

Практична робота 3.

РОЗВ'ЯЗУАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ РЕСУРСІВ

3.1. Вихідні дані

Дано.

Для здійснення деякої відомої множини різних ТП:

- виготовлення j -их видів продукції;
- підприємство використовує деяку множину A ресурсів;
- величина запасів B кожного A_i виду ресурсу обмежена;
- відома також норма витрат a_{ij} кожного виду ресурсу A_i на виготовлення одиниці продукції j -го виду.

Визначити оптимальний план виробництва (кількість виготовленої продукції кожного виду), щоб прибуток підприємства був максимальний.

3.2. Короткі теоретичні відомості та математичне моделювання задач оптимального розподілення ресурсів

В загальному випадку задачі оптимального розподілу ресурсів можуть бути сформульовані таким чином.

Підприємство розпоряджається різними видами ресурсів. Серед таких ресурсів можуть бути:

- матеріально-речові, (наприклад, сировина);
- енергетичні;
- трудові;
- технічні;
- фінансові та інші.

Ресурси кожного виду можуть бути розділені на класи:

- сировина – за видами сировини;
- трудові – за професіями і кваліфікаціями працівників;
- технічні – за технічними характеристиками;
- фінансові – за джерелами фінансування тощо.

Нехай в результаті такого поділу вийшло m видів ресурсів. Ресурси різних видів можуть вимірюватися в різних одиницях (тоннах, кубометрах, людино-годинах, гривнях, штуках тощо).

Протягом планового періоду підприємство володіє деякими доступними обсягами ресурсу кожного виду. Обсяг ресурсу i -го виду, виміряний в одиницях, відповідних даному виду ресурсу, можна позначити b_i , де i – індекс, який вказує на те, що доступні обсяги ресурсів різних видів можуть бути різними.

З цих ресурсів підприємство може виготовляти різну продукцію. Продукція, як і ресурси, може вимірюватися в різних одиницях.

Крім того, підприємство реалізує кожен одиницю виготовленого виду продукції за відповідною ціною, яка для різних видів продукції може бути різною.

Виробництво продукції вимагає витрат ресурсів, об'єм витрат залежить від:

При цьому можливі варіації задачі оптимального розподілення ресурсів, що враховують специфічні особливості ситуації, що моделюється. В цих випадках математична модель, зокрема, обмеження (3.2) дещо модифікуються.

Найбільш поширені варіанти задачі оптимального розподілу ресурсів наступні.

3.2.1. Задачі оптимального розподілу ресурсів із встановленням верхньої та нижньої межі плану

Попит на ті чи інші види продукції може бути обмежений. Підприємство за своїми виробничими можливостями та/або за ресурсами може випустити більше продукції, ніж зможе потім реалізувати. Модель оптимального розподілу ресурсів, зокрема, обмеження задачі, в цих нових умовах формується із узагальненої моделі (3.2) за допомогою простої модифікації, а саме:

нехай обсяг реалізації j -го виду продукції обмежений величиною d_j . Тоді до системи обмежень (3.2) слід дописати нерівності, що обмежують обсяги виробництва "зверху".

В такому випадку обмеження задачі, що враховують обмеженість обсягів реалізації продукції, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^J a_{ij} x_j \leq b_i; \\ x_j \geq 0, x_j \leq d_j, \end{cases} \quad (3.3)$$

де d_j – обмеження обсягів реалізації продукції j -го виду.

У іншому випадку в задачі можуть бути обмеження протилежного змісту. Наприклад, підприємство має договори із споживачами продукції на поставку всіх або деяких видів продукції, що виготовляються. Відповідно до цих договорів підприємство має випустити продукцію в обсязі, не менше заданого.

Нехай продукцію j -го виду підприємство повинно виготовити в обсязі, не менше заданої величини d'_j . Тоді до системи обмежень (3.2) необхідно дописати нерівності, що обмежують обсяги виробництва "знизу".

В даному контексті обмеження задачі, що враховують обмеженість обсягів виготовлення продукції, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^J a_{ij} x_j \leq b_i; \\ x_j \geq 0, x_j \geq d'_j, \end{cases} \quad (3.4)$$

де d'_j – обмеження обсягів виготовлення продукції j -го виду.

3.3. Приклад розв'язування задачі оптимального розподілу ресурсів



Умова.

На ковальсько-штампувальному заводі виготовляють чотири види поковок валів для автомобільної промисловості «АвтоКрАЗ», «АвтоЗАЗ»:

- K545 (65053-2220025) – вал ведучий опори проміжної;
- K546 (65053-2220026) – вал ведений опори проміжної;
- K540 (260-1802176-10) – вал приводу мосту середнього;
- K541 (6443-1802176) – вал приводу.

Виготовлення поковок проводиться методом гарячого видавлювання.

Інформація щодо видів ресурсів, необхідних для виготовлення поковок, витрат ресурсів на виробництво кожного виду продукції, величини їх запасів та доходах, отримуваних від реалізації одиниці поковки кожного виду, приведена в табл. 3.1.

Необхідно знайти такий місячний план виготовлення поковок, при якому прибуток підприємства буде максимальним, а витрати ресурсів не перевищать їх наявних об'ємів.

Таблиця 3.1

Вихідні дані для розв'язування задачі оптимального розподілу ресурсів

№ з/п	Види ресурсів	Норма витрат ресурсів на одиницю виробу				Величина запасів ресурсів
		вал ведучий опори проміжної K545	вал ведений опори проміжної K546	вал приводу мосту середнього K540	вал приводу K541	
1	Сировина (Сталь 45), кг	1,00	2,00	3,00	2,00	300,00
2	Оплата праці, грн	5,00	3,00	4,00	2,00	10000,00
3	Електрична енергія, кВт/год.	10,00	15,00	10,00	12,00	1000,00
4	Паливно-мастильні матеріали, л	0,20	0,10	0,15	0,10	3,00
5	Транспортні витрати, грн	1,00	1,50	1,20	2,00	5000,00
6	Обладнання (пневмомолоти), верстат/год	2,00	4,00	3,00	8,00	130,00
	Прибуток від реалізації одиниці продукції	3,00	3,50	3,00	2,00	X

Розв'язування прикладу.

1. Математичне моделювання задачі.

1.1. Цільовою функцією задачі у відповідності до вихідних даних табл. 3.1 та виразу (3.1) є максимізація сумарного прибутку підприємства від реалізації виготовленої продукції:

$$f(x) = [(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4) = (3x_1 + 3,5x_2 + 3x_3 + 2x_4)] \rightarrow \max ,$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 – прибуток від реалізації одиниці продукції виду:

1 – валу ведучого опори проміжної;

2 – валу веденого опори проміжної;

3 – валу приводу мосту середнього;

4 – валу приводу,

що становить 3,00; 3,50; 3,00; 2,00 грн. відповідно;

x_1, x_2, x_3, x_4 – кількість одиниць виготовленої продукції 1, 2, 3 та 4 виду.

1.2. Функціональні обмеження на використання ресурсів при виробництві відповідно до виразу (3.2).

Обмеження використання сталі:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq b_1 ;$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 300 .$$

Обмеження використання фонду оплати праці:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq b_2 ;$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 10000 .$$

Обмеження використання електричної енергії:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leq b_3 ;$$

$$10x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 12x_4 \leq 1000 .$$

Обмеження використання паливно-мастильних матеріалів:

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \leq b_4 ;$$

$$0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,15x_3 + 0,1x_4 \leq 3 .$$

Обмеження транспортних витрат:

$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \leq b_5 ;$$

$$1x_1 + 1,5x_2 + 1,2x_3 + 2x_4 \leq 5000 .$$

Обмеження використання технологічного обладнання:

$$a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 \leq b_6 ;$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 130 .$$

1.3. Умова невід'ємності змінних x_1, x_2, x_3, x_4 , що виражають кількість одиниць продукції:

- виду 1 – валу ведучого опори проміжної;
- виду 2 – валу веденого опори проміжної;
- виду 3 – валу приводу мосту середнього;
- виду 4 – валу приводу відповідно:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

2. Автоматизоване розв'язування задачі

2.1. Створення форми для введення умови задачі (рис. 3.1).

2.2. Задання адрес комірок, в які буде поміщений результат розв'язку задачі (змінювані комірки).

C4:F4 – адреси комірок, в які будуть поміщені значення x_1, x_2, x_3, x_4 .

C14 – адреса комірки, в яку буде поміщене оптимальне значення цільової функції.

2.3. Введення вихідних даних.

Після введення вихідних даних у створену форму, отримаємо таблицю, що приведена на рис. 3.2.

2.4. Введення залежності для цільової функції у комірку.

Встановити курсор у комірку **C14**.

Встановити курсор на кнопку **Майстер функцій**. На екрані з'явиться діалогове вікно **Майстер функцій**, в категорії **Математичні** вибрати функцію СУММПРОИЗВ. Заповнити поле **Масив 1**, ввівши адреси комірок **C4:F4**, та **Масив 2**, ввівши адреси комірок **C13:F13** (рис. 3.3).

2.5. Введення залежностей для обмежень.

У комірки **G7:G12**, використовуючи **Майстер функцій** та функцію СУММПРОИЗВ, послідовно ввести формули для розрахунку загальної величини витрат кожного виду ресурсу за правою частиною виразу (3.2) та обмеженнями, визначеними для даної задачі та описаними раніше.

2.6. Вказання призначення цільової функції (встановлення цільової комірки).

2.6.1. Запустити **Пошук рішення**. Для цього виконати команди **Сервіс** ⇒ **Пошук рішення**.

2.6.2. В діалоговому вікні **Пошук рішення** заповнити поле **Встановити цільову комірку** В усіх задачах для засобу **Пошук рішення** оптимізується результат в одній із комірок робочого листа. Цільова комірка зв'язана з іншими комірками цього робочого листа за допомогою формул. Засіб **Пошук рішення** використовує формули, які дають результат в цільовій комірці для перевірки можливих рішень. Можна обрати пошук найменшого або найбільшого значення для цільової комірки або встановити конкретне значення. Для вирішення даної задачі необхідно здійснити пошук найбільшого значення. Для цього виконати наступні дії:

- в полі **Встановити цільову комірку** ввести адресу комірки **C14** (рис. 3.4);
- включити опцію **Рівній максимальному значенню** (рис. 3.4).

2.6.3. В діалоговому вікні **Пошук рішення** заповнити поле **Змінювані комірки**. Це комірки, значення яких будуть змінюватись для того, щоб оптимізувати результат в цільовій комірці.

До змінюваних комірок висувають дві основні вимоги:

- вони не повинні містити формули;

- зміна їх значень повинна відобразитись на зміні результату в цільовій комірці.

Іншими словами, цільова комірка залежить від змінюваних комірок. В поле **Змінювані комірки** вводяться адреси комірок **C4:F4**, в яких мають знаходитись шукані значення x_1, x_2, x_3, x_4 (рис. 3.4).

2.7. Введення обмежень. В діалоговому вікні **Пошук рішення** заповнити поле **Обмеження**, для чого натиснути кнопку **Добавити** і у діалоговому вікні **Добавлення обмежень** заповнити поля:

Посилання на комірку. В поле ввести адресу комірки **G7**, що містить загальну величину витрат сировини на виготовлення продукції.

В наступному полі вибрати знак \leq .

В поле **Обмеження** ввести адресу комірки **I7**, що містить величину запасів сировини.

Ввести всі обмеження і натиснути **ОК**.

2.8. Введення параметрів для вирішення задачі. В діалоговому вікні **Пошук рішення** натиснути кнопку **Параметри**, відкриється вікно **Параметри пошуку рішення**, в якому включити опції **Лінійна модель**, що забезпечить використання симплекс-метода, та **Невід'ємні значення**.

Натиснути кнопку **ОК**.

Перейти у вікно **Пошук рішення**, натиснути кнопку **Виконати**. На екрані з'явиться діалогове вікно **Результати пошуку рішення** (рис. 3.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Оптимальний план виробництва на місяць									
2	№ з/п	Види ресурсів	Змінні				Обмеження			Залишок ресурсів
3			X_1	X_2	X_3	X_4	Загальна величина витрат ресурсів за всіма видами продукції	Знак	Величина запасів ресурсів	
4			Значення змінних (оптимальний)							
5		вал ведучий проміжної	вал ведений проміжної	вал приводу середнього	вал приводу					
6		Норма витрат ресурсів на одиницю виробу, грн								
7	1	Сировина (Сталь 45), кг							0,00	
8	2	Оплата праці, грн							0,00	
9	3	Електрична енергія квт/год							0,00	
10	4	Паливно-мастильні матеріали, л							0,00	
11	5	Транспортні витрати, грн							0,00	
12	6	Обладнання (пневмомолоти зусиллям 3000 кг) верстаго/год							0,00	
13	7	Коефіцієнти цільової функції (прибуток від реалізації продукції,								
14	8	Цільова функція (Планований прибуток підприємства, грн)								

Рис. 3.1. Екранна форма Excel для введення даних задачі оптимального розподілу ресурсів за прикладом п.3.3

	A	B	С	D	E	F	G	H	I	J
1	Оптимальний план виробництва на місяць									
2	№ з/п	Види ресурсів	Змінні				Обмеження			Залишок ресурсів
3			X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	Загальна величина витрат ресурсів за всіма видами продукції	Знак	Величина запасів ресурсів	
4			Значення змінних (оптимальний план)							
5			вал ведучий проміжної опори	вал ведений проміжної опори	вал приводу середнього мосту	вал приводу				
6	Норма витрат ресурсів на одиницю виробу, грн									
7	1	Сировина (Сталь 45), кг	1,00	2,00	3,00	2,00	0,00	<=	300,00	300,00
8	2	Оплата праці, грн	5,00	3,00	4,00	2,00	0,00	<=	10000,00	10000,00
9	3	Електрична енергія кВт/год	10,00	15,00	10,00	12,00	0,00	<=	1000,00	1000,00
10	4	Паливно-мастильні матеріали, л	0,20	0,10	0,15	0,10	0,00	<=	3,00	3,00
11	5	Транспортні витрати, грн	1,00	1,50	1,20	2,00	0,00	<=	5000,00	5000,00
12	6	Обладнання (пневмомолоти зусилля 3000) верстаго/год	2,00	4,00	3,00	8,00	0,00	<=	130,00	130,00
13	7	Коефіцієнти цільової функції (прибуток від реалізації продукції), грн	3,00	3,50	3,00	2,00				
14	8	Планований прибуток підприємства (цільова функція), грн								

Рис. 3.2. Екранна форма Excel з введеними даними задачі оптимального розподілу ресурсів за прикладом п.3.3

Оптимальний план виробництва на місяць

		Змінні				Обмеження			
		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄				
4	Значення змінних	0	30	0	0				
Види ресурсів		вал везучий	вал ведений	вал приводу	вал приводу	Загальна величина витрат ресурсів за всіма видами продукції	Знак	Величина запасів ресурсів	Залишок ресурсів
		2,00	60,00	<=	300,00	240,00			
		2,00	90,00	<=	1000,00	9910,00			
		12,00	450,00	<=	1800,00	550,00			
		0,10	3,00	<=	3,00	0,00			
		2,00	45,00	<=	5000,00	4955,00			

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета: Результаты, Устойчивость, Пределы

Сохранить найденное решение!
 Восстановить исходные значения

OK Отмена Сохранить сценарий... Справка

Параметры поиска решения

Максимальное время: 100 секунд
 Предельное число итераций: 100
 Относительная погрешность: 0,000001
 Допустимое отклонение: 5 %
 Сходимость: 0,0001

OK Отмена Загрузить модель... Сохранить модель... Справка

Линейная модель Автоматическое масштабирование
 Неотрицательные значения Показывать результаты итераций

Оценки: линейная квадратичная
 Разности: прямые центральные
 Метод поиска: Ньютона сопряженных градиентов

Установить целевую ячейку: \$C\$14

Равной: максимальному значению значению: 0
 минимальному значению

Изменяя ячейки:

Предположить

Выполнить Закрывать

Добавление ограничения

Ссылка на ячейку: <= Ограничение: G\$12 <= \$I\$7:\$I\$12

OK Отмена Добавить Справка

Добавить Изменить Удалить Восстановить Справка

Рис. 3.4. Экранні форми Excel результату вирішення задачі оптимального розподілу ресурсів за прикладом п.3.3

Відповідь.

Отримане рішення означає, що максимальний прибуток в розмірі 105 тис. грн. підприємство отримає при виготовленні 30 поковок валу веденого опори проміжної. При цьому паливно-мастильні матеріали будуть використані повністю, а залишок інших ресурсів буде наступний: сировини 240 кг, електричної енергії 550 кВт/год, транспортних витрат 4955,00 грн, обладнання 10 верстато/год, витрат на оплату праці 9910,00 грн.



3.4. Варіанти індивідуальних завдань задачі оптимального розподілення ресурсів

Підприємство має запаси n видів ресурсів (*Ресурс 1, Ресурс 2, ..., Ресурс n*), з яких виробляється m види продуктів (*ПР1, ПР2, ..., ПРm*). Відомі:

- норми витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції;
- запаси ресурсів;
- прибуток від виробництва одиниці продукції.

Необхідно:

- а) записати економіко-математичну модель та обмеження задачі;
- б) використовуючи Пошук рішення MS Excel, знайти оптимальний план виробництва, при якому прибуток від реалізації виробленої продукції буде максимальним. Дані для розрахунку приведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Дані для розв'язування задачі оптимального розподілення ресурсів

Варіант №	1	2	3	4	5	6
Ресурси	Ресурс 1 Ресурс 2 Ресурс 3 Ресурс 4	Ресурс 5 Ресурс 6 Ресурс 7 Ресурс 8	Ресурс 9 Ресурс 10 Ресурс 1 Ресурс 2	Ресурс 3 Ресурс 4 Ресурс 5 Ресурс 6	Ресурс 7 Ресурс 8 Ресурс 9 Ресурс 10	Ресурс 6 Ресурс 7 Ресурс 1 Ресурс 2
Продукція	ПР1 ПР2 ПР3	ПР4 ПР5	ПР6 ПР1 ПР3	ПР1 ПР4	ПР5 ПР6	ПР2 ПР3
Варіант №	7	8	9	10	11	12
Ресурси	Ресурс 1 Ресурс 2 Ресурс 3 Ресурс 4	Ресурс 5 Ресурс 6 Ресурс 7 Ресурс 8	Ресурс 9 Ресурс 10 Ресурс 1 Ресурс 2	Ресурс 3 Ресурс 4 Ресурс 5 Ресурс 6	Ресурс 7 Ресурс 8 Ресурс 9 Ресурс 10	Ресурс 6 Ресурс 7 Ресурс 1 Ресурс 2
Продукція	ПР1 ПР3 ПР6	ПР2 ПР3	ПР5 ПР6	ПР1 ПР4	ПР6 ПР1 ПР3	ПР4 ПР5
Варіант №	13	14	15	16	17	18
Ресурси	Ресурс 1 Ресурс 2 Ресурс 3	Ресурс 5 Ресурс 6 Ресурс 7	Ресурс 9 Ресурс 10 Ресурс 1	Ресурс 3 Ресурс 4 Ресурс 5	Ресурс 7 Ресурс 8 Ресурс 9	Ресурс 6 Ресурс 7 Ресурс 1
Продукція	ПР1 ПР3 ПР5	ПР2 ПР4 ПР6	ПР2 ПР6	ПР1 ПР3	ПР3 ПР5	ПР2 ПР4
Варіант №	19	20	21	22	23	24
Ресурси	Ресурс 1 Ресурс 2 Ресурс 3	Ресурс 5 Ресурс 6 Ресурс 7	Ресурс 9 Ресурс 10 Ресурс 1	Ресурс 3 Ресурс 4 Ресурс 5	Ресурс 7 Ресурс 8 Ресурс 9	Ресурс 6 Ресурс 7 Ресурс 1
Продукція	ПР2 ПР5	ПР2 ПР4	ПР3 ПР5	ПР1 ПР3	ПР2 ПР6	ПР2 ПР4 ПР6
Варіант №	25	26	27	28	29	30
Ресурси	Ресурс 3 Ресурс 5 Ресурс 9 Ресурс 2	Ресурс 3 Ресурс 5 Ресурс 9 Ресурс 2	Ресурс 3 Ресурс 5 Ресурс 9	Ресурс 3 Ресурс 5 Ресурс 9	Ресурс 1 Ресурс 5 Ресурс 9	Ресурс 2 Ресурс 7 Ресурс 10
Продукція	ПР1 ПР3 ПР6	ПР1 ПР2 ПР3	ПР2 ПР5	ПР1 ПР3 ПР5	ПР2 ПР5	ПР1 ПР3 ПР5

Ресурси <i>n</i>	Продукція <i>m</i>						Запаси ресурсів
	ПР1	ПР2	ПР3	ПР4	ПР5	ПР6	
Ресурс 1	0,1	0,5	0,3	0,15	0,16	0,17	100
Ресурс 2	0,2	0,6	0,4	0,18	0,19	0,2	120
Ресурс 3	0,3	0,7	0,5	0,21	0,22	0,23	130
Ресурс 4	0,4	0,8	0,6	0,25	0,26	0,27	140
Ресурс 5	0,1	0,9	0,7	0,31	0,32	0,33	150
Ресурс 6	0,2	0,5	0,3	0,35	0,36	0,37	100
Ресурс 7	0,3	0,6	0,4	0,45	0,46	0,47	120
Ресурс 8	0,4	0,7	0,5	0,48	0,49	0,55	130
Ресурс 9	0,1	0,8	0,6	0,17	0,36	0,15	140
Ресурс 10	0,2	0,9	0,7	0,2	0,46	0,18	150
Прибуток від виробництва одиниці продукції	1,10	1,50	1,35	1,45	1,25	1,32	
План	?	?	?	?	?	?	
Загальний прибуток	?						