ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

РОЗКЛАДАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ У РЯД ФУР'Є. СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ.

Французький математик Фур'є (Ж. Б. Ж. Фур'є 1768-1830) проголосив досить сміливу для свого часу гіпотезу. Згідно з цією гіпотезою не існує функції, яку не можна було б розкласти в тригонометричний ряд. Однак, на жаль, на той час така ідея не була сприйнята всерйоз. І це природно. Сам Фур'є не зміг навести переконливих доказів, а інтуїтивно повірити в гіпотезу Фур'є дуже важко. Особливо нелегко уявити той факт, що при складанні простих функцій, подібних до тригонометричних, відтворюються функції, зовсім на них не схожі. Але якщо припустити, що гіпотеза Фур'є вірна, то періодичний сигнал будь-якої форми можна розкласти на синусоїди різних частот, або ж, навпаки, за допомогою відповідної додавання синусоїд з різними частотами, можна синтезувати сигнал будь-якої форми. Роль цієї теорії у обробці сигналів дуже велика

1 Мета роботи: Отримання практичних навичок роботи з пакетом MATHCAD та використання його для спектрального аналізу періодичних сигналів.

2 Опис лабораторного макета: Під час лабораторної роботи використовується інструментарій пакету MATHCAD.

3 Короткі довідкові дані

Для функції f(x) з періодом 2π має місце розкладання

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),\ \ k = 0,1,2,3,\ldots). \quad (1)$$

Коефіцієнти ряду Фур'є знаходимо за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx; \quad (2)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx; \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx. \quad (4)$$

Для парної функції f(-x) = f(x) графік симетричний щодо осі ординат. У ряді Фур'є для парної функції відсутні члени із синусами

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \quad (5)$$

Для непарної функції f(-x) = -f(x) графік симетричний щодо початку координат. У ряді Фур'є для непарної функції відсутні члени з косинусами

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \quad (6)$$

Послідовність операцій під час розкладання періодичної функції:

1. За графіком встановити парність чи непарність функції.

2. Записати ряд Фур'є з невідомими коефіцієнтами для заданої функції.

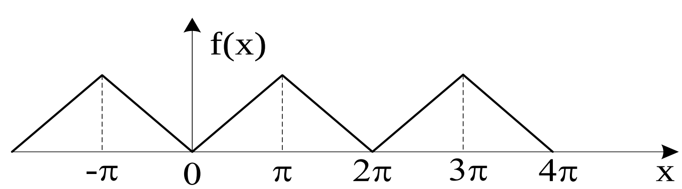
3. Обчислити коефіцієнти a0, ak, bk.

4. Підставити значення a0, ak, bk до ряду Фур'є для заданої функції.

<u>Приклад 1. Розкласти ряд Фур'є функцію</u> $f(x) = |x|$ для $-\pi \le x \le \pi$, T=2π.

1. Будуємо графік функції.

Функція – парна.



2. Ряд Фур'є матиме вигляд: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$.

3. Обчислимо коефіцієнти a_0 та a_k.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi .$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\cos k\pi - \cos 0}{k^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{при } k - \text{НЕПАРНОМУ} \\ 0 & \text{при } k - \text{ПАРНОМУ} \end{cases}$$

4. Відповідно

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{4}{9\pi}; \quad a_4 = 0; \quad a_5 = -\frac{4}{25\pi}; \ldots$$

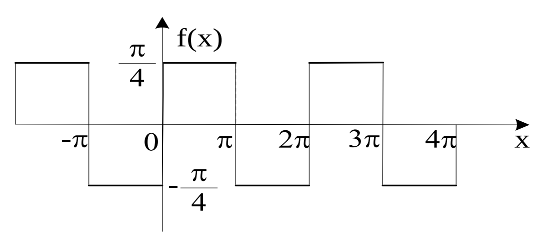
$$f1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \ldots\right).$$

<u>Приклад 2. Розкласти ряд Фур'є функцію</u>

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} & \text{при} \quad -\pi < x < 0 \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{при} \quad 0 < x < \pi \end{cases}; T = 2\pi, \quad \text{в точках } k\pi, \text{ де } k\text{-ціле } f(x)=0.$$

1. Будуємо графік функції.

Функція f(x) – непарна.



2. Ряд Фурье матиме вигляд: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

3. Обчислимо коефіцієнти bk..

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin kx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{2k}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos 0 - \cos k\pi}{2k} = \frac{1-(-1)^k}{2k} = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{при } k - \text{ непарному} \\ 0 & \text{при } k - \text{ парному} \end{cases}$$

4. Відповідно

$$b_1 = 1; \qquad b_2 = 0; \qquad b_3 = \frac{1}{3}; \qquad b_4 = 0; \qquad b_5 = \frac{1}{5};\ \ldots$$

$$f1(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

Виконання прикладу 1 з використанням програми MATHCAD

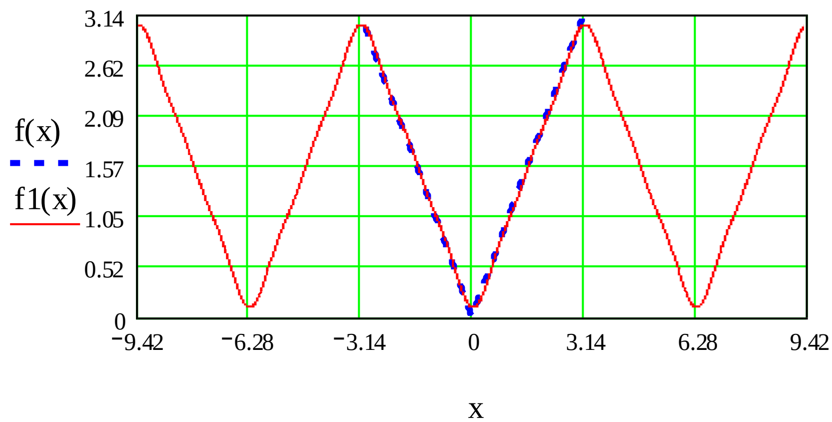
Розкласти в ряд Фур'є функцію:

$-\pi \le x \le \pi$ $\qquad f(x) := |x|$ $\qquad k := 0..5$

$$a0 := \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\,dx \rightarrow \pi \qquad a_k := \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} x\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \rightarrow \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos(\pi\cdot k) + \pi\cdot k\cdot\sin(\pi\cdot k)}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right)$$

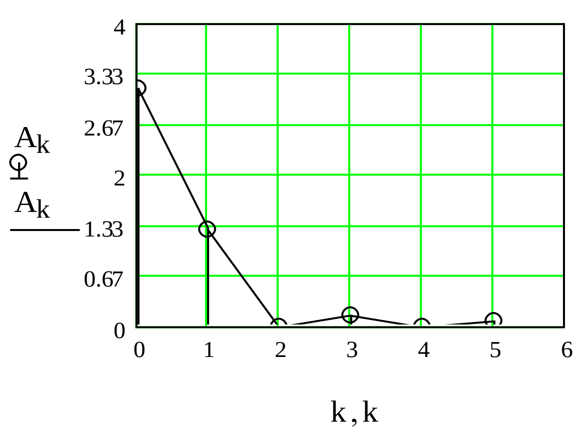
$$\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} |x|\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \rightarrow \begin{pmatrix} \pi \\ \dfrac{-4}{\pi} \\ 0 \\ \dfrac{-4}{9\cdot\pi} \\ 0 \\ \dfrac{-4}{25\cdot\pi} \end{pmatrix}$$

$$f1(x) := \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{5} \left[\left(\frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(k \cdot x)\, dx \right) \cdot \cos[k \cdot (x)] \right]$$



$$A_k := \left| \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} |x| \cdot \cos(k \cdot x)\, dx \right|$$

$$A_k := |a_k|$$



Виконання прикладу 2 з використанням програми MATHCAD

Розкласти в ряд Фур'є функцію:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{-\pi}{4} & \text{if } -\pi < x < 0 \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{if } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{if } x = \pi \end{cases}$$

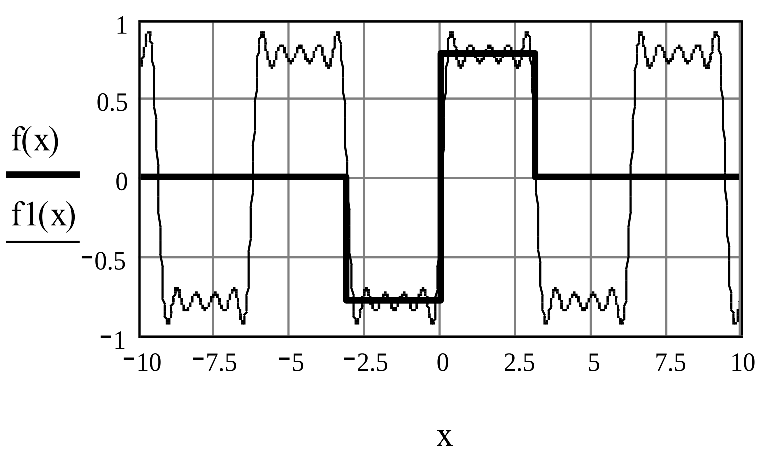
$$bk := \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4}\cdot\sin(k\cdot x)\,dx \rightarrow \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{-1}{4}\cdot\frac{\cos(\pi\cdot k)}{k}\cdot\pi + \frac{1}{4\cdot k}\cdot\pi\right)$$

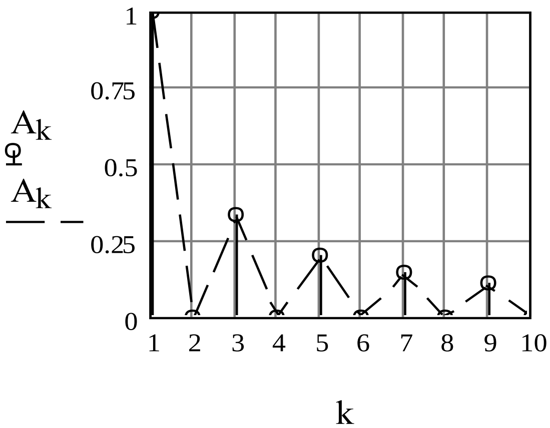
$$f1(x) := \sum_{k=1}^{10} (bk\cdot\sin(k\cdot x)) \rightarrow \sin(x) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\cdot x) + \frac{1}{5}\cdot\sin(5\cdot x) + \frac{1}{7}\cdot\sin(7\cdot x) + \frac{1}{9}\cdot\sin(9\cdot x)$$

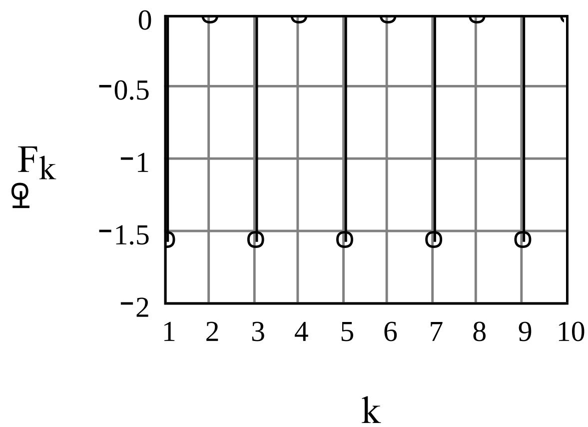
$k := 1..10$

$$A_k := \left|\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{-1}{4}\cdot\frac{\cos(\pi\cdot k)}{k}\cdot\pi + \frac{1}{4\cdot k}\cdot\pi\right)\right|$$

$$F_k := -\mathrm{atan}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{-1}{4}\cdot\frac{\cos(\pi\cdot k)}{k}\cdot\pi + \frac{1}{4\cdot k}\cdot\pi}{0.0000000000001}\right)$$







4. Хід роботи

Виконати для періодичних сигналів:

1. Отримати та ознайомитися з індивідуальним завданням.
2. Розкласти задану функцію до ряду Фур'є.
3. Побудувати графіки вихідного сигналу та його апроксимації по k гармонікам низки Фу-р'є.
4. Отримати амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) заданого сигналу (аналітичний вираз та графік).
5. Отримати фазо-частотну характеристику (ФЧХ) заданого сигналу (аналітичний вираз та графік).
6. Захист звіту відбувається індивідуально для кожного студента.

5. Контрольні питання

1) Що таке спектр періодичного сигналу?

2) Запишіть формули, якими визначаються Фур'є коефіцієнти.

3) Вираз для узагальненого ряду Фур'є.

4) Ряд Фур'є для парної та непарної функції.

5) Як визначити амплітудний та фазовий спектри сигналу?

6. Варіанти індивідуальних завдань

1. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням .
$f(x) = \pi + x$.

2. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням .
$f(x) = |\sin(x)|$.

3. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням . $f(x) = x$

4. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням .

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если} \quad -\pi \le x \le 0; \\ 3x, & \text{если} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

5. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням .

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если} \quad -\pi < x < 0; \\ 0, & \text{если} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

6. Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію, задану на інтервалі [0, 2] рівнянням:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad 0 < x \le 1; \\ 2 - x, & \text{если} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

7. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням .
$f(x) = \cos(2x)$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [0, π] рівнянням, $f(x) = x^2$, продовживши її непарним чином на інтервалі [-π, 0].

9. Розкласти до ряду Фур'є за синусами функцію, задану на інтервалі [0, 1] рівнянням . $f(x) = x$.

10. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-1, 1] рівнянням .
$f(x) = x^2$.

11. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [0, 2] рівнянням,

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2},$$

продовживши її непарним чином інтервалі [-2, 0].

12. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [0, 2] рівнянням, $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$, продовживши її парним чином на інтервалі [-2, 0].

13. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-l, l] рівнянням

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad -l \le x \le 0;\\ x, & \text{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{l}{2};\\ \dfrac{l}{2}, & \text{если} \quad \dfrac{l}{2} \le x \le l\end{cases}$$

14. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням $f(x)=|\cos(x)|$.

15. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням

$$f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{если} \quad -\pi \le x \le 0;\\ 2x, & \text{если} \quad 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

16. Розкласти до ряду Фур'є за синусами функцію, задану на інтервалі [0, 2] рівнянням $f(x)=2x$.

17. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням

$$f(x)=\arcsin(\sin x).$$

18. Розкласти ряд Фур'є функцію, задану на інтервалі [-π, π] рівнянням $f(x)=\arccos(\cos x)$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є
СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НЕПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ

КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ

Перетворення Фур'є (*Fourier transform*) є інструментом спектрального аналізу неперіодичних сигналів.

Для наочної ілюстрації переходу від ряду Фур'є до перетворення

Фур'є часто використовується не цілком строгий математично, зате зрозумілий підхід.

Розкладаючи періодичний сигнал на його синусоїди різних частот, ми освоїли розкладання в ряд Фур'є як спосіб подання сигналу у вигляді суми цих складових. Якщо сигнал є періодичним, його можна розкласти в ряд Фур'є. А яким чином здійснюється розкладання в ряд Фур'є, якщо сигнал неперіодичний або являє собою одиночний імпульс? Розкладання в ряд Фур'є такого сигналу на обмеженому інтервалі теоретично помилкове.

Отже, неперіодичний сигнал чи одиночний імпульс, безперечно, відрізняються від періодичних сигналів, але у певному сенсі можна сказати, що вони є одним із видів періодичних сигналів. Якщо періодичний сигнал - це сигнал, що повторюється через період обмеженої величини, то неперіодичний сигнал можна вважати періодичним сигналом з нескінченно більшим періодом, хоча він і не повторюється. Якщо період вважати нескінченно великим, такий сигнал можна вважати періодичним сигналом незалежно від цього, має він властивість періодичності чи ні. Розглянемо цей випадок з прикладу.

На рис. 1, б показана загальна спектра послідовності прямокутних імпульсів з періодом T = 4 (рис. 1, а). Якщо форму цього сигналу залишити незмінною, а період збільшити (рис. 1, в), то що станеться з спектром, що огинає? Це показано на рис. 1, м. Видно, що форма огинаючого спектра не змінилася.

Щоб можна було порівнювати форми спектрів незалежно від зміни основного періоду сигналу, відлік по осі абсцис проводиться в одиницях не k, а 2πk/T.

Ще більше збільшимо період (рис 1, д). Щільність ліній спектру збільшується, а огинаюча спектр залишається незмінною (рис. 1, е).

Можна припустити, що якщо продовжувати збільшувати період T, то при T → ∞ (рис. 1, ж) розглядається спектр, що огинає, і є спектр одиночного прямокутного імпульсу (рис. 1, з). У цьому випадку щільність ліній спектру стає нескінченно великою, тобто спектр, спочатку представлений окремими значеннями амплітуд гармонік, стає суцільним.

Якщо сигнал, виражений функцією f(t) у часовій області, частотної області представити функцією F(ω), де кутова частота, то зв'язок між функціями f(t) і F(ω) описується наступними співвідношеннями:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad ; \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad . \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

Функція F(ω) відповідає комплексним коефіцієнтам розкладання до ряду Фур'є і є комплексною функцією. F(ω) називають інтегралом Фур'є функції f(t), або перетворенням Фур'є функції f(t) (1). Процес отримання функції f(t) із F(ω) називають зворотним перетворенням Фур'є (2).

При розкладанні в ряд Фур'є ми отримуємо набір гармонік, а при перетворенні Фур'є, де аргументом є кутова частота ω, отримуємо безперервний спектр (спектр Фур'є).

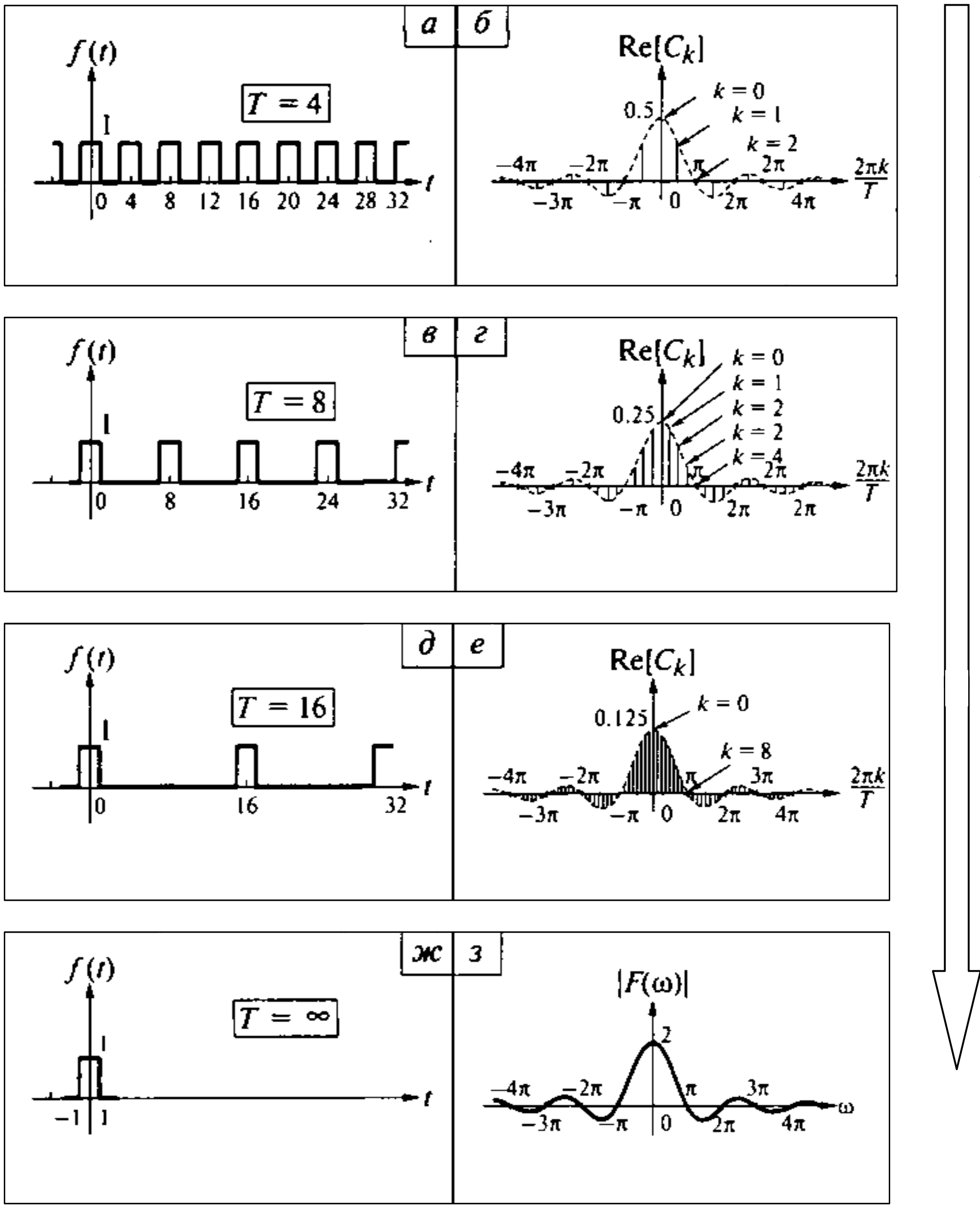


Рисунок 1 - Спектр послідовності прямокутних імпульсів.

1 Мета роботи: Отримання практичних навичок роботи з пакетом MATHCAD та використання його для спектрального аналізу неперіодичних сигналів.

2 Опис лабораторного макета: У ході лабораторної роботи використовується інструментарій пакету MATHCAD 14.

3. Хід роботи

3.1. Виконати перетворення Фур'є для зазначених у таблиці 1 сигналів:

Таблиця 1 - Аналітичні вирази для різних сигналів

Прямокутний імпульс	$f(t)=\begin{cases} A, & \lvert t\rvert \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & \lvert t\rvert \le \frac{\tau}{2} \end{cases}$
Прямокутний імпульс, затриманий у часі	$f(t)=\begin{cases} A, & 0\le t\le \tau \\ 0, & t<0,\ t>\tau \end{cases}$
Несиметричний трикутний імпульс	$f(t)=\begin{cases} A\frac{t}{T}, & 0\le t\le T \\ 0, & t<0,\ t>T \end{cases}$
Симетричний трикутний імпульс	$f(t)=\begin{cases} A\left(1-\frac{\lvert t\rvert}{T}\right), & \lvert t\rvert \le T \\ 0, & \lvert t\rvert > T \end{cases}$
Односторонній експонентний імпульс	$f(t)=\begin{cases} Ae^{-at}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$
Двосторонній експоненційний імпульс	$f(t)=Ae^{-a\lvert t\rvert}$
Сигнал виду $\frac{s\text{in}\,x}{x}$	$f(t)=A\dfrac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$

Значення змінних взяти відповідно до свого варіанта з таблиці 2.

3.2. Побудувати графіки вихідного сигналу, його АЧХ та ФЧХ.

3.3. Захист звіту відбувається індивідуально для кожного студента.

Таблиця 2 - Дані для експериментів

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	2	4	6	8	1	3	5	7	2	4	6	8	1	3	5	7
τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T	5	4	6	2	7	3	2	4	5	6	2	3	4	5	5	8
a	2	4	6	8	3	5	7	9	2	4	6	8	3	5	7	9

4. Контрольні питання

1) Що таке спектр неперіодичного сигналу?

2) Запишіть формули, якими визначаються Фур'є коефіцієнти.

3) Запишіть вираз для прямого та зворотного перетворення Фур'є.

4) Як визначити амплітудний та фазовий спектри сигналу?

Продовження таблиці В1

1	2	3	4
Illegal function syntax	Неприпустимий синтаксис функції	Символьний процесор не може інтерпретувати вираз, подібний (f)(X)	Illegal function syntax
Integer too large/ Integer too small	Ціле число дуже велике/дуже мале	Це число дуже велике/мале для роботи з ним	Якщо ви працюєте з вбудованими функціями, то клацніть лі-вою кнопкою миші на імені функції і викли-чте підказку за допо-могою клавіші <F1>
Invalid format	Неприпустимий формат	Аргументи цієї функції можуть бути некоректні	Якщо ви працюєте з вбудованими функціями, то клацніть лі-вою кнопкою миші на імені функції і викли-чте підказку за допо-могою клавіші < F1>
Invalid arguments	Неприпустимі аргументи	Символьний процесор не може виконати необхідну операцію для даних аргументів	Це повідомлення з’явиться, якщо, наприклад, застосувати скалярну функцію до масиву без використання оператора векторизації і вибрати команду Symbolics / Simplify (Символіка / Спростити)
Invalid range	Неприпустимий інтервал	Для пошуку чисельного розв’язку рівняння символьний процесор намагається обчислити одну зі сво-їх вбудованих функцій за межами області її визначення	

Продовження таблиці В1

1	2	3	4
No answer found; stack limit reached	Відповіді не знайдено	Символьний процесор досяг межі своїх можливостей без обчислення або спрощення, яке очікував користувач	
No answer found	Відповіді не знайдено	Символьний процесор не зміг знайти точного розв'язку рівняння	
No closed form found for	Не знайдено замкнутої форми для	Символьний процесор не зміг знайти інтеграл, або суму, або добуток в замкненій формі	
Syntax error	Синтаксична помилка	Зазвичай резуль-тат застосування символьної опера-ції в невідповід-них або некорект-них виразах. Сим-вольні обчислен-ня виразів з роз-мірностями також приведуть до поя-ви цього повідом-лення	

Навчальне видання

Методичні вказівки до до лабораторних робіт
з навчальної дисципліни «Цифрова обробка сигналів»
для студентів денної та заочної форми навчання за спеціальністю
175 «Інформаційно - вимірювальні технології»

Укладачі:
ЛЬВОВ Сергій Геннадійович
ТОПОЛОВ Ігор Іванович

Відповідальний за випуск Балєв В.М.
Роботу до видання рекомендував Пугановський О. В.

В авторській редакції

План 2024 р., поз.

Підп. до друку Формат 60x84 1/16.
Папір офсет. Друк ризографічний. Ум. друк. арк. .
Обл.вид. арк. Наклад 50 прим. Замовлення №

Видавничий центр НТУ «ХПІ»,
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
Електронна версія