Вектори в просторі. Основні поняття. Лінійні операції з векторами. Прямокутна система координат у просторі.

Розглянемо напрямлений відрізок, де $\boldsymbol{A}$ – початок, $\boldsymbol{B}$ – кінець. Будемо називати його вектором. Вектор позначають малою буквою латинського алфавіту зі стрілочкою над нею: $\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{AB}}$.

Довжина вектора називається його модулем і позначається таким чином:

$$|\bar{\boldsymbol{a}}| = |\overline{\boldsymbol{AB}}|.$$

Вектор, довжина якого дорівнює 0 (тобто початок якого збігається з кінцем), називається нульовим.

Одиничним вектором називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

Вектори, які лежать на паралельних прямих (або на одній і тій самій прямій) називаються колінеарними.

Вектори, які лежать на паралельних площинах (або на одній і тій самій площині), називаються компланарними.

Вектори називаються рівними між собою, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і рівні за модулем.

1. Додавання векторів.

Щоб побудувати суму даних векторів $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки та побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде діагональ, що виходить з початку векторів $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ (рис. 3.1).

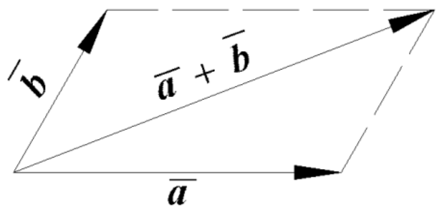


Рис. 3.1

Цей спосіб побудови називається правилом паралелограма.

Суму двох векторів можна побудувати ще й за правилом трикутника.

Відкласти вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ від кінця вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$. Сумою векторів $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ буде вектор, що з'єднує початок $\bar{\boldsymbol{a}}$ з кінцем $\bar{\boldsymbol{b}}$ (рис. 3.2).

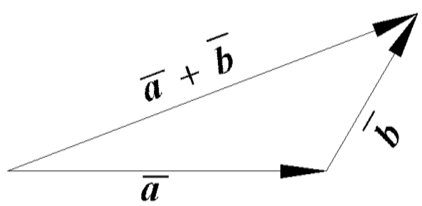


Рис. 3.2

Щоб побудувати суму $\boldsymbol{n}$ даних векторів $\overline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{a}}_2, \ldots, \overline{\boldsymbol{a}}_n$, треба від довільної точки відкласти $\overline{\boldsymbol{a}}_1$, потім від його кінця відкласти $\overline{\boldsymbol{a}}_2$ і т.д., нарешті від кінця $\overline{\boldsymbol{a}}_{n-1}$ відкласти $\overline{\boldsymbol{a}}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\overline{\boldsymbol{a}}_1$ до кінця $\overline{\boldsymbol{a}}_n$ (рис. 3.3).

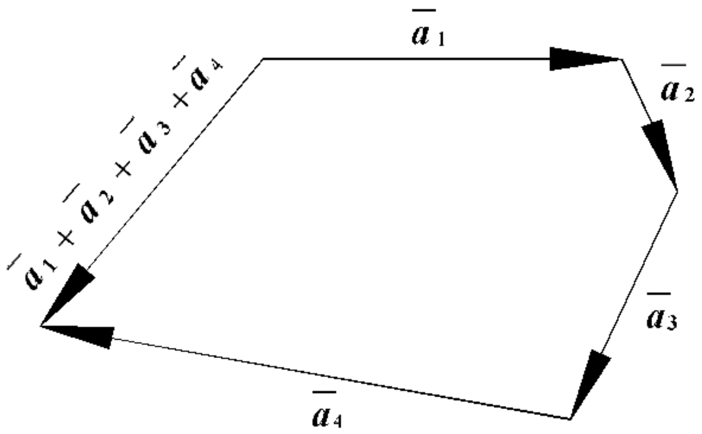


Рис. 3.3

2. Віднімання векоторів.

Щоб побудувати різницю векторів $\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з'єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\overline{\boldsymbol{b}}$ до кінця $\overline{\boldsymbol{a}}$ (рис. 3.4).

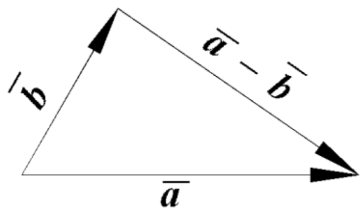


Рис. 3.4

3. Множення вектора на число.

Добутком ненульового вектора $\overline{\boldsymbol{a}}$ на число $\boldsymbol{k}$ називається вектор, який має напрям вектора $\overline{\boldsymbol{a}}$, якщо $\boldsymbol{k} > \boldsymbol{0}$, і протинапрям, якщо $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{0}$ (при $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{0} \cdot \overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{0}}$).

Ці три операції називаються лінійними операціями з векторами.

4. Проекція вектора на вісь.

Проекцією вектора на вісь називається довжина направленого відрізка, початок якого є проекція початку вектора і кінець – проекція його кінця, яка береться із знаком плюс, якщо напрями відрізка і осі збігаються, і зі знаком мінус, якщо їх напрями протилежні (рис.3.5).

$$np_{\bar{l}}\overline{AB}=\left|\overline{A_1B_1}\right|,\ np_{\bar{l}}\overline{CD}=\left|\overline{C_1D_1}\right|.$$

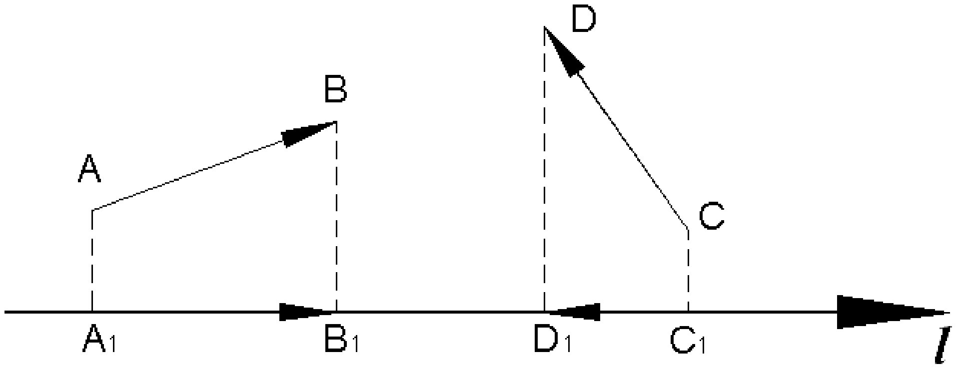


Рис. 3.5

Властивості проекції.

а) $np_{\bar{l}}\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\cos\varphi$;

б) $np_{\bar{l}}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=np_{\bar{l}}\bar{a}+np_{\bar{l}}\bar{b}$;

в) $np_{\bar{l}}\left(k\cdot\bar{a}\right)=k\cdot np_{\bar{l}}\bar{a}$.

5. Прямокутна система координат.

Нехай у просторі задано три попарно перпендикулярні осі **OX, OY, OZ.** Координатами вектора $\bar{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ на осі називаються проекції вектора на ці осі:

$$a_x=np_{ox}\bar{a},\ a_y=np_{oy}\bar{a},\ a_z=np_{oz}\bar{a}.$$

Якщо $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ - одиничні вектори, що напрямлені по ***OX, OY, OZ*, то** $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$.

Якщо $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ то координати вектора $\overline{AB}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$.

6. Правила дій над векторами, заданими своїми координатами.

Якщо $\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, то

$$\bar{a}+\bar{b}=\left(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\right);$$

$$\bar{a}-\bar{b}=\left(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\right);$$

$$k\cdot\bar{a}=\left(k\cdot a_x,k\cdot a_y,k\cdot a_z\right).$$

7. Довжина вектора. Напрямлені косинуси вектора.

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2};\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\bar{a}\right|};\qquad \cos\beta=\frac{a_y}{\left|\bar{a}\right|};\qquad \cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\bar{a}\right|},$$

де α, β, γ - кути між $\bar{a}$ та осями ***OX, OY, OZ.***

Для напрямлених конусів справедливо співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

8. Поділ відрізка в даному відношенні.

Нехай точки ***A, B*** мають координати $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

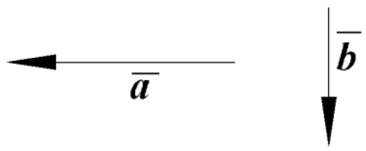
Якщо відрізок ***AB*** поділимо точкою ***M*** у відношенні: $AB : AM = \lambda$, то координати точки ***M*** знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

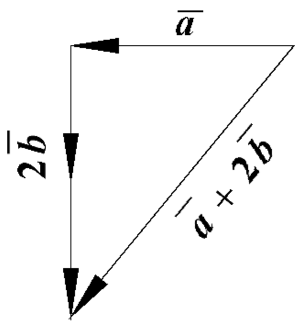
Якщо $\lambda = 1$, то отримуємо формули для знаходження координат середини відрізка.

Зразки розв'язування задач.

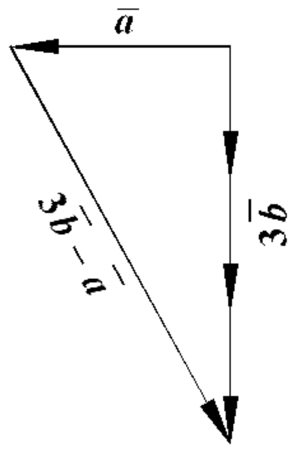
Задача 1. Дано ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Побудувати вектори $\bar{a} + 2\bar{b}$, $3\bar{b} - \bar{a}$.



Розв'язання. Знайдемо суму за правилом трикутника $\bar{a} + 2\bar{b}$:



і різницю $3\bar{b} - \bar{a}$:



Задача 2. Вектори $\overline{AC}=\overline{a}$, $\overline{BD}=\overline{b}$ - діагоналі паралелограма $ABCD$. Запишіть вектори $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ і $\overline{DA}$ через $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Розв'язання.

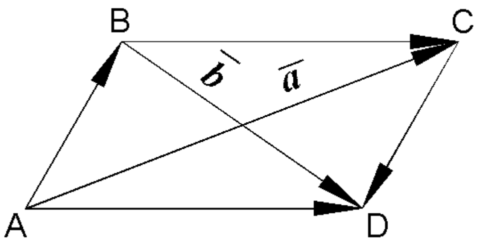
За означенням суми і різниці векторів маємо: $\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{b}$, $\overline{BC}-\overline{CD}=\overline{a}$.

Додавши ці рівності, дістанемо $\overline{BC}=\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$. Далі знайдемо

$\overline{CD}=\overline{b}-\overline{BC}=\overline{b}-\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}=\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{2}$; $\overline{AB}=-\overline{CD}=\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2}$, $\overline{DA}=-\overline{BC}=-\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$.

Задача 3. Дано: $\mathbf{пр}_{\overline{l}}\overline{\mathbf{a}}=\mathbf{3}$; $\mathbf{пр}_{\overline{l}}\overline{\mathbf{b}}=-\mathbf{1}$. Обчислити: 1) $\mathbf{пр}_{\overline{l}}\left(3\overline{\mathbf{a}}+2\overline{\mathbf{b}}\right)$; 2) $\mathbf{пр}_{\overline{l}}\left(\overline{\mathbf{a}}-2\overline{\mathbf{b}}\right)$.

Розв'язання. Використавши властивості проекцій, дістанемо:



1) $np_{\overline{l}}\left(3\overline{a}+2\overline{b}\right)=3np_{\overline{l}}\overline{a}+2np_{\overline{l}}\overline{b}=3\cdot 3+2(-1)=7$.

2) $np_{\overline{l}}\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)=np_{\overline{l}}\overline{a}-2np_{\overline{l}}\overline{b}=3-2(-1)=5$.

Задача 4. Знайти проекції вектора $\overline{a}$ на вісь l, яка утворює з вектором кут: 1) 45^0, 2) 120^0, 3) 150^0, якщо довжина вектора дорівнює 4.

Розв'язання.

1) $np_{\overline{l}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=4\cdot\cos 45^0=4\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$;

2) $np_{\overline{l}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=4\cdot\cos 120^0=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$;

3) $np_{\overline{l}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=4\cdot\cos 150^0=4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}$.

Задача 5. Знайти периметр трикутника, вершинами якого є точки $A(8;0;6)$, $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів, що створюють трикутник, та їх довжини:

$\overline{AB}=(8-8;-4-0;6-6)$, $\overline{AB}=(0;-4;0)$;

$\overline{AC} = (6-8;-2-0;5-6)$, $\overline{AC} = (-2;-2;-1)$;
$\overline{BC} = (6-8;-2-(-4);5-6)$, $\overline{BC} = (-2;2;-1)$;
$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4$;
$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$;
$|\overline{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$.

Тоді периметр трикутника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

Задача 6. Обчислити довжину вектора $3\overline{a} + 2\overline{b}$, якщо $\overline{a} = 2\overline{i}$, $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$3\overline{a} = (3 \cdot 2;3 \cdot 0;3 \cdot 0)$, $3\overline{a} = (6;0;0)$;
$2\overline{b} = (2 \cdot 1;2 \cdot 1;2 \cdot (-1))$, $2\overline{b} = (2;2;-2)$;
$3\overline{a} + 2\overline{b} = (6+2;0+2;0-2)$, $3\overline{a} + 2\overline{b} = (8;2;-2)$.

Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:

$$|3\overline{a} + 2\overline{b}| = \sqrt{(8)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Задача 7. Відрізок AB, де $A(7;2;-3)$, . $B(-5;0;4)$, поділений точкою M у відношенні $\lambda = AB : AM = 1:5$. Знайти координати точки M.

Розв'язання.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{7 + \frac{1}{5}(-5)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)} = 5;\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{5} \cdot 0}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\left(\frac{6}{5}\right)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3};$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{5} \cdot 4}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\left(-\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)} = -\frac{11}{6}.$$

Отже $M\left(5;\frac{5}{3};-\frac{11}{6}\right)$.

Задача 8. Відрізок з кінцями $A(-2;4;0)$ і $B(6;12;-4)$, ділиться в точці M навпіл. Знайдіть довжину відрізка MK, де $K(0;10;6)$.

Розв'язання.

Знайдемо координати точки M за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2;\; y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+12}{2} = 8;\; z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{0-4}{2} = -2;$$

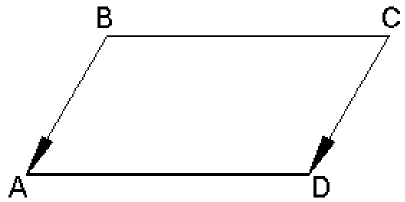
$M(2;8;-2)$.

Тоді координати вектора $\overline{MK} = (0-2;10-8;6-(-2))$, $\overline{MK} = (2;2;8)$.

Довжина вектора $\left|\overline{MK}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Задача 9. Точки $A(-3;1;2)$, $B(1;3;2)$, $C(-4;1;0)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D.

Розв'язання.



Позначимо координати точки $D(x;y;z)$, тоді $\overline{CD} = (x+4; y-1; z+0)$, $\overline{BA} = (-4;-2;0)$. Оскільки $\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{BA}\right|$, їх координати рівні:

$x+4 = -4$; $\quad y-1 = -2$; $\quad z = 0$;

$x = -8$; $\quad y = -1$; $\quad z = 0$.

Четверта вершина паралелограма – точка $D(-8;-1;0)$.

Задача 10. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{a}$, а також кути, що утворює вектор з осями координат, якщо $\overline{a} = \overline{i} - \overline{k}$.

Розв'язання.

Знайдемо координати вектора $\overline{a} = (1;0;-1)$ та його довжину $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{0}{2} = 0;\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$; $\gamma = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

4. Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів. Застосування в задачах геометрії. Умови перпендикулярності та компланарності векторів.

1. **Скалярним добутком векторів** називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right)$$

Якщо вектори задані своїми координатами: $\bar{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\bar{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то скалярний добуток обчислюють за формулою:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos\left(\bar{a}\ \hat{,}\ \bar{b}\right) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має вигляд:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює:

$$\bar{a}^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos(0) = |\bar{a}|^2.$$

Проекція вектора $\bar{a}$ на напрям вектора $\bar{b}$:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

2. **Векторним добутком двох векторів** $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається третій вектор $\bar{c}$, який задовольняє умові:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\left(\bar{a} \,\hat{,}\, \bar{b}\right)$;

2) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто третій вектор має такий

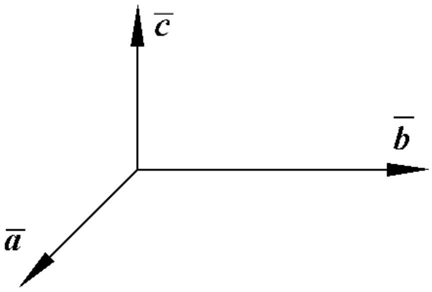


Рис. 4.1

напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\bar{a}$ до $\bar{b}$ виконується проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначається символом $\bar{a} \times \bar{b}$. За визначенням випливає, що $\bar{a} \times \bar{b} = -\left(\bar{b} \times \bar{a}\right)$.

Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$S_{пар} = |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{тр} = \frac{1}{2} S_{пар} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Векторній добуток векторів, які задані своїми координатами, обчислюються за формулою:

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Умова колінеарності двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ має вигляд:

$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (або $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$).

Векторні добутки ортів дорівнюють:

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$; $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$; $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$;
$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{0}$; $\bar{j} \times \bar{j} = \bar{0}$; $\bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

3. **Мішаним добутком трьох векторів** називається добуток $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Частіше мішаний добуток позначається $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Об'єм паралелепіпеду, який побудований на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ як на сторонах, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

$$V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

Для об'єму піраміди маємо наступну формулу:

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

Умова компланарності трьох векторів має вигляд: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

Зразки розв'язування задач.

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = 4\bar{k} - \bar{i}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + \bar{i} - \bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів: $\bar{a}(-1;\ 0;\ 4)$, $\bar{b}(1;\ 3;\ -1)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5$.

Задача 2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудований на векторах $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{j} - \bar{i} - \overline{4k}$.

Розв'язання. Як відомо, діагоналі паралелограма є $\bar{c} = (\bar{a} + \bar{b})$ та $\bar{d} = (\bar{a} - \bar{b})$. Знайдемо ці вектори:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) + (3\bar{j} - \bar{i} - 4\bar{k}) = 5\bar{j} - 5\bar{k};$$
$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (0;\ 5;\ -5);$$
$$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) - (3\bar{j} - \bar{i} - 4\bar{k}) = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k};$$
$$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = (2;\ -1;\ 3).$$

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться за формулою:

$$\cos\left(\overline{c}\ \hat{,}\ \overline{d}\right)=\frac{\overline{c}\cdot\overline{d}}{\left|\overline{c}\right|\cdot\left|\overline{d}\right|}=\frac{0\cdot 2+5\cdot(-1)+(-5)\cdot 3}{\sqrt{5^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{-5-15}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{14}}=\frac{-20}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot 7}}=$$

$$=-\frac{20}{10\sqrt{7}}=-\frac{2}{\sqrt{7}}=-\frac{2\sqrt{7}}{7};$$

$$\mathbf{\cos\left(\overline{c}\ \hat{,}\ \overline{d}\right)=\arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)}.$$

Задача 3. Задано вектори $\overline{a}=12\overline{i}-3\overline{j}-3\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{c}=\overline{i}-3\overline{j}-2\overline{k}$. Обчислити проекцію вектора $\overline{b}+\overline{c}$ на вектор $\overline{a}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{b}+\overline{c}=(1+1;\ 2-3;\ 4-2)$; $\overline{b}+\overline{c}=(2;\ -1;\ 2)$ та $\overline{c}=(12;\ -3;\ -3)$.

Обчислимо проекцію $(\overline{b}+\overline{c})$ на вектор $\overline{a}$ за формулою:

$$np_{\overline{a}}(\overline{b}+\overline{c})=\frac{(\overline{b}+\overline{c})\cdot\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{2\cdot 12+(-1)\cdot(-3)+2(-3)}{\sqrt{12^2+(-3)^2+(-3)^2}}=\frac{24+3-6}{\sqrt{144+9+9}}=\frac{21}{\sqrt{162}}=\frac{21}{9\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

Задача 4. Дано трикутник своїми вершинами: $A(2;\ 4;\ 5)$, $B(-3;\ 2;\ 2)$, $C(-1;\ 0;\ 3)$. Покажіть, що $\overline{CA}\perp\overline{CB}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$\overline{CA}=(2-(-1);\ 4-0;\ 5-3)$; $\overline{CA}=(3;\ 4;\ 2)$;
$\overline{CB}=(-3-(-1);\ 2-0;\ 2-3)$; $\overline{CB}=(-2;\ 2;\ -1)$.

Умова перпендикулярності двох векторів має вигляд: $\overline{CA}\cdot\overline{CB}=0$. Перевіримо виконання цієї умови: $\overline{CA}\cdot\overline{CB}=3\cdot(-2)+4\cdot 2+2\cdot(-1)=-6+8-2=0$.

Доведено, що вектори перпендикулярні.

Задача 5. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$.

Розв'язання. Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \cdot (2-1) - j \cdot (2+2) + \bar{k} \cdot (-1-2) = \bar{i} - 4\bar{j} - 3\bar{k}.$$

Площа паралелограма дорівнює:

$$\boldsymbol{S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}(\textit{кв. од.})}.$$

Задача 6. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $\boldsymbol{A(1;\ -2;\ 8)}$, $\boldsymbol{B(0;\ 0;\ 4)}$, $\boldsymbol{C(6;\ 2;\ 0)}$.

Розв'язання. Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\boldsymbol{\overline{AB}\ \perp\ \overline{AC}}$.

$\boldsymbol{\overline{AB} = (-1;\ 2;\ -4)}$, $\boldsymbol{\overline{AC} = (5;\ 4;\ -8)}$.

Векторний добуток дорівнює:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \cdot (-16+16) - j \cdot (8+20) + \bar{k} \cdot (-4-10) = -28\bar{j} - 14\bar{k}.$$

Тоді площа трикутника дорівнює:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 \cdot 14^2} = 7\sqrt{5}(\textit{кв. од.})}.$$

Задача 7. Розкрити дужки та спростити вираз:

$$\boldsymbol{(2\bar{k} \times \bar{j}) \cdot (3\bar{i} - \bar{k}) + (\bar{i} \times 2\bar{j}) \cdot (\bar{j} - 3\bar{k})}.$$

Розв'язання.

$$(2\bar{k} \times \bar{j}) \cdot (3\bar{i} - \bar{k}) + (\bar{i} \times 2\bar{j}) \cdot (\bar{j} - 3\bar{k}) = (-2\bar{i}) \cdot (3\bar{i} - \bar{k}) + 2\bar{k} \cdot (\bar{j} - 3\bar{k}) =$$

$$= -6\bar{i}^2 + 2\bar{i} \cdot \bar{k} + 2\bar{k} \cdot \bar{j} - 6\bar{k}^2 = -6 - 6 = -12.$$

Задача 8. При яких значеннях $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ вектори $\boldsymbol{\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}}$, $\boldsymbol{\bar{b} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + \beta\bar{k}}$ колінеарні?

Розв'язання. Умова колінеарності двох векторів має вигляд:

$$\boldsymbol{\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}}; \qquad \boldsymbol{\frac{\alpha}{2} = \frac{-3}{4} = \frac{1}{\beta}}.$$

Звідки

$$\alpha = \frac{2\cdot(-3)}{4} = -\frac{3}{2}; \ \beta = \frac{4\cdot 1}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

Задача 9. Обчислити об'єм паралелепіпеду і піраміди, які побудовані на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{k} - 3\bar{j}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Розв'язання. Об'єм паралелепіпеду дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-15-2) = -51.$$

Тоді об'єми паралелепіпеду і піраміди дорівнюють:

$$V_{пар} = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = \left|-51\right| = 51(куб.\ од.);$$

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = \frac{1}{6}V_{пар} = \frac{51}{6} = \frac{17}{2} = 8{,}5(куб.\ од.).$$