a	0,19	0,08	0,19	0,24	0,3
	0,22	b	0,18	0,39	0,24	0,1	0,09
	0,19	c	0,11	0,29	0,04	0,17	0,39

	0,07	d	0,14	0,09	0,08	0,44	0,25
	0,31	e	0,38	0,03	0,08	0,22	0,29

51			a	b	c	d	e
	0,08	a	0,19	0,09	0,29	0,22	0,21
	0,26	b	0,21	0,38	0,09	0,27	0,05
	0,48	c	0,16	0,29	0,21	0,29	0,05
	0,04	d	0,24	0,28	0,14	0,07	0,27
	0,14	e	0,26	0,14	0,34	0,07	0,19

52			a	b	c	d	e
	0,27	a	0,2	0,11	0,22	0,25	0,22
	0,26	b	0,19	0,27	0,25	0,22	0,07
	0,18	c	0,38	0,08	0,29	0,22	0,03
	0,28	d	0,12	0,14	0,24	0,25	0,25
	0,01	e	0,19	0,24	0,18	0,3	0,09

53			a	b	c	d	e
	0,18	a	0,28	0,1	0,25	0,06	0,31
	0,21	b	0,38	0,14	0,19	0,07	0,22
	0,03	c	0,21	0,22	0,21	0,33	0,03
	0,37	d	0,18	0,04	0,35	0,22	0,21
	0,21	e	0,22	0,23	0,29	0,24	0,02

54			a	b	c	d	e
	0,04	a	0,09	0,08	0,27	0,27	0,29
	0,19	b	0,18	0,09	0,02	0,47	0,24
	0,22	c	0,33	0,13	0,09	0,09	0,36
	0,29	d	0,17	0,38	0,28	0,01	0,16
	0,26	e	0,09	0,08	0,37	0,45	0,01

55			a	b	c	d	e
	0,23	a	0,24	0,28	0,11	0,08	0,29
	0,32	b	0,01	0,35	0,3	0,19	0,15
	0,22	c	0,48	0,24	0,07	0,02	0,19
	0,2	d	0,25	0,3	0,24	0,08	0,13
	0,03	e	0,12	0,36	0,07	0,43	0,02

56			a	b	c	d	e
	0,28	a	0,29	0,3	0,21	0,13	0,07
	0,3	b	0,07	0,2	0,26	0,13	0,34
	0,12	c	0,07	0,2	0,33	0,14	0,26
	0,26	d	0,08	0,13	0,12	0,4	0,27
	0,04	e	0,29	0,28	0,08	0,05	0,3

57			a	b	c	d	e
	0,23	a	0,31	0,27	0,22	0,13	0,07
	0,15	b	0,17	0,04	0,01	0,25	0,53
	0,25	c	0,25	0,01	0,25	0,12	0,37
	0,33	d	0,12	0,15	0,23	0,3	0,2
	0,04	e	0,37	0,3	0,21	0,09	0,03

58			a	b	c	d	e
	0,11	a	0,34	0,06	0,29	0,23	0,08
	0,47	b	0,08	0,4	0,19	0,2	0,13
	0,06	c	0,39	0,16	0,15	0,07	0,23
	0,11	d	0,19	0,3	0,3	0,2	0,01
	0,25	e	0,19	0,28	0,1	0,3	0,13

59			a	b	c	d	e
	0,18	a	0,24	0,6	0,07	0,04	0,05
	0,01	b	0,26	0,14	0,27	0,16	0,17
	0,36	c	0,23	0,17	0,38	0,16	0,06
	0,3	d	0,06	0,1	0,03	0,35	0,46
	0,15	e	0,18	0,03	0,27	0,31	0,21

60			a	b	c	d	e
	0,33	a	0,22	0,23	0,18	0,15	0,22
	0,23	b	0,06	0,11	0,32	0,12	0,39
	0,08	c	0,35	0,01	0,16	0,21	0,27
	0,24	d	0,31	0,3	0,17	0,04	0,18
	0,12	e	0,27	0,26	0,09	0,3	0,08

### ***Поглинаючі ланцюги***

В виданому варіанті для марківських ланцюгів замінити два рядки (їх номери взяти з табл..8.4 за варіантом) на відповідні рядки з табл..8.5.

Таблиця 8.4. Варіанти заміни рядків для створення поглинаючого ланцюга

Номер варіанту	Номери станів для заміни		Номер варіанту	Номери станів для заміни	
1	4	2	14	3	1
2	5	3	15	2	3
3	1	3	16	1	3
4	4	5	17	2	3
5	3	2	18	4	2
6	3	5	19	2	3
7	4	5	20	4	1
8	3	4	21	2	3
9	4	1	22	1	3
10	1	5	23	1	4
11	2	4	24	4	5
12	2	5	25	5	4
13	2	4	26	2	4

Таблиця 8.5. Рядки для створення поглинаючого ланцюга

Номер стану	Назви станів	a	b	c	d	e
1	a	1	0	0	0	0
2	b	0	1	0	0	0
3	c	0	0	1	0	0
4	d	0	0	0	1	0
5	e	0	0	0	0	1

Заміна виконується наступним чином. Нехай задано варіант №26. Тоді вихідна матриця ймовірностей переходів має наступний вигляд (табл..8.6)

Таблиця 8.6. Варіант №26 матриці переходів

		a	b	c	d	e	
26	0,31	a	0,08	0,01	0,58	0,24	0,09
	0,01	b	0,09	0,04	0,03	0,18	0,66
	0,12	c	0,24	0,06	0,15	0,25	0,3
	0,32	d	0,2	0,16	0,18	0,04	0,42
	0,24	e	0,395	0,05	0,18	0,075	0,3

В табл..8.4 маємо номери станів для заміни 2 і 4. Беремо з табл.. 8.5 відповідні рядки і замінюємо ними рядки в табл..8.6. Отримуємо таблицю, яка описує поглинаючий ланцюг (табл..8.7)

Таблиця 8.7. Опис варіанту поглинаючого ланцюга

		a	b	c	d	e
26	a	0,08	0,01	0,58	0,24	0,09
	b	0	1	0	0	0
	c	0,24	0,06	0,15	0,25	0,3
	d	0	0	0	1	0
	e	0,395	0,05	0,18	0,075	0,3

### Контрольні запитання

1. Класифікація процесів Маркова.
2. Класифікація станів ланцюга.
3. Способи опису марківського ланцюга.
4. Які параметри і як обчислюються для марківського процесу.
5. Які параметри і як обчислюються для поглинаючого ланцюга.
6. Що таке поглинаючий стан?
7. Що таке нестійкий стан?
8. Що таке ергодичний стан?

### Література

1. Е.В. Бережная, В.И. Бережной Математические методы моделирования экономических систем –М.: Финансы и статистика, 2001. –368с.

2. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. М.: Советское радио. –1973, –440с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей –М.: –Высшая школа, –1999. –576с.
4. Волков Л.И. Управление эксплуатацией летательных комплексов –М.: ВШ, 1981. – 368с.
5. Енциклопедія кібернетики, у 2-х тт., Т1.584с. Т2. 574с К.: УРЕ, 1973
6. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику –М.: Изд-во “Иностранная литература”. –1963. –486с.
7. Креденцер Б.П. Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью –К.: Наукова думка, –1978. –240с.
8. Д.Кук, Г. Бейз Компьютерная математика М.: Наука, 1990.–384с.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения: в 2-х тт.Т1: Мир, – 1984. –528с.
10. Д. Тёрнер Вероятность, статистика и исследование операций –М.: Статистика, – 1976. –431с.

## *Лабораторна робота №9*

### *Мережне планування*

#### **Мета.**

Вивчення методів оптимізації мережних графіків (метод критичного шляху і ПЕРТ).

#### **Завдання.**

Придумати мережний графік виконання певних робіт. Для нього визначити критичний шлях, розрахувати необхідні величини та ймовірності за ПЕРТ.

#### **Склад звіту.**

Опис і графічне представлення мережного графіку; матеріали розрахунку критичного шляху, критичний шлях; розрахунки параметрів за ПЕРТ.

#### **Теоретичні відомості**

##### ***Метод критичного шляху (МКШ)***

Щоб описати деякий проект як мережу необхідні наступні вихідні дані:

1. Перелік всіх операцій (робіт) проекту;
2. Час, необхідний для виконання кожної операції.
3. Перелік операцій, які безпосередньо передують кожній операції.

Після цього кожна операція (роботи) представляється як дуга орієнтованого графу. Він формується наступним чином. Якщо деяка операція представлена дугою (x,y), то в вершину x входять тільки дуги, які представляють роботи, що безпосередньо передують даній. При необхідності вводяться фіктивні дуги, які не відповідають жодній роботі. Вершини утвореного графу називаються подіями. Подія відбулася, якщо всі роботи, що відображаються вхідними в вершину дугами, повністю виконані.

Після того, як граф утворено ми можемо шукати в ньому критичний шлях.

Спочатку необхідно виконати нумерацію подій. Це роблять за наступним алгоритмом.

1. Початкова подія отримує номер 1.
2. Надати наступний номер будь-якій не пронумерованій події, для якої всі попередні події мають номери.
3. Якщо існують не пронумеровані події, то перейти в п.2.

Після цього розраховуються найбільш ранні терміни реалізації подій. Виконується за наступним алгоритмом.

1. Встановити  $E(1)=0$ . Тобто для першої події найбільш раннім терміном є нуль.
2. Збільшити номер події на 1.
3. Якщо всі події вичерпані – закінчити роботу. В противному разі – перейти в п.4.

4. Для поточної події визначити найбільш ранній термін закінчення за формулою  $E(j)=\max\{E(i)+t(i, j)\}$ .

Після цього визначаються терміни найбільш пізнього закінчення подій. Для цього необхідно:

1. Встановити  $L(n)$  рівним заданому часу завершення проекту. Пам'ятати, що в реальному житті виконується умова  $L(n)\geq E(n)$ .
2. Зменшити номер події на 1.
3. Якщо події вичерпались – припинити роботу, В противному разі – перейти в п.4.
4. Для поточної події визначити термін найбільш пізнього закінчення:  
 $L(i)=\min\{E(j) - t(i, j)\}$

Потім для всіх операцій знаходиться повний резерв часу операції (ПРЧО)

$$\text{ПРЧО} = L(y) - E(x) - t(x, y) \quad (1)$$

Критичною операцією є така операція, для якої повний резерв часу дорівнює нулю. Відповідно, критичний шлях – це шлях, який складається виключно з критичних операцій.

### **Метод оцінки і перегляду планів PERT(Program Evaluation Review Technique)**

В МКШ вважається, що час виконання роботи точно відомий і детермінований. В **PERT** вводиться статистична невизначеність в час виконання робіт. Для кожної роботи задають три оцінки часу виконання роботи:

- 1) найбільш ймовірний час виконання роботи **m**;
- 2) оптимістична оцінка часу виконання **a**;
- 3) песимістична оцінка **b**.

Найбільш ймовірна відповідає виконанню роботи в звичайних умовах; оптимістична - в ідеальних; а песимістична - в несприятливих умовах, виключаючи так званий форс-мажор.

Вважається, що час виконання роботи розподілено за бета-розподілом (див. Рис.6.1). Виходячи з цього очікувана середня час виконання роботи приблизно обчислюється за формулою

$$\mu=(a + 4m + b)/6. \quad (2)$$

А дисперсія

$$\sigma^2= ((b - a )/6)^2 \quad (3)$$

Оскільки вважається, що час виконання робіт є незалежними випадковими величинами з однаковими законами розподілу, то час виконання проекту є випадковою величиною з нормальним законом розподілу.

Послідовність виконання робіт при використанні ПЕРТ.

1. Знайти середнє значення і дисперсію для кожної роботи проекту.
2. Використовуючи як час виконання робіт їх середні, знайти критичний шлях.
3. Знайти дисперсію критичного шляху як суму дисперсій робіт критичного шляху.
4. Визначити довірчий інтервал для часу виконання проекту.
5. При необхідності розрахувати ймовірність виконання проекту впродовж заданого часу.

Ймовірність виконання проекту впродовж заданого часу обчислюється, виходячи з стандартного нормального розподілу з використанням  $Z$ -перетворення.

$$Z = \frac{T - T_{сер.}}{\sigma_T} \quad (4)$$

### Приклад виконання роботи

Розглянемо необхідність вивчення деякого набору курсів. Нам відомий перелік курсів, час, необхідний для їх вивчення в семестрах, і необхідна послідовність їх вивчення в тому разі, якщо деякий курс вимагає знань, отриманих на іншому. Ці дані зведені в табл. 9.1

Таблиця 9.1. Вихідна інформація для побудови мережного графіка (приклад)

Шифр курсу	Операція (навчальний курс)	Операції (курси), які повинні передувати	Час, необхідний для вивчення
A1	Математика	немає	1
A2	Диференційне числення	A1	1
A3	Інтегральне числення	A2	1
A4	Матриці і вектори	1	1
A5	Теорія ймовірностей	A1, A4, A3	1
A6	Математична статистика	A5	1
A7	Теорія графів	A1	1
A8	Математичне програмування	A2, A7, A4	2
A9	Методи оптимізації	A4, A2	1
A10	Спецдисципліна-1	A1	1
A11	Спецдисципліна-2	A10, A4, A6	2
A12	Спецдисципліна-3	A11, A7, A8	1
A13	Моделювання	A9, A6, A11	2

Побудована за цими вихідними даними мережа з пронумерованими подіями-вершинами показана на рис.9.2.

Операція – це вивчення певного курсу і вона має свою протяжність (час виконання). Операціям відповідають дуги (ребра) графа. Події (вершини графа) – це завершення



певного етапу в навчанні (в даному випадку), наприклад сесія. Можуть бути дуги нульової довжини. Вони виникають в тому випадку, коли для якоїсь події обов'язково потрібне виконання іншої події, а відповідних робіт, які їх зв'язували б, немає. Наприклад, якби у нас для вивчення курсу «Методи оптимізації» необхідно було б обов'язково спочатку вивчити курс «Математичне програмування», то нам потрібно було б додати дугу 6–7 з нульовою довжиною і, відповідно врахувати її в розрахунках критичного шляху.

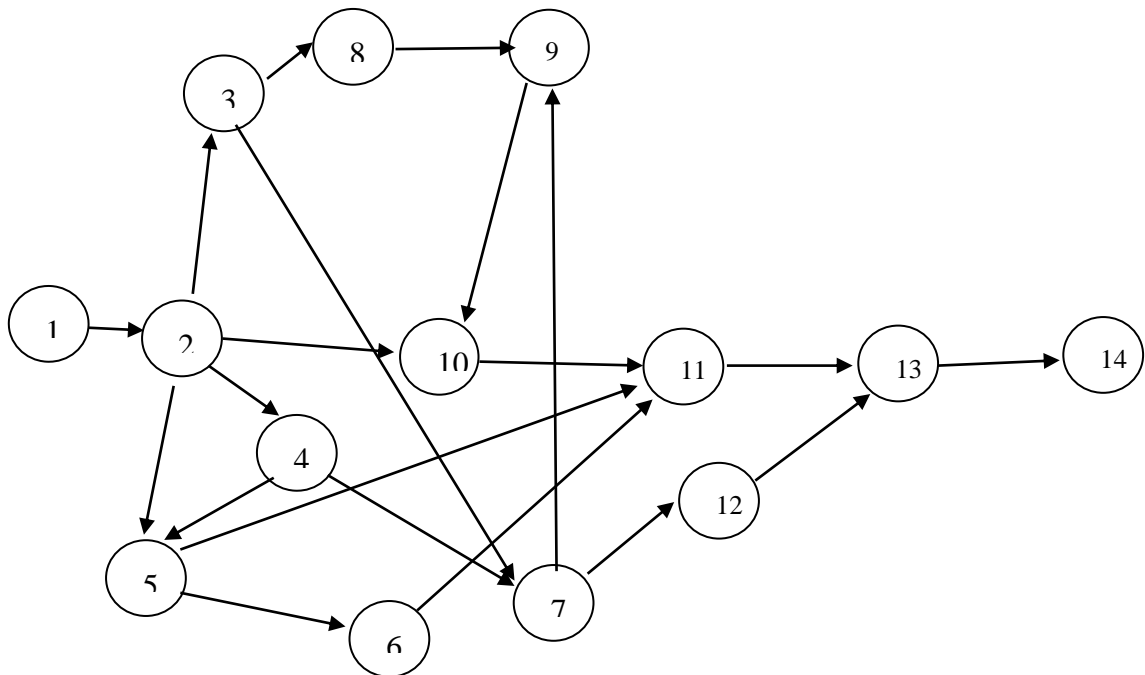


Рис.9.2. Мережа, побудована за вихідними даними

Відповідність дуг мережі і операцій показана в табл.9.2.

Таблиця 9.2. Відповідність дуг і операцій

Операція в термінах дуг графу	Операція (навчальний курс)
1–2	Математика
2–4	Диференційне числення
4–7	Інтегральне числення
2–3	Матриці і вектори
3–8	Теорія ймовірностей
8–9	Математична статистика
2–5	Теорія графів
5–6	Математичне програмування
7–12	Методи оптимізації
2–10	Спецдисципліна-1
10–11	Спецдисципліна-2
11–13	Спецдисципліна-3
13–14	Моделювання

Розрахуємо для кожної операції найбільш ранній термін завершення і найбільш пізній термін завершення користуючись описаними раніше алгоритмами.

$$E(1) = 0;$$

$$E(2) = \max (E(1)+t(1,2)) = 0 + 1 = 1;$$

$$E(3) = \max (E(2)+t(2,3)) = 1 + 1 = 2;$$

$$E(4) = \max (E(2)+t(2,4)) = 1 + 1 = 2;$$

$$E(5) = \max (E(2)+t(2,5); E(4) + t(4,5)) = \max (1 + 1; 2 + 0) = 2;$$

$$E(6) = \max (E(5)+t(5,6)) = 2 + 2 = 4;$$

$$E(7) = \max (E(3)+t(3,7); E(4) + t(4,7)) = \max (2 + 0; 2 + 1) = 3;$$

$$E(8) = \max (E(3)+t(3,8)) = 2 + 1 = 3;$$

$$E(9) = \max (E(8)+t(8,9); E(7)+t(7,9)) = \max (3 + 1; 3 + 0) = 4;$$

$$E(10) = \max (E(2)+t(2,10); E(9)+t(9,10)) = \max (1 + 1; 4 + 0) = 4;$$

$$E(11) = \max (E(5)+t(5,11); E(6)+t(6,11); E(10)+t(10,11)) = \max (2 + 0; 4 + 0; 4 + 2) = 6;$$

$$E(12) = \max (E(7)+t(7,12)) = 3 + 1 = 4;$$

$$E(13) = \max (E(11)+t(11,13); E(12)+t(12,13)) = \max (6 + 1; 4 + 0) = 7;$$

$$E(14) = \max (E(13)+t(13,14)) = 7 + 2 = 9;$$

Для визначення найбільш пізнього часу будемо вважати, що на вивчення всіх курсів виділяється 9 семестрів (тобто,  $L(n)=9$  ).

$$L(14) = 9;$$

$$L(13) = L(14) - t(13,14) = 9 - 2 = 7;$$

$$L(12) = L(13) - t(12,13) = 7 - 0 = 7;$$

$$L(11) = L(13) - t(11,13) = 7 - 1 = 6;$$

$$L(10) = L(11) - t(10,11) = 6 - 2 = 4;$$

$$L(9) = L(10) - t(9,10) = 4 - 0 = 4;$$

$$L(8) = L(9) - t(8,9) = 4 - 1 = 3;$$

$$L(7) = \min (L(9) - t(7,9); L(12) - t(7,12)) = \min (4 - 0; 7 - 0) = 4;$$

$$L(6) = L(11) - t(6,11) = 6 - 0 = 6;$$

$$L(5) = \min (L(6) - t(5,6); L(11) - t(5,11)) = \min (6 - 2; 6 - 0) = 4;$$

$$L(4) = \min (L(5) - t(4,5); L(7) - t(4,7)) = \min (4 - 0; 4 - 1) = 3;$$

$$L(3) = \min (L(8) - t(3,8); L(7) - t(3,7)) = \min (3 - 1; 4 - 0) = 2;$$

$$L(2) = \min (L(3) - t(2,3); L(4) - t(2,4); L(5) - t(2,5); L(10) - t(2,10)) = \min (2 - 1; 3 - 1; 4 - 1; 4 - 1) = 1;$$

$$L(1) = L(2) - t(1,2) = 1 - 1 = 0;$$

Результати розрахунків зведені в табл..9.3

Таблиця 9.3. Розраховані значення часу для подій

Подія	Найбільш ранній термін закінчення події	Найбільш пізній термін закінчення події
1	0	0

2	1	1
3	2	2
4	2	3
5	2	4
6	4	6
7	3	4
8	3	3
9	4	4
10	4	4
11	6	6
12	4	7
13	7	7
14	9	9

Тепер можна розрахувати повний резерв часу (результати див. в табл.9.4)

Таблиця 9.4. Розраховані значення часу для операцій

Код операції	Формула	Підставлені значення	Повний резерв часу операції
1-2	$L(2) - E(1) - t(1,2)$	1 - 0 - 1	0
2-4	$L(4) - E(2) - t(2,4)$	3 - 1 - 1	1
4-7	$L(7) - E(4) - t(4,7)$	4 - 2 - 1	1
2-3	$L(3) - E(2) - t(2,4)$	2 - 1 - 1	0
3-8	$L(8) - E(3) - t(3,8)$	3 - 2 - 1	0
8-9	$L(9) - E(8) - t(8,9)$	4 - 3 - 1	0
2-5	$L(5) - E(2) - t(2,5)$	4 - 1 - 1	2
5-6	$L(6) - E(5) - t(5,6)$	6 - 2 - 2	2
7-12	$L(12) - E(7) - t(7,12)$	7 - 3 - 1	3
2-10	$L(10) - E(2) - t(2,10)$	4 - 1 - 1	2
9-11	$L(11) - E(9) - t(9,11)$	6 - 4 - 11	0
11-13	$L(13) - E(11) - t(11,13)$	7 - 6 - 1	0
13-14	$L(14) - E(13) - t(13,14)$	9 - 7 - 2	0

З таблиці виходить, що критичний шлях проходить через події 1 - 2 - 3 - 8 - 9 -10- 11 -13 -14. Довжина його 9 семестрів.

Припустимо, що курси дозволено вивчати і здавати екстерном, тобто їх вивчення і здавання не прив'язані до певних терміні. В табл.9.5 представлені оцінки можливого часу для вивчення курсів в семестрах. При цьому найбільш ймовірний, оптимістичний і

песимістичний час, необхідний для вивчення визначаються експертним шляхом, а середній час і дисперсія часу розраховується за формулами (2) і (3).

Таблиця 9.5. Оцінки часу вивчення для методу ПЕРТ

Операція		Час вивчення				
Код операції	Операція (навчальний курс)	Найбільш ймовірний	Оптимістичний	Песимістичний	Середній час вивчення	Дисперсія
1–2	Математика	1	0,6	2	1,1	0,33
2–4	Диференційне числення	1	0,6	2	1,1	0,33
4–7	Інтегральне числення	1	0,6	2	1,1	0,33
2–3	Матриці і вектори	1	0,5	1,5	1	0,17
3–8	Теорія ймовірностей	1	0,6	2	1,1	0,33
8–9	Математична статистика	1	0,6	2	1,1	0,33
2–5	Теорія графів	1	0,5	1,5	1,05	0,17
5–6	Математичне програмування	2	1	3	2	0,67
7–12	Методи оптимізації	1	0,5	3	1,25	1,04
2–10	Спецдисципліна-1	1	0,6	2	1,1	0,33
9-11	Спецдисципліна-2	2	1,2	4	2,2	1,31
11–13	Спецдисципліна-3	1	0,6	2	1,1	0,33
13–14	Моделювання	2	1	3	2	0,67

Тепер уже описаним методом знайдемо критичний шлях, вважаючи часом виконання операції розрахований середній час (табл..9.5).

$$E(1) = 0;$$

$$E(2) = \max (E(1)+t(1,2)) = 0 + 1,1 = 1,1;$$

$$E(3) = \max (E(2)+t(2,3)) = 1,1 + 1 = 2,1;$$

$$E(4) = \max (E(2)+t(2,4)) = 1,1 + 1,1 = 2,2;$$

$$E(5) = \max (E(2)+t(2,5); E(4) + t(4,5)) = \max (1,1 + 1,05; 2,2 + 0) = 2,2;$$

$$E(6) = \max (E(5)+t(5,6)) = 2,2 + 2 = 4,2;$$

$$E(7) = \max (E(3)+t(3,7); E(4) + t(4,7)) = \max (2,1 + 0; 2,2 + 1,1) = 3,3;$$

$$E(8) = \max (E(3)+t(3,8)) = 2,1 + 1,1 = 3,2;$$

$$E(9) = \max (E(8)+t(8,9); E(7)+t(7,9)) = \max (3,2 + 1,1; 3,3 + 0) = 4,3;$$

$$E(10) = \max (E(2)+t(2,10); E(9)+t(9,10)) = \max (1,1 + 1,1; 4,3 + 0) = 4,3;$$

$$E(11) = \max (E(5)+t(5,11); E(6)+t(6,11); E(10)+t(10,11)) = \max (2,2 + 0; 4,2 + 0; 4,3 + 2,2) = 6,5;$$

$$E(12) = \max (E(7)+t(7,12)) = 3,3 + 1,25 = 4,55;$$

$$E(13) = \max (E(11)+t(11,13); E(12)+t(12,13)) = \max (6,5 + 1,1; 4,55 + 0) = 7,6;$$

$$E(14) = \max (E(13)+t(13,14)) = 7,6 + 2 = 9,6;$$

Для визначення найбільш пізнього часу будемо вважати, що на вивчення всіх курсів виділяється 9,6 семестри (тобто,  $L(n)=9,6$ ).

$$L(14) = 9,6;$$

$$L(13) = L(14) - t(13,14) = 9,4 - 2 = 7,6;$$

$$L(12) = L(13) - t(12,13) = 7,4 - 0 = 7,6;$$

$$L(11) = L(13) - t(11,13) = 7,6 - 1,1 = 6,5;$$

$$L(10) = L(11) - t(10,11) = 6,5 - 2,2 = 4,3;$$

$$L(9) = L(10) - t(9,10) = 4,3 - 0 = 4,3;$$

$$L(8) = L(9) - t(8,9) = 4,3 - 1,1 = 3,2;$$

$$L(7) = \min (L(9) - t(7,9); L(12) - t(7,12)) = \min (4,3 - 0; 7,6 - 0) = 4,3;$$

$$L(6) = L(11) - t(6,11) = 6,5 - 0 = 6,5;$$

$$L(5) = \min (L(6) - t(5,6); L(11) - t(5,11)) = \min (6,5 - 2; 6,5 - 0) = 4,5;$$

$$L(4) = \min (L(5) - t(4,5); L(7) - t(4,7)) = \min (4,5 - 0; 4,3 - 1,1) = 3,3;$$

$$L(3) = \min (L(8) - t(3,8); L(7) - t(3,7)) = \min (3,2 - 1,1; 4,2 - 0) = 2,1;$$

$$L(2) = \min (L(3) - t(2,3); L(4) - t(2,4); L(5) - t(2,5); L(10) - t(2,10)) = \min (2,1 - 1; 3,3 - 1,1; 4,5 - 1; 4,3 - 1,1) = 1,1;$$

$$L(1) = L(2) - t(1,2) = 1,1 - 1,1 = 0;$$

Результати його пошуку приведені в табл.6.6 і 6.7.

Таблиця 9.6. Розраховані значення часу для подій

Подія	Найбільш ранній термін закінчення події	Найбільш пізній термін закінчення події
1	0	0
2	1,1	1,1
3	2,1	2,1
4	2,2	3,3
5	2,2	4,5
6	4,2	6,5
7	3,3	4,3
8	3,2	3,2
9	4,3	4,3

10	4,3	4,3
11	6,5	6,5
12	4,55	7,6
13	7,6	7,6
14	9,6	9,6

Тепер можна розрахувати повний резерв часу (результати див. в табл..9.7)

Таблиця 9.7. Розраховані значення часу для операцій

Код операції	Формула	Підставлені значення	Повний резерв часу операції
1-2	$L(2) - E(1) - t(1,2)$	$1,1 - 0 - 1,1$	0
2-4	$L(4) - E(2) - t(2,4)$	$3,3 - 1,1 - 1,1$	1,1
4-7	$L(7) - E(4) - t(4,7)$	$4,3 - 2,2 - 1,1$	1
2-3	$L(3) - E(2) - t(2,4)$	$2,1 - 1,1 - 1$	0
3-8	$L(8) - E(3) - t(3,8)$	$3,2 - 2,1 - 1,1$	0
8-9	$L(9) - E(8) - t(8,9)$	$4,3 - 3,2 - 1,1$	0
2-5	$L(5) - E(2) - t(2,5)$	$4,5 - 1,1 - 1$	2,3
5-6	$L(6) - E(5) - t(5,6)$	$6,5 - 2,2 - 2$	2,3
7-12	$L(12) - E(7) - t(7,12)$	$6 - 3 - 1$	2
2-10	$L(10) - E(2) - t(2,10)$	$4,55 - 1,1 - 1,1$	2,35
9-11	$L(11) - E(9) - t(9,11)$	$6,5 - 4,3 - 2,2$	0
11-13	$L(13) - E(11) - t(11,13)$	$7,6 - 6,5 - 1,1$	0
13-14	$L(14) - E(13) - t(13,14)$	$9,6 - 7,6 - 2$	0

З неї виходить, що критичний шлях проходить через події 1 – 2 – 3 – 8 – 9 – 10 – 11 – 13 – 14. Довжина його 9,6 семестрів.

Дисперсія для часу виконання проекту – 3,45. Відповідно можливо розрахувати довірчий інтервал для середнього часу проекту. Напівширину довірчого інтервалу в Excel можна розрахувати за допомогою функції =ДОВЕРИТ(0,05;1,856;7). Тут 0,05 – рівень значущості; 7 – розмір вибірки, а 1,856 – стандартне відхилення, котре визначається як корінь квадратний з дисперсії.

Крім того, можливо розрахувати ймовірність виконання проекту за певний час. Тут також можемо скористатись засобами Excel. Функція =НОРМСТРАСП((9-9,6)/ 1,856) дозволить визначити ймовірність закінчити вивчення за 9 семестрів. Вона буде 0,373. За 10 семестрів – 0,585. І тільки за 12 семестрів ймовірність буде 0,901. Це зв'язано з відносно великим розсіянням оцінок часу вивчення окремих курсів.

### Контрольні запитання.

1. Які вихідні дані необхідні для побудови мережного графіку виконання проекту?

2. Що таке події і операції в мережному графіку.
3. Як визначається найбільш ранній термін закінчення події. Фізична сутність.
4. Як визначається найбільш пізній термін закінчення події. Фізична сутність.
5. Як визначається повний резерв часу операції.
6. Як визначається критичний шлях. Фізична сутність його.
7. Які дані необхідні для використання методу ПЕРТ.
8. Які припущення лежать в основі використання статистичних методів в ПЕРТ.
9. Що використовується як час виконання операції в ПЕРТ.
10. Які статистичні характеристики і як визначаються в ПЕРТ.

### **Література**

1. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах М.: Мир, 1981, - 323с.
2. Филиппс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей -М.: Мир, 1984. - 496с.