ЛЕКЦІЯ 4.

ЛОГІЧНІ ВИРАЗИ ТА ЇХ ФОРМИ

ПЛАН

- **Булева функція і формула**
- **Диз'юнктивна Нормальна Форма (ДНФ, ДДНФ)**
- **Кон’юктивна Нормальна Форми (КНФ, ДКНФ)**
- **Карти Карно**
- **Алгоритм Квайна**

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

- Формули, що містять крім змінних і дужок тільки знаки кон’юнкції, диз’юнкції та заперечення, називаються булевими.
- Змінні, які можуть приймати значення тільки з множини B = {0, 1}, називаються *логічними* або *булевими змінними*.
- Значення 0 та 1 булевих змінних називаються *булевими константами*.

Булева формула – це вираз, побудований за певними правилами з логічних змінних (наприклад, x, y, z) та логічних операцій (заперечення ¬, кон'юнкція ∧, диз'юнкція ∨, імплікація →, еквівалентність ↔).
Формула - це статичний об'єкт, що описує певний логічний вираз.
Приклад: $(x \wedge y) \vee \neg z$

Булева функція – це відображення, яке ставить у відповідність кожному набору значень булевих змінних одне єдине булеве значення (істина чи хиба).
Функція описує процес обчислення результату для різних вхідних даних.
Приклад: Функція, що відповідає формулі $(x \wedge y) \vee \neg z$, обчислює значення виразу для будь-яких значень x, y та z.

ПРИКЛАД

Розглянемо формулу $(x \wedge y) \vee \neg z$.

Таблиця істинності буде виглядати наступним чином:

x	y	z	$(x \wedge y) \vee \neg z$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Кожна *булева формула* визначає унікальну *булеву функцію*. Тобто, кожна формула описує певний алгоритм обчислення результату для різних вхідних даних.

Дві різні формули можуть визначати одну і ту ж функцію. Наприклад, формули $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ та $x \wedge (y \vee z)$ визначають одну і ту ж функцію.

Не кожна *булева функція* може бути представлена однією формулою у конкретній логічній системі. Існують функції, для представлення яких потрібні складніші апарати, ніж звичайні булеві формули.

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Функція виду $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументу x_i і значення y якої належать множині B, називається *n-мірною булевою функцією*. Такі функції також називаються логічними або перемикаючими.

Кортеж $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ конкретних значень булевих змінних називається *двійковим словом* або булевим набором довжиною n.

Для булевої функції $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ конкретні значення називаються *інтерпретацією булевої* функції f.

СПОСОБИ ЗАВДАННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Булеві функції можуть задаватися наступними способами:

1) За допомогою таблиці істинності (значення якої беруться з інтерпретацій).

Таблиця, в якій кожній інтерпретації функції поставлена у відповідність її значення, називається *таблицею істинності булевої функції*.

2) Порядковим номером, який має ця функція. *Порядковий номер булевої функції* – це унікальне число, яке присвоюється кожній булевій функції певного класу за певним фіксованим правилом. Це число дозволяє однозначно ідентифікувати функцію серед інших функцій того ж класу.

ПРИКЛАД

Таблиця істинності для формули $(x \wedge y) \vee \neg z$:

x	y	z	$(x \wedge y) \vee \neg z$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Отримали двійкове число 10101011. Для отримання порядкового номеру треба перевести його до десяткового:

$10101010_2 = 1\times2^7 + 0\times2^6 + 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 171$

Відповідь: Порядковий номер булевої функції $(x \wedge y) \vee \neg z$ дорівнює **171**.

СПОСОБИ ЗАВДАННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

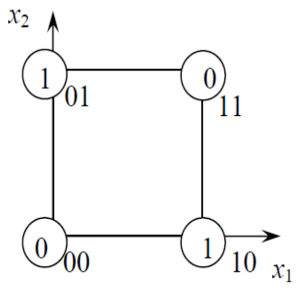
3) Аналітично (у вигляді формули). Запис функції у вигляді формули, що використовує булеві операції (кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення).

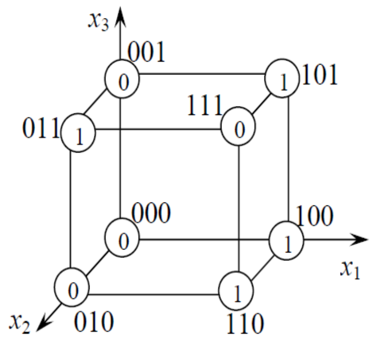
Приклад: F(A, B) = A ∧ B; f(x, y) = x ∧ ¬y (x ∨ y)

4) Геометричне уявлення. Булева функція зображується як діаграми Венна чи куба.

Функція задається у вигляді *n*-вимірного одиничного куба, у вершинах якого записано значення функції (у кружечках) та набори значень аргументів.

5) За допомогою схеми.





Двовимірний одиничний квадрат Тривимірний одиничний куб)

СПОСОБИ ЗАВДАННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

4) Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) – це спосіб подання булевої функції як диз'юнкції (логічного "або") кон'юнкцій (логічних "І") змінних або їх заперечень.

5) Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) – це спосіб подання булевої функції як кон'юнкції диз'юнкцій змінних або їх заперечень.

6) **Карті Карно -** графічний спосіб подання булевих функцій, зручний для оптимізації та переходу до ДНФ чи КНФ.

ДИЗ'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА (ДНФ)

ДИЗ'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА (ДНФ)

Диз'юнктивне розкладання – це процес представлення булевої функції у вигляді диз'юнкції (логічного "або") елементарних кон'юнкцій. Елементарна кон'юнкція – це вираз, що складається з кон'юнкції (логічного "І") змінних або їх заперечень.

Теорема про диз'юнктивне розкладання стверджує, що будь-яку булеву функцію можна представити у вигляді диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ). ДНФ – це диз'юнкція елементарних кон'юнкцій, до яких кожна змінна входитиме рівно один раз або у прямій, або у запереченій формі.

ДИЗ'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА (ДНФ)

- це нормальна форма у булевій логіці, в якій булева формула має вигляд диз'юнкції кон'юнкцій літералів.

Літерал – це змінна або її заперечення.

Кон'юнкція - це логічна операція "І" (AND).

Диз'юнкція - це логічна операція "АБО" (OR).

Приклад:

$F(x, y, z) = (x \land y) \lor (\neg x \land z)$

ФОРМАЛЬНЕ ПОДАННЯ

Нехай $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – булева функція n змінних. Тоді її можна представити у вигляді:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vee_{a_1,...,a_n} (x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge ... \wedge x_n^{a_n})$$

де:

$\vee$ – операція диз'юнкції (логічне "АБО")

$\wedge$ – операція кон'юнкції (логічне "І")

$a_i \in \{0, 1\}$ – значення змінної x_i у i-тій елементарній кон'юнкції (0 – заперечення, 1 – пряме значення)

АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ:

1. Складаємо таблицю істинності для булевої функції. Вона показує значення функції для всіх можливих комбінацій значень вхідних змінних.
2. Виділяємо в таблиці істинності рядки, де значення функції дорівнює 1.
3. Для кожної мінанти записуємо кон'юнкцію змінних. Якщо змінна в рядку має значення 1, то до кон'юнкції включаємо її без заперечення, якщо 0 – то з запереченням.
4. Отримані кон'юнкції об'єднуємо диз'юнкцією. Результат є ДНФ.

Приклад: Розглянемо булеву функцію $f(x, y) = x \vee y$.

Її ДНФ має вигляд:

$f(x, y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$

ПРИКЛАД

Розглянемо булеву функцію f(x, y) = x ¬ y ∨ yz.

Її ДНФ має вигляд:

f(x, y) =(¬ x ∧ y ∧ ¬ z) ∨ (¬ x ∧ y ∧ z) ∨ (x ∧ y ∧ z)

x	y	z	¬x	x¬ y	yz	f(x, y, z)
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

ПРИКЛАД

Нехай задана булева функція:

$f(x, y, z) = (x \lor y) \land (\neg z)$

Отже, ДНФ функції:

$f(x, y, z) = (\neg x \land y \land \neg z) \lor (x \land \neg y \land \neg z) \lor (x \land y \land \neg z)$

Перетворення за таблицею істинності:

x	y	z	f(x, y, z)	Кон'юнкт
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\neg x \land y \land \neg z$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x \land \neg y \land \neg z$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x \land y \land \neg z$
1	1	1	0	

ЗНАЧЕННЯ ДИЗ'ЮНКТИВНОГО РОЗКЛАДАННЯ

ДНФ використовується для мінімізації булевих функцій, що важливо для спрощення логічних схем.

ДНФ є основою для синтезу логічних схем, тобто побудови схем, що реалізують задану булеву функцію.

ДНФ використовується в теорії алгоритмів для представлення та аналізу алгоритмів.

ДНФ, ДДНФ

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)

- це нормальна форма у булевій логіці, в якій булева формула має вигляд диз'юнкції кон'юнкцій літералів.

Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)

– це така ДНФ, у якій кожна кон'юнкція містить всі змінні (або їх заперечення) і немає однакових кон'юнкцій.

ФОРМАЛЬНЕ ПОДАННЯ ДДНФ

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – булева функція n змінних. Тоді її можна представити у вигляді:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vee_{a_1,\ldots,a_n, f(a_1,\ldots,a_n)}(x_1^{a1} \wedge x_2^{a2} \wedge \ldots \wedge x_n^{an})$$

де:

∨ – операція диз'юнкції (логічне "АБО")

∧ – операція кон'юнкції (логічне "І")

$a_i \in \{0, 1\}$ – значення змінної x_i у i-тій елементарній кон'юнкції (0 – заперечення, 1 – пряме значення)

ПРИКЛАД

Розглянемо булеву функцію
f(x, y) = ¬xy ∨ yz.

Її ДНФ має вигляд:

f(x, y) = **¬xy¬z ∨ ¬xyz ∨ xyz**

Її ДДНФ має вигляд:

f(x, y) = ¬xy¬z ∨ ¬xyz ∨ xyz =

= ¬xy (¬z ∨ z) ∨ xyz = **¬xy ∨ xyz**

x	y	z	¬x	¬xy	yz	f(x, y, z)
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

КОН'ЮКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА (КНФ)

КОН'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА (КНФ)

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) - це спосіб подання булевої функції, де вона виражається як кон'юнкція (логічне "І") диз'юнкцій (логічне "або"). Кожна диз'юнкція містить лише змінні або їх заперечення.

Приклад:

$(A \lor \neg B \lor C) \land (\neg A \lor B)$

АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДО (КНФ)

Існує кілька алгоритмів перетворення булевої функції до КНФ. Розглянемо один з найпоширеніших - **метод розкриття дужок** .

1. Застосовуємо дистрибутивний закон для розкриття дужок у виразах, де є кон'юнкція ззовні та диз'юнкція всередині.

2. Використовуємо закони де Моргана для перетворення імплікацій та еквіваленцій у диз'юнкції та кон'юнкції.

3. Продовжуємо цей процес, доки не отримаємо вираз у вигляді кон'юнкції диз'юнкцій.

ПРИКЛАД

Перетворимо булеву функцію $F = A \to (B \wedge C)$ до КНФ:

Використовуємо закон імплікації:

Якщо $A \to B \equiv \neg A \vee B$ тоді $F = \neg A \vee (B \wedge C)$

Розкриваємо дужки за допомогою дистрибутивного закону:

$F = (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

Отримали вираз у КНФ.

АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДО (КНФ)

1. Будуємо таблицю істинності для функції.

2. Для кожної комбінації змінних, де функція дорівнює 0, записуємо диз'юнкцію заперечень змінних, що мають значення 1 у цій комбінації.

3. Потім записуємо кон'юнкцію всіх отриманих диз'юнкцій дає КНФ.

ПРИКЛАД

Розглянемо булеву функцію

$f(x, y) = \neg\, xy \vee yz.$

Її КНФ має вигляд:

$f(x, y) = x+y+z \wedge x+y+\neg z \wedge \neg x+y+z \wedge \neg x+y+\neg z \wedge \neg x+\neg y+z$

x	y	z	x'	x‘y	yz	f(x, y, z)	
0	0	0	1	0	0	0	x+y+z
0	0	1	1	0	0	0	x+y+z'
0	1	0	1	1	0	1	
0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	0	x‘+y+z
1	0	1	0	0	0	0	x‘+y+z'
1	1	0	0	0	0	0	x‘+y‘+z
1	1	1	0	0	1	1	

$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$

КАРТА КАРНО

Карти Карно були винайдені в 1952 Едвардом В. Вейчем і вдосконалені в 1953 Морісом Карно, фізиком з Bell Labs, і були покликані допомогти спростити цифрові електронні схеми.

Карта Карно – це графічний інструмент, який використовується для спрощення булевих функцій. Вона є таблицею істинності, відформатованою особливим чином, що дозволяє наочно ідентифікувати групи змінних, які можуть бути об'єднані для спрощення логічного вираження.

Карта Карно впорядковуються за допомогою коду Грея, в якому кожне наступне число відрізняється від попереднього лише одним розрядом.

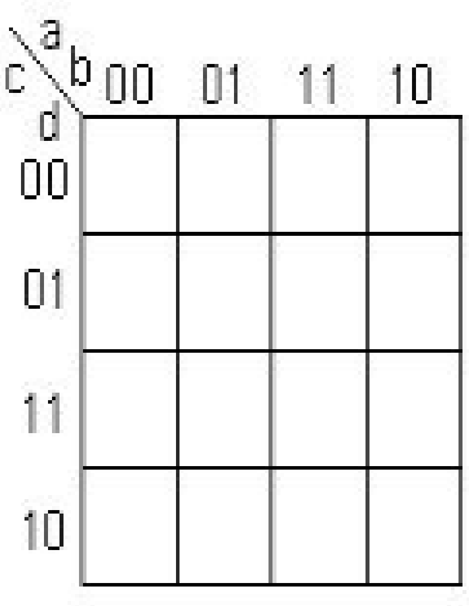
НАВІЩО ВИКОРИСТОВУВАТИ КАРТИ КАРНО?

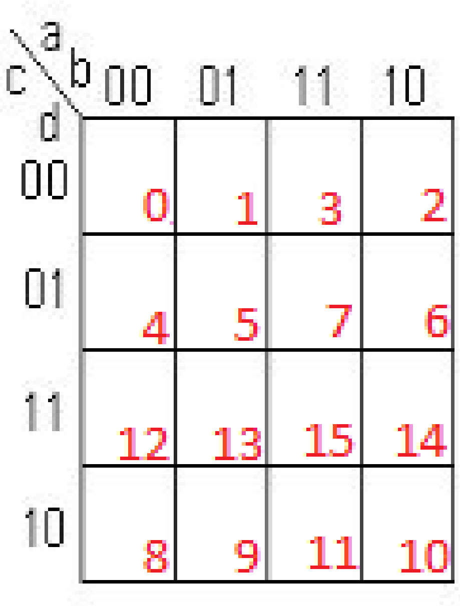
Карти Карно дозволяють знайти мінімальний логічний вираз, еквівалентний вхідному.

Карти Карно надають наочне уявлення про те, як різні змінні взаємодіють одна з одною у булевій функції.

За допомогою карт Карно можна легко спростити складні логічні вирази, особливо для невеликої кількості змінних.

БАЗОВЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ КАРТ КАРНО





БАЗОВЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ КАРТ КАРНО

Tabla para 2 Variables de Entrada

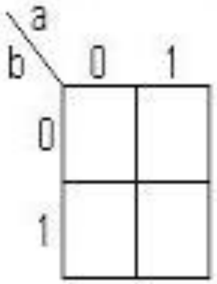


Tabla para 3 Variables de Entrada

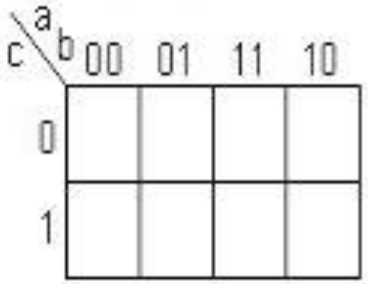


Tabla para 4 Variables de Entrada

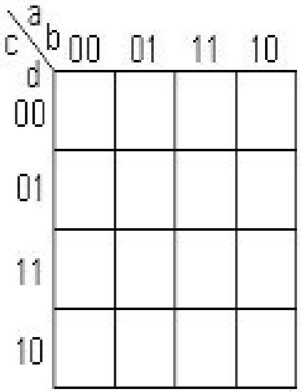
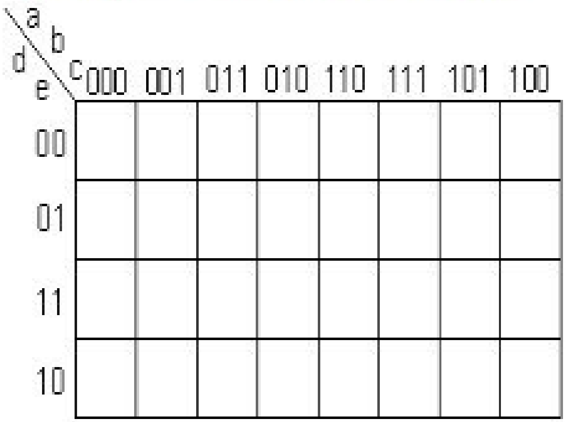


Tabla para 5 Variables de Entrada



ЯК БУДУЄТЬСЯ КАРТКА КАРНО?

Визначення числа змінних. Число змінних визначає розмір картки Карно. Наприклад, для двох змінних карта матиме 2х2 осередки, для трьох змінних – 2х4 тощо.

Заповнення комірок. Кожна комірка карти відповідає одному набору значень вхідних змінних.

Групування осередків. Осередки, що містять 1 (або 0), групуються разом, якщо вони відрізняються лише значенням однієї змінної. Ці групи називаються імплікантами.

Групи повинні бути прямокутними та містити кількість осередків, що дорівнює ступеню двійки (1, 2, 4, 8 …).
Групи мають бути якомога більшими. Кожна комірка, що містить 1 (або 0), повинна бути включена хоча б одну групу.

ПРИКЛАДИ

ПРИКЛАД

Побудова карти Карно для виразу F = A'B'C+AB'C+AB'C'

1. Визначити кількості змінних (2^3 = 8 клітинок)

C\AB	00	01	11	10
0				
1				

2. Заповнення карти Карно

C\AB	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1

3. Групування одиниць

Об'єднуємо сусідні клітинки з одиницями у групи по 2^n (тобто 2, 4, 8, ...).
Групи повинні бути прямокутними чи квадратними.
Чим більша група, тим менше членів буде у спрощеному виразі.

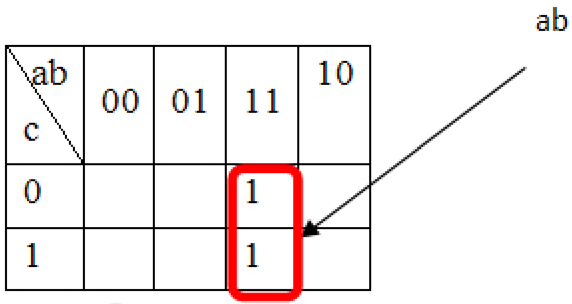
C\AB	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1

Спрощений вираз для функції F має вигляд: F = B‘C

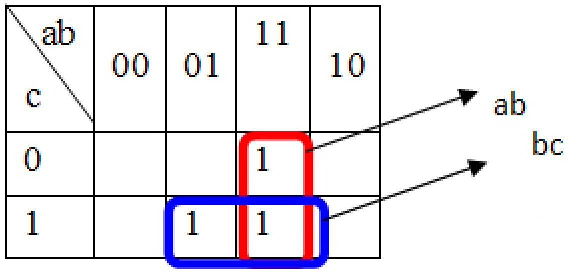
ПРИКЛАДИ СПРОЩЕННЯ МЕТОДОМ КАРНО

Щоб правильно мінімізувати функцію, необхідно правильно об'єднувати групи комірок. Для цього важливо розуміти, які комірки є сусідами.

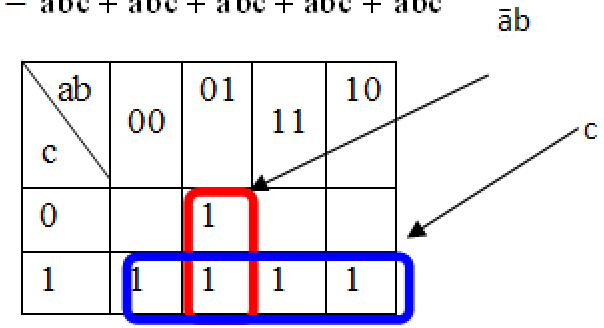
$f = ab\bar{c} + abc$



$f = \bar{a}bc + abc + ab\bar{c}$

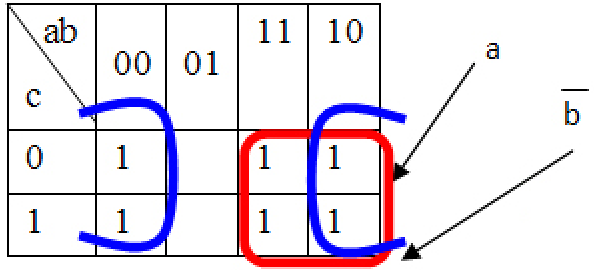


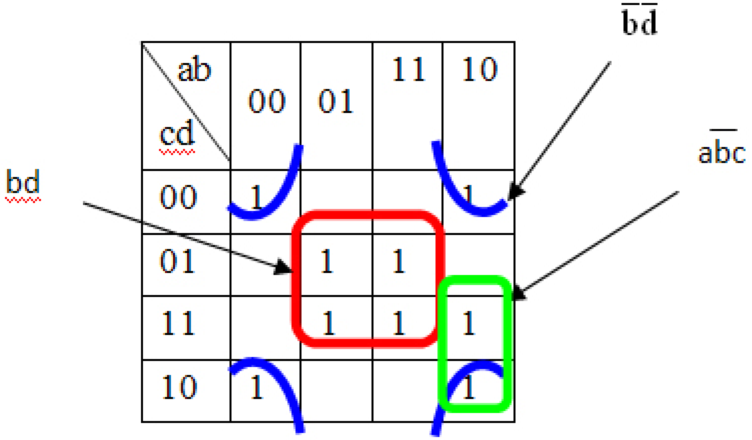
$f = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c + abc + a\bar{b}c$



$f = \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + ab\bar{c}d + abcd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}cd$

$f = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + ab\bar{c} + abc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$





ПРИКЛАД

Спростити вираз F = A'B (C'+D')+BC+A'D'

A	B	C	D	A'	C'	D'	A'B	C'+D'	BC	A'D'	A'B (C'+D')	F
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1

3. Групування одиниць

Об'єднуємо сусідні клітинки з одиницями у групи по 2^n (тобто 2, 4, 8, ...).
Чим більша група, тим менше членів буде у спрощеному виразі.

AB\CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Спрощений вираз : F = AD' + A'B + BC

ПРИКЛАД

Спростити вираз F = (¬C∨¬D)∧(B∨C)∧(¬A∨D)

A	B	C	D	¬C	¬D	¬C∨¬D	B∨C	¬A∨D	(¬C∨¬D)∧(B∨C)∧(¬A∨D)
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0

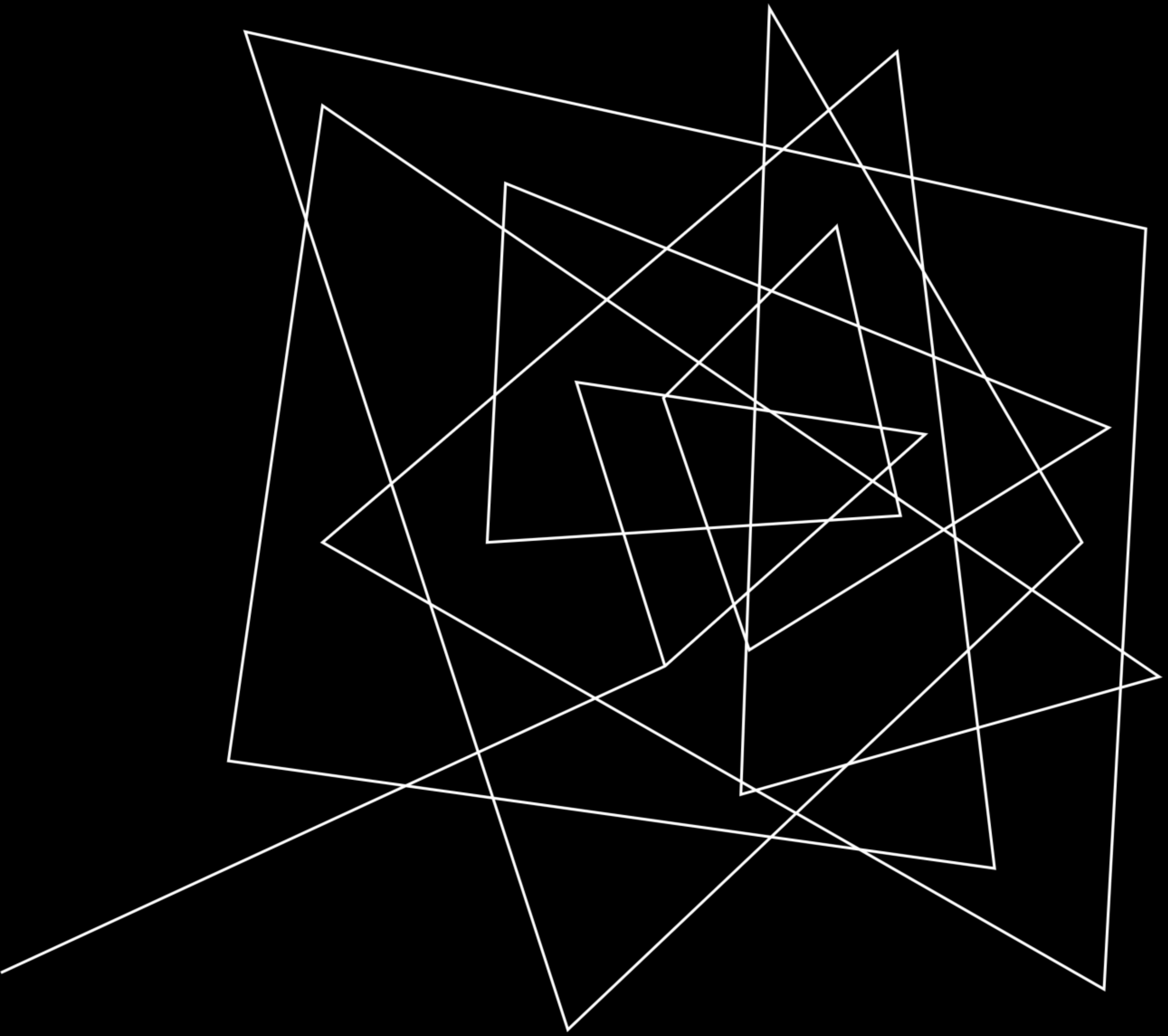
3. Групуємо нулів

AB\CD	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	1

Спрощений вираз:

F = (B+C) (C‘+D‘)

АЛГОРИТМ КВАЙНА



Алгоритм Квайна – це метод мінімізації булевих функцій, представлених у диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ). Його основна мета – знайти найпростішу форму запису функції, використовуючи мінімальну кількість змінних і операцій.

АЛГОРИТМ КВАЙНА

1. Функція повинна бути записана у вигляді суми добутків (диз'юнкції кон'юнкцій).
2. Попарно порівнюються всі члени ДНФ. Якщо два члена відрізняються лише однією змінною, яка в одному інвертована, а в іншому – ні, то ці члени склеюються, а відмінна змінна відкидається.
3. Після склеювання виконується операція поглинання. Якщо один член є підмножиною іншого, то перший член поглинається другим і відкидається.
4. Кроки 2 і 3 повторюються доти, доки не будуть отримані всі можливі склеювання та поглинання.
5. З отриманих членів вибираються ті, які входять до всіх мінімальних покриттів таблиці.

ПРИКЛАД

f(x, y, z) = ¬x∧y∧¬z ∨ x∧¬y∧¬z ∨ x∧y∧¬z
Знайти мінімальну ДНФ (МДНФ) для цієї функції, тобто спростити її вираз, зберігши при цьому її логічну еквівалентність.

Крок 1. Створення таблиці імплікант

№	Мінтерм	Двійковий код
1	¬x∧y∧¬z	010
2	x∧¬y∧¬z	100
3	x∧y∧¬z	110

Крок 2. Об'єднання імплікант
Оскільки мінтерми 1 і 3 відрізняються лише однією змінною (x), їх можна об'єднати, отримавши імплікант y∧¬z.
Мінтерм 2 і 3 відрізняються лише однією змінною (y), їх можна об'єднати, отримавши імплікант x∧¬z.

Крок 3. Створення імплікантної таблиці

Імплікант	010	100	110
y∧¬z	X		X
x∧¬z		X	X

Крок 5. МДНФ f(x, y, z) = **y¬z ∨ x¬z.**

ПРИКЛАД

Нехай задана булева функція:

f(x, y, z) = (x ∨ y) ∧ (¬z)

Отже, ДНФ функції:

f(x, y, z) = ¬xy¬z ∨ x¬y¬z ∨ xy¬z

об'єднати імпліканти, які відрізняються лише одним літералом.
¬xy¬z ∨ xy¬z = y¬z (¬x ∨ x) = y¬z
x¬y¬z ∨ xy¬z = x¬z (y ∨ ¬y) = x¬z

МДНФ **f(x, y, z) = y¬z** ∨ **x¬z = ¬z (y** ∨ **x) .**

x	y	z	f(x, y, z)	Кон'юнкт
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	¬xy¬z
0	1	1	0	
1	0	0	1	x¬y¬z
1	0	1	0	
1	1	0	1	xy¬z
1	1	1	0	

THANK YOU