

Практичне заняття № 3

Загальні відомості про помилки вимірювань

Мета роботи: Засвоєння операцій з наближеними числами та вивчення способів визначення помилок вимірювання.

Теоретичні пояснення:

Похибка – кількісна характеристика неоднозначності результату вимірювання. Її оцінюють виходячи зі всієї інформації, накопиченої при підготовці і виконанні вимірювань. Цю інформацію обробляють для сумісного визначення остаточного результату вимірювання і його похибки. Остаточний результат не можна розцінювати як "дійсне значення" вимірюваної фізичної величини, оскільки в цьому немає сенсу із-за наявності похибки.

Похибка може бути виражена в одиницях вимірюваної величини x . У такому разі вона позначається Δx і носить назву *абсолютної похибки*. Проте абсолютна похибка не відображає якості вимірювань: наприклад, абсолютна похибка 1 мм при вимірюванні розмірів приміщення свідчить про високу якість вимірювання, та ж похибка абсолютно неприйнятна при вимірюванні діаметру тонкого дроту.

Критерієм якості вимірювання є відношення абсолютної похибки до остаточного результату вимірювання

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} .$$

Це відношення безрозмірне. Величину δx називають *відносною погрешністю* і використовують як в абсолютному, так і в відсотковому вираженні. Високій точності вимірювання відповідає мале значення відносної похибки.

Основні типи похибок:

- *Промахи або грубі похибки* – виникають унаслідок несправності вимірювальних приладів або помилок в експерименті, зроблених через неувагу.

- *Приладова похибка* – систематична похибка, присутня в результатах вимірювань, виконаних за допомогою будь-якого вимірювального приладу. Приладова похибка, як правило, невідома і не може бути врахована. Її можна оцінити тільки шляхом порівняння показань приладу з показаннями іншого, точнішого. Іноді результати спеціально проведеного порівняння приводять в паспорті приладу, проте частіше вказують максимально можливу похибка для приладів даного типу.

- *Модельна похибка*. У основу будь-якого експериментального дослідження, зв'язаного з вимірюваннями, закладена модель. Модель містить фізичний опис досліджуваного об'єкту або процесу, який дозволяє скласти його математичний опис, а саме, набір функціональних співвідношень, що включають фізичні величини. Невірно побудована модель, в якій не знайшли відображення якісь важливі процеси або фактори, що впливають на результат вимірювань, також приводить до невідповідностей. Як наслідок, вимірювані в експерименті величини, що обчислюються за отриманими з моделі робочими формулами, містять похибки, які носять назву модельних похибок. До розряду модельних може бути віднесена похибка зважування на важельних вагах. Згідно закону Архімеда вага тіла і гирь

зменшується через дію виштовхуючої сили повітря. Нагадаємо, що вага 1 м^3 повітря рівна приблизно 10 Н . Для того, щоб правильно знайти масу зважуваного тіла, знову ж таки, потрібно ввести поправки на втрату ваги гирями і самим тілом.

Випадкові похибки – при повторних вимірюваннях похибки цього типа показують свою випадкову природу. Виникають вони внаслідок безлічі причин, спільна дія яких на кожне окреме вимірювання неможливо врахувати або наперед встановити. Такими причинами можуть виявитися, наприклад, незначні коливання температури різних деталей і вузлів установки, скачки напруги, вібрації, турбулентні рухи повітря, тертя в механізмах, помилки зчитування показань приладів і т.п. Єдино можливий спосіб об'єктивного обліку випадкових похибок полягає у визначенні їх статистичних закономірностей, що виявляються у результатах багатократних вимірювань. Розраховані статистичні оцінки вносять в остаточний результат вимірювання.

Однією з грубих помилок, які допускають студенти, є знаходження похибки вимірювання як

$$\Delta x = x_{\text{експеримент}} - x_{\text{таблиця}},$$

де *експеримент* – набутого в процесі експерименту середнього значення величини; *таблиця* – значення, узяті з довідника або розраховані з теоретичних уявлень.

Метою експерименту є саме перевірка існуючих теорій і уточнення табличних значень.

З іншого боку, при виконанні навчальних робіт корисно порівняти отримані результати з довідковими табличними величинами і, у разі значної їх розбіжності, проаналізувати, які експериментальні фактори і модельні похибки могли привести до цього.

Операції з наближеними числами.

Помилки вимірювання і міри точності

Майже всі вимірювання і математичні операції дають наближені значення шуканих величин. Складові наближеного числа можуть бути *вірними, сумнівними і невірними*.

Постулати:

1. Якщо похибка числа не вказана, то його абсолютна похибка дорівнює половині одиниці розряду останньої цифри.
2. Розряд старшої цифри похибки показує розряд сумнівної цифри в числі.
3. У якості значущих цифр можуть бути тільки вірні і сумнівні цифри.
4. Якщо похибка числа не вказана - всі цифри значущі.
5. Під значущими цифрами числа розуміють послідовність цифр без урахування місця коми, а для чисел менше одиниці – без урахування нуля перед комою і подальших нулів (табл. 1).

Таблиця 1.

Результат	Число значущих цифр	Граничні значення помилки	Δx	Максимальна помилка $(\Delta x/x_i) \cdot 100\%$
3	1	2,5-3,5	0,5	16,7
3,5	2	3,45-3,55	0,05	1,4
3,55	3	3,545-3,555	0,005	0,14

Враховуючи, що інженерні розрахунки припускаються помилки 2-5%, то недоцільно видавати результати з більш ніж двома значущими цифрами.

1	0,5	50%
1,5	0,05	3,3%
1,55	0,005	0,3%
0,1	0,05	50%
0,15	0,005	3,3%
0,155	0,0005	0,3%

Приклад. Число $216,8 + 2,3$ слід записувати як $216 + 2,3$, а цифру 8 відкинути як невірну, бо тут вже цифра 6 є сумнівною.

Округлення слід проводити до найближчого *парного* числа, причому при округленні відкидають всі цифри, що стоять праворуч від розряду, до якого проводиться округлення. Останню цифру, що залишилася, збільшують на одиницю, якщо найближча відкидана цифра рівна і більше 5, або не змінюють, якщо вона менше 5. Якщо ж відкидають тільки одну цифру 5 (або після неї йдуть нулі), *то останню цифру, що залишається, збільшують на одиницю, якщо вона непарна, і залишають без зміни, якщо вона парна.*

Приклад. До округлення: 5,825; 5,784; 5,500; 6,500.

Після округлення: 5,8; 5,8; 6,0; 6,0.

6. Округляти слід тільки кінцевий результат при ланцюжкових розрахунках.

Складання і віднімання. Вважається, що розряд сумнівної цифри суми співпадає із старшим розрядом сумнівних цифр доданків, тому сума округляється до цього розряду. (Для більшої упевненості в доданках залиште один зайвий розряд).

Приклад. Дані числа: $1,13777 \cdot 10^4$; $2,7077 \cdot 10^2$; $-1,1677 \cdot 10^3$.

Останні цифри сумнівні. Потрібно визначити суму.

Рішення: $(113,7 + 2,7 - 11,6) \cdot 10^2 = 104,8 \cdot 10^2 = 1,048 \cdot 10^4$.

Тут 8 – сумнівна цифра.

7. При множенні і діленні початкові дані доцільно округляти до кількості значущих цифр, що містяться в числі з найменшою їх кількістю.

Приклад. Розрахуйте площу прямокутника із сторонами 28,23 і 12,59 см.

Рішення: Відповідь $28,23 \cdot 12,59 = 355,42 \text{ см}^2$ невірний, оскільки дійсне

значення може знаходитися між $28,225 \cdot 12,585 = 355,21 \text{ см}^2$ і $28,235 \cdot 12,595 = 355,62 \text{ см}^2$.

Таким чином, шукана площа рівна $355,4 \pm 0,2 \text{ см}^2$.

При використанні наближених чисел ведуть два паралельні розрахунки: один – з граничними значеннями, що приводять до мінімуму, а інший – до максимуму.

Приклад. Дано два значення: 50 ± 3 і 30 ± 2 . Визначити величину відносної помилки складання, різниці, множення і ділення.

1. *Складання.* Дійсне значення лежить між $47 + 28 = 75$ і $53 + 32 = 85$. Відносна помилка суми рівна $(85 - 75) / (85 + 75) = 10 / 160 = 0,0625$ (6,25%).

2. *Віднімання.* Дійсне значення лежить між $47 - 32 = 15$ і $53 - 28 = 25$ ("перехресне" віднімання, тобто максимальне значення одного числа віднімається з мінімального значення іншого і мінімальне значення одного числа - з максимального значення іншого).

Відносна помилка різниці рівна

$$(25 - 15) / (25 + 15) = 10 / 40 = 0,25 (\pm 25\%).$$

3. *Множення.* Дійсне значення лежить в межах від $47 \cdot 28 = 1316$ до $53 \cdot 32 = 1696$. Відносна помилка добутку рівна

$$\frac{1316 - 50 \cdot 30}{50 \cdot 30} = \frac{1316 - 1500}{1500} = -0,123 (12,3\%),$$

$$\frac{1696 - 50 \cdot 30}{50 \cdot 30} = 196 / 1500 = 0,131 (13,1\%).$$

$$50 \cdot 30$$

4. *Ділення.* Дійсне значення лежить між $47 / 32 = 1,469$ і $53 / 28 = 1,893$ ("перехресне" ділення). Відносна помилка частого $(1,469 - 50/30) / (50/30) = -0,119$ (11,9%).

Таким чином, арифметичних операцій найбільшу помилку дає віднімання, а мінімальну – складання.

Приклад. Знайти наближену відносну помилку добутку: $(40 \pm 10\%) \cdot (30 \pm 5\%)$.

Рішення: Згідно формули (1), з [3, табл. 5.2] отримуємо $(1200 \pm 10\% \pm 5\%)$, або шукана величина буде рівна $1200 \pm 15\%$.

Приклад 1.8. Знайти приблизну відносну помилку частого: $[(500 + 20) \cdot (200 + 15)] / (400 - 20)$.

Рішення: Цьому частому відповідає $(500 + 4\%) \cdot (200 + 7,5\%) / (400 - 5\%)$.

Приблизна відносна помилка дорівнює $4 + 7,5 + 5 = 16,5\%$.

Таким чином, остаточний результат

$$(500 \cdot 200 / 400) \pm 16,5\% = 250 \pm 16,5\% \text{ або } A \ 250 \pm 41,$$

тобто в межах 209 і 291.

Методи виключення грубих помилок

Груба помилка може привести до появи як значення, що різко виділяється, так

і значення, візуально не відмітного від основної маси спостережень. Ці помилки звичайно особливо добре помітні при розташуванні результатів розрахунків або експериментів у порядку убутання значень або при побудові графіків ("відскок крапок").

Статистичні методи виявлення грубих помилок слід застосовувати лише тоді, коли додаткова інформація про якість вимірювань *або неповна, або ненадійна*.

У будь-якому випадку до виключення "підозрілих" значень з вибірки потрібно підходити з особливою обережністю.

Контрольні питання

1. Що таке *похибка вимірювання*?
2. Чим абсолютна похибка відрізняється від відносної?
3. Що таке приладова (систематична) похибка?
4. Що таке модельна похибка?
5. Що таке випадкова похибка і які причини приводять до її появи?
6. Операції з наближеними числами.
7. Помилки вимірювання і міри точності.
8. Методи виключення грубих помилок.