Лекція 4

Дискретне перетворення Фур'є

Визначення

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ, *discrete Fourier transform - DFT*) - це математичний метод, який використовується для аналізу і обробки сигналів, представлених у вигляді послідовностей дискретних відліків. ДПФ дозволяє розкрити частотний склад сигналу та перетворити сигнал із часової області в частотну область. Основна ідея полягає в розкладі сигналу на складові частоти.

ДПФ застосовується до оцифрованого сигналу, тобто такого, що вже пройшов через АЦП. В чистому вигляді алгоритм ДПФ на сьогоднішній день практично не використовується, натомість використовується оптимізований з обчислювальної точки зору схожий алгоритм – **швидке перетворення Фур'є** (ШПФ, *fast Fourier transform - FFT*).

В якості вхідних даних для ДФТ є вибірка (масив) значень відліків сигналу $x[n]$. Вихідними (отриманими) даними повинна бути вибірка відліків (магнітуд) спектру $X[n]$.

Основною відмінністю (в першому наближенні) між ДПФ та ШПФ є те, що в ДПФ n може бути довільним цілим числом, а в ШПФ n обов'язково повинно бути якоюсь степенню двійки (8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, і т.д.)

ДПФ

При вивченні цієї теми традиційно завжди спочатку розглядають ДПФ, і потім на основі алгоритму ДПФ переходять до алгоритму ШПФ.

Основні етапи дискретного перетворення Фур'є:

1) Вхідний сигнал: Ми починаємо з послідовності дискретних відліків сигналу, яку ми хочемо проаналізувати. Нехай ця послідовність буде позначена як $x[n]$, де n - індекс відліку.

2) Обчислення комплексних амплітуд: Для кожної можливої частоти k, обчислюється комплексна амплітуда, яка представляє вагу частоти k у вхідному сигналі. Ця амплітуда обчислюється наступним чином:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \qquad (1)$$

де $X[k]$ - комплексна амплітуда для частоти k, N - загальна кількість відліків у вхідній послідовності, n - індекс відліку, j - уявна одиниця.

3) Результат ДПФ: Після обчислення комплексних амплітуд для всіх можливих частот $x[n]$ ДПФ готове. Результат ДПФ представляється послідовністю комплексних чисел $X[k]$, де k – частота відповідної гармоніки.

4) Відображення результату: Результат ДПФ може бути подано у вигляді амплітудної і фазової інформації для кожної частоти, що дозволяє аналізувати частотний склад вхідного сигналу.

Дискретне перетворення Фур'є є потужним інструментом у обробці сигналів, аналізі зображень та аудіозаписів, телекомунікаціях та багатьох інших галузях. Воно дозволяє виділити частотні компоненти в сигналі і виконувати фільтрацію, компресію, аналіз спектра і багато інших операцій.

Необхідна умова правильного оцифрування сигналу - теорема Котельникова-Найквіста

Головна вимога до частоти дискретизації визначається так званою *теоремою відліків*, або ***теоремою Віттакера-Найквіста-Котельникова-Шеннона*** (частіше її називають просто теоремою Котельникова – Найквіста), яка свідчить, що якщо безперервний сигнал $s(t)$ має спектр, обмежений частотою f_{max}, то він може бути однозначно і без втрат відновлений за своїми дискретними відліками, узятими з частотою $f_s = 2f_{max}$, або, по-іншому, за відліками, узятими з періодом

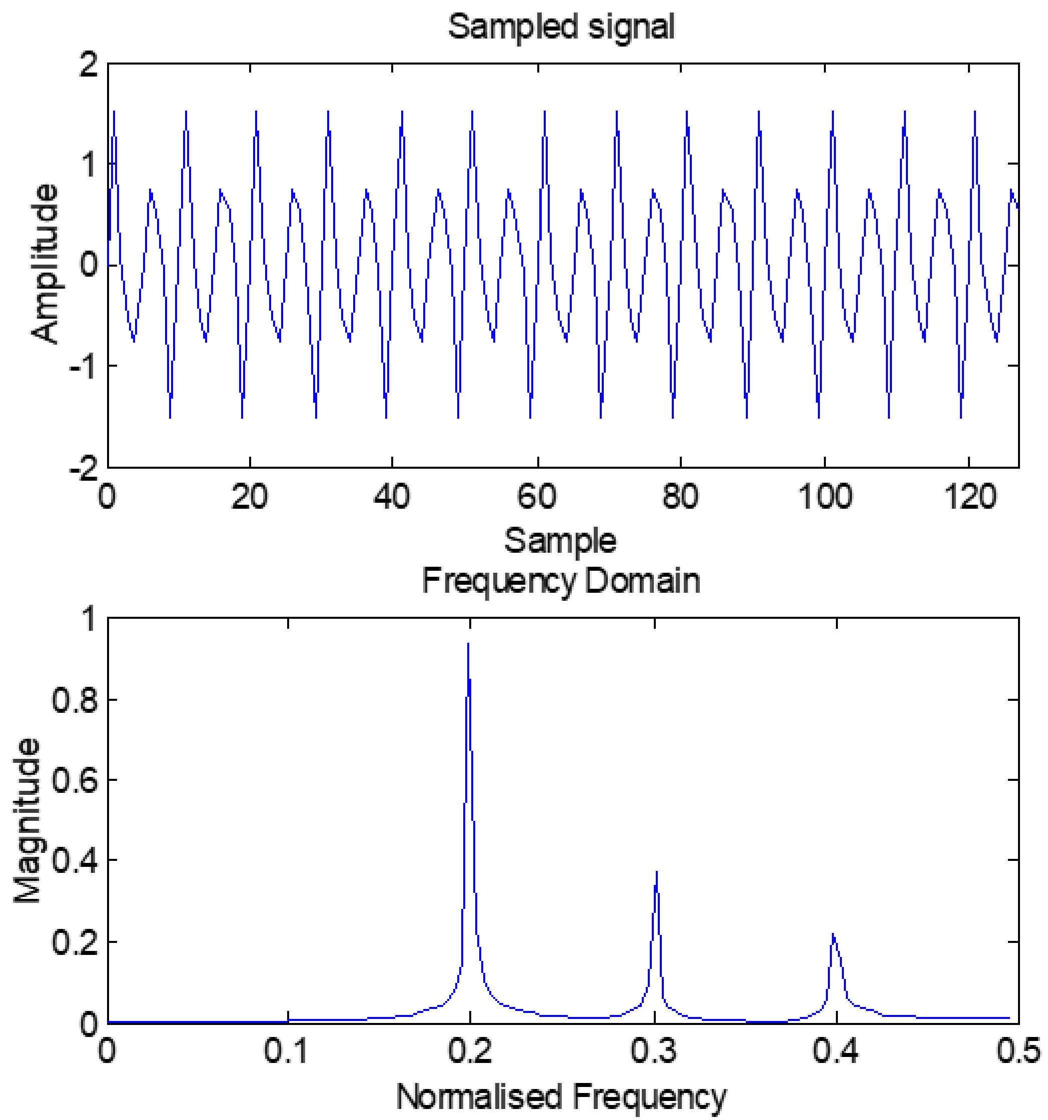
Для того, щоб відновити сигнал за його відліками без втрат, необхідно, щоб частота дискретизації була хоча б у два рази більша за максимальну частоту первинного неперервного сигналу:

$$\boldsymbol{f_s \geq 2f_{max}}$$

Нормалізована частота

В даному випадку нормалізованою частотою називається відношення частоти сигналу до частоти дискретизації. Таким чином, якщо $\Omega = 1$ – то це частота дискретизації.

Алгоритми ДПФ не дозволяють побачити спектр сигналу вище частоти дискретизації, оскльки теорема Котельникова-Найквіста це забороняє $(f_s \geq 2f_{max})$.



Приклад

Припустимо, у нас є 4 відліки оцифрованого сигналу (N=4):

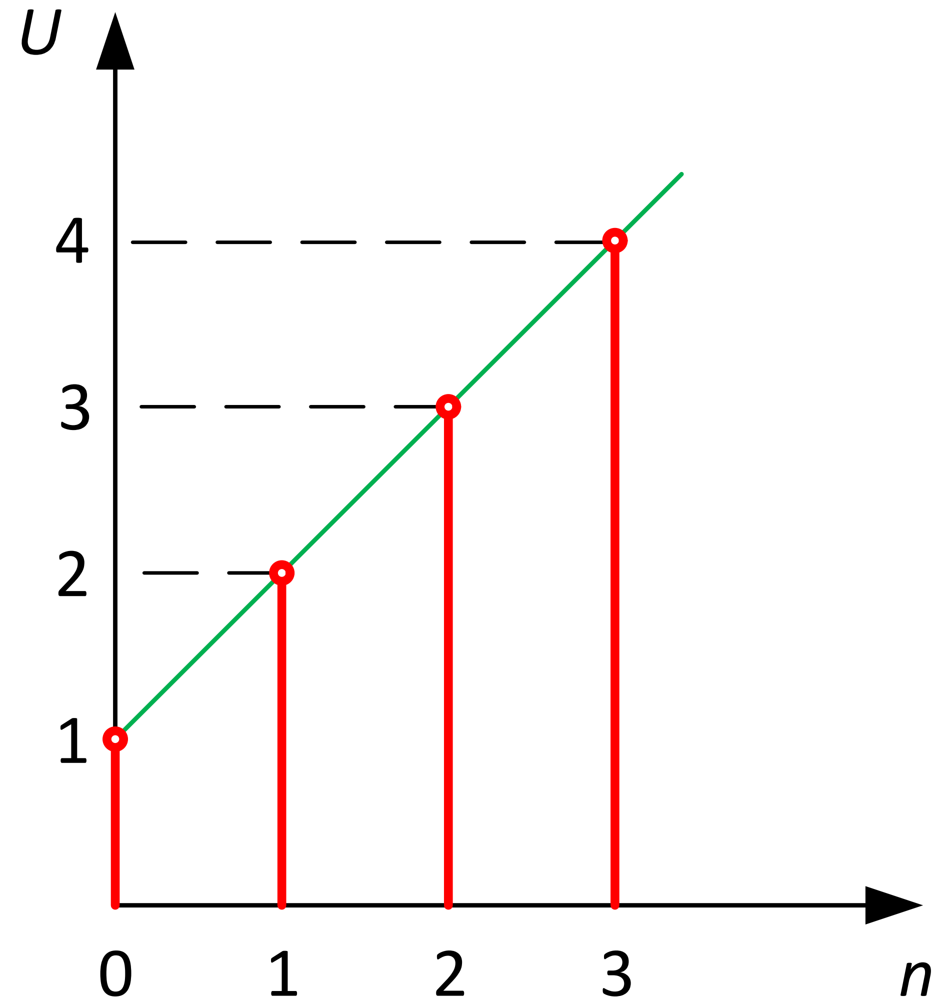
$x[0] \ = 1;$

$x[1] \ = 2;$

$x[2] \ = 3;$

$x[3] \ = 4.$

Результатом ДПФ повинен бути спектр, представлений у вигляді сукупності відліків $X[k]$ з такою самою кількістю елементів N



Приклад

За формулою (1)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

де *X[k]* - комплексна амплітуда для частоти *k*, *n* - індекс відліку, *N* - загальна кількість відліків у вхідній послідовності, *j* - уявна одиниця.

Обчислимо ШПФ для кожної компоненти *X[f]*:

Для *k* = 0: $X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3]$

$$X[0] = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Для *k* = 1: $X[1] = x[0] + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}(1)} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}(2)} + x[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}(3)}$

$$X[1] = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi} + 4e^{-j\frac{3\pi}{2}}$$

$$X[1] = 1 + 2(-j) + 3(-1) + 4(j) = 1 - 2j - 3 + 4j = -2 + 2j$$

Приклад

Для *k* = 2: $X[2] = x[0] + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}(2)} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}(4)} + x[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}(6)}$

$$X[2] = 1 + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j2\pi} + 4e^{-j3\pi}$$

$$X[2] = 1 + 2(-1) + 3(1) + 4(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$$

Для *k* = 3: $X[3] = x[0] + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}(3)} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}(6)} + x[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}(9)}$

$$X[3] = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 3e^{-j3\pi} + 4e^{-j\frac{9\pi}{2}}$$

$$X[3] = 1 + 2(j) + 3(-1) + 4(-j) = 1 + 2j - 3 - 4j = -2 - 2j$$

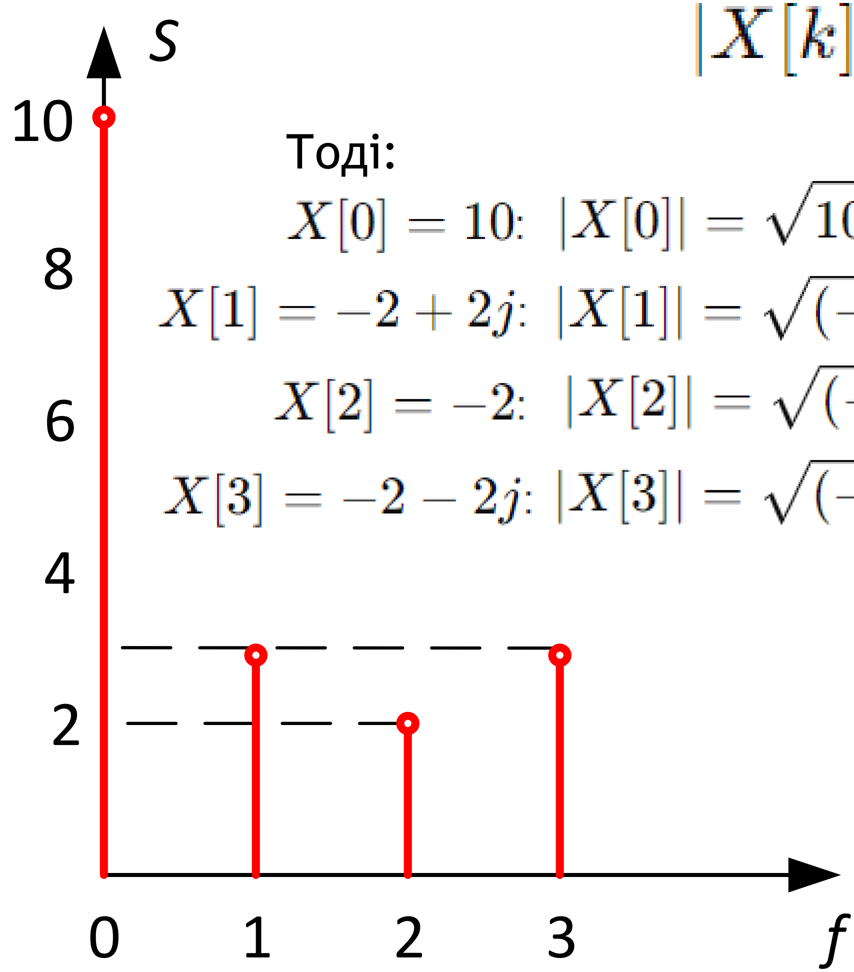
Таким чином: $X[0] = 10$ $\quad X[2] = -2$

$X[1] = -2 + 2j$ $\quad X[3] = -2 - 2j$

Приклад

Амплітуди відліків ШПФ розраховуються за формулою:

$$|X[k]| = \sqrt{\mathrm{Re}(X[k])^2 + \mathrm{Im}(X[k])^2}$$



Тоді:

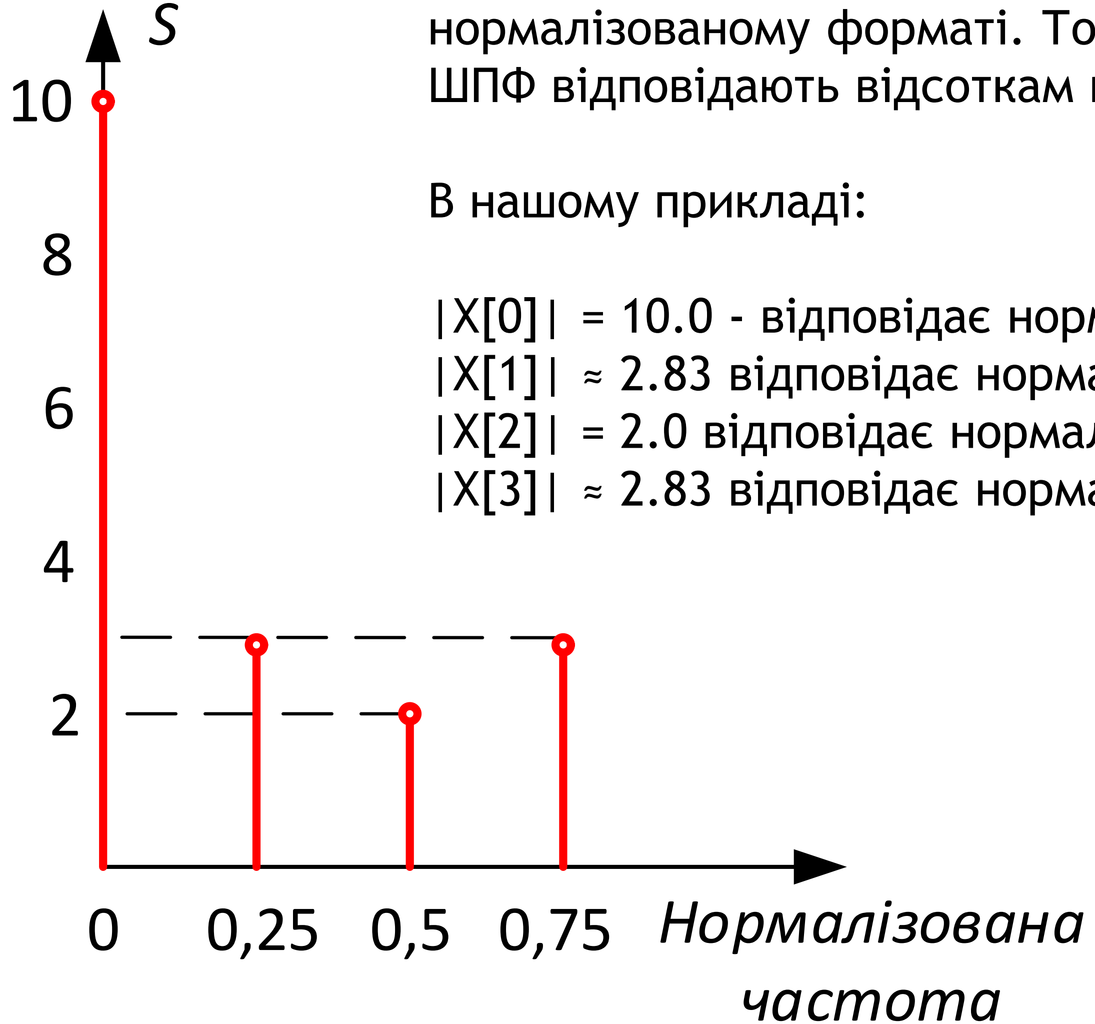
$$X[0] = 10\colon \ |X[0]| = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$X[1] = -2 + 2j\colon \ |X[1]| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

$$X[2] = -2\colon \ |X[2]| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$X[3] = -2 - 2j\colon \ |X[3]| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

Приклад



При визначенні амплітуд і частот для складових *X[k]*, які були зазначені, важливо пам'ятати, що ШПФ рахує частоти в нормалізованому форматі. Тобто, нормалізовані частоти в ШПФ відповідають відсоткам від загальної кількості відліків.

В нашому прикладі:

|X[0]| = 10.0 - відповідає нормалізованій частоті 0/4 = 0
|X[1]| ≈ 2.83 відповідає нормалізованій частоті 1/4 = 0.25
|X[2]| = 2.0 відповідає нормалізованій частоті 2/4 = 0.5
|X[3]| ≈ 2.83 відповідає нормалізованій частоті 3/4 = 0.75

Приклад

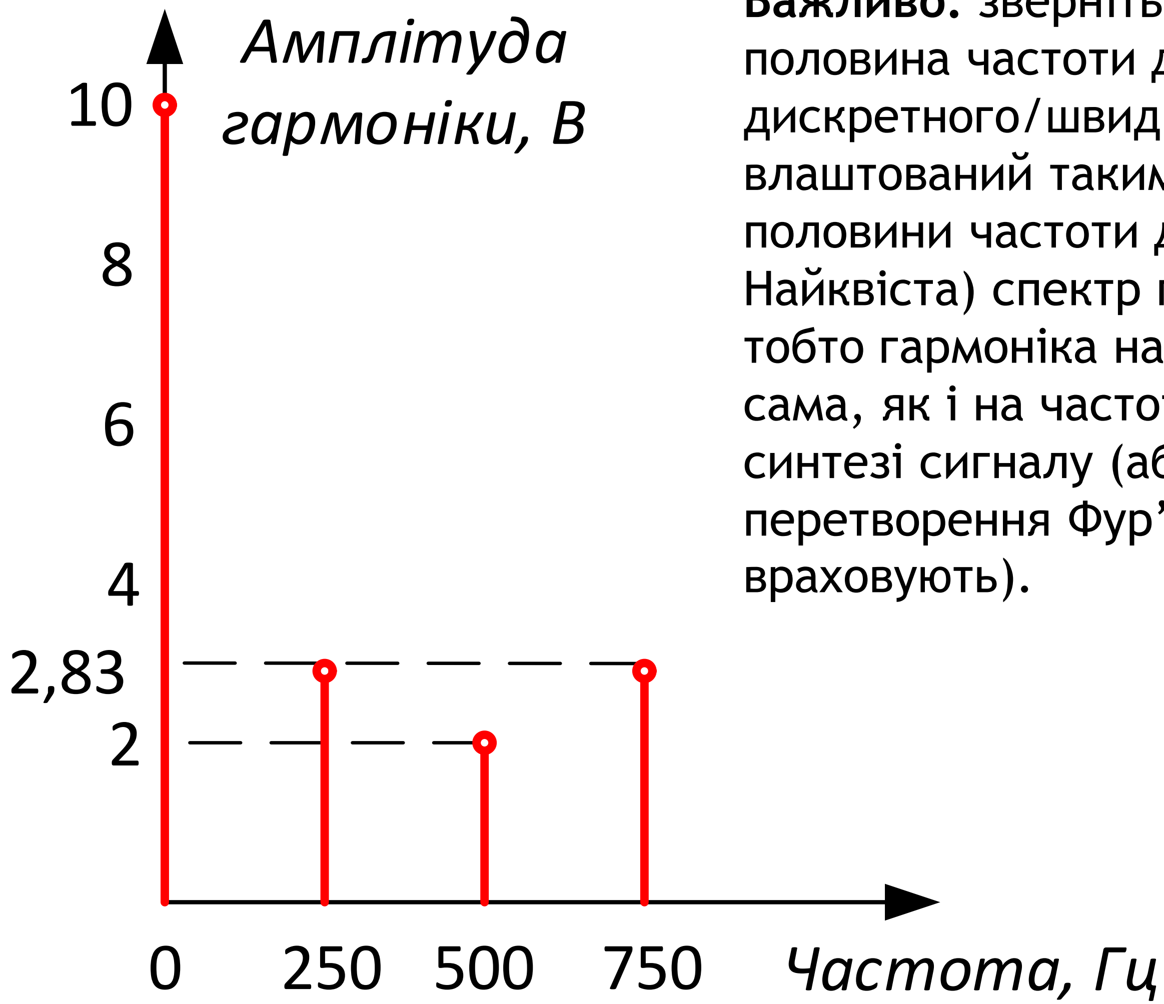
Щоб перевести ці нормалізовані частоти в герци, нам потрібно знати частоту дискретизації сигналу (f_s). Нехай f_s = 1000 Гц (це частота, з якою вимірюються відліки).
Тоді частоти в герцах визначаються так:

$$f_{\text{Гц}} = f[k] \cdot f_s$$

Для нашого прикладу:
|X[0]| = 10.0 - відповідає частоті 0 * 1000 = 0 Гц
|X[1]| ≈ 2.83 - відповідає частоті 0.25 * 1000 = 250 Гц
|X[2]| = 2.0 - відповідає частоті 0.5 * 1000 = 500 Гц
|X[3]| ≈ 2.83 - відповідає частоті 0.75 * 1000 = 750 Гц

Отже, амплітуди складових X[n] виражені у одиницях вимірювання вхідного сигналу (наприклад, у вольтах) будуть:
|X[0]| = 10.0 В
|X[1]| ≈ 2.83 В
|X[2]| = 2.0 В
|X[3]| ≈ 2.83 В

Приклад
Результуючий спектр



Важливо: зверніть увагу, що тут 500 Гц – це половина частоти дискретизації. Алгоритм дискретного/швидкого перетворення Фур'є влаштований таким чином, що після половини частоти дискретизації (частоти Найквіста) спектр получається симетричним – тобто гармоніка на частоті 750 Гц буде така сама, як і на частоті 250 Гц. Проте при синтезі сигналу (або виконанні оберненого перетворення Фур'є такі гармоніки також враховують).

Приклад
Перевірка шляхом синтезу сигналу

Для синтезу сигналу використовують так зване **обернене перетворення Фур'є**:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]| \cos\left(2\pi \frac{kn}{N} + \arg(X[k])\right)$$

де $\arg(X[k]) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(X[k])}{\mathrm{Re}(X[k])}\right)$

$X[0] = 10$: $\arg(X[0]) = 0$ (оскільки дійсне число, тобто постійна складова)

$X[1] = -2 + 2j$: $\arg(X[1]) = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$

$X[2] = -2$: $\arg(X[2]) = \pi$ (оскільки дійсне від'ємне число)

$X[3] = -2 - 2j$: $\arg(X[3]) = \arctan\left(\frac{-2}{-2}\right) = \arctan(1) = \frac{7\pi}{4}$

(оскільки воно знаходиться в четвертій чверті)

Приклад
Перевірка шляхом синтезу сигналу (обернене ПФ)

$$x_0[n] = \frac{1}{4}|X[0]|\cos\left(2\pi\frac{0n}{4} + 0\right) = \frac{1}{4} \times 10 \times \cos(0) = 2.5$$ (постійна складова)

$$x_1[n] = \frac{1}{4}|X[1]|\cos\left(2\pi\frac{1n}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$x_1[n] = \frac{1}{4} \times 2.83 \times \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) \approx 0.7075\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$x_2[n] = \frac{1}{4}|X[2]|\cos\left(2\pi\frac{2n}{4} + \pi\right) = \frac{1}{4} \times 2 \times \cos(\pi n + \pi)$$

$$x_2[n] = 0.5 \times \cos(\pi n + \pi) = 0.5 \times (-1)^n$$

(змінний сигнал, що стрибає між -0,5 та +0,5)

Приклад
Перевірка шляхом синтезу сигналу (обернене ПФ)

$$x_3[n] = \frac{1}{4}|X[3]|\cos\left(2\pi\frac{3n}{4} + \frac{7\pi}{4}\right)$$

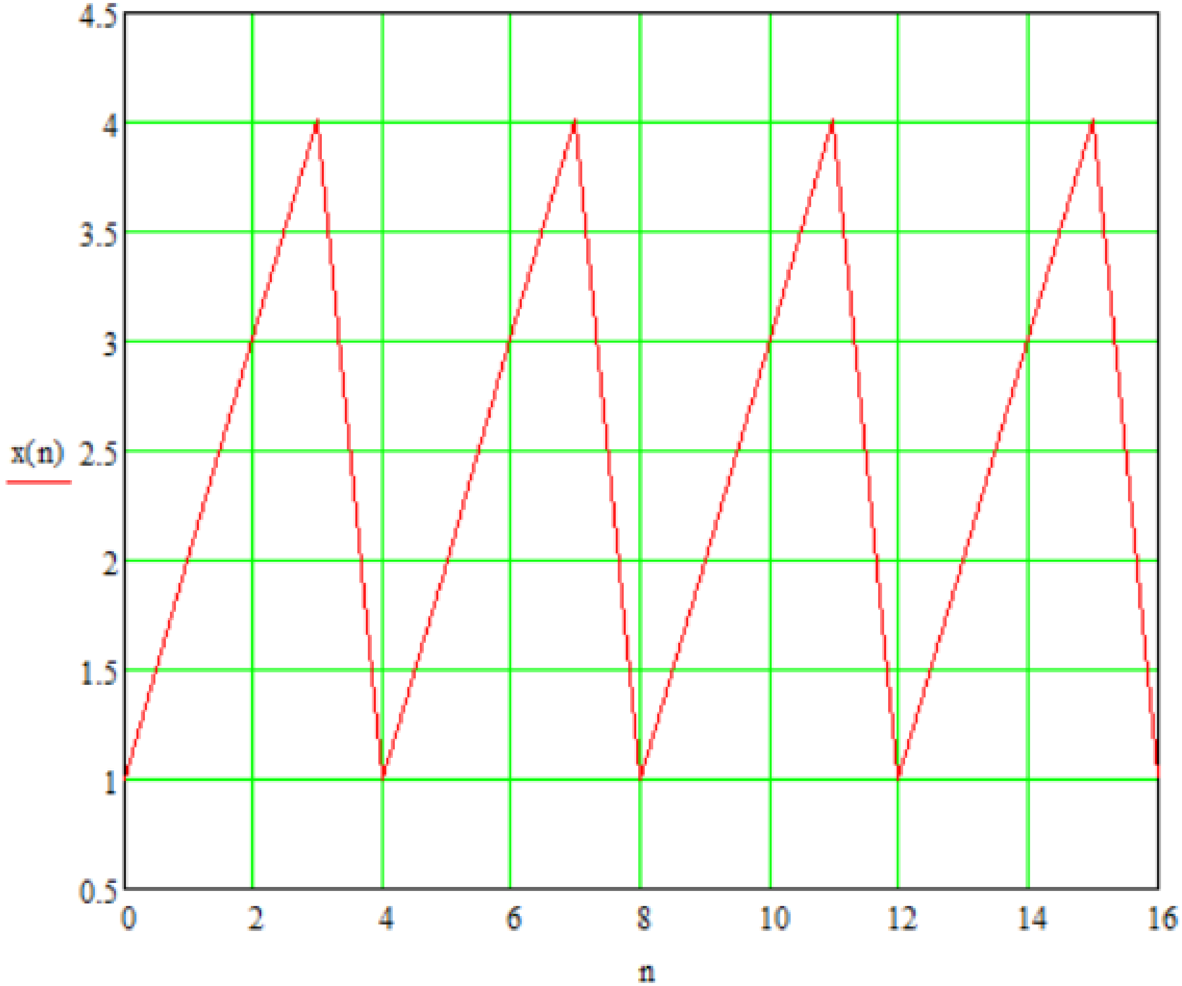
$$x_3[n] = \frac{1}{4} \times 2.83 \times \cos\left(\frac{3\pi n}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) \approx 0.7075\cos\left(\frac{3\pi n}{2} + \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$x[n] = x_0[n] + x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

$$x[n] = 2.5 + 0.7075\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + 0.5 \times (-1)^n + 0.7075\cos\left(\frac{3\pi n}{2} + \frac{7\pi}{4}\right)$$

Приклад
Перевірка шляхом синтезу сигналу (MathCAD)

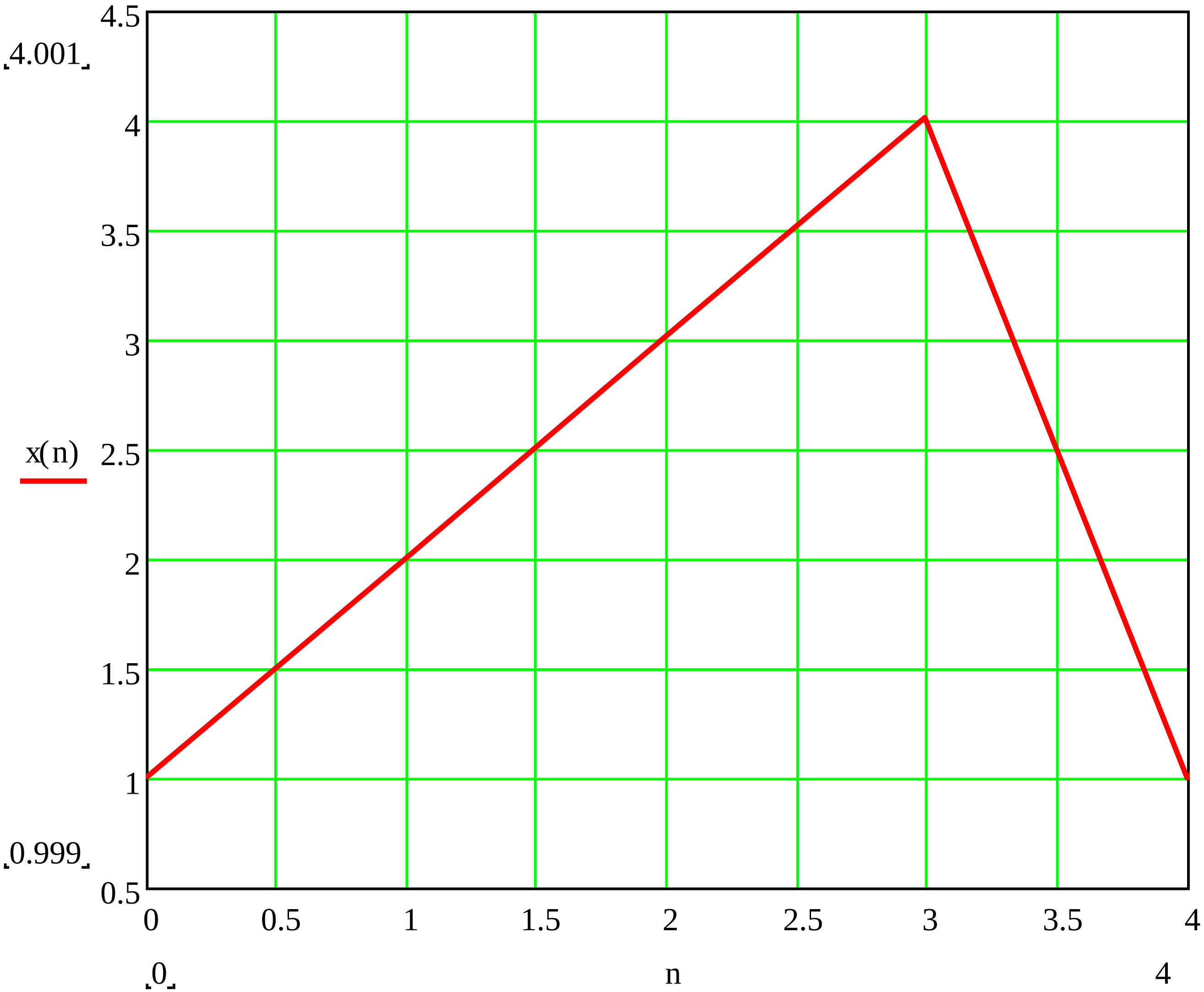
$$x(n) := 2.5 + 0.7075\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + 0.5\cdot\cos(\pi n + \pi) + 0.7075\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{3\cdot\pi}{4}\right)$$



3 замість 7, тобто така сама гармоніка, як і симетрична їй, але з частотою меншою за частоту Найквіста

Приклад

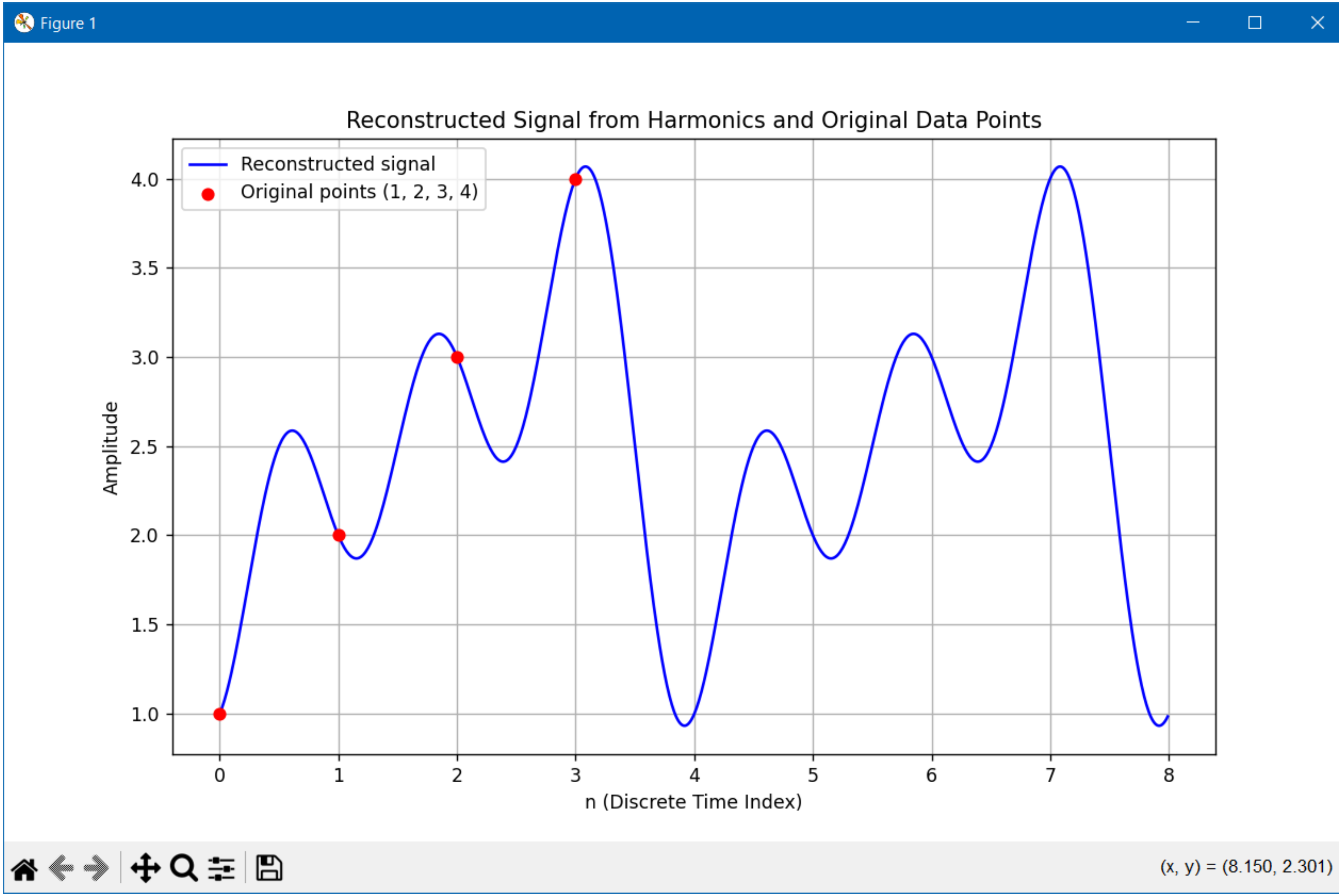
Перевірка шляхом синтезу сигналу (один період)



Приклад
Перевірка шляхом синтезу сигналу (Python)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Define parameters
N = 4  # Length of the sequence
n = np.arange(0, N*2, 0.01)  # More points for a smoother curve

# Compute each harmonic component
x0 = 2.5
x1 = 0.7075 * np.cos(np.pi * n / 2 + 3 * np.pi / 4)
x2 = 0.5*np.cos(np.pi*n + np.pi)
x3 = 0.7075 * np.cos(3 * np.pi * n / 2 + 5 * np.pi / 4)

# Combine harmonics to form the full signal
x_full = x0 + x1 + x2 + x3

# Discrete points corresponding to the original input [1, 2, 3, 4]
n_points = np.arange(N)
x_points = [1, 2, 3, 4]

# Plot
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(n, x_full, label='Reconstructed signal', color='b')
plt.scatter(n_points, x_points, color='r', zorder=5, label='Original points (1, 2, 3, 4)')
plt.xlabel('n (Discrete Time Index)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Reconstructed Signal from Harmonics and Original Data Points')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Приклад
Перевірка шляхом синтезу сигналу (Python)



Далі буде…

…Швидке перетворення Фур’є