Практичне заняття 6

Математичне планування експерименту

1. Основні поняття і визначення

Під експериментом будемо розуміти сукупність операцій, що здійснюються над об'єктом дослідження з метою отримання інформації про його властивості.

Експеримент, в якому дослідник на свій розсуд може змінювати умови його проведення, називається **активним експериментом**. Якщо дослідник не може самостійно змінювати умови його проведення, а лише реєструє їх, то це **пасивний експеримент.** Найважливішим завданням методів обробки отриманої в ході експерименту інформації є задача побудови математичної моделі досліджуваного явища, процесу, об'єкта . Її можна використовувати і при аналізі процесів і при проектуванні об'єктів. Можна отримати добре апроксимуючу математичну модель, якщо цілеспрямовано застосовується активний експеримент.

Іншим завданням обробки отриманої в ході експерименту інформації є задача оптимізації, тобто знаходження такої комбінації незалежних змінних, що впливають на результат, при якій обраний показник оптимальності набуває екстремального значення. Дослід – це окрема експериментальна частина. План експерименту – сукупність даних, що визначають кількості, умови і порядок проведення дослідів.

Планування експерименту – вибір плану експерименту, що задовольняє заданим вимогам, сукупність дій спрямованих на розробку стратегії експериментування (від отримання апріорної інформації до отримання працездатної математичної моделі або визначення оптимальних умов). Це цілеспрямоване керування експериментом, що реалізується в умовах неповного знання механізму досліджуваного явища. У процесі вимірювань, наступної обробки даних, а також формалізації результатів у вигляді математичної моделі, виникають похибки і втрачається частина інформації, що міститься у вихідних даних. Застосування методів планування експерименту дозволяє визначити похибку математичної моделі і судити про її адекватність. Якщо точність моделі виявляється недостатньою, то застосування методів планування експерименту дозволяє модернізувати математичну модель з проведенням додаткових дослідів без втрати попередньої інформації і з мінімальними витратами. Мета планування експерименту – знаходження таких умов і правил проведення дослідів, при яких вдається отримати надійну і достовірну інформацію про об'єкт з найменшою витратою праці, а також представити цю інформацію в компактній і зручній формі з кількісною оцінкою точності. Нехай нас цікавить властивість (Y) об'єкта, яка залежить від декількох (n) незалежних змінних *(X1, X2, ..., Xn)*, і ми хочемо з'ясувати характер цієї залежності – Y = *F (X1, X2, ..., Xn)*, про яку ми маємо лише загальне уявлення. Величина Y – називається «відгук» , а сама залежність *Y = F (X1, X2, ..., Xn)* – «функція відгуку» . Відгук повинен бути визначений кількісно. Незалежні змінні *X1, X2, ..., Xn* – інакше фактори, також повинні мати кількісну оцінку.

Для побудови ефективної математичної моделі доцільно провести попередній аналіз значущості факторів (ступеня впливу на функцію), їх ранжування та виключити малозначні фактори. Діапазони зміни факторів задають область визначення Y. Якщо прийняти, що кожному фактору відповідає координатна вісь, то отриманий простір називається факторним простором. При $n = 2$ область визначення Y являє собою прямокутник, при n = 3 – куб, при $n > 3$ – гіперкуб. При виборі діапазонів зміни факторів потрібно враховувати їх сумісність, тобто контролювати, щоб у цих діапазонах будь-які поєднання чинників були б реалізовані в дослідах і не призводили б до абсурду. Для кожного з факторів вказують граничні значення $Xi\ min \le Xi \le Xi\ max,\ i = 1, \dots n$. Регресійний аналіз функції відгуку призначений для отримання її математичної моделі у вигляді рівняння регресії *Y = F (X1, X2, ..., Xn; B1, B2, ..., Bm) + e*, де B1, ..., Bm – деякі коефіцієнти; e – похибка.

Серед основних методів планування, що застосовуються на різних етапах дослідження, використовують:

– планування експерименту, що відсікає, основне значення якого – виділення з усієї сукупності факторів групи істотних факторів, що підлягають подальшому детальному вивченню;

– планування експерименту для дисперсійного аналізу, тобто складання планів для об’єктів з якісними факторами; – планування регресійного експерименту, що дозволяє отримувати регресійні моделі (поліноміальні і інші);

– планування екстремального експерименту, в якому головним завданням є експериментальна оптимізація об’єкта дослідження;

– планування при вивченні динамічних процесів тощо.

2. Розкладання функції відгуку в степеневий ряд, кодування факторів.

Якщо заздалегідь невідомо аналітичний вираз функції відгуку, то можна розглядати не саму функцію, а її розкладання, наприклад в степеневий ряд у вигляді полінома $Y = B_0 + B_1X_1 + ... + B_nX_n + B_{12}X_1X_2 + ... B_{nn-1}X_nX_{n-1} + B_{11}X_{12} + ... + B_{nn}X_{n2} + ...$ Розкладання в степеневий ряд функції можливо в тому випадку, якщо сама функція є неперервною і гладкою. На практиці зазвичай обмежуються числом членів степеневого ряду і апроксимують функцію поліномом деякого ступеня. Фактори можуть мати різні розмірності *(А, В, Вт, об/хв)* і різко відрізняються кількісно. У теорії планування експерименту використовують кодування факторів. Ця операція полягає у виборі нового масштабу для кодованих факторів, таким чином, щоб мінімальне значення кодованих факторів відповідало «–1», а максимальне значення «+1».

Функція відгуку може бути виражена через кодовані фактори $Y = f(x1, ..., xn)$ і записана в поліноміальному вигляді $Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n + b_{12}x_1x_2 + ...$

3. Приклад визначення оптимальної геометрії та режиму обробки плоских поверхонь методами математичного планування експерименту.

Визначення оптимальної геометрії ножів фрез проводилося відповідно до методики математичного планування експерименту.

Незмінними в експериментах були: передній кут ножів у нормальній січній площині $\gamma_n = -10^\circ$, задній кут у напрямку вектора швидкості різання $\alpha_v = 8^\circ$. Вихідною функцією була прийнята шорсткість обробленої поверхні Ra. Оптимізація проводилася за планом 2^{5-2}, що є чверть-реплікою від повного факторного експерименту 2^5. Інтервали варіювання факторів і матриця планування наведені в табл. 1.

Таблиця 1

№ з/п		Планування 2^{5-2}				
		Фактори				
		Швидкість різання *V***,** м/хв	Подача на зуб Sz, мм/зуб	Глибина різання t, мм	Кут нахилу різальної кромки λ, град	Радіус задньої поверхні ножа r, мм
1	2	3	4	5	6	7
1	Основний рівень	512	0,26	0,375	-35	10
2	Інтервал варіювання	116	0,06	0,125	5	3
3	Верхній рівень	628	0,32	0,500	-40	13
4	Нижній рівень	396	0,20	0,250	-30	7
5	Кодоване значення чинників	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5

Досліди дублювались. Відтворюваність процесу перевірялась за критерієм Кохрена:

$$G = \frac{S^2_{Д\,max}}{\sum_{B-1}^{n} S^2_{Д}} \le G_{(0,05;\, f_m;\, f_И)}, \tag{4.10}$$

де $S^2_{Д\,max}$ – найбільша з дисперсій у дослідах;

$S^2_{Д}$ – дисперсія, що характеризує розсіювання результатів дослідів;

$G_{(0,05;\, f_m;\, f_И)}$ – табличне значення критерію Кохрена при 5%-му рівні значущості.

Значення розміру дійсної шорсткості в дослідах наведені в табл. 2.

Таблиця 2

№ з/п	Номер досліду	Розмір дійсної шорсткості Ra, мкм		$\overline{R}a$	$Ra_i - \overline{R}a$	$\left(Ra_i - \overline{R}a\right)^2$
		Експеримент 1	Експеримент 2			
1	1	0,988	0,978			
2	2	1,112	1,129			
3	3	0,948	0,887			
4	4	1,148	1,420			
5	5	0,825	1,113			
6	6	0,926	0,938			
7	7	0,998	1,109			
8	8	0,854	0,918			
$\sum_{1}^{8} S_Д^2$						

Значення $G =$. Отже, процес є відтвореним (не відтвореним).

Коефіцієнти регресії розраховані за формулами:

$$b_0 = \frac{\sum_{1}^{n} Ra}{n};$$

$$b_i = \frac{\sum_{1}^{n} X_i Ra}{n}.$$

Розрахунок коефіцієнтів регресії зведено в табл. 3.

Таблиця 3

№ досліду	Кодовані значення чинників						$\overline{R}a$
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	+	–	–	–	–	+	
2	+	+	–	–	+	–	
3	+	–	+	–	+	+	
4	+	+	+	–	–	–	
5	+	–	–	+	+	–	
6	+	+	–	+	–	+	
7	+	–	+	+	–	–	

8	+	+	+	+	+	+	
Значення коефіцієнтів регресії							

У такий спосіб рівняння регресії має вигляд:

$$\boldsymbol{Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5}$$

Для перевірки адекватності визначаємо критерій Фішера, причому модель адекватна, якщо виконується умова:

$$F_{АД} = \frac{S^2_{A_Д}}{S^2_Y} \le F_{(0{,}05;\, fAA;\, fy)} \tag{4.11}$$

$$\text{де } S^2_{A_Д} = \frac{\sum_{n=1}^{n} (\bar{R}a - Y_i)^2}{f_{A_Д}} \tag{4.12}$$

– дисперсія адекватності.

Розрахунки для визначення дисперсії наведені в табл. 4.

Таблиця 4

№ досліду	Ra, мкм	Y_i, мкм	$\bar{R}a - Y_i$	$\left(\bar{R}a - Y_i\right)^2$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

Критерій Фішера $F_{АД} = \dfrac{0{,}000282}{0{,}005600} = 0{,}1468 \le F_{(0{,}05,\, f_{АД},\, f_Y)} = 19{,}0$

Таким чином, рівняння регресії адекватне.

Оцінку значущості коефіцієнтів регресії виконуємо за допомогою критерію Ст'юдента. Коефіцієнт вважається значимим, якщо виконується нерівність:

$$|b_i| \ge \Delta b_i = t_{(0{,}05;\, fy)} \frac{S_Y}{\sqrt{nm}}.$$

Для нашого випадку: $\Delta b_i = 2{,}31 \dfrac{0{,}0725}{\sqrt{8 \cdot 2}} = 0{,}0419$.

Виходячи з цього, можна зробити висновок, що незначимим є тільки коефіцієнт регресії при чиннику X_2, а інші коефіцієнти регресії значимі.

Пошук оптимуму параметрів X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 виконуємо за методом крутого сходження. При пошуку оптимуму методом крутого сходження прямування здійснюється при зміні кожного чинника пропорційно розміру відповідних коефіцієнтів регресії в той бік, в який вказує знак коефіцієнта.

При виборі кроку прямування за градієнтом за основу був прийнятий крок, що характеризує зміну найбільш істотного фактора, тобто при чиннику X_5. Вибираємо крок при чиннику X_5 рівним $h_5 = 3$ мм. Після вибору кроку h_5 розмір кроків для інших факторів визначаємо з урахуванням відповідних похідних коефіцієнтів регресії на інтервали варіювання:

$$h_1 = \frac{h_5(b_1\varepsilon_1)}{b_5\varepsilon_5} = \frac{3(+4{,}7560)}{-0{,}252} = -56{,}6 \text{ м/хв};$$

$$h_2 = \frac{h_5(b_2\varepsilon_2)}{b_5\varepsilon_5} = \frac{3(+0{,}0008)}{-0{,}252} = -0{,}0095 \text{ мм/зуб};$$

$$h_3 = \frac{h_5(b_3\varepsilon_3)}{b_5\varepsilon_5} = \frac{3(-0{,}0068)}{-0{,}252} = +0{,}0809 \text{ мм};$$

$$h_4 = \frac{h_5(b_4\varepsilon_4)}{b_5\varepsilon_5} = \frac{3(-0{,}2400)}{-0{,}252} = +2{,}8570 \text{ град};$$

$$h_5 = 3 \text{ мм}.$$

Округляємо кроки h_1 = 56 м/хв; h_2= – 0,01 мм/зуб; h_3 = + 0,08 мм; h_4 = 3 град; h_5 = 3 мм.

Реалізація уявних кроків проводиться після переводення натуральних значень кожного фактора в кодовані. Дані обчислення робимо за виразом:

$$X_i = \frac{x_i - x_{io}}{\delta_i},$$

де x_i – натуральне значення чинника;

x_{i_0} – значення i-го чинника на нульовому рівні;

δ_i – інтервал варіювання i-го чинника.

Тоді:

$$X_1 = \frac{454 - 512}{116} = -0{,}500;$$

$$X_2 = \frac{0{,}25 - 0{,}26}{0{,}06} = -0{,}167;$$

$$X_3 = \frac{0{,}455 - 0{,}375}{0{,}125} = +0{,}640;$$

$$X_4 = \frac{38-35}{5} = +0{,}600;$$

$$X_5 = \frac{13-10}{3} = +1{,}000.$$

Результати розрахунку уявних дослідів зведені в табл. 5.

Реалізовані уявні досліди наведені в табл. 5.

Таблиця 5

№ з/п		Фактори					Шорсткість Ra, мкм
		Швидкість різання V, м/хв	Подача на зуб Sz, мм/зуб	Глибина різання t, мм	Кут нахилу різальної кромки λ, град	Радіус задньої поверхні r, мм	
		Кодовані значення					
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Коефіцієнти регресії b_i	+0,041	+0,014	–0,054	–0,048	–0,084	
2	Інтервали варіювання чинників ε_i	116	0,06	0,125	5	3	
3	Добутки $b_i\varepsilon_i$	+4,756	+0,0008	–0,0068	–0,2400	–0,2520	
4	Натуральні значення кроків	–56	–0,01	–0,08	+3	+3	
5	Уявні досліди:						
	дослід № 1	512	0,26	0,375	35	10	1,021
	дослід № 2	456	0,25	0,455	38	13	0,850
	дослід № 3	400	0,24	0,535	41	16	0,679
	дослід № 4	344	0,23	0,615	44	19	0,508
	дослід № 5	288	0,22	0,700	47	22	0,337
	дослід № 6	232	0,21	0,780	50	25	0,166

Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання

Таблиця 6

Варіант	Швидкість різання V, м/хв		Подача на зуб Sz, мм/зуб		Глибина різання t, мм		Кут нахилу різальної кромки λ, град		Радіус задньої поверхні ножа r, мм	
	Основний рівень	Інтервал варіювання	Основний рівень	Інтервал варіювання	Основний рівень	Інтервал варіювання	Основний рівень	Інтервал варіювання	Основний рівень	Інервал варіювання
1	500	50	0,30	0,05	0,4	0,1	25	5	9	2
2	500	50	0,35	0,05	0,4	0,1	35	5	8	2
3	500	50	0,4	0,05	0,4	0,1	25	5	10	2
4	500	50	0,45	0,05	0,4	0,1	35	5	9	2
5	500	50	0,50	0,05	0,4	0,1	35	5	8	1
6	600	100	0,35	0,05	0,5	0,15	40	5	10	1
7	600	100	0,45	0,05	0,5	0,15	40	5	9	1
8	600	100	0,55	0,05	0,5	0,15	35	5	10	2
9	600	100	0,30	0,05	0,5	0,15	35	5	8	2
10	600	100	0,35	0,05	0,5	0,15	40	5	9	2

Контрольні питання

1. Що таке планування експерименту?
2. Сформулюйте етапи планування.
3. Основна ціль планування.
4. Які задачі вирішує планування експерименту?
5. Що таке математична модель?
6. Обрати варіант завдання (табл. 6)
7. Виконати планування експерименту згідно наведеного прикладу, та обробити дані отримані експериментально (заповнити табл. 2,3,4).
8. Виконати пошук оптимуму методом крутого сходження.
9. Зробити висновки.