Лекція 5

Задачі та методи прийняття рішень

План лекції

1. ЗПР в умовах невизначеності
2. Багатокритеріальність
3. Час, експеримент та степінь об'єктивності моделі

Бродський Ю.Б.

нагадування

Степінь визначеності початкової інформації

Визначеність інформації характеризується повнотою та достовірністю даних, що використовуються для прийняття рішення і залежить від зовнішнього середовища (*факторів впливу*).

За своєю природою та рівнем інформованості *фактори впливу* можна поділити:

Отже, ознаку, яка відбиває характер впливу різних факторів (зовнішнього середовища) називають ознакою : «визначеність – ризик – невизначеність – конфліктність»

Відповідно виділяють групи задач прийняття рішень:

1. ЗПР в умовах невизначеності

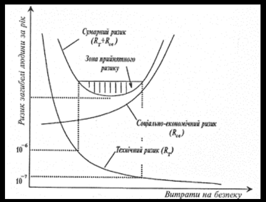
Реальні задачі часто містять ще одну групу ξ - невідомі фактори. Тоді показник ефективності залежить від трьох груп факторів:

$$W = W(\alpha, \xi, X),$$

а задача ставиться таким чином: при заданих умовах α, з урахуванням невідомих факторів ξ, знайти таке рішення $x \in X$, яке забезпечить максимальне значення показника ефективності W, якщо це можливо.

Наявність факторів ξ призводить до розв'язання задач прийняття рішення в умовах невизначеності. Природа невідомих факторів ξ, звідки вони виникають, їх контрольованість визначає тип невизначеності.

задачі прийняття рішень в умовах стохастичної невизначеності (в умовах ризику)



В задачах даного типу завжди є ризик отримати не той результат, що очікується, бо він носить випадковий характер.
Прийняття рішення в умовах стохастичної невизначеності базується на методах статистичних рішень, в яких недостатність інформації в реальних задачах враховується шляхом розглядання випадкових подій, величин та процесів. Опис закономірностей поведінки реальних систем (випадкових процесів в системах) виконується за допомогою статистичних характеристик, які вже є невипадковими. Тому з ними можна проводити операції отримання оптимального рішення, як з детермінованими характеристиками. Загальним критерієм знаходження оптимального рішення в теорії статистичних рішень є середній ризик, тому часто задачі даного класу називають задачами прийняття рішень в умовах ризику.

Отже, якщо фактори ξ - випадкові і суттєво впливають на показник ефективності W, який також випадковий. Тоді за показник ефективності можна вибрати середнє значення (математичне очікування) цієї випадкової величини $W_{сер} = M[W]$. Відповідно виникає задача обрати таке рішення X, при якому даний показник буде максимальним:

$$W_{сер} = M[W(\alpha, x, \xi)] \Rightarrow \max.$$

Такий метод називають «оптимізацією в середньому», і він дуже часто використовується на практиці, якщо даний підхід виправданий. Тобто, коли операція (ситуація) володіє властивістю повторюваності.

Приклад. Власник невеликого магазину на початку кожного дня за ціною 50 грн. закуповує для реалізації продукт, який має термін зберігання всього одну добу, наприклад, торт. Для отримання прибутку власник встановлює ціну реалізації цього продукту 60 грн. за одиницю. Якщо ж протягом дня продукт не розпродано, то в кінці дня власник встановлює знижену ціну 30 грн. за одиницю, за якою продукт завжди купують.

З попередніх спостережень власнику відомо, що попит на продукт за один день може складати 1, 2, 3 або 4 одиниці, причому попит 1 одиниці спостерігався 15 разів, попит 2-х одиниць – 30 разів, попит 3-х одиниць – 30 разів, попит 4-х одиниць – 25 разів.

Питання: скільки одиниць продукту має закупати власник магазина на кожен день?

Розв'язок задачі. Складемо таблицю (табл. 1.1), в якій буде чотири рядки можливих рішень (власник закуповує 1, 2, 3 або 4 одиниці продукту) і чотири стовпчика можливих сценаріїв розвитку (попит – 1, 2, 3 або 4 одиниці товару).

У клітинках таблиці вказані фінансові наслідки (прибуток або втрати власника магазину) для кожного рішення та конкретного сценарію розвитку.

Наслідки розраховано за формулою

$$S = N_1 * 60 + N_2 * 30 - N_3 * 50, \quad (1.1)$$

де: N_1 – кількість одиниць продукту, реалізованих за ціною 60 грн, N_2 – кількість одиниць продукту, реалізованих за ціною 30 грн, а $N_3 = N_1 + N_2$ – загальна кількість закуплених одиниць товару за ціною 50 грн.

Наприклад, якщо обсяг закупівлі склав 3 одиниці, а попит буде лише 2 одиниці, то прибутку не буде ($S = 0$), оскільки згідно з (1.1) маємо

$$S = 2 * 60 + 1 * 30 - 3 * 50 = 0.$$

***Таблиця 1.1.* Таблиця можливих рішень та наслідків**

Обсяг закупівлі в день	Попит продукту протягом дня			
	1 од.	2 од.	3 од.	4 од.
1 од.	10 грн	10 грн	10 грн	10 грн
2 од.	– 10 грн	20 грн	20 грн	20 грн
3 од.	– 30 грн	0 грн	30 грн	30 грн
4 од.	– 50 грн	– 20 грн	10 грн	40 грн

За умовами задачі легко оцінити імовірність (відносну частоту) попиту товару протягом дня:

$$p(1) = \frac{15}{15+30+30+25} = 0{,}15,$$

$$p(2) = \frac{30}{15+30+30+25} = 0{,}30,$$

$$p(3) = \frac{30}{15+30+30+25} = 0{,}30,$$

$$p(4) = \frac{25}{15+30+30+25} = 0{,}25.$$

Використовуючи дані з табл. 1.1 та згадані вище оцінки імовірності *p(j)*, *j*=1,...,4, обчислимо математичне сподівання очікуваного прибутку для кожного можливого варіанту рішення власника магазину (табл. 1.2).

***Таблиця 1.2.* Очікувані прибутки власника магазину**

Варіанти рішень	Результат, *x*	Імовірність, *p*	*x · p*
Закупівля 1 од. в день	10 грн	0,15	1,5
	10 грн	0,30	3,0
	10 грн	0,30	3,0
	10 грн	0,25	2.5
		Загалом $\sum xp$	**10 грн**
Закупівля 2 од. в день	– 10 грн	0,15	– 1,5
	20 грн	0,30	6,0
	20 грн	0,30	6,0
	20 грн	0,25	5,0
		Загалом $\sum xp$	**15,5 грн**
Закупівля 3 од. в день	– 30 грн	0,15	– 4,5
	0 грн	0,30	0
	30 грн	0,30	9,0
	30 грн	0,25	7,5
		Загалом $\sum xp$	**12,0 грн**
Закупівля 4 од. в день	– 50 грн	0,15	– 7,5
	– 20 грн	0,30	– 6,0
	10 грн	0,30	3,0
	40 грн	0,25	10,0
		Загалом $\sum xp$	**– 0,5 грн**

максимум очікуваного прибутку складає 15,5 грн і відповідає другому варіанту рішення – закупівлі 2 одиниць товару в день. Саме це рішення і буде оптимальним

Розв'язок задачі розглянуто у припущені відомих імовірностей можливих ситуацій, в яких приймається рішення. Якщо ж така інформація невідома, то застосовують інші підходи для прийняття рішення в умовах невизначеності, які ґрунтуються на критеріях Вальда, Гурвіца, Лапласа, Севіджа

задачі прийняття рішень в умовах <u>невизначеності</u>

Задача прийняття рішення за умов **невизначеності** полягає у виборі оптимальної стратегії, успіх реалізації якої залежить від невизначених факторів ξ (неповноти та недостовірності інформації).

Розрізнюють невизначеності <u>стохастичної природи</u> (розподіл ймовірностей для параметрів ξ принципово існує, але до моменту прийняття рішення інформації недостатньо та <u>не стохастичної природи</u> (розподіл ймовірностей для параметрів ξ взагалі не існує).

Для розв'язування задач даного типу використовують <u>адаптивні алгоритми</u> (корегувати рішення з метою збільшення його ефективності при накопиченні досвіду), спеціальні <u>критерії теорії статистичних рішень</u>:

критерії

➢ **<u>критерій Лапласа</u>**, якщо відсутня апріорна інформація щодо <u>ймовірностей можливих станів</u> природи $P(S_j)$, то можна вважати їх однаково ймовірними: $P(S_1) = P(S_2) = \ldots = P(S_n) = 1/n$.

Тоді оптимальна стратегія:

$$W_{опт} = W[X_{опт}, S) = \max_{x_i}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v(x_i, S_j)\right],$$

де $v(X_i, S_j)$ – оцінка або виграш для рішення X_i при S_j;

П'єр-Сімóн Лаплáс (фр. Pierre-Simon Laplace; 23 березня 1749 — 5 березня 1827) — французький математик і астроном; відомий своїми працями в галузі диференціальних рівнянь, один із творців теорії ймовірностей.

➢ **<u>критерій Вальда</u>** (*<u>максимінний критерій</u>*) основується на консервативній поведінці ОПР – «позиції крайнього песимізму». Суть критерію – вибір найкращої альтернативи (максимальне рішення - $\max x_i$) у найгірших умовах ($\min S_j$):

$$W_{опт} = \max_{x_i} \min_{S_j} \nu(x_i, S_j);$$

Abraham Wald; 1902 1950

➢ **<u>критерій Севіджа</u>** (*<u>мінімаксний</u>*) обирає стратегію, що мінімізує втрати за найгірших умов;

$$W_{опт} = \min_{x_i} \max_{S_j} \nu(x_i, S_j);$$

Приклад 2.1. Нехай у процесі експлуатації ЕОМ виявилися збої. Необхідно прийняти рішення про подальше функціонування ЕОМ. Можливі наступні варіанти рішень:

x_1 – повна перевірка ЕОМ;

x_2 – мінімальна перевірка;

x_3 – відмова від перевірки.

При цьому ЕОМ може перебувати в таких станах:

y_1 – несправностей немає, збої були випадковими;

y_2 – є незначні несправності, які вплинуть незначним чином на подальшу експлуатацію ЕОМ;

y_3 – є серйозні несправності, які спотворять результати обчислень й призведуть до виходу з ладу інших блоків.

Результати втрат у відносних одиницях від зупинки ЕОМ наведено в табл. 2.1. Вони включають витрати на перевірку й усунення несправностей, а також витрати, які пов'язані із втратами машинного часу через зупинку машини.

Таблиця 2.1 – Вихідна матриця

$F(x, y)$	y_1	y_2	y_3	$\min\limits_j a_{ij}$	$K_{мм}$
x_1	– 20	– 22	– 40	– 40	– 40
x_2	– 12	– 23	– 43	– 43	-
x_3	0	– 24	– 55	– 55	-

Використовуючи співвідношення $d_{ij} = \max\limits_i a_{ij} - a_{ij}$, $i, j = \overline{1, 3}$, де a_{ij} – елементи вихідної матриці (табл. 2.1), неважко визначити елементи d_{ij} матриці шкодувань (табл. 2.2), а потім й значення критерію Севіджа, що виділяє другу альтернативу як кращу.

Таблиця 2.2 – Матриця шкодувань

$F(x, y)$	y_1	y_2	y_3	$\max\limits_j d_{ij}$	K_S
x_1	20	0	0	20	-
x_2	12	1	3	12	12
x_3	0	2	15	15	-

➢ **критерій Гурвіца** охоплює різні підходи до прийняття рішень – від оптимістичного (розрахунок на краще) до песимістичного (розрахунок на гірше):

нем. Adolf Hurwitz
1859 — 1919

$$W_{опт} = \max_{x_i}[\alpha \max_{S_j} \nu(x_i, S_j) + (1-\alpha)\min_{S_j} \nu(x_i, S_j)],$$

де α - показник оптимізму, $0 \le \alpha \le 1$.

Якщо $\alpha = 0$, критерій Гурвіца стає консервативним і перетворюється у критерій крайнього песимізму Вальда.

Якщо $\alpha = 1$ - критерій крайнього оптимізму, коли рекомендується обирати стратегію, за якої у найкращих умовах виграш максимальний;

➢ **критерій Байєса** – вважається відомим апріорне розподілення ймовірностей $P(S_j)$ стосовно стану системи і ОПР вибирає оптимальну стратегію, яка максимізує середній виграш (математичне сподівання):

$$W_{опт} = \max_{x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} \nu(x_i, S_j) \cdot P(S_j)\right].$$

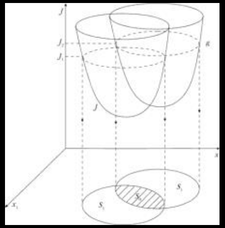
Thomas Bayes [bɛi:z], 1702 — 1761

Бродський Ю.Б.

задачі прийняття рішень в умовах <u>активного зовнішнього середовища</u> та <u>конфліктних ситуацій</u>

Задачі прийняття рішень в умовах активного зовнішнього середовища відносять до задач в умовах невизначеності особливого роду, коли має місце конфліктна ситуація – ситуація, де стикаються інтереси двох і більше сторін (кожна має свою мету).

В конфліктних ситуаціях невідомі фактори залежать від активно протидіючого зовнішнього середовища. Розробкою рекомендацій раціоналізації конфліктної ситуації, її моделюванням займається математична теорія ігор. Моделі конфліктних ситуацій базуються на припущенні, що протидіюча сторона вибирає свою поведінку найгіршою для суперника. Така ідеалізація конфліктної ситуації в деяких випадках може зменшити ризик прийняття конфліктного рішення.



2. Кількість показників оцінювання (багатокритеріальність)

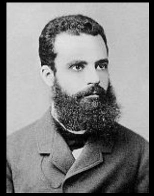
За даною ознакою задачі поділяють на ***скалярні*** – один показник ефективності W та ***векторні*** – множина показників ефективності $W = \{W_1, W_2, ..., W_n\}$ Тобто, виникає декілька критеріїв і кожне рішення оцінюється набором показників W_i, які подаються скалярними функціями, визначеними на множині рішень $\overline{X}$.

Складність таких задач полягає в тому, що для них не очевидний сам принцип оптимальності, оскільки критерії можуть бути суперечливими, вимірюватись в різних одиницях і шкалах (різної фізичної природи), мати різну ступінь важливості. Тому процес підготовки прийняття рішення в задачах векторної оптимізації передбачає дві наступні процедури:

- виділення області компромісу (множини ефективних рішень за принципом Парето);
- вибір схеми компромісу за допомогою принципів та методів побудови компромісних рішень.

1. виділення області компромісу:

> «Історія — це кладовище аристократії.»
>
> *Vilfredo Pareto*; 1848 —† 1923

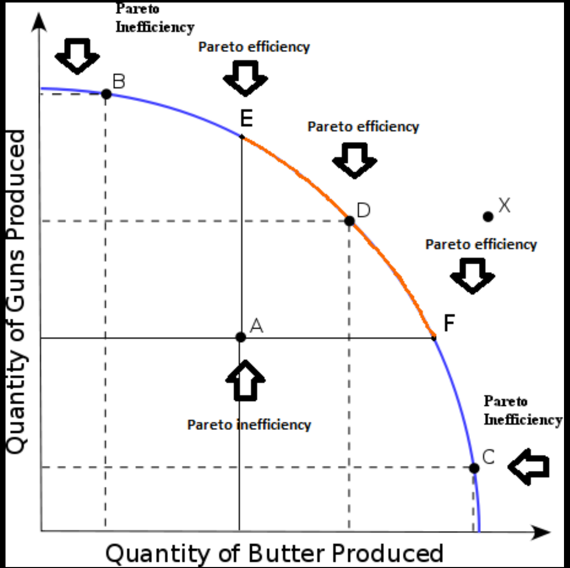


В задачах з декількома показниками оцінювання потрібно обмежитись рішеннями, для яких неможливе одночасне покращення всіх показників. Такі рішення називають *ефективними* або *оптимальними* за Парето. Як синоніми цього поняття можна навести: рішення, що не домінують, не гірші, не підпорядковані. Тому слід вибирати рішення із множини ефективних рішень. Однак залишається відкритим питання, яке конкретне ефективне рішення визнати оптимальним. Подальший пошук оптимального рішення в області компромісу визначає схема компромісу, що обирається (принцип оптимальності).

Оптимальність за Парето: Допустиме рішення $\underline{x}^*$ є оптимальним за Парето, якщо не існує іншого допустимого рішення, яке було б для всіх учасників не гірше і хоча б для одного – краще, ніж $\underline{x}^*$:

$$f_i(\underline{x}) \ge f_i(\underline{x}^*), i = 1,...m, \quad \underline{x} \in x - \sum \text{всіх допустимих рішень} \Rightarrow f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x}^*),\ \ i = 1,...,m,$$

$f(\underline{x})$ - цільова функція для кожного учасника.



2. вибір схеми компромісу:

Вибір схеми компромісу приводить задачу векторної оптимізації до еквівалентної задачі скалярної оптимізації, яка далі розв’язується за допомогою відомих методів математичного програмування. Проблему вибору схеми компромісу та відповідного їй принципу оптимальності називають проблемою скаляризації.

Прикладом скаляризації є згортання векторного показника $\overline{W} = (W_1, W_2, \ldots, W_m)$ у скалярний показник $W = a_1 W_1 + a_2 W_2 + \ldots + a_m W_m$, який називають узагальненим показником, де a_i – вагові коефіцієнти.

Отже, проблема скаляризації є одною з основних концептуальних проблем в процесі пошуку оптимального рішення, яке оцінюється векторним показником якості (ефективності). Розв’язання цієї проблеми об’єктивно необхідне для будь-якої задачі векторної оптимізації, оскільки воно припускає реалізацію одноцільових оптимізаційних обчислювальних схем відомими математичними методами.

Принципи (методи) оптимальності для вибору схеми компромісу

Принцип виділення головного показника полягає в тому, що із векторного показника $\overline{W} = (W_1, W_2, ..., W_m)$ вибирається один головний, наприклад W_1, і максимізується ($W_1 \Rightarrow \max$), а на всі інші накладаються мінімально допустимі обмеження. Тобто всі показники, крім головного, переводяться в ранг заданих умов α.

Принцип максиміна реалізується шляхом «підтягування» частинних показників, чисельні значення яких в початковому рішенні виявились найменшими:

$$W_{опт} = \max \min W_i .$$

Принцип максиміна часто називають принципом «гарантованого» рівня.

Принцип узагальненого показника (концептуальна основа метода згортки) передбачає згортання векторного показника в один скалярний (узагальнений). Узагальнений показник подають у вигляді середньозваженого показника, в якому кожному частинному показнику W_i надається певний ваговий коефіцієнт a_i:

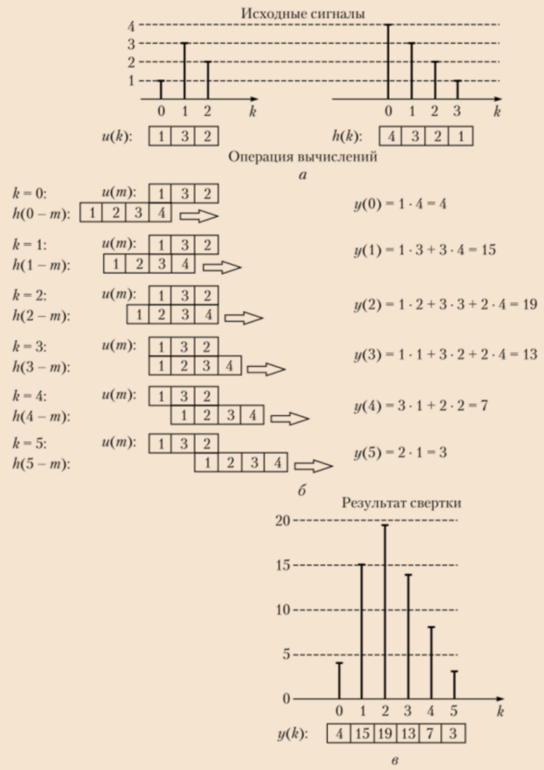
$$W = \sum_{i=1}^{m} a_i W_i \text{ – арифметичний;}$$

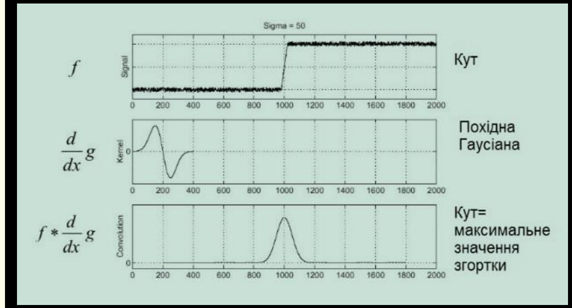
$$W = \prod_{i=1}^{m} W_i^{a_i} \text{ – геометричний;}$$

$$W = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{W_i}\right]^{-1} \text{ - гармонічний;}$$

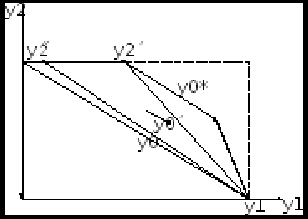
$$W = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i W_i^2} \text{ – квадратичний.}$$

Визначення вагових коефіцієнтів a_i виконують, як правило, експертними методами. За потреби різні типи згорток можна завжди звести до одного типу – <u>арифметичної згортки</u>.





Бродський Ю.Б.



Принцип послідовних поступок – це ітеративний критерій оцінювання. Сутність принципу полягає в тому, що спочатку всі частинні показники W_i ранжируються та впорядковуються за ступенем важливості: $W_1 > W_2 > ... > W_m$. Далі максимізується самий важливий показник $W_1(\overline{x})$ і визначається його максимальне значення $M_1 : \max W_1(\overline{x}) = M_1$. Після цього встановлюється величина допустимого зниження (поступки) ε_1 першого показника, за рахунок якої можна максимізувати другий показник W_2, тобто $W_2 \to \max$ при умові, що $W_1(\overline{X}) \geq M_1 - \varepsilon_1$, і визначається максимум M_2 :

$$\max W_2(\overline{X}) / W_1(\overline{X}) \geq M_1 - \varepsilon_1 = M_2 .$$

Далі призначається поступка ε_2 для показника W_2 і максимізується третій показник $W_3(\overline{X})$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} W_1(\overline{X}) \geq M_1 - \varepsilon_1, \\ W_2(\overline{X}) \geq M_2 - \varepsilon_2 \end{cases} \text{ і т.д.}$$

Даний спосіб побудови компромісного рішення наочно показує, за яку ціну-поступку ε_i в одному показнику, отримаємо виграш в іншому, а також величину цього виграшу.

3. Час, експеримент та степінь об'єктивності моделі

За ознакою фактору часу задачі прийняття рішень поділяють на:

статичні та **динамічні**. В статичних задачах фактором часу нехтують, в динамічних навпаки – фактор часу відіграє суттєву роль. Динамічні задачі – це, як правило, задачі управління динамічними об'єктами, системами та процесами в них.

Розв'язком задачі є деякий керуючий вплив, що змінює стан об'єкта управління певним чином. Управляючі змінні та змінні стану зв'язані між собою відповідними рівняннями динаміки (руху) об'єкта управління («інформаційний контур»).

$$\dot{y}(t) = ky(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = k(y(t)) \cdot y(t)$$

$$a_L \frac{d^2X(t)}{dt^2} + \left(a_R + \frac{1}{X(t)}\right)\frac{dX(t)}{dt} + \frac{1}{a_C}X(t) - \varphi_0 - \frac{1}{X(t)}\frac{dV}{dt} = 0$$

<u>За ознакою використання експерименту</u> для отримання інформації задачі прийняття рішень поділяють на дві групи: з *<u>апріорними</u>* та *<u>апостеріорними</u>* даними. Задачі <u>першої групи</u> (прийняття рішення за апріорними даними – тільки відомою інформацією) характерні для умов детермінованої визначеності і частково для умов стохастичної визначеності. В умовах невизначеності апріорна інформація практично відсутня, тому виникає необхідність отримання нової інформації шляхом проведення експериментів. Результати експерименту надають апостеріорну інформацію.

Для її отримання (в задачах другої групи) використовують дві стратегії управління:

- *перша* – планується та проводиться серія експериментів, результати яких є основою прийняття рішення;
- *друга* – експерименти проводяться послідовно і після кожного приймається процедурне рішення: продовжувати або закінчувати експерименти.

Якщо експерименти зв'язані з випадковими факторами, то послідовна стратегія управління експериментом вважається переважною, оскільки вона дозволяє при фіксованій степені визначеності інформації у середньому зменшити обсяг експериментів.

<u>За</u> ознакою кількості осіб, що приймають рішення, задачі поділяють на задачі *<u>індивідуального</u>* та задачі *<u>колективного</u>* вибору. Процедура прийняття колективного рішення основується на узгодженості індивідуальних пропозицій членів групи згідно з прийнятим критерієм (принципом) відбору.

Степінь об'єктивності моделі прийняття рішення передбачає моделі двох типів: *об'єктивні* та *суб'єктивні*.

Модель першого типу є засобом відображення об'єктивної інформації та забезпечує отримання об'єктивних даних достатніх для вибору рішення. Однак, невизначеність у реальних задачах може бути принциповою і не зменшується тільки розрахунками за допомогою об'єктивних моделей. Тоді головну роль відіграє Людина – особа, що приймає рішення (ОПР). В даному випадку суб'єктивна інформація ОПР є єдиною можливою основою поєднання параметрів проблеми, що розглядається, у єдину модель, що дозволить оцінити можливі варіанти рішень, тобто модель залежить від ОПР – суб'єктивних факторів. Для підвищення якості рішень при наявності суб'єктивних факторів використовують сучасні системи підтримки процеса прийняття рішення (СППР), експертні системи, бази знань тощо.

Таким чином: взагалі, використання класифікації задач прийняття рішень за розглянутими ознаками приводить до різних комбінацій типів задач. Тип задачі прийняття рішення визначає вибір раціонального способу організації процесу підготовки та прийняття рішення.