Математичний аналіз

Лекція 8.

Тема: ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ.

3.2. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, називають скалярним полем. Інакше кажучи, скалярне поле— це скалярна функція $u(M)$ разом з областю її визначення.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

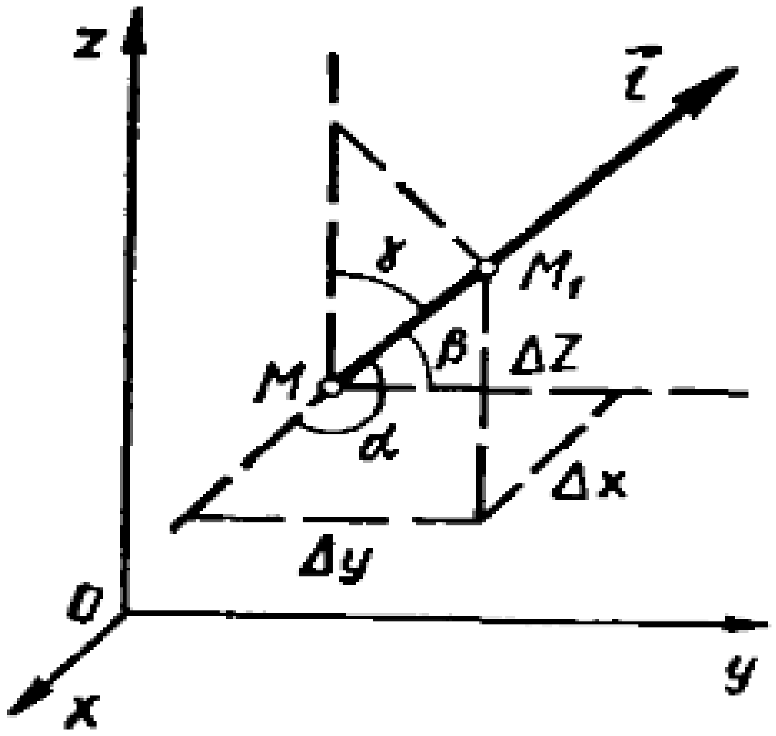
Для того щоб задати скалярне поле, досить задати скалярну функцію $u(M)$ точки M і область її визначення.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле навивають стаціонарним, а скалярне поле, яке змінюється з часом, — нестаціонарним. Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.

Якщо в просторі ввести прямокутну систему координат Oxy, то точка M в цій системі матиме певні координати $(x; y; z)$ і скалярне поле u стане функцією цих координат: $u = u(M) = u(x, y, z)$.

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад x і y, то відповідне скалярне поле $u(x, y)$називають плоским; якщо ж функція $u(M)$ залежить від трьох змінних: x, y і z, то скалярне поле $u(x, y, z)$ називають просторовим.

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові — за допомогою поверхонь рівня (п. 1.1). Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.



Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x; y; z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$.

На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$.

Тоді

$\Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Обчислимо тепер приріст $\Delta_l u$ функції $u(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$:

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, то цю границю називають похідною функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} cos\gamma \qquad (8)$$

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $u(x, y)$, то напрям вектора $\vec{l}$ цілком визначається кутом $\alpha = \angle(\vec{l}, Ox)$. Тому, поклавши в формулі (8)

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \text{ та } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} sin\alpha.$$

Приклад. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $A(1;2;-1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2;4;-3)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі.

Розв'язання. Знаходимо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси:

$$\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, cos\alpha = \frac{1}{3}, cos\beta = \frac{2}{3}, cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Тепер обчислимо значення частинних похідних у точці A і скористаємося формулою (8):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = (2x - 2z)|_A = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 2y|_A = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = -2x|_A = -2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} - 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то задана функція в даному напрямі зростає.

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$, називають градієнтом функції в цій точці і позначають $grad\ u$. Отже,

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Зв'язок між градієнтом і похідною в даній точці за довільним напрямом показує така теорема.

Теорема. Похідна функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{пр}_{\vec{l}}\, grad\ u.$$

Приклад. Знайти значення і напрям градієнта функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точці $M_0(0;1;2)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції в точці M_0:

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (2x - 2yz)|_{M_0} = -4;$ $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (2y - 2xz)|_{M_0} = 2;$

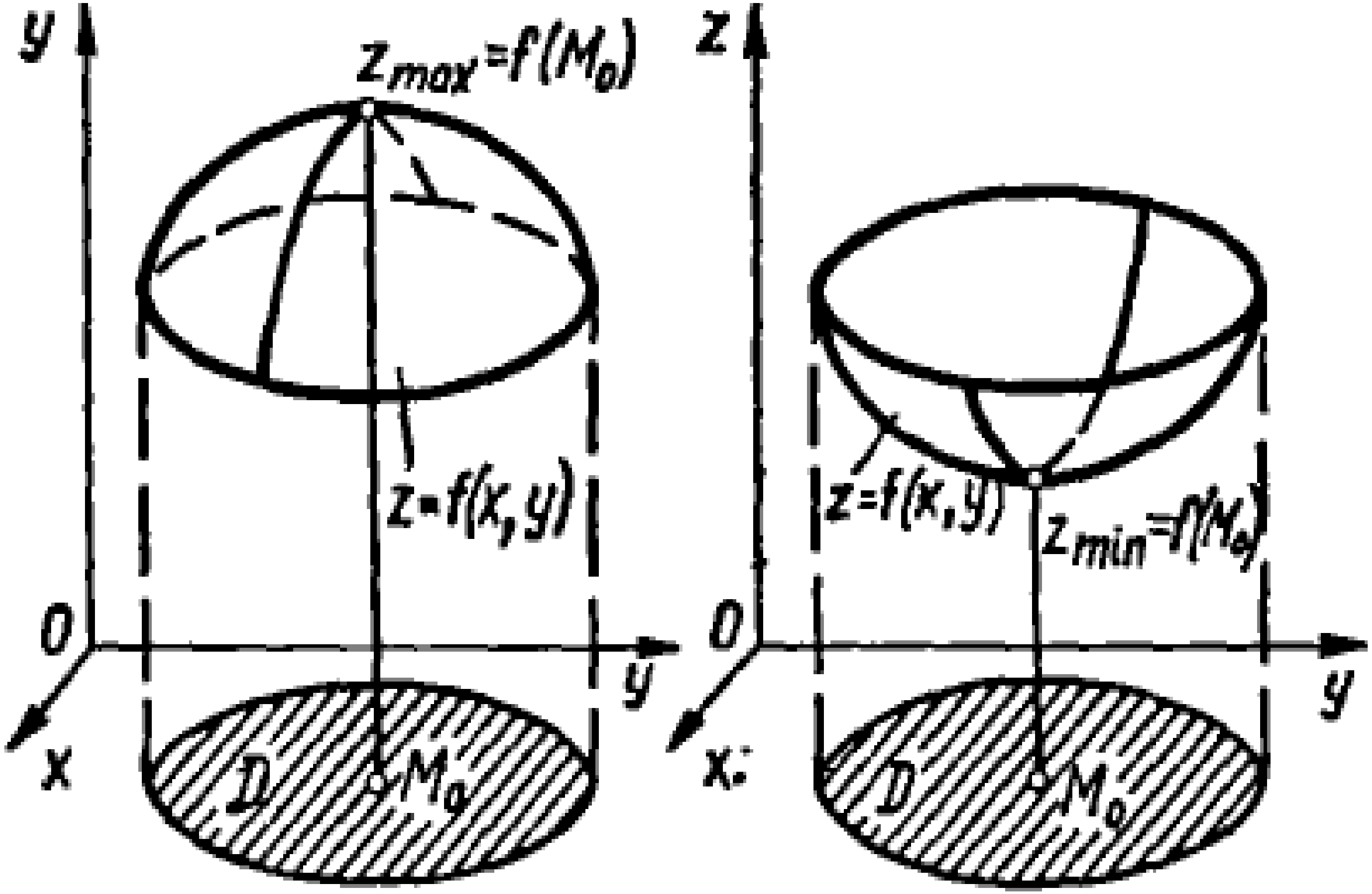
$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2z - 2xy)|_{M_0} = 4.$

Тоді за відповідною формулою маємо

$grad|_{M_0} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$

3.3. Локальні екстремуми функції двох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D, а точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ $\left(f(M) > f(M_0)\right)$, то точку M_0 називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x, y)$, а число $f(M_0)$ — локальним максимумом (мінімумом) цієї функції (див. рис.). Точки максимуму та мінімуму функції називають її точками екстремуму.



y
$z_{max}=f(M_0)$
$z=f(x,y)$
0
y
x
D
M_0
z
$z=f(x,y)$
$z_{min}=f(M_0)$
0
y
x
D
M_0

Теорема 1 (необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних x та y дорівнюють нулю або не існують.

Подібна теорема справедлива для функції n змінних. Точку (x_0, y_0), в якій частинні похідні першого порядку функції $f(x, y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x = f'_y = 0$, називають стаціонарною точкою функції $f(x, y)$.

Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називаються критичними точками.

Таким чином, якщо функція в якій-небудь точці досягає екстремуму, то це може статися лише в критичній точці. Проте не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 1 встановлює лише необхідні, але не достатні умови екстремуму.

Теорема 2. (достатні умови екстремуму). Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ і деякому її околі функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Якщо$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$>0,

то функція $f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точці M_0 функція $f(x, y)$ екстремуму не має.

На основі теорем 1 і 2 дістанемо правило дослідження диференційовних функцій двох змінних на екстремум. Щоб знайти екстремум диференційовної функції $z = f(x, y)$, необхідно:

1) знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь:

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=0; \\ f_y'(x,y)=0; \end{cases}$$

2) у кожній стаціонарній точці (x_0, y_0) обчислити вираз

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2;$$

якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то (x_0, y_0) — точка екстремуму функції, причому точка максимуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$; якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то точка (x_0, y_0) не є точкою екстремуму функції;

3) обчислити значення функції $f(x, y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

Приклад. Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Розв’язання. Знаходимо частинні похідні

$$z'_x = 4(x^3 - x + y), \quad z'_y = 4(y^3 + x - y).$$

Стаціонарні точки функції визначимо із системи:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0; \\ y^3 + x - y = 0; \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, знайдемо $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$.

Підставляючи $y = -x$ в перше рівняння дістанемо
$x^3 - 2x - 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, тоді
$y_1 = 0$, $y_2 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$.
Отже, функція має три стаціонарні точки:
$M_1(0,0)$, $M_2\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $M_3\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.
Знайдемо величину $\Delta(x, y)$. Оскільки
$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$, $f''_{xy}(x, y) = 4$, $f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4$,
То
$\Delta(x, y) = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - 4^2 = 16(9x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2)$.

Обчислимо величину $\Delta(x, y\ )$ в кожній стаціонарній точці:

$\Delta(M_1) = 0,\ \ \Delta(M_2) = \Delta(M_3) = 384 > 0,$

$$f''_{xx}(M_2) = f''_{xx}(M_3) = 20 > 0.$$

Таким чином, точки M_2 та M_3 — точки мінімуму. В цих точках $z_{min} = -8$.

У точці M_1 значення $\Delta(M_1) = 0$, тому теорему 2 застосувати не можна. Переконаємось, що в цій точці екстремум відсутній. Дійсно, якщо $y = 0$, то $z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ в околі точки M_1. Якщо $y = x$, то $z = 2x^4 > 0$. Отже, в околі точки M_1 значення z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка M_1 не є екстремальною. Відзначимо, що інших екстремумів задана функція не має, оскільки точки, в яких похідні z'_xі z'_y не існують, відсутні.

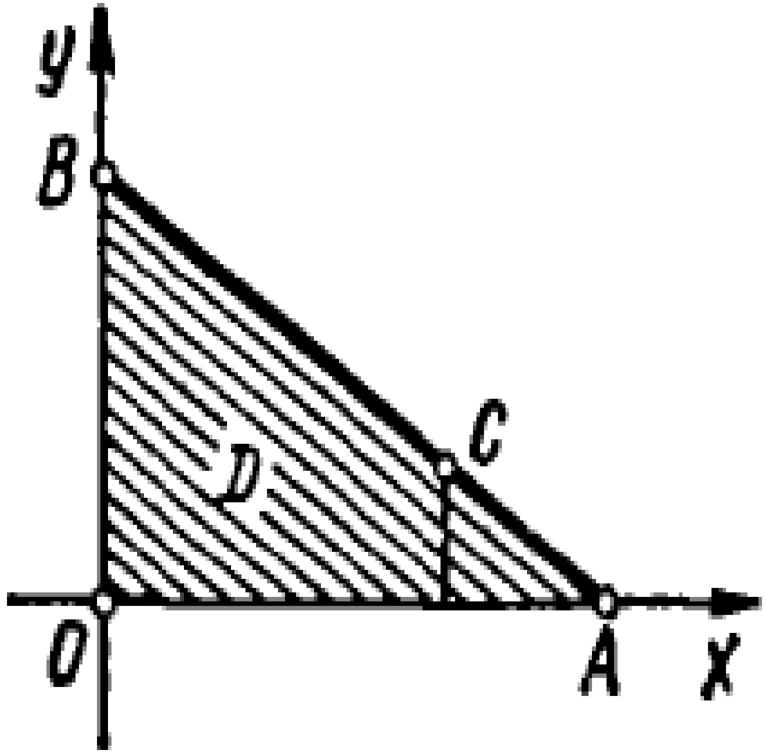
3.4. Найбільше та найменше значення функції.

Відомо, що функція $z = f(x, y)$ задана і неперервна в замкненій та обмеженій області D, досягає в цій області найбільшого і найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму. Тому треба знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області D, розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, і обчислити значення функції в цих точках.

Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області D. Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної. Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше та найменше значення.

Загального методу знаходження найбільшого та найменшого значень для довільної неперервної функції в замкненій обмеженій області D немає.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(2 - x - y)$ в замкненій області D, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ (рис).



Розв’язання. Знаходимо стаціонарні точки. Маємо

$$z'_x = xy(4 - 3x - 2y), \quad z'_y = x^2(2 - x - 2y).$$

Прирівнюючи похідні до нуля і скорочуючи їх на xy та x^2 (всередині трикутника OAB $x \neq 0$, $y \neq 0$), дістаємо систему рівнянь: $\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0; \\ 2 - x - 2y = 0, \end{cases}$ Звідки $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$.

Стаціонарна точка $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$ належить області D, тому обчислюємо значення $z(M) = \frac{1}{4}$.

Рівняннями сторін OB та OA трикутника є $x = 0$, та $y = 0$, тому значення функції $z = 0$ в усіх точках відрізків OB і OA, зокрема $z(O) = z(A) = z(B) = 0$.

Знайдемо стаціонарні точки на стороні AB трикутника OAB. Рівняння цієї сторони $y = 6 - x$, тому

$z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x), 0 \leq x \leq 6.$

Далі дістанемо $z'_x = -48x + 12x^2 = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Оскільки $y = 6 - x$, то $y_1 = 6$, $y_2 = 2$.

Знаходимо точки $B(0;\ 6)$ і $C(4;\ 2)$ і обчислюємо значення $z(C) = -128$.

Порівнюючи значення заданої функції в точках A, B, C, O, M, знаходимо найбільше та найменше значення:

$$\max_{(x;y)\epsilon D} z = \frac{1}{4}, \qquad \min_{(x;y)\epsilon D} z = -128.$$

3.5. Умовний екстремум.

Нехай в області D задано функцію $z = f(x, y)$ і лінію L, яка визначається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ та лежить в цій області.

Задача полягає в тому, щоб на лінії L знайти таку точку $M(x; y)$, в якій значення функції $f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках лінії L. Такі точки M називають *точками умовного екстремуму* функції $f(x, y)$ на лінії L. На відміну від звичайного екстремуму значення функції в точці умовного екстремуму порівнюється із значеннями цієї функції не в усіх точках області D (чи δ -околу точки M), а лише в точках, які лежать на лінії L.

Назва «умовний екстремум» пов'язана з тим, що змінні x та y мають додаткову умову: $\varphi(x, y) = 0$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається рівнянням зв'язку; якщо це рівняння можна розв'язати відносно однієї змінної, наприклад y: $y = \psi(x)$, то, підставляючи замість y значення $\psi(x)$ у функцію $z = f(x, y)$, дістаємо функцію однієї змінної $z = f\big(x, \psi(x)\big)$. Оскільки додаткова умова врахована, то задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної (вивчали раніше).

Проте не завжди можна розв'язати рівняння зв'язку відносно y чи x. Тоді розв'язують поставлену задачу так.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, де $y = \psi(x)$, як складену функцію. З необхідної умови екстремуму випливає, що в точках екстремуму

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

У цьому випадку $\frac{dy}{dx}$ означає похідну неявної функції y, заданої рівняннями зв'язку $\varphi(x, y) = 0$:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$, тому $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) = 0,$

тобто

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}$$

Позначивши останні відношення через $(-\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ (знак мінус взято для зручності, а саме число λ може мати довільний знак), знайдемо, що в точці умовного екстремуму виконуються умови

$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda$, тобто $f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \quad f'_y + \lambda\varphi'_y = 0.$

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму мають задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Аналізуючи цю систему, помічаємо, що знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x,y)$ звелось до знаходження звичайного екстремуму функції

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y). \qquad (2)$$

Функція (2) називається функцією Лагранжа, а число λ — множником Лагранжа.

Умови (1) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. З теореми 2 (про достатні умови екстремуму функції однієї змінної) випливає, що характер умовного екстремуму (достатні умови) можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: якщо в стаціонарній точці $d^2F > 0$ ($d^2F < 0$), то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).

Для функції $u = f(x, y, z)$ з рівняннями зв'язку $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$ функція Лагранжа записується у вигляді

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z).$$

Стаціонарні точки умовного екстремуму знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z)=0; \\ \varphi_2(x,y,z)=0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}=0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}=0, \end{cases}$$

а достатні умови існування умовного екстремуму в цих точках можна визначити за знаком диференціала $d^2\Phi$.

Розглянутий метод можна поширити на дослідження умовного екстремуму функції довільного числа змінних.

Приклад. Знайти найбільше значення функції $z = xy$, якщо x та y додатні і задовольняють рівняння зв'язку $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$.

Розв’язання. Складаємо функцію Лагранжа (2):

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right).$$

Користуючись системою (1), знаходимо стаціонарні точки цієї функції:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0; \\ y + \lambda\frac{x}{4} = 0; \\ x + \lambda y = 0; \\ x > 0, \qquad y > 0, \end{cases}$$

звідки $x = 2$, $y = 1$, $\lambda = -2$. Отже, маємо одну стаціонарну точку $M(2; 1; -2)$.

Щоб визначити характер умовного екстремуму в цій точці, знайдемо за допомогою формули другого диференціала функції двох змінних другий диференціал функції Лагранжа при $\lambda = -2$:

$$d^2F = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dxdy - 2dy^2 + \left(y - \frac{x}{2}\right)d^2x + (x - 2y)d^2y$$

Знайшовши з рівняння зв'язку $dy(2; 1) = -\frac{1}{2}dx$, дістанемо

$$d^2F(M) = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dx\left(-\frac{1}{2}dx\right) - 2\left(-\frac{1}{2}dx\right)^2 = -2dx^2 < 0$$

тому точка $(2; 1)$ є точкою умовного максимуму функції $z = xy$. При цьому $z_{max} = 2$. Цей результат легко перевірити, знайшовши звичайний екстремум функції: $z = x\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$.

Додаткові приклади до теми.

Приклад 1. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^2 - 2y^3 - 2x + 6y\ .$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2\,,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -6y^2 + 6\,.$$

Необхідні умови екстремуму (див. теорему 1) набувають вигляду

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ -6y^2 + 6 = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо дві точки можливого екстремуму: $M_1(1; 1)$ і $M_2(1; -1)$.

З'ясуємо виконання достатньої умови локального екстремуму у знайдених точках.

Знайдемо частинні похідні другого порядку заданої функції:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y.$$

У точці $M_1(1;1)$ маємо:

$$A = 2, \ B = 0, \ C = -12, \ \Delta = 2 \cdot (-12) - 0 = -24 < 0.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то в точці $M_1(1;1)$ екстремум не існує.

Точці $M_2(1;-1)$ відповідають значення

$$A = 2, \ B = 0, \ C = 12, \ \Delta = 24 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то в точці $M_2(1;-1)$ функція досягає мінімуму, причому $z_{\min} = z(1;-1) = -5$.

Приклад 2. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^3 + xy^2 + x^2 y.$$

Розв'язання. За необхідними умовами екстремуму маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 2xy = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2 = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо єдину стаціонарну точку $M(0; 0)$.

Частинні похідні другого порядку мають вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y + 2x, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x.$$

У точці $M(0;0)$ усі похідні другого порядку перетворюються в нуль, тобто $A=B=C=\Delta=0$. Теорема 4.12 у такому випадку не дає відповіді про існування екстремуму в точці M. Проведемо додаткове дослідження. Значення функції в точці $M(0;0)$ дорівнює нулю: $z(0;0)=0$. На прямій $y=0$ маємо $z=x^3$. Якщо $x>0$, то $z(x;\ 0)=x^3>0$, а якщо $x<0$, то $z(x;\ 0)=x^3<0$. Отже, у довільному околі точки $M(0;0)$ функція набуває як додатних, так і від'ємних значень. Це означає, що в цій точці функція $z(x,y)$ не має локального екстремуму.

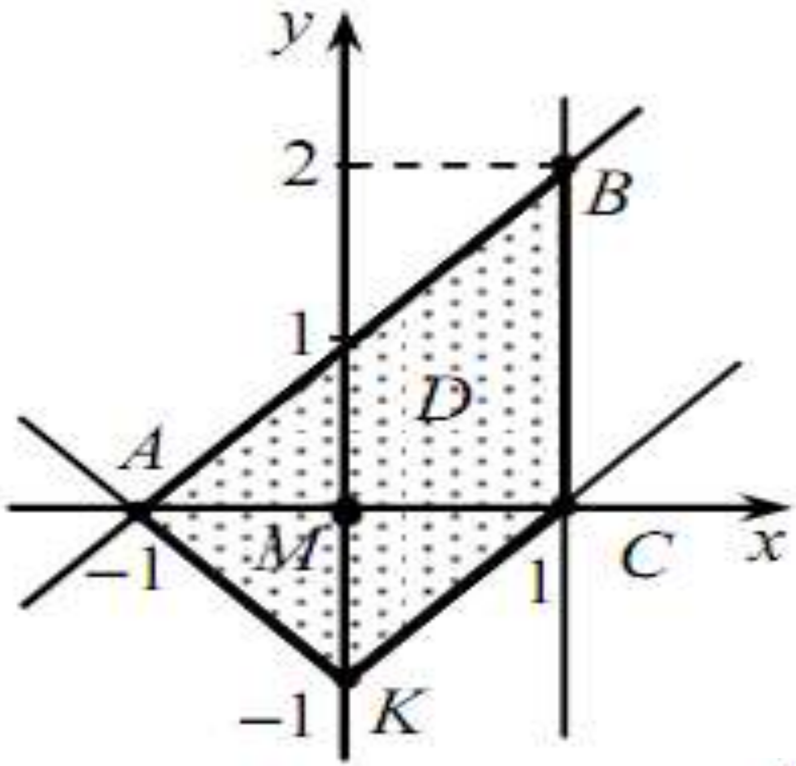
Приклад 3. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + xy + 2y^2$ в області

$D = \{(x, y) | x \leq 1,\ \ y \leq x + 1,\ y \geq |x| - 1\}$.

Розв’язання. Знаходимо спочатку стаціонарні точки функції $z(x, y)$. Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Отже, $M(0; 0)$ – єдина стаціонарна точка функції $z(x, y)$, ця точка належить області D



Дослідимо функцію на межі області D, яка складається із чотирьох відрізків AB, BC, CK і KA.

Рівняння відрізка AB: $y = x + 1, x \in [-1; 1]$, на цьому відрізку функція має вигляд

$$z = x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 4x^2 + 5x + 2,$$

мінімум якої досягається в точці $x = -5/8$. Оскільки $-5/8 \in [-1; 1]$, то точка $M_1(-5/8;\ 3/8)$ належить відрізку AB.

На відрізку BC ($x = 1$, $y \in [0; 2]$) функція набуває вигляду

$$z = 1 + y + 2y^2,$$

її точка мінімуму — $y = -1/4 \notin [0; 2]$, тобто точка $M_2(1;\ -1/4)$ не належить відрізку BC. Надалі цю точку не розглядатимемо.

Розглянемо функцію на відрізку KC: $y = x - 1, x \in [0;1]$. Маємо

$$z = x^2 + x(x-1) + 2(x-1)^2 = 4x^2 - 5x + 2,$$

її точка мінімуму — $x = 5/8 \in [0;1]$. Цьому значенню відповідає точка $M_2(5/8;\ -3/8)$ відрізка KC.

Нарешті, на межі KA: $y = -x - 1, x \in [-1;0]$ функція

$$z = x^2 + x(-x-1) + 2(-x-1)^2 = 2x^2 + 3x + 2$$

має мінімум при $x = -3/4 \in [-1;0]$, тобто точка $M_3(-3/4; -1/4) \in KA$.

Обчислимо значення функції $z(x,y)$ у точках M, M_1, M_3, а також у точках A, B, C і K:

$$z(M) = 0,\ z(M_1) = 7/16,\ z(M_3) = 7/8,\ z(A) = 1,$$
$$z(B) = 11,\ z(C) = 1,\ z(K) = 2.$$

Отже, $\max\limits_D z(x,y) = z(1;2) = 11$; $\min\limits_D z(x,y) = z(0;0) = 0$.

Приклад 4. Знайдіть екстремум функції $z = 8 - 2x - 4y$ за умови $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L = 8 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 12),$$

необхідні умови екстремуму якої мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -2 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4 + 4\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 2y^2 - 12 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x = 1, \\ \lambda y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1/\lambda, \\ y = 1/\lambda, \\ \lambda^2 = 1/4, \end{cases}$$

звідки знаходимо дві критичні точки: якщо $\lambda = 0{,}5$, то $x = y = 2$; якщо $\lambda = -0{,}5$, то $x = y = -2$. Отже, точки $M_1(2;2)$, $M_2(-2;-2)$ — точки можливого екстремуму функції $z = 8 - 2x - 4y$ за умови $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

Виконаємо перевірку достатніх умов існування екстремуму.

Знаходимо d^2L:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4\lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2 \cdot 0 dxdy + 4\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + 2dy^2).$$

Для $\lambda = 0{,}5$ виконується нерівність $d^2L > 0$, отже, точка $M_1(2;2)$ є точкою умовного мінімуму; якщо $\lambda = -0{,}5$, то $d^2L < 0$, отже, точка $M_2(-2;-2)$ є точкою умовного максимуму. Знаходимо

$$z_{\min} = z(2;2) = -4,\ z_{\max} = z(-2;-2) = 20.$$

Приклад 5. Знайдіть умовний екстремум функції $u = x^2 + y^2 + 2z^2$, якщо $x - y + z = 1$.

Розв'язання. Виразимо з умови зв'язку змінну z:

$$z = 1 - x + y$$

і підставимо її значення у функцію $u(x, y, z)$. У результаті маємо задачу про безумовний екстремум функції двох змінних x і y:

$$u = x^2 + y^2 + 2(1 - x + y)^2.$$

Знаходимо точки можливого екстремуму функції $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 4(1 - x + y) = 0\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 4(1 - x + y) = 0\ ;$$

$$\begin{cases} x - 2(1 - x + y) = 0, \\ y + 2(1 - x + y) = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -x, \\ 5x = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 0{,}4, \\ y = -0{,}4. \end{cases}$$

Отже, функція $u(x, y)$ має єдину стаціонарну точку $M\left(0{,}4; -0{,}4\right)$.

Частинні похідні другого порядку функції $u(x, y)$ такі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6\ .$$

Оскільки $\Delta(M) = 6 \cdot 6 - (-4)^2 = 20 > 0$ та $A = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6 > 0$, то в точці $M(0,4; -0,4)$ ця функція досягає мінімуму. Знаходимо координату z: $z = 1 - 0,4 - 0,4 = 0,2$.

Отже, функція $u = x^2 + y^2 + 2z^2$ за умови $x - y + z = 1$ має в точці $M_1(0,4; -0,4; 0,2)$ мінімум, причому $u_{\min} = u(M_1) = 0,4$.