Лекція 6

Задачі прийняття рішень в умовах багатокритеріальності

1. Особливості, підходи та методи розв'язування багатокритеріальних ЗПР
2. Метод згортки Вороніна
3. Приклад застосування згортки Вороніна для прийняття рішення

«Якісь дані тут безумовно є, і вони слугуватимуть нам основою для деяких висновків.»

Артур Конан - Дойл
(1859 -1930)

«Розум людський має три ключі, які усе відкривають: знання, думку, уявлення – усе в цьому.»

Віктор Марі Гюго
(1802 -1885)

1. Особливості, підходи та методи розв'язування багатокритеріальних ЗПР

Складність таких задач полягає в тому, що для них не очевидний сам принцип оптимальності, оскільки критерії можуть бути суперечливими, вимірюватись в різних одиницях і шкалах (різної фізичної природи), мати різну ступінь важливості. Тому процес підготовки прийняття рішення в задачах векторної оптимізації передбачає дві наступні процедури:

- виділення області компромісу (множини ефективних рішень за принципом Парето);
- вибір схеми компромісу за допомогою принципів та методів побудови компромісних рішень.

За даною ознакою задачі поділяють на ***скалярні*** – один показник ефективності W та ***векторні*** – множина показників ефективності $W = \{W_1, W_2, ..., W_n\}$ Тобто, виникає декілька критеріїв і кожне рішення оцінюється набором показників W_i, які подаються скалярними функціями, визначеними на множині рішень $\overline{X}$.

ЗАГАЛЬНІ ОСОБЛИВОСТІ
задач багатокритеріальної оптимізації

Вибір схеми компромісу приводить задачу векторної оптимізації до еквівалентної задачі скалярної оптимізації, яка далі розв'язується за допомогою відомих методів: апроксимації, математичного програмування, дослідження операцій тощо.

1. Жоден з критеріїв $q_1(d),...,q_p(d)$ не може бути обраний в якості єдиного.

2. Одні критерії необхідно максимізувати, а інші – мінімізувати.

3. Рішення може виявитися неоптимальним за жодним з критеріїв, але разом з тим, воно має бути найкращим компромісним рішенням з урахуванням всіх критеріїв одночасно.

4. Виникає необхідність вибору принципу оптимальності: неоднозначність використання різних принципів оптимальності може призводити до вибору різних альтернатив.

5. Виникає неоднозначність впорядкованості критеріїв за важливістю, оскільки ранжування критеріїв залежить від суб'єктивних оцінок ОПР або експертів.

6. Виникає необхідність нормування критеріїв, які вимірюються у різних одиницях і діапазонах.

7. Виникає питання переходу від якісних критеріїв до кількісних.

8. Рішення, оптимальне за одним критерієм, найчастіше не оптимальне за іншими.

Класи задач багатокритерійної оптимізації

Клас 1 — множина якостей.

При виборі рішення повинні братися до уваги декілька характеристик якості системи. Зазвичай у задачах цього класу часткові критерії мають різну розмірність і фізичну природу.

Приклад

Необхідно спроектувати оптимальну стрілецьку зброю. В критерії оптимальності повинні входити: маса, габарити, дальність стрільби і т.ін.

Клас 2 — множина об'єктів.

Дана система складається з ряду об'єктів, якість функціонування кожного описується своїм критерієм, а ефективність системи визначається сукупністю часткових критеріїв. Фізична природа і розмірність окремих часткових критеріїв у задачах цього класу зазвичай однакова.

Приклад

Необхідно оптимально розподілити порядок управляючих сигналів літаками в багатоканальному радіолокаторі в умовах зльоту та посадки об'єктів на злітно-посадочну смугу.

Підходи (принципи > методи) оптимальності для вибору схеми компромісу

В лекції 11 були визначені принципи оптимальності для вибору схеми компромісу (***), які складають основу відповідних методів: головного критерію, послідовних поступок, згортки. Розглянемо перші два на прикладах.

Принцип виділення головного показника полягає в тому, що із векторного показника $\overline{W} = (W_1, W_2, ..., W_m)$ вибирається один головний, наприклад W_1, і максимізується ($W_1 \Rightarrow \max$), а на всі інші накладаються мінімально допустимі обмеження. Тобто всі показники, крім головного, переводяться в ранг заданих умов α.

Принцип послідовних поступок – це ітеративний критерій оцінювання. Сутність принципу полягає в тому, що спочатку всі частинні показники W_i ранжируються та впорядковуються за ступенем важливості: $W_1 > W_2 > ... > W_m$. Далі максимізується самий важливий показник $W_1(\overline{x})$ і визначається його максимальне значення $M_1 : \max W_1(\overline{x}) = M_1$. Після цього встановлюється величина допустимого зниження (поступки) ε_1 першого показника, за рахунок якої можна максимізувати другий показник W_2, тобто $W_2 \to \max$ при умові, що $W_1(\overline{X}) \geq M_1 - \varepsilon_1$, і визначається максимум M_2:

$$\max W_2(\overline{X}) / W_1(\overline{X}) \geq M_1 - \varepsilon_1 = M_2.$$

Далі призначається поступка ε_2 для показника W_2 і максимізується третій показник $W_3(\overline{X})$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} W_1(\overline{X}) \geq M_1 - \varepsilon_1, \\ W_2(\overline{X}) \geq M_2 - \varepsilon_2 \end{cases} \text{ і т.д.}$$

Даний спосіб побудови компромісного рішення наочно показує, за яку ціну-поступку ε_i в одному показнику, отримаємо виграш в іншому, а також величину цього виграшу.

Принцип узагальненого показника (концептуальна основа метода згортки) передбачає згортання векторного показника в один скалярний (узагальнений). Узагальнений показник подають у вигляді середньозваженого показника, в якому кожному частинному показнику W_i надається певний ваговий коефіцієнт a_i:

$$W = \sum_{i=1}^{m} a_i W_i \text{ – арифметичний;}$$

$$W = \prod_{i=1}^{m} W_i^{a_i} \text{ – геометричний;}$$

$$W = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{W_i}\right]^{-1} \text{ - гармонічний;}$$

$$W = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i W_i^2} \text{ – квадратичний.}$$

Визначення вагових коефіцієнтів a_i виконують, як правило, експертними методами. За потреби різні типи згорток можна завжди звести до одного типу – арифметичної згортки.

Приклад 13.1. Треба вибрати місце роботи з варіантів, викладених у табл. **2.1**, ґрунтуючись на критеріях q_1 - зарплата, q_2 - термін відпустки, q_3 - термін поїздки до офісу.

Таблиця 2.1. **Варіанти альтернатив місця роботи**

Варіанти	Критерії		
	Зарплата (грн)	Відпустка (днів)	Термін поїздки (хв)
1	9000	20	60
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
4	8000	40	50
5	4000	60	15
6	**6000**	**30**	**10**
7	9000	35	60
8	6000	24	10
9	6500	35	40

МЕТОД ГОЛОВНОГО КРИТЕРІЮ

Суть методу головного критерію полягає у наступному:

1. Один з критеріїв q_1, q_2, q_3 визначають як головний, наприклад, критерій q_1 – зарплата .
2. Для інших критеріїв q_2, q_3 терміну відпустки, відстані до офісу, вводять обмеження.
3. Далі розв'язують однокритеріальну задачу з обмеженнями

Таким чином, задача багатокритеріальної оптимізації зводиться до відомої математичної задачі знаходження умовного екстремуму однієї змінної – головного критерію .

Нехай з точки зору ОПР головним критерієм обрано критерій q_1 – зарплата. Задаймо обмеження для інших двох критеріїв: термін відпустки – не менше ніж 30 днів; термін поїздки – не більше ніж 40 хв.

Відповідно з даними табл. 2.1 таким обмеженням задовольняють лише варіанти {2, 3, 5, 6, 9}.

Варіанти	**Критерії**		
	Зарплата (грн)	Відпустка (днів)	Термін поїздки (хв)
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
5	4000	60	15
6	6000	30	10
9	6500	35	40

Як видно з таблиці, найкращим виявився варіант 3:

місце роботи з максимальною зарплатою $q1$=7000 грн, відпусткою $q2$=36 днів;

і терміном поїздки до роботи $q3$=40 хв.

МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ ПОСТУПОК

КРОК 1

$$q_1(d) \succ q_2(d) \succ \ldots \succ q_p(d).$$

$$q_1^* = \arg\max_{d \in D} q_1(d).$$

Особливість оптимізації за методом послідовних поступок полягає у тому, що відхилення від оптимального рішення за більш важливими критеріями, вимагає поліпшення значень менш важливих таким чином, щоб сумарний виграш за менш важливими критеріями істотно перевищував втрату ефективності за більш важливими.

Формально це означає, що після визначення d_1^* призначаємо допустиму поступку Δ_{q_1} для критерію $q_1(d)$ і

КРОК 2

$$q_2^* = \arg\max_{\substack{d \in D \\ q_1(d) \geq q_1^* - \Delta_{q1}}} q_2(d).$$

КРОК 3

$$q_3^* = \underset{\substack{d \in D \\ q_1(d) \geq q_1^* - \Delta_{q_1} \\ q_2(d) \geq q_2^* - \Delta_{q_2}}}{\arg\max} q_3(d).$$

....

КРОК N

Процес продовжується доки не буде розв'язана однокритеріальна оптимізаційна задача для останнього критерію $q_p(d)$

Таблиця 2.1. **Варіанти альтернатив місця роботи**

Варіанти	Критерії		
	Зарплата (грн)	Відпустка (днів)	Термін поїздки (хв)
1	9000	20	60
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
4	8000	40	50
5	4000	60	15
6	**6000**	**30**	**10**
7	9000	35	60
8	6000	24	10
9	6500	35	40

Приклад

КРОК 1

$$q_1(d) \succ q_2(d) \succ q_3(d)$$

$q_1^* = 9000$ грн (варіанти 1 та 7)

КРОК 2

Призначаємо допустиму поступку для критерію $q_1(d)$

$\Delta_{q1} = -1000$грн.

$$q_2^* = \underset{q_1(d) \geq 8000 \text{ грн}}{\arg\max} q_2(d).$$

Варіант 4

КРОК 3

$\Delta_{q2} = -5$ днів.

Варіант 4 (з можливих 4 та 7)

Слід зауважити, що оптимальне рішення за багатьма критеріями не є однозначним і залежить від обраного методу!

Розглянемо ще один приклад застосування послідовної оптимізації.

Приклад 4.3. Необхідно знайти оптимальні значення неперервних змінних x_1, x_2, x_3 за трьома критеріями $q_1 \succ q_2 \succ q_3$, які визначають наступним чином:

$$q_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max,$$

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min, \tag{4.6}$$

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max, \tag{4.7}$$

тобто критерії q_1 та q_3 бажано максимізувати, а критерій q_2 – мінімізувати.

Задана система обмежень:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1, \tag{4.8}$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 21,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3. \tag{4.9}$$

Призначимо для всіх критеріїв максимальну поступку в розмірі 10 %.

Крок 1. Максимізуємо перший критерій

$$q_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max \tag{4.10}$$

за обмежень:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 21,$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Оптимальні значення змінних такі

$$x_1 = 8;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0,$$

з якими перший критерій досягає максимального значення

$$q_1^{\max} = 16.$$

Крок 2. Враховуючи максимально допустиму поступку для першого критерію в 10 % максимальне значення (4.11) може бути зменшено від 16 до 14.4.

Тому вводимо додаткове обмеження

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 14{,}4. \qquad (4.11).$$

Приймаючи до уваги (4.6), (4.8), (4.9) мінімізуємо тепер другий критерій з додатковим обмеженням (4.11), тобто розв'язуємо оптимізаційну задачу

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min \qquad (4.12)$$

за обмежень

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 21,$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 14{,}4,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1{,}2{,}3.$$

Нові оптимальні значення змінних, що визначені на другому кроці оптимізації за умовою (4.12), такі:

$$x_1 = 7{,}8;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0{,}4. \qquad (4.13)$$

Обчислюємо зміну значення другого критерію q_2:

- при $x_1 = 8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ маємо

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8,$$

- при $x_1 = 7{,}8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}4$ маємо

$$q_2^{\min} = x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7{,}8 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0{,}4 = 7. \qquad (4.14)$$

Тобто на другому кроці значення другого критерію поліпшилось на 12,5 % (зменшилось з 8 до 7), тоді як поступка для першого критерію дорівнювала 10 %.

Крок 3. Враховуючи те, що другий критерій мінімізують, введемо максимально допустиму поступку в 10 % та збільшимо його значення з $q_2^{\min} = 7$ до 7,7. Це дає нам змогу ввести ще одне додаткове обмеження

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 7{,}7. \qquad (4.15)$$

Приймаючи до уваги (4.7), (4.8), (4.9) та (4.15) переходимо до максимізації третього критерію, тобто розв'язуємо оптимізаційну задачу

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max. \qquad (4.16)$$

за обмежень

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 21,$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 14{,}4,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7{,}7,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1{,}2{,}3.$$

За результатами обчислень маємо такі оптимальні значення змінних:

$$x_1 = 7{,}66, \quad x_2 = 0{,}28, \quad x_3 = 0{,}4. \qquad (4.17)$$

Визначимо зміни значень третього критерію q_3:

- на другому кроці (коли $x_1 = 7{,}8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}4$) маємо

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7{,}8 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0{,}4 = -6{,}2,$$

- на третьому кроці зі значеннями змінних згідно з (4.17) маємо

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7{,}66 + 2 \cdot 0{,}28 + 4 \cdot 0{,}4 = -5{,}5.$$

Тобто на третьому кроці в результаті оптимізації значення третього критерію поліпшилось на 11,29 % (збільшилось з –6,2 до –5,5), тоді як поступка на другий критерій дорівнювала 10 %.

Як це видно з підсумкової табл. 4.3, за рахунок послідовної оптимізації, сумарний виграш склав 13,29 %.

Таблиця 4.3. **Підсумкові результати оптимізації**

Крок	$q_1 \to \max$	Δ, %	$q_2 \to \min$	Δ,%	$q_3 \to \max$	Δ,%
1	$q_1 = 16{,}0$	–	$q_2 = 8{,}0$	–	$q_3 = 8{,}0$	–
2	$q_1 = 14{,}4$	–10%	$q_2 = 7{,}0$	–12,5%	$q_3 = -6{,}2$	–
3	$q_1 = 14{,}4$	–	$q_2 = 7{,}7$	+10 %	$q_3 = -5{,}5$	+11,29%
Втрата 10 % для q_1			**Виграш 2,5%** для q_2 (12,5–10)%		**Виграш 13,79 %** для q_2 і q_3 (2,5+11,29)%	

2. Метод згортки Вороніна А.М.

Скалярна згортка проф. Вороніна А.Н. реалізує концепцію нелінійної схеми компромісів. У цьому випадку схема компромісів полягає у відповіді на питання: скількома одиницями виграшу по одному критерію якості можна компенсувати неминучий програш одиниць по іншому критерію.

Переваги згортки проф. Вороніна є:

- оптимізаційна задача розв'язується за наявності обмежень, що у будь-якому випадку забезпечує отримання рішення;

- згортка забезпечує використання мінімаксного підходу, тобто дозволяє концентруватись на мінімізації домінуючого часткового критерію якості;

- критерій гарантує унімодальність результуючого функціонала і забезпечує низьку обчислювальну складність для отримання рішення;

- згортка забезпечує можливість адаптації до конкретної ситуації, завдяки введенню коефіцієнта важливості часткових критеріїв.

Альбе́рт Микола́йович Воро́нін (* 1933) — український фахівець у галузі кібернетики, доктор технічних наук (1990), професор (2002).

$$\chi^* = \arg\min_{\chi \epsilon G} \sum_{k=1}^{d} \gamma_k [1 - \varphi_{0k}(\chi)]^2$$

де: χ - оптимізований параметр;

G - область визначення функцій часткових критеріїв оптимальності;

γ_k- коефіцієнт важливості (вага) *к -ї* критерійної функції;

$\varphi_{0k}(\chi)$ — нормована функція *к.-го* часткового критерію оптимальності;

K= 1...d - коефіцієнт підсумовуваній по кількості часткових критеріїв якості;

χ^* - мінімально можливе (для встановлених обмежень часткових критеріїв) значення оптимізованого параметра.

Методика підготовки до прийняття оптимального рішення багатокритерійної задачі за методом згортки Вороніна:

1) Вибір критеріїв ефективності роботи системи.

2) Отримання експериментальних даних що характеризують якість функціонування системи згідно з вибраними критеріями.

3) аналітичної залежності для критеріїв оптимальності згідно з отриманими експериментальними даними.

4) Рішення задачі багатокритерійної оптимізації згідно з обраним критерієм якості (згортка проф. Вороніна А.М.).

1. *Вибір критеріїв ефективності роботи системи* реалізується фахівцем в області даних систем суб'єктивно, виходячи з вимог до ефективності роботи системи загалом і особливостей її побудови. Тут же розглядається, які показники якості треба максимізувати, а які мінімізувати. Результатом цього етапу є система максимізованих і мінімізованих показників якості, а також призначений оптимізований параметр системи.

2. ***Отримання експериментальних даних*** спрямовано на отримання дискретних значень показників якості системи при зміні параметра, що оптимізується. Значення показників ефективності можуть бути отримані:

- шляхом створення і дослідження моделей систем ;
- шляхом випробувань серійних або експериментальних зразків систем;
- шляхом опитування експертів.

3. **Пошук аналітичної залежності для критеріїв оптимальності** має на меті отримання аналітичної залежності, що зв'язує показники якості системи і оптимізований параметр. Даний етап полягає в апроксимації початкових експериментальних даних вибраним методом, наприклад МНК.

4. **Рішення задачі багатокритерійної оптимізації** включає етапи:

- *Встановлення області обмежень вирішуваної задачі;*
- *Нормування часткових критеріїв якості;*
- *Визначення оптимального рішення* включає етапи:

1) підстановка нормованих критерійних функцій у згортку;

2) визначення мінімуму розширеної згортки шляхом прирівнювання до нуля часткових похідних згортки по параметрах, що оптимізуються;

3) рішення в чисельному або аналітичному вигляді отриманого рівняння або системи рівнянь;

4) аналіз отриманих даних.

3. Приклад застосування згортки Вороніна для прийняття рішення

Постановка задачі

Керівнику підприємства необхідно прийняти рішення: скільки необхідно закупити маршрутних таксі, щоб найкращим чином забезпечити перевезення пасажирів за обраним маршрутом.

Розв'язок задачі

1. Вибір критеріїв ефективності (оптимальності)

$$\begin{cases} D(n) \Rightarrow max, \\ S(n) \Rightarrow min, \\ n \rightarrow var. \end{cases}$$

D(п) - максимум середньої кількості пасажирів, перевезених маршрутним таксі за добу

n - кількість маршрутних таксі

S(n) - витрати підприємства на перевезення

2. Отримання експериментальних даних критерійних функцій

п	1	2	3	4	5	6
Ефективність D(n)	10	15	18	20	23	25
Вартість S(n)	3000	6000	9000	12000	15000	18000

3. Пошук аналітичної залежності для критеріальних функцій

<u>За відсутності випадкових помилок можуть використовуватися</u> :

- кусково-безперервна апроксимація;
- Сплайн апроксимація;
- МНК апроксимація.

<u>За наявності випадкових помилок використовуються :</u>

- методи згладжування;

<u>До експертної інформації застосовується :</u>

- обробка відповідно до методів теорії нечітких множин;
- МНК обробка.

$D(n) = 5{,}9 + 4{,}760n - 0{,}2679n^2$

$S(n) = 3000n$.

4. Рішення задачі багатокритерійної оптимізації згідно зі згорткою проф. Вороніна

Встановлення області обмежень критерійних фунцій

$D(1) \le D(n) \le D(6)$,
$S(1) \le S(n) \le S(6)$.

$10 \le D(n) \le 25$,
$3000 \le S(n) \le 18000$.

Нормування часткових критеріїв

Вимоги до етапу нормування такі:

Нормовані функції повинні бути безрозмірними і змінюватися в одних і тих же межах (0... 1).

Критерійні функції, що зводяться в згортку, повинні мінімізуватися.

Нормування часткових критеріїв якості здійснюється згідно з узагальненим виразом

$$\varphi_{oi} = \frac{\varphi_i}{A_i},;$$

де φ_i - ненормований частковий критерій;
A_i - максимальне (для встановлених обмежень) значення критерійних функцій;
φ_{oi} - нормований критерій якості;
i=*1.. c* **-** параметр, що характеризує перебір критерійних функцій.

Нормування 1-го часткового критерію D(n)

Спробуємо замінити його критерієм програшу $Q(n)$, який необхідно мінімізувати. Заміну часткового критерію можливо здійснити згідно з виразом

$$Q(n)=\frac{1}{D(n)}, \qquad (1.33)$$

тоді нормування матиме вигляд (відповідно до (1.32), враховуючи (1.33))

$$\varphi_{01}(n)=\frac{Q_{(n)}}{\max Q(n)}=\frac{1/D(n)}{1/\min D(n)}, \qquad (1.34)$$

або як кінцевий запис

$$\varphi_{01}(n)=\frac{\min D(n)}{D(n)}, \qquad (1.35)$$

де $\max Q(n)$ максимальне значення програшу (зворотна величина ефективності);

$\min D(n)$ - мінімальне (на інтервалі (1.31)) значення критерію ефективності;

$\varphi_{01}(n)$ - нормований перший критерій якості.

Нормування 2-го часткового критерію S(n)

З урахуванням (1.32) нормування другого часткового критерію здійснюється згідно з виразом

$$\varphi_{02}(n) = \frac{S(n)}{\max S(n)}, \qquad (1.36)$$

де $\max S(n)$ - максимальне на інтервалі (1.31) значення критерійної функції;

$\varphi_{02}(n)$ - нормований другий критерій якості.

Визначення оптимуму

$$\chi^* = \arg\min \sum_{k=1}^{d} \gamma_k [1 - \varphi_{ok}(\chi)]^{-1}.$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.$$

$$n_{opt} = \arg\min \sum_{k=1}^{2} [1 - \varphi_{ok}(n)]^{-1}.$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\sum_{k=1}^{2}\left[1-\varphi_{ok}(n)\right]^{-1}=0,$$

або ж після диференціювання

$$\sum_{k=11}^{2}\frac{\partial\varphi_{ok}(n)}{\partial n}\left[1-\varphi_{ok}(n)\right]^{-2}=0.$$

Розкриваючи, суму отримаємо

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi_{01}(n)}{\partial n}}{\left[1-\varphi_{01}(n)\right]^{2}}+\frac{\dfrac{\partial\varphi_{02}(n)}{\partial n}}{\left[1-\varphi_{02}(n)\right]^{2}}=0.$$

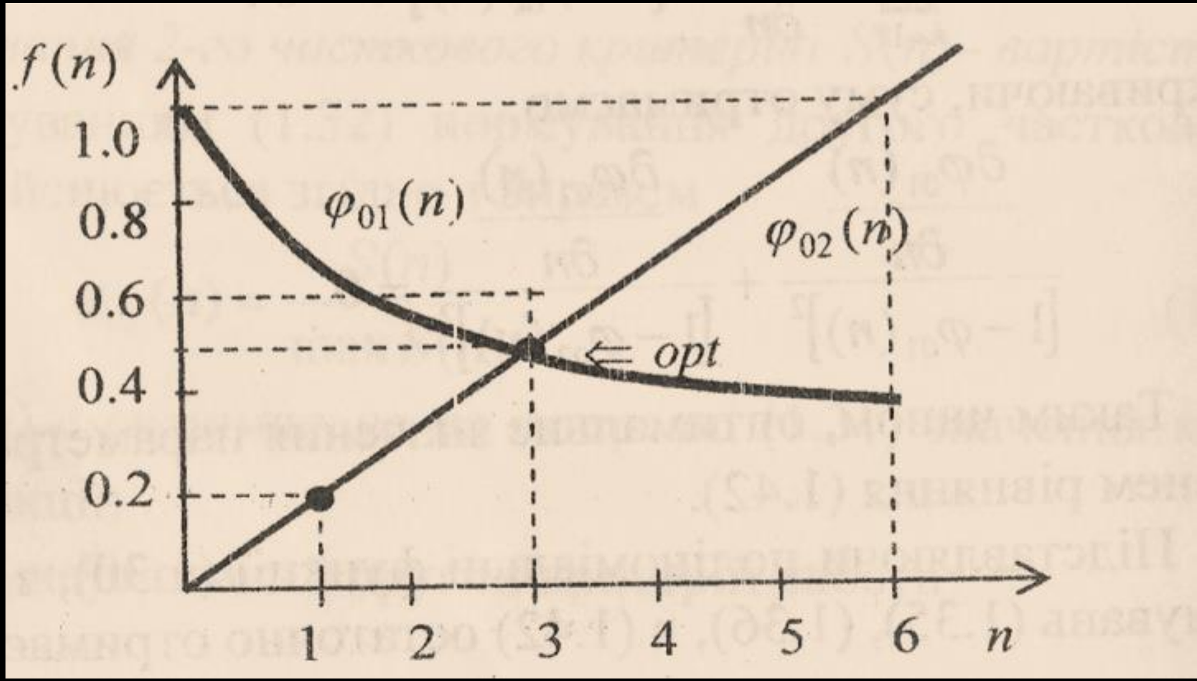
$$\frac{\min D(n)(d_1+2d_2n)}{(d_0+d_1n+d_2n^2)^2\left(1-\dfrac{\min D(n)}{d_0+d_1n+d_2n^2}\right)}+$$

$$+\frac{S}{\max S(n)\left(1-\dfrac{Sn}{\max S(n)}\right)}=0,$$

де d_0, d_1, d_2, S - коефіцієнти апроксимуючих поліномів критерійних функцій

$n_{opt} = 2{,}4.$

$n_{opt} = 3.$



Таким чином, математичне рішення практичної задачі згідно зі згорткою проф. Вороніна А.М. показало можливість вироблення оптимальних рішень, підтверджених відповідними критеріями оптимальності, що дозволить ОПР ефективно приймати остаточне важливе рішення