Математичний аналіз

Лекція 5.

Тема: Формула Тейлора. Застосування диференціального числення для дослідження функцій.

§ 9. Формула Тейлора.

Розглянемо одну з основних формул математичного аналізу, так звану формулу Тейлора, яка широко застосовується як у самому аналізі, так і в суміжних дисциплінах. Зупинимося лише на трьох застосуваннях.

Формула Тейлора дає змогу розробити простий аналітичний апарат для обчислення значень функції $y = f(x)$, які відповідають заданим значенням незалежної змінної x. Зрозуміло, що в тих випадках, коли функція задається формулою виду $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 5$, значення обчислюється лише за допомогою чотирьох арифметичних дій. Але як знайти, наприклад, значення функції $y = \sin x$? Очевидно, цю задачу найпростіше можна «розв'язати» за допомогою калькулятора. Але ж калькулятор дає лише відповідь. А питання про те, які він при цьому виконує дії, залишається відкритим. Формула Тейлора і вказує, які арифметичні дії потрібно виконати над x, щоб одержати $\sin x$.

Іншими словами, формула Тейлора дає змогу зобразити дану функцію многочленом, що зручно для складання програм і обчислень цієї функції на ЕОМ.

Ще одне практичне застосування цієї формули пов'язане з обробкою числових експериментальних даних. Якщо в результаті експерименту одержано масив значень $(x_i;\ y_i)$, то спочатку будують графік залежності $y = f(x)$, а потім цю залежність описують аналітично, причому, як правило, у вигляді многочлена.

Обгрунтування можливості представляти функцію многочленом дає *формула Тейлора.*

Теорема. *Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 і в деякому її околі похідні до $(n+1)$-го порядку включно, і нехай x — довільне значення аргументу із вказаного околу $(x \neq x_0)$. Тоді між точками x_0 і x знайдеться така точка c, що справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

де $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ — залишковий член у формі Лагранжа, $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Формулою Маклорена називають формулу Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де $c \in (0; x)$.

Наведемо розклади деяких елементарних функцій за формулою Маклорена:

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+R_{n}(x);$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+1}(x);$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n}(x);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+R_{n}(x);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!}x^n + R_n(x),$$

зокрема, якщо $m = -1$, маємо формули

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + R_n(x).$$

Приклад. Знайти формулу Маклорена для функції $f(x) = \ln(1+x)$. Знаходимо значення даної функції і її похідних при $x = 0$:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1 = -1!;$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2 = 1\cdot 2 = 2!;$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -6 = 1\cdot 2\cdot 3 = -3!;$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}, \quad f^{(5)}(0) = 24 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 4!;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Підставляючи значення похідних у формулу Маклорена, маємо

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

§ 10. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

10.1. Монотонність функції.

Означення.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A. Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається *зростаючою*;
б) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функція називається *неспадною*;
в) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною*;
г) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функція називається *незростаючою*.

***Теорема 1** (достатні умови строгої монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) всюди, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких $f'(x) = 0$ на $(a; b)$, то функція $f(x)$ зростає* (спадає) на $(a; b)$.

***Теорема 2** (необхідна умова зростання). Якщо диференційовна на інтервалі $(a; b)$ функція зростає, то $f'(x) \geq 0$ на $(a; b)$.*

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на $(-\infty; +\infty)$ і має похідну $y' = 3x^2 > 0$, якщо $x \neq 0$, і рівну нулю при $x = 0$.

З цього випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають стаціонарними точками), або точками, де похідна не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками, або критичними точками першого роду.

Приклад. Знайти інтервали монотонності функції $y = arctg\ x$

Розв'язання. Областю визначення заданої функції є нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$.

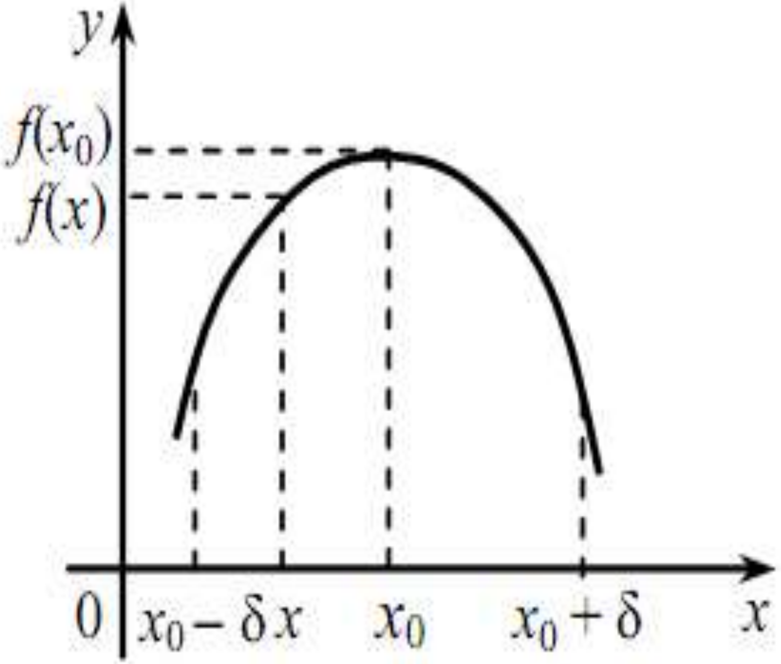
Похідна $y' = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ також існує на всій числовій осі, тому критичних точок дана функція не має. Оскільки для довільного $x \in (-\infty; +\infty)$ виконується нерівність $y' > 0$, то функція зростає на всій області визначення.

10.2. Локальний екстремум функції.

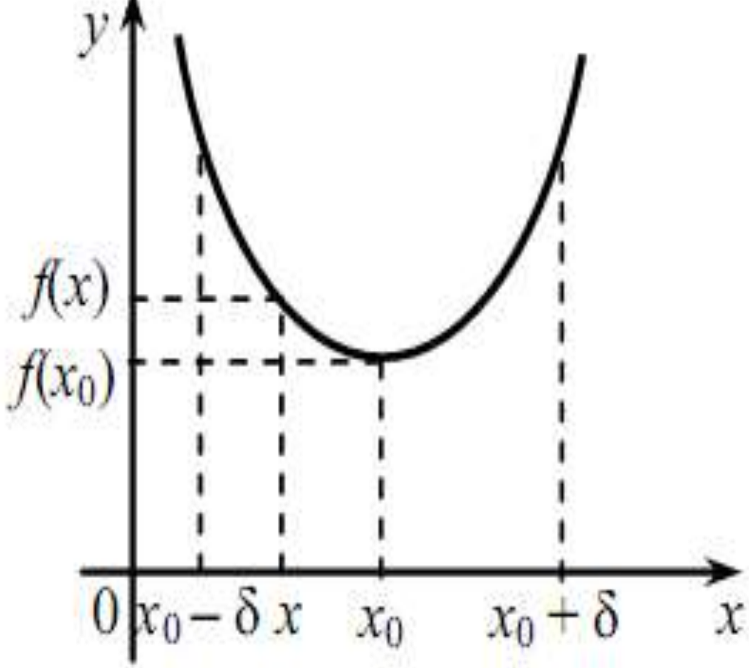
Точку x_0 називають *точкою локального максимуму* (*мінімуму*) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність

$$f(x)<f(x_0)\ (f(x)>f(x_0)).$$

Геометричний зміст означення зрозумілий з рисунків:



x_0 — точка максимуму



x_0 — точка мінімуму

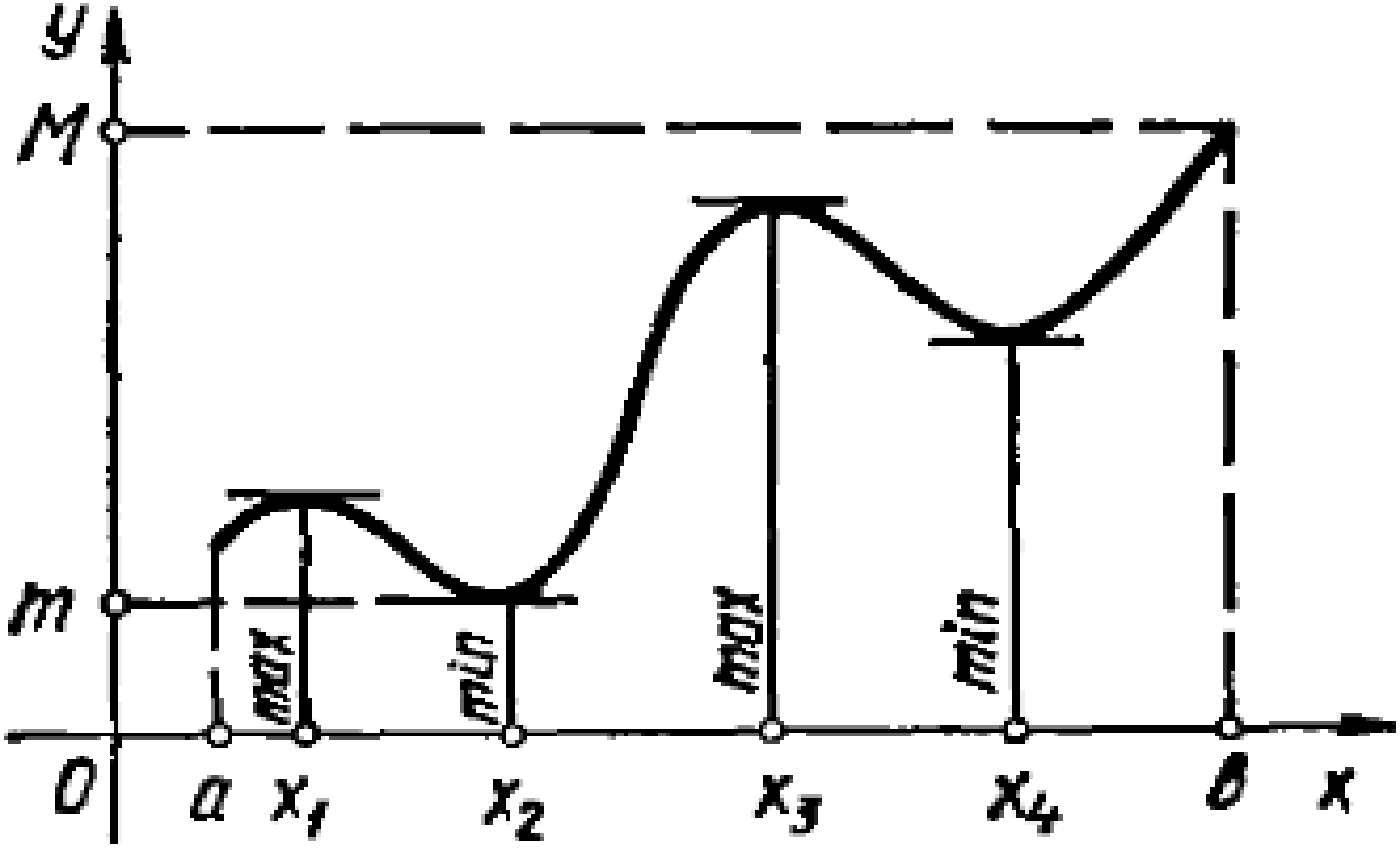
Точки локального максимуму і локального мінімуму називають *точками локального екстремуму*, а значення функції у цих точках — відповідно *локальним максимумом* і *локальним мінімумом* або *локальним екстремумом*.

Теорема 1 *(необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.*

Таким чином, повну необхідну умову локального екстремуму можна сформулювати так: *якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною*. Обернене твердження невірне: не всяка критична точка функції є її екстремальною точкою.

Іншими словами, точки локального екстремуму можуть бути по-перше, серед точок, в яких $f'(x) = 0$, і, по-друге, серед точок, в яких $f'(x)$ не існує.

У зв'язку з цим критичні точки іноді називають точками *можливого екстремуму*.



y
M
m
O
a
x_1
x_2
x_3
x_4
b
x
max
min
max
min

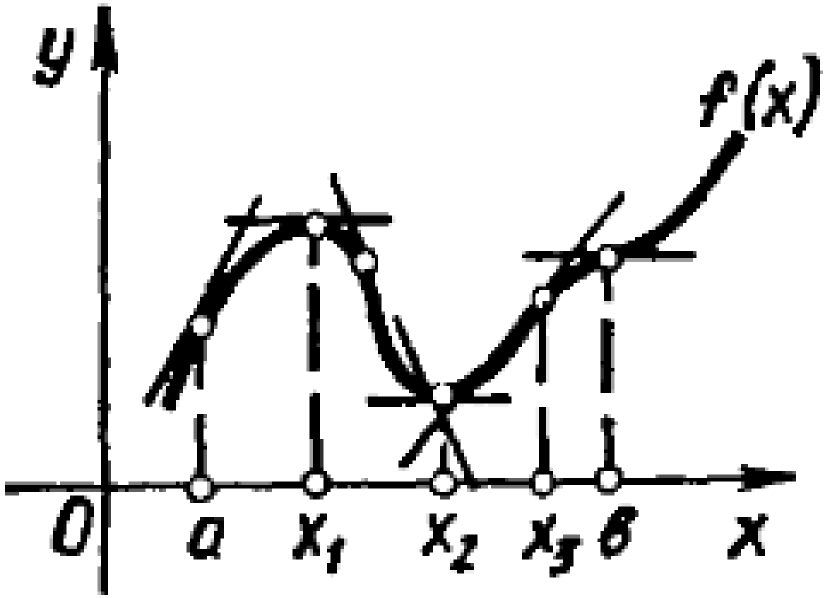
Теорема 2 *(перша достатня умова локального екстремуму). Нехай* x_0 *— критична точка функції* $f(x)$, *яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл* $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ *точки* x_0, *в якому функція має похідну* $f'(x)$ *крім, можливо, точки* x_0, *тоді:*

1) *якщо в інтервалі* $(x_0 - \delta;\ x_0)$ *похідна* $f'(x) > 0$, *а в інтервалі* $(x_0;\ x_0 + \delta)$ *похідна* $f'(x) < 0$, *то* x_0 *є точкою локального максимуму функції* $f(x)$;

2) *якщо в інтервалі* $(x_0 - \delta;\ x_0)$ *похідна* $f'(x) < 0$, *а в інтервалі* $(x_0;\ x_0 + \delta)$ *похідна* $f'(x) > 0$, *то* x_0 *є точкою локального мінімуму функції* $f(x)$;

3) *якщо в обох інтервалах* $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $(x_0;\ x_0 + \delta)$ *похідна* $f'(x)$ *має той самий знак, то* x_0 *не є екстремальною точкою функції* $f(x)$.

Можна ще сказати так: якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 — точка локального максимуму; якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в точці x_0 екстремум відсутній.



Приклад

Знайти локальні екстремуми функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\, e^x$.

○ Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну $f'(x) = \dfrac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}} e^x$.

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x = -\dfrac{2}{3}$ і не існує при $x = 0$. Отже $x_1 = -\dfrac{2}{3}$, $x_2 = 0$ — критичні точки даної функції. Складаємо таблицю (символами $\nearrow$ та $\searrow$ умовно позначається відповідно зростання і спадання функції на інтервалі).

При цьому скористаємось тим, що

$$f'(-1) > 0,\ f'\left(-\frac{1}{3}\right) < 0,\ f'(1) > 0,\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9e}} \approx 0{,}4,\ f(0) = 0.$$

Таблиця

x	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\approx 0{,}4$ max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$

Отже, $x_1 = -\frac{2}{3}$ — точка локального максимуму, $y_{\max} \approx 0{,}4$; $x_2 = 0$ — точка локального мінімуму, $y_{\min} = 0$. ●

Теорема 3 *(друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 — стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму.*

10.3. Найбільше та найменше значення функції.

З властивості неперервних функцій відомо, що на відрізку [*a;b*] вона досягає свого найбільшого та найменшого значення:

$$M = \max_{a \leq x \leq b} f(x), \quad m = \min_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Зрозуміло, що для точки x_0, де функція досягає найбільшого значення, може бути лише три можливості:
а) $x_0 = a$, б) $x_0 \in (a;$ в), в) $x_0 = b$. Якщо $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 потрібно шукати серед критичних точок даної функції. Те саме можна сказати і про точку, в якій функція набуває найменшого значення.

Отже, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a; b]$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках a та b і серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

Приклади

1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1;\ 3]$.

○ Знаходимо критичні точки заданої функції. Маємо $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$.

Відрізку $[-1, 3]$ належать точки $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. Обчислюємо значення функцій в цих точках і на кінцях відрізка:

$$f(-1) = -7,\ f(0) = 0;\ \ f(2) = -16,\ f(3) = 9.$$

Отже,

$$M = \max_{-1 \leq x \leq 3} f(x) = 9, \quad m = \min_{-1 \leq x \leq 3} f(x) = -16. \ ●$$

2. Визначити розміри консервної банки об'єму *V*, при яких на її виготовлення піде найменше матеріалу.

Нехай банка має форму циліндра з радіусом основи r і висотою h. Тоді повна поверхня банки дорівнює

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Оскільки об'єм банки відомий:

$$V = \pi r^2 h, \text{ то } h = \frac{V}{\pi r^2},$$

тому

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right).$$

Знайдемо найменше значення функції $S(r)$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right), \quad \frac{dS}{dr} = 0 \text{ при } r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};$$

$$\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=r_0} = 2\left.\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right)\right|_{r=r_0} > 0.$$

Отже, при $r = r_0$ функція $S(r)$ має мінімум. Це значення найменше на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки $\lim\limits_{r\to 0} S(r) = \infty$ і $\lim\limits_{r\to +\infty} S(r) = \infty$.

Обчислимо висоту

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

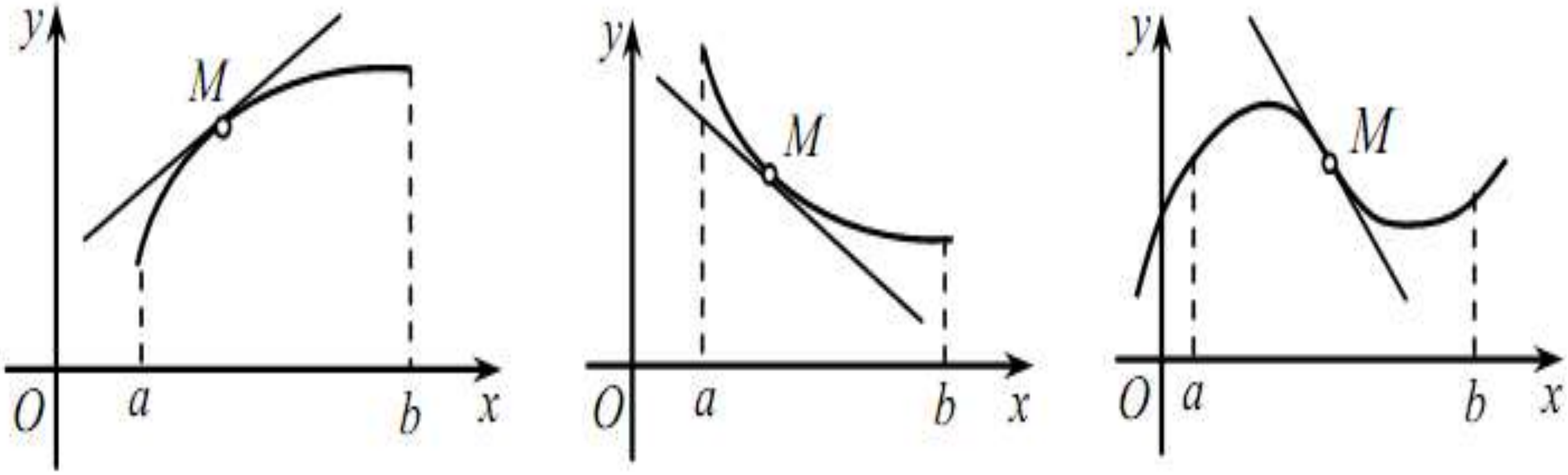
Таким чином, для того щоб при заданому об'ємі циліндрична банка мала найменшу повну поверхню, її висота має дорівнювати діаметру.

10.4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину.

Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається *вгнутою* на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.



Теорема 1. *Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на $(a;\ b)$, тоді:*

1) *якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a;\ b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на $(a; b)$;*
2) *якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a;\ b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на $(a;\ b)$;*

З теореми 1 випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю (якщо вона існує). Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує (наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$).

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками другого роду* функції $f(x)$. Отже, якщо x_0 — абсциса точки перегину функції $f(x)$, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження неправильне.

Встановимо достатні умови існування точки перегину.

Теорема 2. *Нехай x_0 – критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $\left(x_0;\ f(x_0)\right)$ є точкою перегину кривої $f(x)$.*

Приклади.

Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

а) $f(x) = x^5 - x + 2$.

○ а) Область визначення $(-\infty;\ +\infty)$. Оскільки $f''(x) = 20x^3 = 0$ при $x = 0$, то точка $x = 0$ є критичною точкою другого роду. Інших критичних точок ця функція не має, бо $f''(x)$ існує на всій числовій осі.

Розбиваємо область визначення критичною точкою на інтервали і досліджуємо зміну знака другої похідної: якщо $x \in (-\infty;\ 0)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла; якщо $x \in (0;\ +\infty)$, то $f''(x) > 0$ — крива вгнута. Точка $(0;\ 2)$ — точка перегину кривої.

б) $f(x) = 2 + (x-5)^{5/3}$.

б) Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Оскільки

$$f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}} \neq 0$$

і не існує при $x = 5$, то єдиною критичною точкою другого роду є точка $x = 5$. Маємо

$$\forall x \in (-\infty;\ 5): f''(x) < 0; \quad \forall x \in (5;\ +\infty): f''(x) > 0.$$

Тому крива опукла на інтервалі $(-\infty; 5)$ і вгнута на інтервалі $(5; +\infty)$; точка $(5; 2)$ — точка перегину. ●