Математичні та програмні засоби моделювання інформаційно-вимірювальних систем
Лекція 3. Дослідження функціональних математичних моделей ІВС

План лекції.

1. Визначення функціональної математичної моделі. Загальна схема моделювання.
2. Класифікація математичних моделей об’єктів вимірювань та вимірювального каналу ІВС.
3. Статичні та динамічні моделі вимірювального каналу ІВС.
4. Послідовність створення функціональних математичних моделей.
5. Функціональні блоки динамічних моделей ІВС.
6. Приклади функціональних математичних моделей.
7. Перетворення функціональних математичних моделей.
8. Чисельні методи для розрахунків за функціональними математичними моделями. Чисельне інтегрування та диференціювання.
9. Чисельне вирішення рівнянь математичних моделей. Програмна реалізація.

1. Визначення функціональної математичної моделі. Загальна схема моделювання

Функціональні моделі відображають функціонування об'єкту з точки зору зовнішнього спостерігача. Вони відображають процес зміни стану об’єкта, що моделюється, у часі. Це є динамічна модель поведінки (функціонування) складної системи. У граничному вираженні вона називаються також моделлю «чорної скриньки». Така математична модель представлена математичним описом функціонування кожного блоку та системи в цілому.

У найпростішому випадку функціональною моделлю ІВС є модель «чорна скринька», в якій спостерігачу доступні входи та виходи системи, а внутрішня структура невідома. Функціональна модель дозволяє визначити виходи системи при відомих входах та впливах зовнішнього середовища.

Рівняння функціональної моделі також називають рівнянням руху системи, що досліджується. Якщо вхід системи дорівнює нулю, то маємо вільний рух системи, обумовлений тільки її внутрішніми процесами, в іншому випадку – це вимішений рух системи під дією вхідного сигналу.

В загальному випадку функціональний опис (функціональна модель) співпадає з математичним визначення складної системи у загальній теорії систем. Система розглядається на основі динамічних взаємозв’язків між блоками системи, між системою та зовнішнім середовищем. Тому функціональна модель F повинна відображати строго однозначну відповідність між вхідним впливом X на систему і виходом Y системи:

$$Y=F(X).$$

Функціональна математична модель (рис. 1) будується на основі використання множин:

1. Множина моментів часу T. В кожен момент часу $t \in T$ система отримує деякий вхідний вплив x(t) і створює вихідну величину y(t).

2. Множина миттєвих значень вхідних впливів X, причому $x(t) \in X$.

3.Множина припустимих вхідних впливів U за умови нормального функціонування системи, наприклад керуючих впливів на систему.

4. Множина станів системи Z, що відображає внутрішні властивості системи.

5. Множина миттєвих значень вихідних величин Y.

6. Множина припустимих вихідних величин G,

а також двох відображень множин:

1. φ – перехідна функція станів системи.

2. r – вихідне відображення системи.

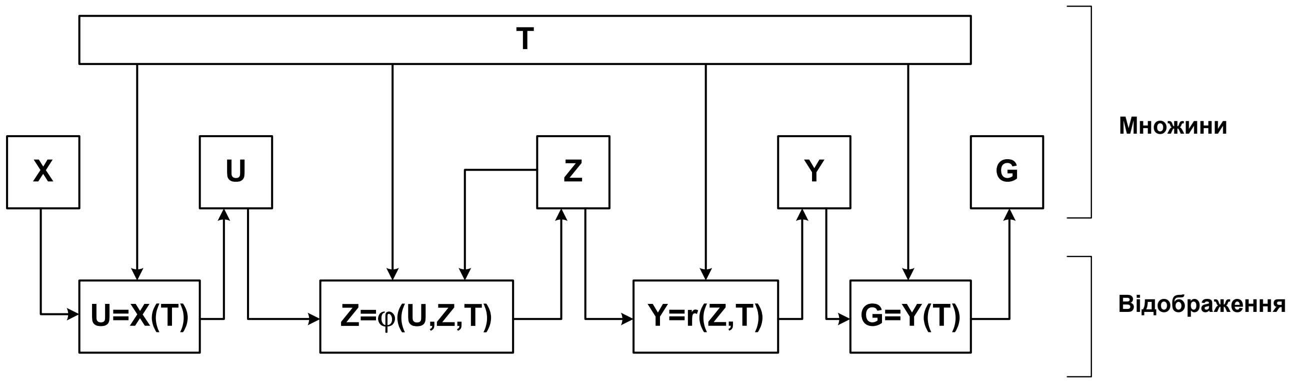

Рис. 1. Функціональна математична модель складної системи

Відображення φ та r разом утворюють функціональну модель F системи.

Процес моделювання зводиться до обчислення стану системи Z(t) та вихідних величин Y(t) в поточний момент часу $t \in T$ на основі заданих значень вхідних впливів X(t) та відомих станів системи Z(t-τ) у попередні моменти часу $(t-\tau) \in T$.

Аналіз результатів моделювання зводиться до перевірки належності вхідних впливів X та вихідних величин Y множинам U та G відповідно.

Вихідною величиною можуть бути: керуючий вплив на об’єкт управління в автоматизованій системі управління; результат вимірювань фізичної величини та оцінка похибки результату вимірювань в інформаційно-вимірювальній системі.

Стан системи в момент часу *t* визначається перехідною функцією

$$z(t) = \varphi(t, \tau, z(t-\tau), x(t)),$$

що є неперервною. Тоді прирощення перехідної функції *dz* при нескінченно малій зміні часу *dt* може бути записано в формі наступного співвідношення:

$$dz = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \tau, z(t-\tau), x(t))dt.$$

Ввівши позначення

$$f(t, z, u(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \tau, z(t-\tau), x(t))dt\ ,$$

отримуємо диференціальне рівняння системи

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z,u(t)).$$

Таким чином, наведений функціональний опис динамічної системи узагальнює динамічну модель, представлену диференціальними рівняннями.

Подібним чином перехідна функція може бути використана для функціонального опису дискретних систем, в тому числі – скінчених автоматів.

Скінченний автомат (англ. finite-state machine, машина зі скінченною кількістю станів) — особливий різновид автомата — абстракції, що використовується для опису змін стану об'єкта в залежності від qjuj поточного стану та інформації, отриманої ззовні. Його особливістю є скінченність множини станів автомату. Поняття скінченного автомата було запропоновано як математичну модель технічних приладів дискретної дії, оскільки будь-який такий пристрій може мати тільки скінченну кількість станів. Скінченні автомати можуть розв'язувати велику кількість задач, серед яких автоматизація проектування систем управління, опис функціонування цифрових електронних схем, моделювання обчислювальних пристроїв.

Наведений опис може бути поширено на стохастичні системи, у яких стан змінюється випадковим чином. В цьому випадку роль перехідної функції виконує перехідна ймовірність, що є умовною ймовірністю переходу системи з поточного стану в інший наступний стан.

В функціональний опис вимірювального каналу ІВС можуть бути додані миттєві значення $\xi(t)$ впливів зовнішнього середовища

$$y^*(t) = y(t) + \xi(t),$$

що відображають похибку результату вимірювань $y^*(t)$, приведену до виходу системи.

2. Класифікація математичних моделей об’єктів вимірювань та вимірювального каналу ІВС

Формальна класифікація математичних моделей по способу побудови, математичних засобах, що використовуються, та внутрішніх властивостях:

1. Стаціонарні або нестаціонарні моделі;
2. Статичні або динамічні моделі.
3. Лінійні або нелінійні моделі;
4. Неперервні або дискретні моделі;
5. Детерміновані або стохастичні моделі;
6. Зосереджені або розподілені моделі;

1. Якщо властивості перетворення вхідних сигналів в досліджуваній системі і в математичній моделі не змінюються з часом, то *систему і її модель називають стаціонарною;* у противному випадку — *нестаціонарною*. Реакція стаціонарної системи на будь-який заданий тип збурення залежить тільки від інтервалу часу між моментом початку дії вхідного збурення і даним моментом часу, тобто властивість стаціонарності означає, що процес перетворення

вхідних сигналів (функцій) інваріантний щодо зміщення вхідних сигналів у часі. Реакція нестаціонарної системи залежить як від поточного часу, так і від моменту прикладення вхідного сигналу. У цьому випадку при зміщенні вхідного сигналу в часі (без зміни його форми) вихідні сигнали не тільки зміщуються в часі, але і змінюють свою форму.

2. Частковим випадком стаціонарних моделей є *статичні та динамічні моделі.* *Статична модель* включають опис зв'язків між основними змінними системи в сталих режимах (у рівноважному стані без зміни в часі). Наприклад, математичний опис статики технологічного процесу складається звичайно з трьох видів рівнянь: матеріального і теплового балансів, термодинамічної рівноваги системи (характеристика рушійної сили) і швидкостей протікання процесів (хімічних реакцій, тепло - і масопередачі). Для розрахунку повільних процесів чи процесів, що протікають з невеликими відхиленнями від стабільних умов, приймається припущення, що дозволяє вважати процес сталим.

Статичні моделі складаються з алгебраїчних рівнянь та дозволяють розрахувати похибки ІВС в статичному режимі, тобто при незмінних значеннях параметрів вимірювального каналу та постійному значенні вимірюваної величини на інтервалі вимірювань.

Рівняння статики системи можна отримати з рівняння динаміки. Для цього потрібно прирівняти до нуля всі похідні, оскільки вони в сталому режимі приймають постійні значення.

Динамічні моделі складаються з диференціальних рівнянь та дозволяють розрахувати похибки ІВС при значеннях вимірюваної величини, що змінюються на інтервалі вимірювань. Динамічні моделі у загальному випадку містять змінні і співвідношення між ними, що наведені в п.1 даної лекції.

3. Лінійність або нелінійність аналізованого процесу впливає на вид моделі, метод програмування і швидкодію програми при її виконанні на комп'ютері. Завдяки простоті *лінійні моделі* широко застосовуються розробниками, хоча більшість природних і промислових процесів — нелінійні. Прикладом лінійної моделі є залежність між напругою і силою струму в електричному колі, хоча це справедливо в обмеженому діапазоні струмів і напруг. Прикладом нелінійної моделі є залежність опору резистора від температури.

Лінійні моделі є більш зручним об’єктом для досліджень. Тому реальні системи з незначним ступенем нелінійності завжди намагаються при дослідженнях замінити лінійною математичною моделлю.

Лінійною динамічною математичною моделлю функціонування системи є лінійне звичайне диференціальне рівняння

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = x(t),$$

де $y(t)$ – невідома функція, що описує динаміку зміни сигналу на виході системи, $x(t)$ – функція в правій частині рівняння, що є єдиним доданком, який не залежить від невідомої функції $y(t)$, в даному випадку – вхідний сигнал системи, t – незалежна змінна, в даному випадку – час, n – порядок диференціального рівняння.

4. Дану <u>*неперервну математичну модель*</u> можна записати в форматі передаточної функції системи

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

де $Y(p) = L(y(t)) = \int\limits_0^\infty y(t)e^{-pt}dt$, $X(p) = L(x(t)) = \int\limits_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$ – перетворення Лапласа для вихідного і вхідного сигналів відповідно.

Для ІВС з цифровою обробкою сигналів вимірювальної інформації вводиться поняття <u>*дискретної математичної моделі*</u> в формі дискретної передаточної функції. Нехай x — вхідний дискретний сигнал такої системи, а — її дискретний вихідний сигнал, . Тоді передаточна функція такої системи записується у вигляді

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

де X і z-перетворення для сигналів x і відповідно:

$$X(z) = Z(x(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}, \qquad Y(z) = Z(y(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}.$$

Наведені вище рівняння є <u>*детермінованими математичними моделями*</u>.

5. За наявності в моделі випадкових елементів, тобто в залежності від способу задання параметрів, вихідної інформації, початкових умов і способу знаходження характеристик системи, математичні моделі можна розділити на два великих класи: <u>*детерміновані і випадкові (імовірнісні, стохастичні, статистичні).*</u> У детермінованих моделях усі початкові дані, обмеження і цільова функція (тобто деяке співвідношення, яке кількісно характеризує поставлену перед системою ціль) задаються у виді конкретних чисел або векторів числових функцій.

Якщо хоча б один параметр моделі або обмежувальна функція має в якості своїх значень випадковий вектор чи випадкову величину, то це <u>*випадкова (стохастична) модель.*</u> В цьому випадку під однозначністю визначення характеристик моделюючого процесу розуміється однозначне визначення розподілів ймовірностей для характеристик процесу при заданих розподілах ймовірностей для початкових умов і збурень.

<u>*Статистична модель*</u> являє собою особливий клас математичної моделі. Статистичну модель від інших математичних моделей відрізняє те, що статистична модель не є детермінованою. Таким чином, у статистичній моделі, визначеної за допомогою математичних рівнянь, деякі зі змінних не мають конкретних значень, проте натомість мають розподіл ймовірностей, тобто деякі

змінні є стохастичними. Статистичні моделі призначені для передбачення, отримання інформації, опису стохастичних структур.

Статистична лінійна модель визначається рівнянням:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{U},$$

де X — це матриця що описує результати проведених вимірювань, Y — матриця, яка містить результати наступних розрахунків, B – матриця, параметри якої повинні бути оцінені при ідентифікації математичної моделі, U – матриця, яка містить характеристики випадкової похибки (шуму вимірювань). Наприклад, це може бути модель лінійної регресії. Похибки, як правило, мають багатовимірний нормальний розподіл.

6. Фізичний процес може бути розподіленим чи зосередженої в просторі та одночасно змінюватися в часі. Моделі, що описують розподілені процеси, називаються *моделями з розподіленими параметрами*. Звичайно вони мають вигляд диференціальних рівнянь у частинних похідних. Якщо основні змінні процесу не змінюються в просторі, а тільки в часі, то математичні моделі, що описують такі процеси, називають *моделями з зосередженими параметрами* і представляють їх у виді звичайних диференціальних рівнянь.

3. Статичні та динамічні моделі вимірювального каналу ІВС

Статичне вимірювання — вимірювання величини, яку можна вважати незмінною за час вимірювання. Статичне вимірювання — це вимірювання, при якому протягом певного проміжку часу вимірювана величина майже не змінюється або ж її значення змінюється поступово відповідно до процесу виробництва.

Статичні вимірювання використовуються, як правило, для встановлення взаємозв'язку між фізичними величинами одного і того самого об'єкта дослідження. Вони застосовуються у пасивних експериментах і забезпечують задовільний рівень наочності при зміні вимірюваних величин за певний проміжок часу (годину, зміну, добу).

Статична характеристика вимірювального пристрою — функціональна залежність значення вихідного сигналу від значення вхідного в статичному режимі роботи вимірювального пристрою.

Під статичним розуміють на увазі такий режим роботи пристрою, за якого вхідний та вихідний сигнали не змінюються. Статична характеристика описується деяким, в загальному випадку нелінійним, рівнянням:

$$Y = f(X),$$

де - значення вхідного сигналу, - значення вихідного сигналу.

Статична характеристика може бути подана як у вигляді аналітичної функції, так і в графічній чи табличній формах.

Визначення статичних характеристик тісно пов'язане з градуюванням засобів вимірювання. Статичні характеристики вимірювальних перетворювачів та вимірювальних приладів, відградуюваних в одиницях, відмінних від одиниць вимірювання величини, часто називають функціями перетворення.

За винятком спеціальних випадків основна вимога до статичних характеристик вимірювальних пристроїв полягає в отриманні лінійних залежностей між вихідною та вхідними величинами. На практиці ця вимога завжди реалізується з певною похибкою.

Статична характеристика може бути представлена алгебраїчним рівнянням, таблицею або графіком. Статичні характеристики можуть бути лінійними або нелінійними. Якщо характеристика описується лінійним рівнянням і має вид прямої лінії, вона лінійна. Об'єкт (або блок системи), що має таку характеристику, називають лінійним. Якщо характеристика описується нелінійним рівнянням і характеристика має криволінійний вигляд або вигляд ламаної лінії, то вона нелінійна і об'єкт буде також нелінійним. Якщо об'єкт має декілька входів, то він описується за допомогою сімейства або сімейств статичних характеристик.

У загальному випадку система може характеризуватися l вихідними величинами (хвих1, хвих2,..., хвихl), що залежать від m вхідних впливів на систему (хвх1, хвх2,..., хвхm). Сталий стан такої системи можна описати системою рівнянь:

$$\begin{cases} X_{вих1} = f_1(X_{вх1}, X_{вх2}, ..., X_{вхm}) \\ X_{вих2} = f_2(X_{вх1}, X_{вх2}, ..., X_{вхm}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{вих_l} = f_l(X_{вх1}, X_{вх2}, ..., X_{вхm}) \end{cases}$$

Система рівнянь є математичною моделлю статики ІВС.

Рівняння статики системи можна отримати з рівняння динаміки. Для цього потрібно прирівняти до нуля всі похідні, оскільки вони в сталому режимі приймають постійні значення.

Динамічне вимірювання — вимірювання величини, яка змінюється за час вимірювання. Такі вимірювання показують зміну вимірюваної величини в часі при різних збуреннях, що впливають на об'єкт дослідження або ж на спосіб вимірювання. Динамічні вимірювання дають можливість вивчати динамічні властивості об'єкта і засобів вимірювальної техніки, особливо первинних вимірювальних перетворювачів.

Динамічні характеристики ІВС.

Динамічні характеристики засобів вимірювань розділяються на повні та часткові. Повною динамічною характеристикою називається характеристика, яка однозначно визначає коливання вихідного сигнала засобу вимірювання при будь-яких змінах інформаційного та неінформаційного параметрів вхідного сигнала та впливаючої величини. Частковою динамічною характеристикою називається функціонал або параметр повної динамічної характеристики (наприклад, полоса пропускання, затухання, час установлення вихідного сигнала та ін.).

Повними динамічними характеристиками являються:

- диференційні рівняння;
- імпульсна характеристика;
- перехідна характеристика;
- передаточна функція;
- сукупність амплітудно-частотних та фазочастотних характеристик.

Частковими динамічними характеристиками являються:

- окремі параметри повних динамічних характеристик, наприклад, постійна часу, час запізнення;
- характеристики, які лише частково характеризують динамічні властивості засобів вимірювань, наприклад час установлення вихідного сигналу.

Динамічна модель ІВС — сукупність співвідношень, що визначають вихід системи в залежності від входу та стану системи.

Динамічна модель відтворює зміни в системі, які відбуваються з плином часу, або її особливості функціонування. Динамічні моделі називають також *функціональними*.

4. Послідовність створення функціональних математичних моделей

Процес побудови математичної моделі включає в себе такі основні етапи:

1. Обстеження об’єкту.
2. Концептуальна постановка задачі моделювання.
3. Математична постановка задачі моделювання.
4. Вибір і обґрунтування методу розв’язання задачі.
5. Реалізація математичної моделі у вигляді програми для ЕОМ.

На початковому етапі створення математичної моделі необхідно провести детальне обстеження досліджуваного об’єкту. На основі зібраної інформації про об’єкт моделювання формулюється змістовна постановка задачі моделювання. Якщо об’єкт моделювання являє собою технологічний процес, машину, конструкцію або деталь, то змістовну постановку задачі моделювання часто називають *технічною постановкою задачі*.

Концептуальна постановка задачі моделювання – це сформульований в термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології і т.д.) перелік основних питань, які потрібно вирішити, а також сукупність гіпотез відносно властивостей і поведінки об’єкта моделювання.

Концептуальна постановка дозволяє сформулювати *математичну постановку задачі моделювання*, яка включає в себе сукупність різних математичних співвідношень, що описують поведінку і властивості об’єкта моделювання.

Сукупність математичних співвідношень визначає вид оператора моделі. В більшості випадків оператор моделі включає в себе систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП). Для забезпечення коректності постановки задачі до системи ЗДР або ДРЧП додають початкові і граничні умови, які враховують значення шуканих параметрів в початковий момент часу і на границях області дослідження.

Можна виділити декілька найбільш розповсюджених типів задач ЗДР або ДРЧП:

1. Задача Коші, в якій за заданими в початковий момент часу змінним визначають значення цих змінних в будь-який момент часу;
2. Крайова задача, в якій умови на шукану функцію задаються в початковий момент часу для всієї просторової області і на її границі в кожний момент часу (на досліджуваному інтервалі);
3. Задача на власні числа, у формулювання якої входять невизначені параметри, які визначають з умови якісної зміни системи

Для реалізації складних моделей, як правило, використовують *алгоритмічні методи*, які реалізуються на ЕОМ. Точність моделювання в цьому випадку істотно залежить від обраного чисельного методу.

Для розробки *математичних співвідношень функціональної моделі* виконують такі кроки:

1. З'ясовується фізичний закон, якому підпорядковані процеси в об'єкті. Математичний вираз фізичного закону є диференціальним рівнянням функціональної моделі.

2. Всі змінні в початковому рівнянні виражаються через вхідну і вихідну величини об'єкту. Вихідна величина і її похідні переносяться в ліву частину рівняння, вхідна величина і її похідні – в праву частину.

3. Виконують, за необхідності, лінеріазацію математичної моделі, її спрощення.

5. Функціональні блоки динамічних моделей ІВС

Структурні та функціональні схеми вичерпно та наглядно відображають склад та функціонування технічних засобів ІВС. Але потрібно враховувати,що до сучасних комп'ютеризованих ІВС входить обчислювальний пристрій, що функціонує на основі програмно-алгоритмічного забезпечення цієї системи. Тому необхідно використовувати засоби математичного опису та моделювання процесів функціонування програмно-алгоритмічного забезпечення. В даному випадку для комп'ютеризованої ІВС така функціональна модель зводиться до опису послідовності дій з перетворення сигналів вимірювальної інформації. Також потрібно враховувати динамічні властивості блоків вимірювального каналу ІВС.

Тому функціональна модель динаміки комп'ютеризованої ІВС буде складатися з блоків, які містять передаточні функції неперервної та цифрової частини вимірювального каналу. Об'єднуючи передаточні функції окремих блоків згідно структурної схеми системи, можна отримати загальну передаточну функцію вимірювального каналу системи. В літературі (наприклад: Самотокін Б.Б. Лекції з теорії автоматичного керування : навч. посібник. – Житомир : ЖІТІ, 2001. – 508 с.) наведено перелік типових ланок (функціональних блоків) та правила їх об'єднання в загальну модель системи.

Типовою динамічною ланкою називається елемент системи, чий перехідний процес описується лінійним диференціальним рівнянням не вище другого порядку. Кожна ланка зображується на схемах у вигляді чотирикутника, з однієї сторони котрого стрілкою вказується напрям вхідної величини, а з другої – вихідної. Посередині прямокутника вписується вираз його передавальної функції або математичне рівняння, що описує його перехідний процес.

Типові динамічні ланки – це мінімально необхідний набір функціональних блоків для опису динамічної системи довільного вигляду. До типових ланок відносяться:

Пропорційна $W(p) = K_n$,

інтегруюча $W(p) = \dfrac{K_i}{p}$,

диференціююча $W(p) = K_\partial p$,

аперіодична $W(p) = \dfrac{K_0}{T_0 p + 1}$,

коливальна $W(p) = \dfrac{K}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$,

запізнювальна $W(p) = e^{-\tau p}$.

Існує три основних види з'єднань ланок, комбінуючи які, можна прийти до будь-якої складної системи. Це послідовне, паралельне і зустрічно-паралельне (обхват ланки зворотним зв'язком) з'єднання (рис. 2).

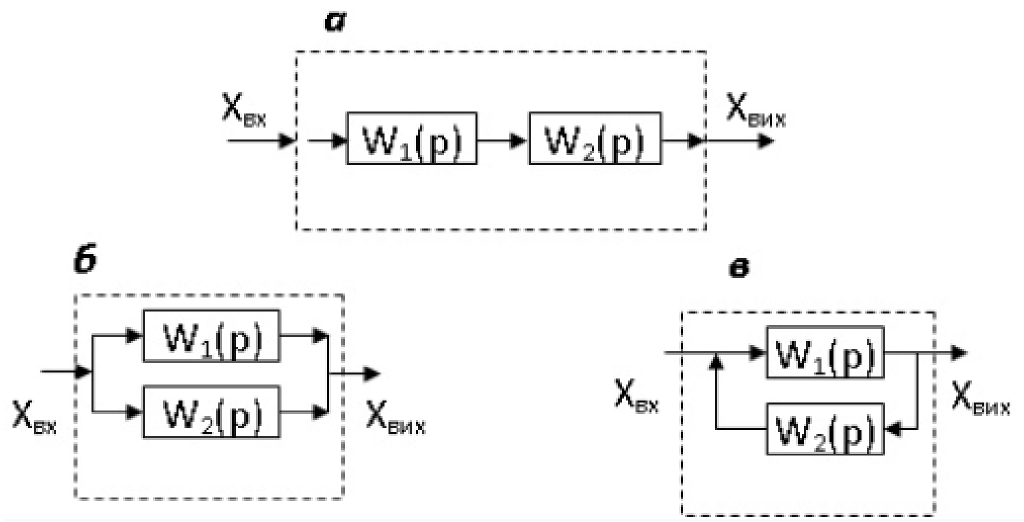

Рис. 2. Варіанти з'єднань типових ланок: послідовне (а); паралельне (б); зустрічно-паралельне із зворотним зв'язком (в)

Відповідно, для складної динамічної системи можна розрахувати функціональну модель в формі загальної передаточної функції. Обчислення проводять:

1. Ручні розрахунки в аналітичній формі за правилами перетворення структурних схем.

2. Комп'ютеризовані обчислення і перетворення структурних схем (наприклад, пакет прикладних програм Matlab/Control System Toolbox).

3. Введеня структурної схеми та передаточних функцій блоків в графічному редакторі схем (наприклад, пакет прикладних програм Simulink/Matlab).

В MATLAB передбачена можливість створення функціональної моделі ІВС шляхом попереднього введення моделей функціональних блоків, із яких складається система, та наступного з'єднання цих елементів в єдину структуру.

Для аналізу і синтезу функціональних моделей систем доцільно використовувати пакет прикладних програм (ППП) Control System Toolbox, який входить до складу системи MATLAB. Основні обчислювальні об'єкти цього ППП:

1. "Батьківський" об'єкт (клас) LTI (Linear Time-Invariant System – лінійні інваріантні за часом системи);

2. "Дочірні" об'єкти (класи), тобто підкласи класу LTI, що відповідають трьом варіантам представлення математичних моделей систем керування, а саме:

- TF - об′єкти (Transfer Fanction – передаточна функція);
- ZPK - об′єкти (Zero-Poie-Gain – нулі-полюси-коефіцієнт передачі);
- SS - об′єкти (State Space – простір стану).

До процедур, які виконують з'єднання елементів, відносяться:

- plus (minus) – виконує паралельне з'єднання елементів, тобто визначає характеристики моделі системи, що складається з паралельно з'єднаних елементів;
- mtimes (або знак "*" поміж елементами) – виконує послідовне з'єднання елементів. Використовується лише для одновимірних систем;
- feedback – з'єднання двох елементів, коли другий елемент складає коло від'ємного зворотного зв'язку для першого елемента.

6. Приклади функціональних математичних моделей

6.1. Фільтр низьких частот у складі вимірювального каналу ІВС

Фі́льтр низьких частот (англ. low-pass filter) — фільтр, який пропускає низькі частоти, та послаблює частоти, розташовані вище частоти зрізу фільтру (англ. cutoff frequency) (рис. 3). Може бути застосований для виключення з сигналів вимірювальної інформації шумів, що обумовлені впливом неконтрольованих чинників, та, як наслідок, для підвищення точності результатів вимірювань у ІВС.

Фільтр низьких частот може бути реалізований як апаратний блок або фрагмент програми обчислювального пристрою у складі вимірювального каналу. Апаратний блок – це пасивне RC-коло (рис. 4) або активна схема на основі операційного підсилювача з підключенням резистора та конденсатора у вхідне коло та коло зворотнього зв'язку відповідно.

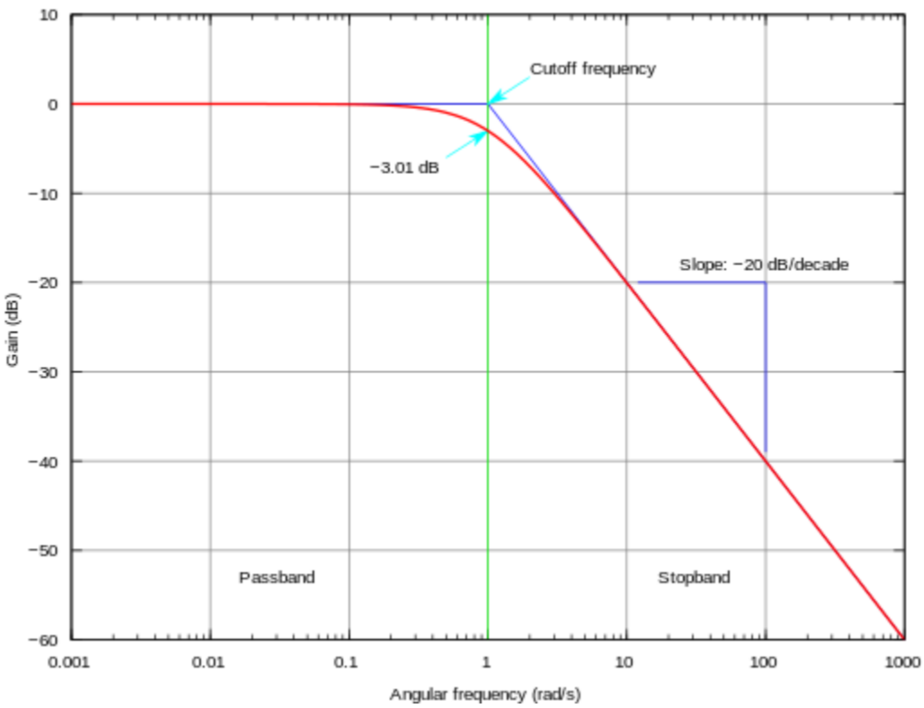

Рис. 3. Амплітудно-частотна характеристика фільтра низьких частот

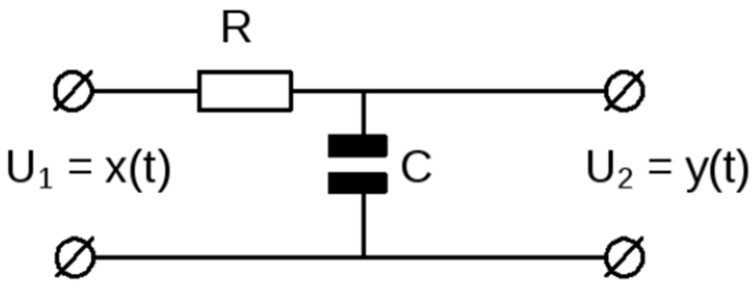

Рис. 4. Електричне RC-коло (фільтр низьких частот)

Запишемо лінійну динамічну математичну модель апаратної реалізації фільтра низьких частот. Відповідно до законів Кірхгофа і визначення ємності маємо:

$$x(t) = y(t) + R \cdot i(t),$$

$$Q_C(t) = C \cdot y(t),$$

$$i(t) = \frac{dQ_C}{dt},$$

де Q_c –заряд, що накопичується на ємності у момент часу t. Шляхом підстановки другого та третього рівняння в перше отримуємо:

$$x(t) = y(t) + RC\frac{dy(t)}{dt}.$$

Переносимо вихідну величину та її похідну у ліву частину рівняння та отримуємо лінійну динамічну модель апаратної реалізації фільтра низьких частот, що відповідає математичній моделі аперіодичної ланки першого порядку:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t),$$

де $T=RC$ – постійна часу.

Відповідно, передаточна функція для неперервних сигналів в апаратній реалізації

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{1}{Tp+1}.$$

Диференціальне рівняння фільтра можна дискретизувати та отримати різницеве рівняння, що забезпечує програмно-алгоритмічну реалізацію фільтра низьких частот в обчислювальному пристрої. Вхідний та вихідний сигнали представлені множиною дискретних відліків у моменти часу t_1, t_2, … t_{i-1}, t_i, … t_n, інтервал часу між якими складає Δ_t.

На основі визначення похідної

$$RC\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta_T}+y_i=x_i.$$

Значення вихідного сигналу в поточний момент часу дорівнює:

$$y_i=\alpha x_i+(1-\alpha)y_{i-1},\qquad \alpha=\frac{\Delta_T}{RC+\Delta_T}.$$

Частота зрізу, що визначається за АЧХ на рівні -3дБ, дорівнює:

$$\omega=\frac{1}{RC},\qquad f_з=\frac{1}{2\pi RC}=\frac{\alpha}{(1-\alpha)2\pi\Delta_T}.$$

6.2. Термопара як первинний вимірювальний перетворювач у складі вимірювального каналу ІВС

Термопару використовують як чутливий елемент (первинний вимірювальний перетворювач) для вимірювання температури, наприклад для контролю температури в нагрівальних печах. Термопара являє собою металевий провід з особливих сплавів, дві жили якого спаяні між собою, і спай розміщено в контрольованій зону печі (рис. 5). Вільні кінці проводу виведені за межі нагрівальної зони та з'єднані з наступними блоками вимірювального каналу. Термопара, що перебуває в печі, захована у вогнестійкий чохол, що захищає її від агресивного середовища печі.

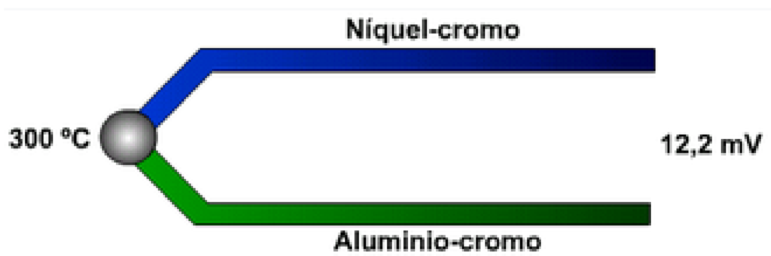

Рис. 5. Схема термопари. При температурі спаю ніхрому і алюміній-нікелю 300°C термо-ЕРС становить 12,2 мВ

Принцип дії термопари базується на термоелектричних явищах. Коли кінці провідника піддати різним температурам, між ними виникає різниця потенціалів, пропорційна різниці температур, коефіцієнт пропорційності *B* називають коефіцієнтом термо-ЕРС. У різних металів коефіцієнт термо-ЕРС різний, і відповідно різниця потенціалів, що виникає між кінцями різних провідників, буде різна. Помістивши спай з металів з відмінними коефіцієнтами термо-ЕРС в піч з температурою $t_{сп}$, ми отримаємо напругу $E=y(t)$ між протилежними контактами, що знаходяться в оточуючому середовищі з температурою t_2. Якщо поточна температура в печі $t_p=x(t)$ змінюється, то на виході термопари виникає перехідний процес (рис. 6), що відповідає математичній моделі аперіодичної ланки першого порядку (Q – потік теплоти, A і $C_{сп}$ – коефіцієнти пропорційності, $t_{сп} >> t_2$).

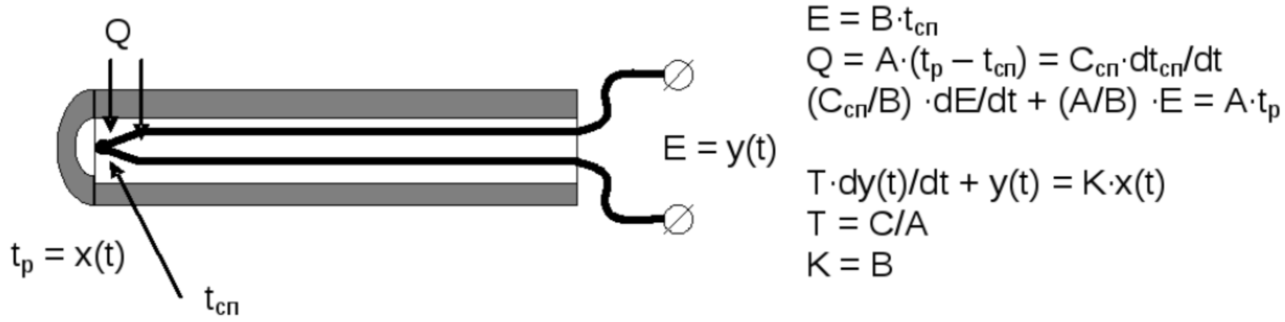

Рис. 6. Вимірювальний перетворювач на основі термопари та його математична модель

6.3. Тахогенератор як технічний засіб для взаємодії ІВС та АСУ з об’єктами контролю та управління

Тахогенератор постійного струму (рис. 7) призначений для вимірювань кутової швидкості об’єктів та генерує на виході електричну напругу $U_{тг} = k_{тг}\Omega_{тг}$, що пропорційна кутовій швидкості $\Omega_{тг}$ на його вхідному валу, $k_{тг}$ – крутизна статичної характеристики тахогенератора.

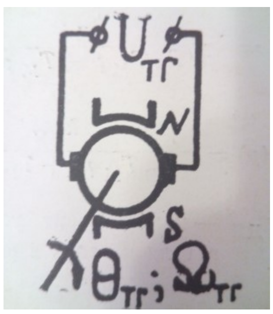

Рис. 7. Тахогенератор постійного струму

В усталеному режимі роботи ($\Omega_{тг} = const$) при дослідженні похибок статики вимірювального каналу:

$$W_{\Omega}(p)=\frac{U_{тг}}{\Omega_{тг}}=k_{тг}, \qquad W_{\Theta}(p)=\frac{U_{тг}(p)}{\Theta_{тг}(p)}=k_{тг}p,$$

де $\Theta_{тг}(t)=x(t)$ – поточне кутове положення вхідного валу тахогенератора.

В динамічному режимі роботи (швидкі зміни $\Omega_{тг}$) при дослідженні динамічних похибок вимірювального каналу:

$$W_{\Omega}(p)=\frac{U_{тг}(p)}{\Omega_{тг}(p)}=\frac{k_{тг}}{T_{тг}p+1}, \qquad W_{\Theta}(p)=\frac{U_{тг}(p)}{\Theta_{тг}(p)}=\frac{k_{тг}p}{T_{тг}p+1},$$

де $T_{тг}$ – постійна часу тахогенератора.

6.4. Електричний двигун як виконавчий механізм для взаємодії АСУ з об'єктами контролю та управління

Математична модель електричного двигуна постійного струму з незалежним збудженням (рис. 8) може бути отримана на основі математичного опису фізичних процесів в електричних та магнітних колах, врахування впливу механічного навантаження, структурної та функціональної схем електродвигуна [Задачник по теории автоматического управления. Под общей ред. Шаталова А.С. – М.: Энергия, 1971. – 496 с.]:

$$W_1(p)=\frac{\Omega_{д}(p)}{U_{я}(p)}=\frac{k_{ди}}{T_E T_M p^2+T_M p+1},$$

$$W_2(p)=\frac{\Theta_{д}(p)}{U_{я}(p)}=\frac{k_{ди}}{p(T_E T_M p^2+T_M p+1)},$$

$$W_3(p)=\frac{\Omega_{д}(p)}{I_{я}(p)}=\frac{k_{дi}}{T_E T_M p^2+T_M p+1},$$

де $\Theta_{д},\Omega_{д}$ – поточне кутове положення та кутова швидкість валу електродвигуна, $k_{ди},k_{дi}$ – статичний коефіцієнт передачі електродвигуна по напрузі та струму, T_E,T_M – електромагнітна та електромеханічна постійні часу електродвигуна.

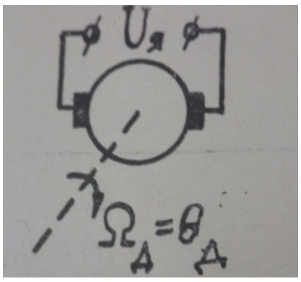

Рис. 8. Електричний двигун постійного струму з незалежним збудженням

6.5. Математична модель відеосигналу з вимірювальною інформацією в рядку зображення

Розглянемо відеосигнал з вимірювальною інформацією в рядку зображення, що містить об'єкт вимірювань, для якого потрібно вимірювати геометричні параметри. Будемо вважати, що контур об'єкту вимірювань перпендикулярний рядку зображення, що розглядається. Перетин рядком контуру об'єкта утворює в цьому рядку ступеневий відеосигнал $f_0(t)$. Цей сигнал створює на виході цифрової камери відеосигнал $f_{\text{Н}}(t)$, який по формі відповідає пограничній кривій для оптикоелектронної системи (рис. 9).

Причиною такої зміни форми відеосигналу є розмиття контурів об'єктів в оптичній системі, обмежена смуга частот, яку пропускають електронні схеми. Це призводить до виникнення динамічних похибок вимірювальної інформації при швидких змінах відеосигналу в просторі і часі. Тому необхідно розробити математичну модель цифрової камери, як блоку вимірювального каналу ІВС, що вимірює геометричні параметри об'єктів за їх цифровими зображеннями.

[Подчашинський Ю. О. Приладова система для вимірювання геометричних параметрів об'єктів на основі комп'ютеризованої обробки відеозображень : монографія / Ю. О. Подчашинський. – Житомир : ЖДТУ, 2018. – 212 с. ISBN 978-966-683-496-9].

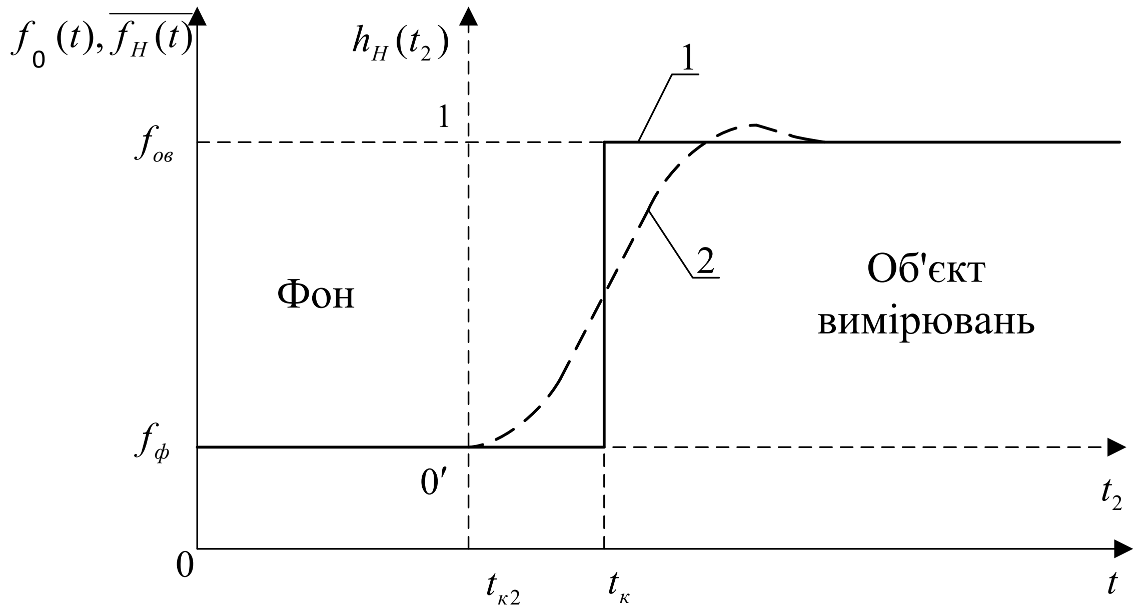

Рис. 9. Перехідна характеристика $h_{\text{Н}}$ цифрової камери:
1 – відеосигнал на вході $f_0(t)$; 2 – відеосигнал на виході $\overline{f_{\text{І}}(t)}$;
$t_{\text{к}}$ – початкове розташування контуру ОВ

Для зменшення впливу шумів виконаємо усереднення сигналу $f_{\text{Н}}(t)$ для декількох сотень рядків відеозображення, що містять пограничну криву. В результаті отримуємо $\overline{f_{\text{Н}}(t)}$. Також виконаємо зміщення початку координат в точку $0'$ та масштабування відеосигналу $\overline{f_{\text{Н}}(t)}$:

$$t_2 = t - t_{\text{к}2}, \quad h_{\text{Н}}(t_2) = \frac{\overline{f_{\text{Н}}(t_2 + t_{\text{к}2})} - f_{\text{ф}}}{f_{\text{ов}} - f_{\text{ф}}},$$

де $f_{\text{ф}}$ – амплітуда відеозображення в межах фону, $f_{\text{ов}}$ – амплітуда відеозображення в межах об'єкту вимірювань. Так як лінійні розміри об'єкту вимірювань визначаються як різниця координат двох контурних точок, то таке зміщення компенсується і не впливає на результати вимірювання геометричних параметрів. Вказане зміщення початку координат та масштабування відеосигналу дозволяє використовувати існуючі методи ідентифікації систем на основі їх перехідної характеристики.

Спочатку визначимо загальний вигляд передаточної функції $W_{\text{Н}}(p)$, параметри якої ідентифікуються. Типова перехідна характеристика цифрової камери може бути апроксимована експонентами. Тому можна вважати, що цифрова камера – це аперіодична система 2-го порядку

$$W_{\text{Н}}(p) = \frac{K_{\text{н}}}{(T_{\text{н}1}p+1)(T_{\text{н}2}p+1)} \tag{1}$$

або 3-го порядку

$$W_{\text{Н}}(p) = \frac{K_{\text{н}}}{(T_{\text{н}1}p+1)(T_{\text{н}2}p+1)(T_{\text{н}3}p+1)}, \tag{2}$$

де $K_{\text{і}}$ – коефіцієнт підсилення, $T_{\text{н}1}$, $T_{\text{н}2}$ і $T_{\text{н}3}$ – постійні часу.

Якщо враховувати наявність невеликого перерегулювання, то можна вважати, що це є коливальна система 2-го порядку

$$W_{\text{Н}}(p) = \frac{K_{\text{н}}}{T_{\text{н}2}^2 p^2 + 2\xi_{\text{н}} T_{\text{н}2} p + 1} \tag{3}$$

або 3-го порядку

$$W_{\text{Н}}(p) = \frac{K_{\text{н}}}{(T_{\text{н}1}p+1)(T_{\text{н}2}^2 p^2 + 2\xi_{\text{н}} T_{\text{н}2} p + 1)}, \tag{4}$$

де $\xi_{\text{н}}$ – коефіцієнт згасання коливань.

Так я в статичному режимі середня яскравість ОВ і фону повинна передаватися без змін, то коефіцієнт підсилення $K_{\text{н}} = 1$.

Результати ідентифікації математичних моделей цифрової камери Sony Cyber-Shot DSC-H9 наведено на рис. 10.

Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок, що найточнішою є математичну модель, яка побудована на основі коливальної системи 3-го порядку за формулою (4). Ця модель для цифрової камери Sony Cyber-Shot DSC-H9 забезпечує відтворення перехідної характеристики з похибкою 3,8 % та має такі параметри: $K_{\text{н}} = 1$, $T_{\text{н}1} = 0{,}945$ д.т. = 0,175 мм = $1{,}23 \cdot 10^{-7}$ с, $T_{\text{н}2} = 0{,}611$ д.т. = 0,113 мм = $7{,}96 \cdot 10^{-8}$ с, $\xi_{\text{н}} = 0{,}447$.

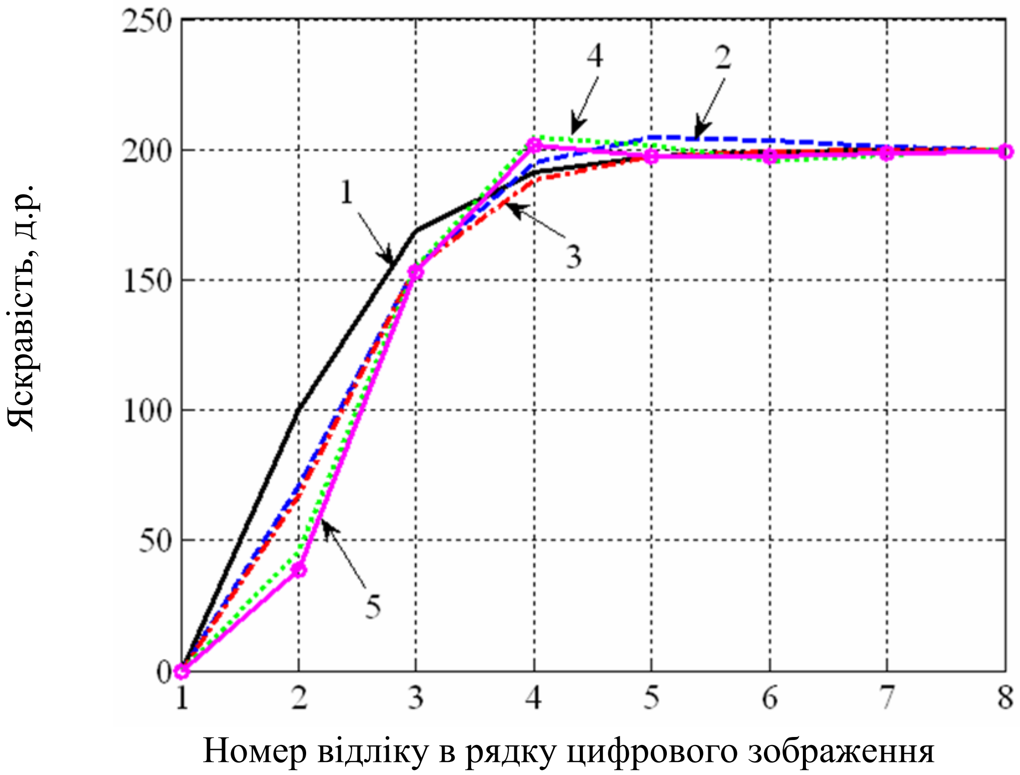

Рис. 2.10. Перехідна характеристика, що розрахована на основі математичної моделі цифрової камери Sony Cyber-Shot DSC-H9 (1 д.т. = 0,185 мм) :
1 – розрахунок для аперіодичної системи 2-го порядку (1);
2 – розрахунок для коливальної системи 2-го порядку (2);
3 – розрахунок для аперіодичної системи 3-го порядку (3);
4 – розрахунок для коливальної системи 3-го порядку (4);
5 – перехідна характеристика за експериментальними даними

7. Перетворення функціональних математичних моделей

1. **Справочное** пособие по теории систем автоматического регулирования и управления. Под общ. ред. Е. А. Санковского. Мн., «Вышэйш. школа», 1973. 584 с. с ил.
2. Сергиенко. ЦОС

§ 1.6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (ХАРАКТЕРИСТИКИ) ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Динамические функции (характеристики) являются критерием количественной и качественной оценки свойств элементов и систем автоматического управления в процессе их работы.

Для розробки математичних співвідношень функціональної моделі виконують такі кроки:

1. З’ясовується фізичний закон, якому підпорядковані процеси в об’єкті. Математичний вираз фізичного закону є диференціальним рівнянням функціональної моделі.

2. Всі змінні в початковому рівнянні виражаються через вхідну і вихідну величини об'єкту. Вихідна величина і її похідні переносяться в ліву частину рівняння, вхідна величина і її похідні – в праву частину.

Лінійною динамічною математичною моделлю функціонування системи є лінійне звичайне диференціальне рівняння

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = x(t),$$

де $y(t)$ – невідома функція, що описує динаміку зміни сигналу на виході системи, $x(t)$ – функція в правій частині рівняння, що є єдиним доданком, який не залежить від невідомої функції $y(t)$, в даному випадку – вхідний сигнал системи, t – незалежна змінна, в даному випадку – час, n – порядок диференціального рівняння.

4. Дану *неперервну математичну модель* можна записати в форматі передаточної функції системи

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

де $Y(p) = L(y(t)) = \int\limits_0^\infty y(t) e^{-pt} dt$, $X(p) = L(x(t)) = \int\limits_0^\infty x(t) e^{-pt} dt$ – перетворення Лапласа для вихідного і вхідного сигналів відповідно.

Передаточной $[K(p)]$ *функцией (характеристикой)* называется отношение изображения по Лапласу выходной величины системы (отдельного элемента) к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.

Переходной $[h(t)]$ называется функция (характеристика), определяющая изменение выходной величины системы (отдельного элемента) при скачкообразном изменении входной величины на единицу $[1(t)]$ и при нулевых начальных условиях.

Импульсной (импульсной переходной; функцией веса) $[k(t)]$ называется функция (характеристика), определяющая изменение выходной величины системы (отдельного элемента) при приложении на входе единичного импульса [дельта-функции $\delta(t)$] и при нулевых начальных условиях.

Переходная и импульсная функции относятся к временны́м функциям.

Частотной (амплитудно-фазовой) $[K(j\omega)]$ называется функция (характеристика), определяющая изменение амплитуды и фазы выходной величины системы (отдельного элемента) в установившемся режиме при приложении на входе гармонического воздействия:

$$K_{yx}(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Y_m(\omega) e^{j\varphi_y(\omega)}}{X_m(\omega) e^{j\varphi_x(\omega)}} = K_{yx}(\omega) e^{j\varphi(\omega)} =$$
$$= K_{yx}(\omega)[\cos\varphi(\omega) + j\sin\varphi(\omega)] = K_{yx}(\omega)\cos\varphi(\omega) +$$
$$+ jK_{yx}(\omega)\sin\varphi(\omega) = A(\omega) + jB(\omega),$$

где $K_{yx}(\omega)=|K_{yx}(j\omega)|=$

$=\dfrac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)}=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}$ — амплитудно-частотная функция (характеристика);

$Y_m(\omega)$ и $X_m(\omega)$ — соответственно амплитуды выходной и входной величин при фиксированной частоте (ω);

$\varphi(\omega)=\arg K_{yx}(j\omega)=$

$=\varphi_y(\omega)-\varphi_x(\omega)=\operatorname{arctg}\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$ — фазо-частотная функция (характеристика);

Функции $h(t)$, $k(t)$, $K(j\omega)$ и $K(p)$ связаны между собою. Эти связи приведены в табл. 1.1. Каждая из функций может быть получена непосредственно из дифференциального уравнения системы (отдельного элемента).

Таблица 1.1

Функции	$h(t)$	$k(t)$	$K(j\omega)$	$K(p)$
$h(t)$	—	$\int_0^t k(t)\,dt$	$F^{-1}\left[\dfrac{K(j\omega)}{j\omega}\right]$	$L^{-1}\left[\dfrac{K(p)}{p}\right]$
$k(t)$	$\dfrac{dh(t)}{dt}$	—	$F^{-1}[K(j\omega)]$	$L^{-1}[K(p)]$
$K(j\omega)$	$j\omega F[h(t)]$	$F[k(t)]$	—	$K(p)\|_{p=j\omega}$
$K(p)$	$pL[h(t)]$	$L[k(t)]$	$K(j\omega)\|_{j\omega=p}$	—

Вычисление выходной величины $y(t)$ может производиться по известным входной величине $x(t)$ и

а) переходной функции $h_{yx}(t)$:

$$y(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t x(\tau)h_{yx}(t-\tau)\,d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t x(t-\tau)h_{yx}(\tau)\,d\tau=$$

$$=x(0)h_{yx}(t)+\int_0^t x'(\tau)h_{yx}(t-\tau)\,d\tau=x(0)h_{yx}(t)+$$

$$+\int_0^t x'(t-\tau)h_{yx}(\tau)\,d\tau=x(t)h_{yx}(0)+\int_0^t h'_{yx}(t-\tau)x(\tau)\,d\tau=$$

$$=x(t)h_{yx}(0)+\int_0^t h'_{yx}(\tau)x(t-\tau)\,d\tau;$$

б) импульсной функции $k_{yx}(t)$:

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)k_{yx}(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t x(t-\tau)k_{yx}(t)\,d\tau;$$

в) частотной функции $K_{yx}(j\omega)$:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)K_{yx}(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega,$$

где

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\,dt;$$

г) передаточной функции $K_{yx}(p)$:

$$y(t)=L^{-1}[Y(p)]=L^{-1}[X(p)K_{yx}(p)].$$

Переход от изображения $Y(p)$ к оригиналу $y(t)$ может быть осуществлен с помощью таблиц операционных соответствий (см. приложение I) и с помощью теорем разложения (см. табл. 1.2).

Пример 1.6. Элемент САУ имеет дифференциальное уравнение вида

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t),$$

где k и T — постоянные коэффициенты.

Определить для этого элемента функции

$$h_{yx}(t),\ k_{yx}(t),\ K_{yx}(j\omega),\ K_{yx}(\omega);\ \varphi(\omega),\ A(\omega),\ B(\omega),\ K_{yx}(p).$$

Решение:

1) записав уравнение элемента в операторной форме, получим

$$TpY(p)+Y(p)=kX(p),$$

откуда

$$K_{yx}(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{1+pT};$$

2) частотная функция

$$K_{yx}(j\omega)=K_{yx}(p)\,|_{p=j\omega}=\frac{k}{1+j\omega T}.$$

Представив $K_{yx}(j\omega)$ в показательной форме, получим

$$K_{yx}(j\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}e^{-j\,\mathrm{arctg}\,\omega T},$$

откуда

$$K_{yx}(\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}};\qquad \varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}\,\omega T;$$

$$A(\omega)=K_{yx}(\omega)\cos\varphi(\omega)=\frac{k}{1+\omega^2T^2};$$

$$B(\omega)=K_{yx}(\omega)\sin\varphi(\omega)=\frac{k\omega T}{1+\omega^2T^2};$$

3) на основании табл. 1.1.

$$h_{yx}(t)=L^{-1}\left[\frac{K(p)}{p}\right]=L^{-1}\left[\frac{k}{p(1+pT)}\right]=k(1-e^{-t/T});$$

$$k_{yx}(t)=\frac{dh_{yx}(t)}{dt}=\frac{k}{T}e^{-t/T}.$$

Нули и полюсы

Разложив числитель и знаменатель функции передачи (2.9) на множители, мы получим функцию передачи в следующем виде:

$$H(s) = k\frac{(s - z_m)(s - z_{m-1})(s - z_{m-2})\ldots(s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1})(s - p_{n-2})\ldots(s - p_1)}.$$

Здесь $k = b_m/a_n$ — *коэффициент усиления* (gain), z_i — нули функции передачи (zero), p_i — полюсы функции передачи (pole). В точках нулей $H(z_i) = 0$, а в точках полюсов $H(p_i) \to \infty$.

В данном случае цепь описывается набором параметров $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k.

Нули функции передачи могут быть вещественными либо составлять комплексно-сопряженные пары. То же относится и к полюсам. Коэффициент усиления всегда вещественный.

Пространство состояний

Еще одним способом описания линейной цепи является ее представление в *пространстве состояний* (state space). При этом состояние цепи описывается вектором состояния $\mathbf{s}(t)$, а собственные колебания цепи и ее реакция на входной сигнал $x(t)$ характеризуются следующим образом:

$$\mathbf{s}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{B}x(t), \qquad (2.12)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{s}(t) + Dx(t).$$

Если размерность вектора состояния $\mathbf{s}(t)$ равна N ($\mathbf{s}(t)$ — вектор-столбец), а входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы являются скалярными, то размерность параметров в этих формулах будет следующей: $\mathbf{A}$ — матрица $N \times N$, $\mathbf{B}$ — столбец $N \times 1$, $\mathbf{C}$ — строка $1 \times N$, D — скаляр. Если входной и/или выходной сигналы являются векторными, размерность параметров соответствующим образом изменяется.

Описанием цепи в данном случае является набор параметров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, D.

От представления цепи в пространстве состояний можно легко перейти к функции передачи цепи. Если применить преобразование Лапласа к уравнениям состояния (2.12), а затем выразить из них операторный коэффициент передачи, получится следующее:

$$H(s) = D - \mathbf{C}(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}. \qquad (2.13)$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица $N \times N$.

Обратное преобразование выполняется следующим образом. Прежде всего, если степени числителя и знаменателя функции передачи совпадают, из дроби выделяется целая часть, которая становится значением параметра D (если степень числителя меньше степени знаменателя, то $D = 0$).

Далее оставшаяся после выделения целой части дробь, степень числителя которой (m) гарантированно меньше степени знаменателя (n), преобразуется в параметры $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1}/a_n & -a_{n-2}/a_n & \ldots & -a_1/a_n & -a_0/a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \;\ldots\; 0 \;\; b_m \;\; b_{m-1} \;\ldots\; b_1 \;\; b_0]. \qquad (2.14)$$

Опис дискретних систем

Название «разностные уравнения» вытекает из понятия конечной разности, которая соответствует понятию производной в теории непрерывных систем управления. Причем конечные разности так же могут иметь различный порядок, как и производные.

Линейным неоднородным уравнением в конечных разностях называется выражение

$$a_k'\Delta^k y(nT)+a'_{k-1}\Delta^{k-1}y(nT)+\ldots+a_1'\Delta^1 y(nT)+a_0'y(nT)=$$
$$=b_l'\Delta^l x(nT)+b'_{l-1}\Delta^{l-1}x(nT)+\ldots+b_0'x(nT), \qquad (9.10)$$

где $x(nT)$ — известная дискретная функция времени;
$y(nT)$ — дискретная функция, определяемая из уравнения;
a_i' — постоянные коэффициенты.

Это выражение можно преобразовать к виду

$$K_{yx}(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_{l-1}z^{-(l-1)}+b_lz^{-l}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_{k-1}z^{-(k-1)}+a_kz^{-k}}.$$

Функция передачи

Применим рассмотренное в главе 3 z-преобразование к уравнению дискретной фильтрации (4.3). Так как это уравнение представляет собой дискретную свертку, то, согласно свойствам z-преобразования (см. формулу (3.23)), результатом будет являться произведение z-преобразований:

$$Y(z) = X(z)\,H(z). \qquad (4.4)$$

Входящая в (4.4) функция $H(z)$, равная отношению z-преобразований выходного и входного сигналов и представляющая собой z-преобразование импульсной характеристики системы, называется *функцией передачи* (transfer function) или *системной функцией* дискретной системы:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)z^{-k}. \qquad (4.5)$$

Применив z-преобразование к обеим частям разностного уравнения (4.2), получим

$$Y(z)(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_nz^{-n})=$$
$$=X(z)(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_mz^{-m}).$$

Отсюда легко получить вид функции передачи:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_nz^{-n}}. \qquad (4.6)$$

Таким образом, функция передачи ***физически реализуемой*** дискретной системы может быть представлена в виде отношения полиномов по отрицательным степеням переменной z.

Частотная характеристика

Чтобы получить комплексный коэффициент передачи (частотную характеристику) дискретной системы, воспользуемся формулой (3.22) (см. раздел «Z-преобразование» главы 3), описывающей связь z-преобразования и преобразования Фурье:

$$\dot{K}(\omega)=H(e^{j\omega T})=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)e^{-j\omega kT}. \qquad (4.7)$$

Из (4.7) видно, что частотная характеристика дискретной системы, так же как и спектры дискретизированных сигналов (см. формулу (3.2) в главе 3), является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д = 2\pi/T$.

Нули и полюсы

Так же как и в аналоговом случае, разложив числитель и знаменатель функции передачи на множители, мы получим функцию передачи в следующем виде:

$$H(z)=k\frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})\ldots(1-z_mz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\ldots(1-p_nz^{-1})}.$$

Здесь $k = b_0$ — *коэффициент усиления* (gain), z_i — нули функции передачи (zero), p_i — полюсы функции передачи (pole). В точках нулей $H(z_i) = 0$, а в точках полюсов $H(p_i) \to \infty$. Некоторая специфика формулы разложения связана лишь с тем, что при записи функции передачи дискретной системы используются отрицательные степени переменной z.

В данном случае дискретная система описывается набором параметров $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k.

Пространство состояний

Сущность представления дискретной системы в пространстве состояний та же, что и в аналоговом случае, — имеется вектор параметров, описывающих внутреннее состояние системы, и две формулы, согласно которым производится изменение этого состояния и формирование выходного сигнала в зависимости от текущего состояния и входного сигнала:

$$\mathbf{s}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{s}(k)+\mathbf{B}x(k),$$
$$y(k)=\mathbf{C}\mathbf{s}(k)+Dx(k).$$

Здесь $\mathbf{s}(k)$ — вектор состояния, $x(k)$ и $y(k)$ — соответственно отсчеты входного и выходного сигналов, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и D — параметры, описывающие систему. Если x и y — скалярные сигналы и размерность вектора состояния равна N, то размерность параметров будет следующей: $\mathbf{A}$ — матрица $N\times N$, $\mathbf{B}$ — столбец $N\times 1$, $\mathbf{C}$ — строка $1\times N$, D — скаляр. Если входной и/или выходной сигналы являются векторными, размерность матриц соответствующим образом изменяется.

8. Чисельні методи для розрахунків за функціональними математичними моделями. Чисельне інтегрування та диференціювання

Символьне інтегрування

Для нахождения неопределенных интегралов в символьном виде используется функция int, имеющая следующий синтаксис:

$$int(f, x),$$

где

- $f(x)$ – подынтегральная функция;
- x – переменная интегрирования.

Пример 1.1.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - (bx)^2}$

Объявляем символьные переменные и находим интеграл

```
>> syms a b x
>> int(1/(a^2-(b*x)^2))

ans =

-1/2/a/b*log(a-b*x)+1/2/a/b*log(a+b*x)
```

Ответ: $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - (bx)^2} = -\frac{1}{2ab}\ln(a - bx) + \frac{1}{2ab}\ln(a + bx)$

1.2 Вычисление определенных интегралов.

Для вычисления определенных интегралов в символьном виде используется функция int, имеющая следующий синтаксис:

$$int(f, x, a, b),$$

где

- $f(x)$ – подынтегральная функция;
- x – переменная интегрирования;
- a – нижний предел интегрирования;
- b – верхний предел интегрирования.

Пример 1.2.1 $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{a^2 + (bx)^2}$

```
>> syms a b x
>> int(1/(a^2+(b*x)^2),a,b)
ans =

-(-atan(b^2/a)+atan(b))/a/b
```

Чисельні методи

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ як площа фігури під функцією f(x)

Формула прямокутників

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \ ,$$

где $y_i = f(\xi_i), \ x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}, \ i = 1, 2, 3, ..., n-1$

Остаточный член формулы прямоугольников:

$$R_n = -\frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{24n^2} \ , \quad a \leqslant \xi \leqslant b$$

Абсолютная погрешность приближенного равенства формулы прямоугольников оценивается следующим образом:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}$$

где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Формула трапецій

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right).$$

Данное выражение носит название формулы трапеций.
Остаточный член формулы трапеций:

$$R_n = -\frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{12n^2} \ , \quad a \leqslant \xi \leqslant b$$

Абсолютная погрешность приближенного равенства формулы трапеций оценивается следующим образом:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2} \ ,$$

где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

На этот раз кривая $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения заменяется дугами парабол. В итоге получается приближенное равенство:

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \ ,$$

где

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Выражение называется формулой Симпсона. Ею пользуются для приближенного вычисления интегралов чаще, чем формулами прямоугольников и трапеций, потому что она дает более точный результат.
Остаточный член формулы Симпсона:

$$R_n = -\frac{(b-a)^5 f^{IV}(\xi)}{180(2n)^4}\ , \quad a \leqslant \xi \leqslant b$$

Абсолютная погрешность приближенного равенства формулы Симпсона оценивается следующим образом:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5 M_4}{180(2n)^4}\ ,$$

где M_4 – наибольшее значение $|f^{IV}(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

<u>Метод трапецій в МАТЛАБ</u>

$$trapz(x, y)$$

где

- x – вектор, содержащий дискретные значения аргументов подынтегральной функции;
- y – вектор,содержащий соответствующие значения подынтегральной функции.

<u>Метод Симпсона в МАТЛАБ: quad, quad8</u>

Функция $quad$ имеет следующий синтаксис:

$$quad(fun, a, b, tol, trace)$$

Обязательными аргументами $quad$ являются:

- fun — указатель на подынтегральную функцию;
- a, b — пределы интегрирования.

Указатель fun может быть задан одним из трех способов:

- именем М-функции, заключенным в одинарные кавычки;
- указателем $@fun$, где fun — имя функции;
- строкой, содержащей формулу.

9. Чисельне вирішення рівнянь математичних моделей. Програмна реалізація

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка в общем случае содержит независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы до n-го порядка включительно и может быть записано в следующем виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Наибольшее распространение имеют задачи Коши, в которых заданы начальные условия (начальное состояние процесса): при $x = x_0$ $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0' \ldots$. Геометрически задача Коши для уравнения первого порядка состоит в том, чтобы из всего множества интегральных кривых, представляющих собой общее решение, выделить ту интегральную кривую, которая проходит через точку с координатами (x_0; y_0).

Дифференциальные уравнения высших порядков решаются в основном сведением к системе уравнений первого порядка путем замены переменных:

$$y_1 = y', \; y_2 = y'' \text{ и т.д.}$$

При этом дифференциальное уравнение n-го порядка заменяется системой из n уравнений:

$$\begin{aligned} &y' = y_1, \\ &y_1' = y_2 \\ &\ldots\ldots \\ &y_{n-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

В системе MATLAB имеются встроенные
функции: ode23, ode45, odell3, odel5s, ode23s, ode23t
и ode23tb. Функции с суффиксом s предназначены для решения так называемых систем жестких дифференциальных
уравнений, а для всех остальных систем дифференциальных
уравнений наиболее употребительной является функция ode45,
реализующая алгоритм Рунге–Кутта 4-5-го порядка.
Функция ode45 имеет следующий синтаксис:
[ ] = odeyt ('45 fname ytspan ,0,,' options).
fname имя функции (М-файл), используемой для представления правой части дифференциального уравнения в виде
function dydt = tfname y),(.
Выводимое выражение dydt должно быть вектором такой же размерности, что и y. Следует отметить, что независимая переменная t должна обязательно быть включена, даже если она отсутствует в явном виде.
tspan 2-элементный вектор, задающий интервал интегрирования ([0 tft]).
y0 вектор начальных условий для зависимой переменной.
options дополнительный параметр, позволяющий управлять деталями процесса интегрирования. С помощью строки параметров options можно управлять, например, значениями допустимой относительной и абсолютной погрешности интегрирования. Этот параметр можно не указывать, если

пользователя устраивают значения погрешностей,
заданных по умолчанию, т.е. относительная погрешность интегрирования 1.0e-3, а абсолютная
(по каждой из переменных состояния) – 1.0e-6. В
противном случае, перед обращением к процедуре ode45 следует указать значения погрешностей
при помощи процедуры odeset.
t значения независимой переменной (вектор-столбец), для которых вычисляются значения зависимой переменной y.
y вычисленные значения зависимой переменной
(массив). Каждый столбец y является отдельной
зависимой переменной