Лекція 6. Функція. Границя функції в точці.

План.

6.1. Функція. Основні поняття і означення. Основні елементарні функції.
6.2. Границя функції в точці.
6.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Важливі границі:
6.4. Неперервні функції.

6.1. Функція. Основні поняття і означення.

Означення. ***Функцією y = f(x)*** називається така відповідність між множинами D і E, за якої кожному значенню змінної x відповідає одне й тільки одне значення змінної y.

При цьому вважають, що:

x — незалежна змінна, або аргумент;
y — залежна змінна, або функція;
f — символ закону відповідності;
E — область визначення функції;
D — множина значень функції.

Означення. ***Областю визначення функції*** $y=f(x)$ називається множина значень, які набуває незалежна змінна x. Позначається $D(f)$.

Означення. ***Областю значень функції*** $y=f(x)$ називається множина значень, яких набуває залежна змінна y при всіх значеннях x з області визначення функції. Позначається $E(f)$.

Означення. ***Графіком функції*** $y=f(x)$ називається множина точок $M(x, f(x))$ координатної площини, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями цієї функції.

Розрізняють три способи завдання функції: аналітичний, графічний і табличний.

Класифікація функцій за їхніми властивостями.

1. Обмежені та необмежені функції.

Означення. Функція $y=f(x)$, визначена на множині *X*, називається ***обмеженою зверху (знизу)*** на цій множині, якщо множина її значень обмежена зверху (знизу). Іншими словами, $\exists M \in R,$ що $\forall x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq M)$.

Означення. Функція $y=f(x)$, обмежена зверху і знизу на множині *X*, називається просто ***обмеженою*** на цій множині.

Означення. Функція $y=f(x)$, визначена на множині *X*, і така, що не є обмеженою зверху (знизу) на цій множині, називається ***необмеженою*** зверху (знизу) на цій множині.

Приклад. Функція $y = sinx$ обмежена на *R*, функція $y = x^2$ - обмежена знизу на R і необмежена зверху на *R*, функція $y = x^3$ – необмежена на *R*. *(R- множина дійсних чисел, область визначення кожної функції).*

2. Парні та непарні функції.

Означення. Функція $y=f(x)$, називається ***парною (непарною)***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і :

$$y(-x) = y(x) \text{ −функція парна;}$$

$$y(-x) = -y(x) - \text{ функція непарна.}$$

Графік парної функції симетричний відносно осі координат ($y = x^2$), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат ($y = x^3$).

3. Монотонні функції.

Означення. Функція $y=f(x)$, визначена на множині *X*, називається:

- ***зростаючою*** - якщо на цій множині більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції ($\forall x \in X$: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- ***спадною*** - якщо на цій множині більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції ($\forall x \in X$: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- ***не зростаючою*** - якщо на цій множині більшому значенню аргументу відповідає не менше значення функції ($\forall x \in X$: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
- ***неспадною*** - якщо на цій множині більшому значенню аргументу відповідає не більше значення функції ($\forall x \in X$: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Зростаюча, спадна, не зростаюча, неспадна функції називаються ***монотонними***.

4. Періодичні функції.

Означення. Функція $y=f(x)$, визначена на множині X, називається ***періодичною***, якщо $\exists\, T \neq 0,$ що $f(x+T)=f(x)\ \ \forall x \in X.$

Приклад. Періодичними є тригонометричні функції $y = sinx,\ \ y = cosx\ \ (T = 2\pi k, k \in Z), y = tgx, y = ctgx\ (T = \pi k,\ k \in Z)$.

Складна функція, обернена, неявно і параметрично задані функції.

1. Означення. Функція $y = F(u)$, де $u = v\,(x)$, називається ***складною*** (*складеною*) *функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $v\,(x)$, і позначається $y = F(v\,(x))$.

Приклад. Функція $y = 3^{cos2x}$- складна, вона є суперпозицією трьох функцій: $y = 3^{u(v(x))}; u = \cos(2x+1)\,; = 2x+1.$

2. Означення. Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається ***оберненою*** до даної $y = f(x)$, її позначають $y = f^{-1}(x)$.

Приклад. Функції $y = x^3$ та $y = \sqrt[3]{x}$ – взаємно обернені.
Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

3. Означення. Функція називається ***неявною***, якщо її задано рівнянням $F(x;y) = 0$, яке не розв’язане відносно змінної y.

Приклад. $x^2 + y^2 = 2^y$.

4. Означення. Система рівнянь $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ виражає змінну x та її функцію y=f(x) як функції від параметру t.

Приклад. Система рівнянь $\begin{cases} x = rcost \\ y = rsint \end{cases}$ визначає коло радіуса r з центром у початку прямокутної декартової системи координат.

Основні елементарні функції, їх властивості та графіки

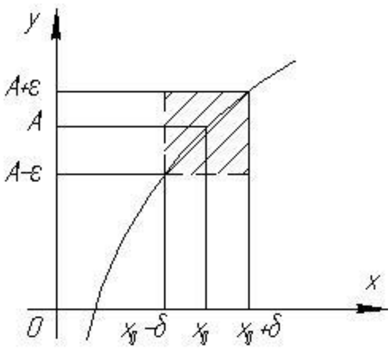
(дивитися додаток «Основні елементарні функції»)

6.2. Границя функції в точці.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = x_0$ за винятком, хіба що, самої точки $x = x_0$.

Означення. Число А називається ***границею функції*** $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність: $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пишуть: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.



На малюнку показано:

$(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ - δ - окіл точки x_0

$(A - \varepsilon;\ A + \varepsilon)$ - ε - окіл точки A

Тоді геометрично це означає: що будь – якій точці з δ - околу відповідає деяка точка з ε - околу.

Функція *f(x)* не може мати двох різних границь в одній точці.

Розглянемо ***основні властивості границь*** при умові, що кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має скінченну границю при $x \to x_0$:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c; \quad c = const$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{c \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}; \qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

Наслідки:

1. Постійний множник можна виносити за знак границі $\lim\limits_{x\to x_0}(C\cdot f(x)) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ для будь-якого постійного числа *С*.
2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує, то для довільного натурального *m* має місце формула:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^m = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^m$$

Приклади обчислення границь.

Приклад 1: Знайти $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 7x + 4)$.

Розв'язок.

Функція $f(x) = x^2 - 7x + 4$ - ціла раціональна. Замінимо в аналітичному виразі функцію х його граничним значення і отримаємо

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 7x + 4) = 3^2 - 7\cdot 3 + 4 = -8.$$

Приклад 2: Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 8}$.

Розв'язок.

Будемо шукати границю дробово-раціональної функції. Перш ніж підставляти граничне значення *х*, перевіримо, чи не обертається в нуль знаменник дробу при *х* = 3.

Перевіряємо: $3^2 + 2\cdot 3 + 8 = 23 \neq 0$

Тоді:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 8} = \frac{3^2 + 3 + 2}{3^2 + 2\cdot 3 + 8} = \frac{14}{23}.$$

Приклад 3: Якщо чисельник функції – стала величина, а границя знаменника дорівнює нулю, то границя такої функції є нескінченність.

$$\lim_{x\to 2}\frac{6}{4x - 8} = \infty$$

Приклад 4: Якщо функція дробово – раціональна, то для знаходження границі чисельник і знаменник розкладають на множники, які потім скорочують, причому скоротитись повинен той множник, який обертається в нуль

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{3x\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}.$$

Приклад 5: Якщо функція містить знаки радикалів, то чисельник і знаменник помножають на вираз, спряжений до чисельника (знаменника), а потім застосовують формулу різниці квадратів. Вирази $\sqrt{a}-b\ і\ \sqrt{a}+b$ та $\sqrt{a}-\sqrt{b}\ \ і\ \ \sqrt{a}+\sqrt{b}$ називаються спряженими.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{\sqrt{5x+1}-4}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{\left(\sqrt{5x+1}-4\right)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{\left(\sqrt{5x+1}\right)^2-4^2}=$$

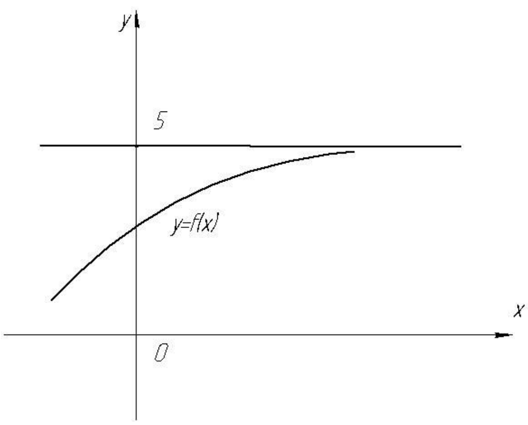
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{5\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)(\sqrt{5x+1}+4)}{5}=\frac{(3+5)(\sqrt{5\cdot 3+1}+4)}{5}=\frac{8\cdot 8}{5}=\frac{64}{5}$$

Приклад 6: Якщо функція містить корінь третього степеня, то чисельник і знаменник помножають на неповний квадрат суми або різниці, а потім застосовують формулу суми або різниці кубів.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1^3}{x\cdot\left(3\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

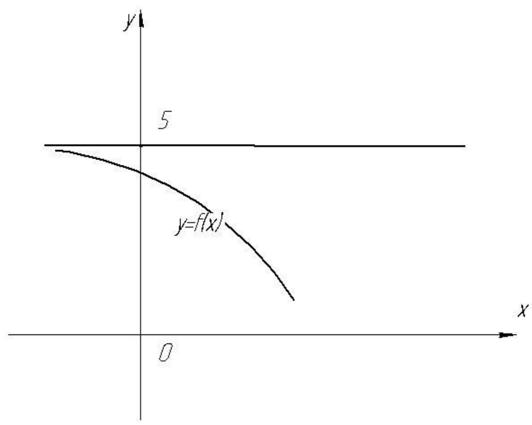
Границя функції при умові $x\to\infty$.



На малюнку показано функцію, для якої виконується умова: якщо значення аргумента необмежено зростають, то значення функції $f(\mathrm{x})\approx 5$. В подальшому той факт, що значення аргумента необмежено зростають будемо записувати таким чином: $x\to\infty$. Тоді число 5 будемо називати границею даної функції при умові, що $x\to\infty$.

Означення. Число А називається границею даної функції при x, що прямує до плюс нескінченності, якщо для любого числа існує таке додатнє число М, що при всіх значеннях аргумента x з області визначення, таких, що x > М, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Використовують таку форму запису: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.



На малюнку показано функцію, для якої виконується умова: якщо значення аргумента необмежено ззменьшується, то значення функції $f(x) \approx 5$. В подальшому той факт, що значення аргумента необмежено зменьшується будемо записувати таким чином: $x \to -\infty$. Тоді число 5 будемо називати границею даної функції при умові, що $x \to -\infty$.

Означення. Число А називається границею даної функції при x, що прямує до мінус нескінченності, якщо для любого числа існує таке додатнє число М, що при всіх значеннях аргумента x з області визначення, таких, що x < –М, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Використовують таку форму запису: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

6.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Важливі границі.

Означення 1. Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою*** величиною при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Властивості нескінченно великих функцій:

1. Якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ має скінченну границю $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b\right)$, а функція $\varphi(x)$ – нескінченно велика $\left(\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty\right)$, то сума цих функцій – нескінченно велика функція, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + \varphi(x)) = \infty$; а границя відношення $f(x)$ до $\varphi(x)$ дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$$

2. Добуток двох нескінченно великих функцій – функція нескінченно велика, тобто, якщо $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ і $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)=\infty$$

Означення 2. Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою*** величиною при $x\to x_0$, якщо $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$.

Властивості нескінченно малих функцій:

1. Якщо функція f(x) нескінченно мала при $x\to x_0$, то і функція $-f(x)$ також є нескінченно малою при $x\to x_0$.
2. Якщо функції *f(x)* і *φ(x)* нескінченно малі при $x\to x_0$, то їх сума і різниця *f(x)+φ(x), f(x)-φ(x)* також є нескінченно малими функціями при $x\to x_0$.
3. Якщо при $x\to x_0$ функція *f(x)* нескінченно мала, а функція *φ(x)* – обмежена, то їх добуток *f(x)φ(x)* – нескінченно мала функція.

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими функціями:

1. Якщо *f(x)* при $x\to x_0$ - нескінченно велика функція , то функція $\frac{1}{f(x)}$ - нескінченно мала.
2. Якщо при $x\to x_0$ функція *φ(x)* - нескінченно мала, то функція $\frac{1}{\varphi(x)}$ - нескінченно велика, при цьому функція *φ(x)* не перетворюється на нуль в околі точки x_0.

Правила порівняння нескінченно малих величин.

Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ нескінченно малі величини при $x\to x_0$, тоді:

1) якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=A\neq 0$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку;

2) якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=0$, то $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$;

3) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\infty$, то $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$;

4) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються еквівалентними нескінченно малими ($\alpha_1(x) \approx \alpha_2(x)$);

Приклад. Довести, що функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x\to 0$ є нескінченно малими одного порядку, якщо $f(x)=\dfrac{3x}{1-x}$ і $\varphi(x)=\dfrac{x}{4+x}$.

Тоді: $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{1-x}\cdot\frac{4+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{12+3x}{1-x}=\frac{3}{-1}=-3$$

Основні пари еквівалентних нескінченно малих функцій.

$\sin x \sim x,\quad x\to 0$

$tgx \sim x,\quad x\to 0$

$\arcsin x \sim x,\quad x\to 0$

$arctgx \sim x,\quad x\to 0$

$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2},\quad x\to 0$

$e^x-1\sim x,\quad x\to 0$

$a^x-1\sim x\ln a,\quad x\to 0$

$\log_a(1+x)\sim x\log_a e,\quad x\to 0$

$\ln(1+x)\sim x,\quad x\to 0$

$(1+x)^k-1\sim kx,\quad x\to 0,\ k>0$

Приклад. Користуючись основними еквівалентностями, обчислити границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}=\begin{bmatrix} arctg\frac{7}{4}x\sim\frac{7}{4}x \\ e^{-2x}-1\sim -2x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x}{2x}=\frac{7}{8}.$$

Важливі границі.

При обчисленні границь часто використовують такі границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=0$$ **- перша важлива границя**

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k,\ \ k\neq 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}=k,\ \ k\neq 0$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ - друга важлива границя

Зауваження: зазначимо, що число e = 2,7183... є основою натуральних логарифмів $lna = log_e a$. Взагалі, число e, як і число π = 3,14 ..., широко застосовують при розв’язку різноманітних задач з різних галузей знань.

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$.

Приклади. Обчислити границі.

1. Границя функції, яка представляє собою многочлен, при $x\to\infty$ є нескінченність.

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x^2+4x-2\right)=\infty$$

2. Границя на нескінченності дробово – раціональної функції, у якої степінь чисельника і знаменника однакові дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших членах.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

3. Границя на нескінченності дробово – раціональної функції, у якої степінь чисельника менша за степінь знаменника, дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^3+x-6}=0.$$

4. Границя на нескінченності дробово – раціональної функції, у якої степінь чисельника більша за степінь знаменника, дорівнює нескінченності.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-4x+2}{x^3+8x-6}=\infty.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(sin2x\cdot ctg3x)=\{o\cdot\infty\}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{tg3x}{3x}}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos3x}{\frac{sin3x}{3x}}=\frac{2}{3}.$

6. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\begin{bmatrix} y=x-\frac{\pi}{3} \\ x\to\frac{\pi}{3},\ \text{то}\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}=\{1^{\infty}\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{-3}\cdot$
$\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{2x}=1\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{-x}\right)^{-2}=e^{-2}.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+3}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\Big(1+$
$+\frac{3}{x^2-1}\Big)^{2(x^2-1)+5}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)}\right)^2\cdot\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)\right)^5=(e^3)^2\cdot 1=$
$=e^6.$

6.4. Неперервність функції.

Односторонні границі функції.

Якщо шукають границю функції *f(x)* за умови, що *x*, прямуючи до x_0, може приймати тільки такі значення, які менші за x_0, то цю границю, якщо вона існує, називають *границею функції f(x) зліва в точці* x_0 і позначають $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

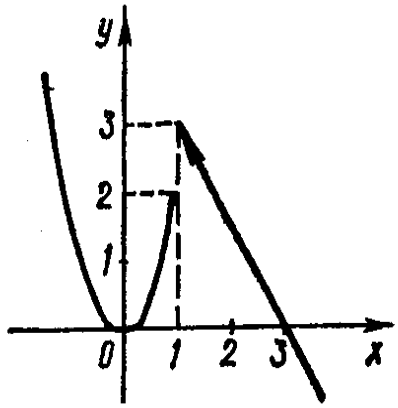
Якщо шукають границю функції *f(x)* за умови, що *x*, прямуючи до x_0, може приймати тільки такі значення, які більші за x_0, то цю границю, якщо вона існує, називають *границею функції f(x) справа в точці* x_0 і позначають $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Границя функції *f(x)* при $x\to x_0$ існує тоді і тільки тоді, коли існують і рівні між собою границя зліва і границя справа цієї функції, тобто:
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Приклад Знайти односторонні границі функції $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 0;\\ \dfrac{-3x+9}{2}, x>1\end{cases}$ в точці $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} 2x^2=2\cdot 1=2.$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} \frac{-3x+9}{2}=\frac{-3\cdot 1+9}{2}=3.$$



Односторонні границі функції в точці $x_0=1$ існують, але оскільки вони не рівні між собою, то границя функції f(x) в точці $x_0=1$ не існує.

Неперервність функції.

Означення . Якщо границя функції *f(x)* при $x\to x_0$ існує і дорівнює значенню функції в точці $x=x_0$, то функція *f(x)* називається ***неперервною в точці*** x_0**:**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Таким чином, функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;
2) існують односторонні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;
3) односторонні границі рівні між собою і дорівнюють значенню функції в точці x_0.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$$

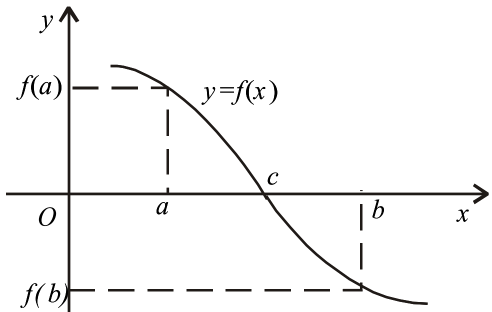
Якщо хоча б одна з умов не виконується, то точку x_0 називають ***точкою розриву функції.***

Властивості неперервних функцій.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці $x = x_0$, то у цій точці будуть неперервними функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; в останньому випадку за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

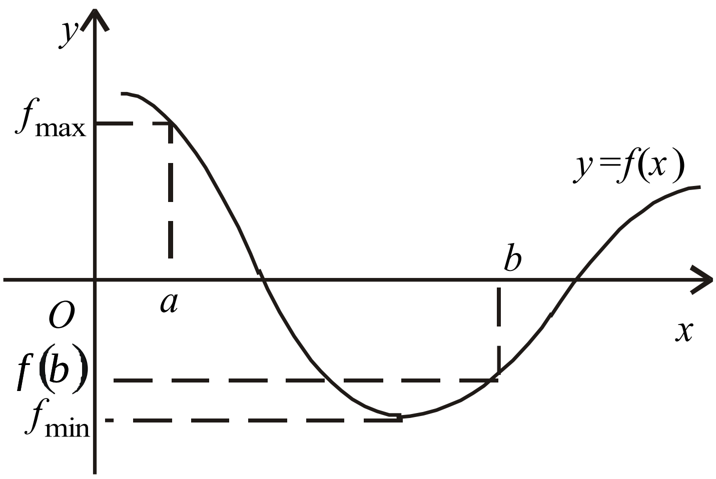
Теорема 2. Якщо функція $y = F(u)$ — неперервна для $u \in U$, а функція $u = \varphi(x)$ — неперервна для $x \in X$ і значення функції $\varphi(x) \in U$, то складна функція $y = F(\varphi(x))$ — неперервна для $x \in X$.

Теорема 3 (Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і на його кінцях проміжку набуває значення різних знаків (наприклад $f(a) > 0$, $f(b) < 0$), тоді на проміжку $(a;\ b)$ існує така точка x = с, що $f(c) = 0$



Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $f(a) = A$, $f(b) = B$, то $y = f(x)$ на $[a;b]$ набуває всіх проміжних значень між числами A і B.

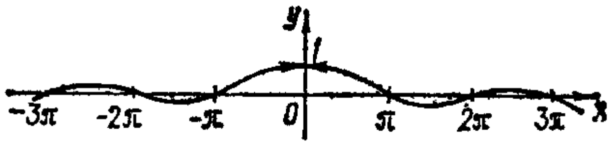
Теорема 4 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізкуку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших й найменших значень



Класифікація точок розриву.

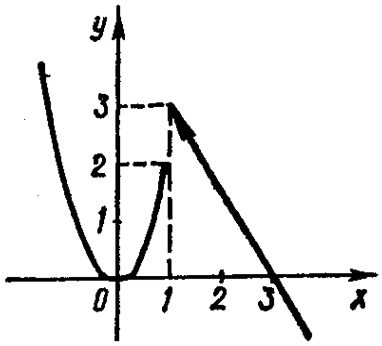
1. ***Точки розриву I-го роду.***
   1) Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має скінченну границю зліва і справа і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції $f(x)$ в точці x_0 або значення $f(x_0)$ не існує, то точку x_0 називають точкою усувного розриву функції.

Наприклад, для функції $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ точка $x=0$ є точкою усувного розриву, оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$, але значення функції в точці $x=0$ не існує.



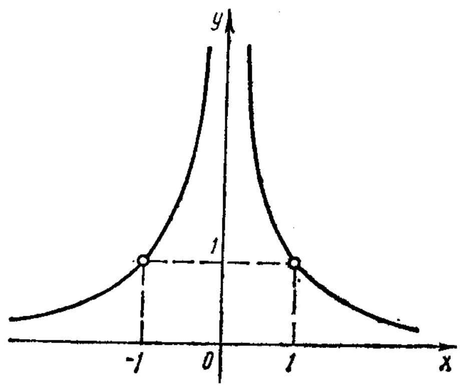
   2) Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має границю зліва і справа, причому $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точку x_0 називають точкою розриву функції зі скінченним стрибком. Величину $\delta=\left|\lim\limits_{x\to a-0} f(x)-\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right|$ називають стрибком функції $f(x)$ в точці x_0.

Наприклад, для функції $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 0;\\ \frac{-3x+9}{2}, x>1\end{cases}$ точка $x_0=1$ є точкою розриву, стрибок функції в цій точці дорівнює $\delta=|2-3|=1$.



2. ***Точки розриву II-го роду.*** Кожна точка розриву II роду характеризується тим, що в ній функція не має хоча б однієї з односторонніх границь.

Наприклад, для функції $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, тобто односторонні границі в точці $x_0=0$ не існують. Тому $x_0=0$ - точка розриву функції II роду.



Асимптоти функції.

Означення. ***Асимптотою*** графіка функції $y=f\left(x\right)$ називається пряма лінія, до якої графік функції наближається на нескінченності.

Вертикальною асимптотою є пряма $x=a$, якщо виконується умова $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\infty$.

Для функції $y=f\left(x\right)$ вертикальні асимптоти існують в її точках розриву другого роду.

Похилу асимптоту шукають у вигляді $y=kx+b$, а параметри k і b шукають за формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right).$$

Якщо хоча б одна границя не існує, то похила асимптота відсутня.

Приклади розв'язку вправ.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

Область визначення цієї функції $x\subset\left(-\infty;1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Розрив функція має в точці $x=1$. Обчислимо границі:

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=\left|\begin{array}{l} x\to 1-0(x<1) \\ x-1\to -0 \\ \dfrac{1}{x-1}\to-\infty \\ 2^{-\infty}\to\dfrac{1}{2^{+\infty}}\to+0 \end{array}\right|=+0;$$

$$\lim_{x\to1+0} y = \lim_{x\to1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x\to1+0(x>1) \\ x-1\to+0 \\ \dfrac{1}{x-1}\to+\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} x-1 \text{ при } x \ge -2; \\ x+1 \text{ при } x < -2. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $(-\infty;-2)$ і $(-2;+\infty)$ функція неперервна. Отже розглянемо односторонні границі функції у точці $x = -2$.

$$\lim_{x\to-2-0} y = \left| \begin{array}{c} (x\to-2-0)\Rightarrow \\ \Rightarrow(x<-2)\Rightarrow \\ \Rightarrow y=x+1 \end{array} \right| = \lim_{x\to-2-0}(x+1) = -1-0;$$

$$\lim_{x\to-2+0} y = \left| \begin{array}{c} (x\to-2+0)\Rightarrow \\ \Rightarrow(x>-2)\Rightarrow \\ \Rightarrow y=x-1 \end{array} \right| = \lim_{x\to-2+0}(x-1) = -3+0.$$

Отже, точка $x = -2$ — точка розриву 1-го роду, бо односторонні границі функції у цій точці існують, але не рівні між собою.

Контрольні запитання.

1. Що називається границею функції?
2. Сформулюйте властивості границь.
3. Сформулюйте та покажіть на прикладах правила обчислення границь.
4. Яка функція називається нескінченно малою, нескінченно великою?
5. Сформулюйте властивості нескінченно малих величин.
6. Сформулюйте правила порівняння нескінченно малих величин.
7. Назвіть основні пари еквівалентних нескінченно малих функцій.
8. Запишіть першу та другу важливі границі.
9. Як Ви розумієте односторонні границі функції?

10. Яка функція називається неперервною в точці?
11. Які виконуються умови, якщо функція неперервна в точці?
12. Сформулюйте властивості неперервних функцій.
13. Яка існує класифікація точок розриву, покажіть на прикладах..
14. Що називається асимптотою функції, покажіть на прикладах.