

## Методичні рекомендації

### Аналіз та корегування отриманого плану

Аналіз оптимального плану задачі оптимізації здійснюється на базі дослідження та інтерпретації даних трьох звітів. До цих звітів належать:

- звіт про результати;
- звіт про стійкість;
- звіт про границі.

Формування звітів відбувається шляхом виділення їх назв під час процедури пошуку розв'язку задачі у вікні «Пошук рішення». Звіт про результати складається з трьох таблиць (рис. 1). Перша таблиця «Комірки цільової функції» надає відомості про цільову функцію. Основними елементами цієї таблиці є:

- 1) назва таблиці, що відображає, за яким критерієм здійснено оптимізацію (мінімум чи максимум цільової функції);
- 2) стовпець «Вихідне значення», у якому відображаються значення цільової функції до запуску «Пошуку рішення»;
- 3) графа «Кінцеве значення», що містить розв'язок задачі – максимально або мінімально можливе значення цільової функції.

Ячейка целевой функции (Максимум)				
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	
\$D\$4		0	124	

  

Ячейки переменных				
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
\$B\$1		0	10,33333333	Продолжить
\$C\$1		0	0	Продолжить

  

Ограничения					
Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
\$D\$6		31	\$D\$6<=\$F\$6	Привязка	0
\$D\$7		72,33333333	\$D\$7<=\$F\$7	Без привязки	34,6666667
\$D\$8		10,33333333	\$D\$8<=\$F\$8	Без привязки	39,6666667
\$B\$1		10,33333333	\$B\$1>=0	Без привязки	10,3333333
\$C\$1		0	\$C\$1>=0	Привязка	0

Рис. 1. Звіт про результати

У таблиці «Комірки змінних» аналогічно відображаються початкові значення шуканих змінних (стовпець «Вихідне значення») та оптимальний план – невідомі значення інструментальних невідомих змінних, отримані у результаті розв'язування задачі (стовпець «Кінцеве значення»).

У таблиці «Обмеження» відображаються результати виконання обмежень задачі і граничних умов. У перших двох стовпцях наводяться адреси комірок, що містять формули кожного обмеження, та їх імена. У стовпці «Значення» наведено значення лівої частини обмеження (обсяг використаних ресурсів) та граничної умови, отримані в результаті пошуку рішення задачі. Запис формул обмежень і граничних умов, введені у вікно «Обмеження» надбудови «Пошук рішення», розміщується у стовпці «Формула».

Відомості стовпця «Стан» застосовуються для прийняття рішення щодо корегування умов задачі оптимізації. Результат оптимізації «Без прив'язки» означає, що ліва частина обмеження дорівнює правій. Для ресурсного обмеження такий стан свідчить про те, що наявний ресурс використано повністю. У випадку, якщо має місце нерівність лівої та правої частин (тобто надлишок ресурсу), стан обмеження визначатиметься як «Прив'язка». У стовпці «Допуск» відображається різниця між обсягом використаних та наявних ресурсів. З рис. 1 видно, що перший ресурс використано повністю і його надлишок у стовпці «Допуск» дорівнює 0, а ресурсів другого та третього виду залишилось 34,67 і 39,67, відповідно.

Для граничних умов результат «Прив'язка» означає, що значення невідомої змінної дорівнює нижній/верхній границі. В аналізованому прикладі це стосується змінної  $x_2$ , яка дорівнює 0 – мінімально можливому значенню ( $x_2 \geq 0$ ). Значення 10,33 для змінної  $x_1$  вказує на те, що ліва частина відповідної граничної умови більша за праву (тобто за нульове значення) на 10,33.

На основі даних звіту про стійкість проводиться аналіз чутливості цільової функції до змін параметрів моделі оптимізації. У звіті міститься інформація про потенційні зміни цільової функції задачі у разі корегування отриманого плану. Звіт містить дві таблиці (рис. 2). Дані першої таблиці «Комірки змінних» стосуються шуканих змінних, а другої «Обмеження» – обмежень задачі.

У стовпці «Кінцеве значення» таблиці «Комірки змінних» представлено розв'язок задачі (оптимальний план) – тобто шукані значення змінних. Наступна графа «Приведена вартість» (множники Лагранжа) містить значення двоїстих оцінок. Двоїста оцінка (приведена вартість) відображає, на скільки збільшити цільова функція  $F$ , якщо в оптимальний план включити додаткове значення відповідної змінної  $x$ . Іншими словами, приведена вартість показує розмір збільшення цільової функції у випадку, якщо неефективна змінна буде дорівнювати 1. У прикладі задачі неефективною є друга змінна  $x_2$ , для якої приведена вартість складає -26. Це означає, що у разі введення змінної  $x_2$  у базис ( $x_2 = 1$ ), цільова функція зменшиться на 26.

У наступному стовпці «Цільова функція. Коефіцієнт» відображаються коефіцієнти цільової функції  $c_j$ . Графи «Допустиме збільшення» та «Допустиме зменшення» містять, відповідно, максимальне та мінімальне значення коефіцієнтів цільової функції, при яких зберігається оптимальний план задачі. Наприклад, оптимальний план, якому відповідають значення невідомих змінних  $x_1 = 10,33$  та  $x_2 = 0$ , залишиться незмінним, якщо цільовий коефіцієнт при першій змінній ( $c_1 = 12$ ) буде не меншим 8,67, а при другій змінній ( $c_2 = 10$ ) – не більшим 26.

Ячейки переменных						
	Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое	
Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коефициент	Увеличение	Уменьшение
\$B\$1		10,33333333	0	12	1E+30	8,666666667
\$C\$1		0	-26	10	26	1E+30
Ограничения						
	Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое	
Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
\$D\$6		31	4	31	14,8571429	31
\$D\$7		72,33333333	0	107	1E+30	34,66666667
\$D\$8		10,33333333	0	50	1E+30	39,66666667

Рис. 2. Звіт про стійкість

У стовпці «Кінцеве значення» таблиці «Обмеження» відображаються значення лівої частини обмеження, необхідні для реалізації оптимального плану. Для ресурсного обмеження – це обсяг використаних ресурсів. Дані графи «Тіньова ціна» показують, на скільки збільшиться значення цільової функції, якщо праву частину обмеження (вільний член обмеження, що відображає наявний обсяг ресурсу) збільшити на одиницю.

З рис. 2 видно, що збільшити значення цільової функції можна шляхом збільшення наявного обсягу першого виду ресурсу. Зокрема, якщо наявний обсяг цього ресурсу, який відповідно до умови дорівнює 31, збільшити на 1, то цільова функція задачі зросте на 4. Нарощення обсягів інших двох видів ресурсів недоцільне, оскільки вони є надлишковими і тому відповідні зміни жодним чином не будуть позначатися на цільовій функції.

Стовпець «Обмеження. Права сторона» містить значення вільного члена (правої частини) обмеження. У стовпцях «Допустиме збільшення» та «Допустиме зменшення» таблиці «Обмеження»

вказано, на скільки можна, відповідно, збільшити та зменшити праву частину обмеження, щоб оптимальний план зберігся.

Звіт про границі вказує, в яких межах можуть змінюватись значення оптимального плану та розмір цільової функції за умови сталості отриманого розв'язку задачі оптимізації (рис. 3). Нижня та верхня границі – це максимальне та мінімальне значення змінної за умови, що всі обмеження виконуються, а значення інших шуканих змінних залишається сталим. Цільовий результат – це значення цільової функції, коли значення змінної рівне його нижній або верхній границям.

Целевая функция						
Ячейка	Имя	Значение				
\$D\$4		124				
Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
\$B\$1		10,333333	0	0	10,3333	124
\$C\$1		0	0	124	0	124

**Рис. 3. Звіт про границі**

Інтерпретація основних показників звітів за результатами розв'язування задач лінійної оптимізації відображено у табл. 1.

Постановка задач оптимізації передбачає пошук рішення, яке б забезпечило отримання максимуму (мінімуму) цільової функції за заданих умов (обмежень). Оптимальний план – це такі значення змінних, за яких досягти більшого (меншого) рівня показника ефективності неможливо. Відтак, після отримання оптимального плану виникає нове питання: що можна зробити, щоб збільшити (зменшити) межу цільової функції? Крім того, може виникнути ситуація, коли максимальний (мінімальний) рівень функції цілі є недостатнім для суб'єкта, що приймає рішення.

*Таблиця 1*

**Інтерпретація основних величин звітів  
«Пошуку рішення»**

Звіт	Показник	Зміст показника
Звіт за результатами	Стан	Дає можливість оцінити, чи має місце рівність лівої та правої частин обмеження. Стан буває: 1) «без прив'язки» – ліва частина рівна правій (у ресурсних обмеженнях це свідчить про дефіцит ресурсу); 2) «прив'язка» – ліва частина обмеження не рівна правій (у ресурсних обмеженнях це є свідченням надлишку ресурсу); 3) «не виконується» – обмеження не виконуються і його необхідно скоригувати
	Значення	Відображає значення лівої частини обмеження, отримані в результаті розв'язання задачі. У ресурсних обмеженнях – це розмір використаних ресурсів
	Допуск	Відображається різниця між лівою та правою частинами обмеження. Якщо статус обмеження визначено «без прив'язки», то різниця рівна нулю
Звіт за стійкістю	Нормована вартість	Двоїста оцінка, яка відображає, на скільки збільшиться цільова функція, якщо відповідну змінну збільшити на одиницю (тобто якщо її ввести у базис з одиничною інтенсивністю)
	Допустиме збільшення	Максимальне значення цільових коефіцієнтів, при яких зберігається оптимальний план задачі (тобто отримані значення змінних $x$ )
Звіт за стійкістю	Допустиме зменшення	Мінімальне значення цільових коефіцієнтів, при яких зберігається оптимальний план задачі (тобто отримані значення змінних $x$ )
	Тіньова ціна	Показує, на скільки збільшиться значення цільової функції, якщо праву частину обмеження збільшити на одиницю. Для ресурсних обмежень у цій графі відображено збільшення цільової функції у разі збільшення наявних ресурсів на одиницю
	Допустиме збільшення обмеження	На скільки можна збільшити праву частину обмеження, щоб оптимальний план зберігся
	Допустиме зменшення обмеження	На скільки можна зменшити праву частину обмеження, щоб оптимальний план зберігся

Для вирішення наведених проблем необхідно дослідити задачу оптимізації, знайти резерви підвищення (зниження) цільової функції та скоригувати початкові умови задачі. Іншою ціллю дослідження розв'язку задач оптимізації є виявлення надлишків ресурсів. Обсяг надлишкових ресурсів у процесі управління необхідно скорочувати, не змінюючи при цьому цільової функції.

Корегування оптимізаційних моделей передбачає пошук параметрів моделі, які можливо змінити. Існує чотири інструменти корегування задач оптимізації (табл. 2).

Таблиця 2

### Інструменти та цілі корегування задач оптимізації

Інструмент корегування	Цілі корегування	Вихідні дані для аналізу у звітах
1. Наявний обсяг ресурсів (вільний член обмеження) $b_i$	1. Підвищити (зменшити) значення цільової функції.	Тіньова ціна
	2. Зменшити витрати ресурсу шляхом усунення його надлишку за умови збереження оптимального плану (значень шуканих змінних $x_j$ ).	Допустиме зменшення у таблиці «Обмеження» звіту про стійкість
2. Нижня та верхня межі шуканих змінних $x_j$	Підвищити (зменшити) значення цільової функції.	Приведена вартість
3. Коефіцієнти цільової функції $c_j$	Підвищити (зменшити) значення цільової функції.	Допустиме зменшення у таблиці «Комірки змінних» звіту про стійкість
4. Коефіцієнти обмежень (норми витрат) $a_{ij}$	Підвищити (зменшити) значення цільової функції.	—

Під час корегування умови задачі оптимізації має бути дотримано вимогу економічності, що передбачає забезпечення оптимального співвідношення витрат та ефекту. Зокрема, не завжди корегувати слід ті величини, які забезпечують найбільше збільшення (зменшення) цільової функції. Наприклад, зменшення норм витрат ресурсів, яке може суттєво покращити цільову функцію, зазвичай потребує зміну технології виробництва і тому додаткових інвестиційних витрат. Крім того, деякі параметри моделі неможливо змінити з об'єктивних причин.

Таким чином, використання спеціалізованого програмного забезпечення для розв'язання задач оптимізації (зокрема, *MS Excel*) дає можливість суттєво скоротити час моделювання. Окрім безпосередньо розв'язку задачі, надбудова «Пошук рішення» формує звіти, дані яких є основою для прийняття рішення щодо зміни умов задачі задля покращення значення цільової функції. Основними інструментами корегування задачі оптимізації є сталі величини математичної моделі, а саме: обсяг наявних ресурсів, нижня та верхня межі невідомих змінних, норми витрат ресурсів та коефіцієнти цільової функції.