Динамічні характеристики пружних систем з двома і більше ступенями вільності

Основні динамічні характеристики пружних систем з кількома ступенями вільності (усталеність, власні частоти коливань) визначаються на основі вирішення диференціальних рівнянь руху та аналізу АФЧХ цих систем.

Для коливальної системи з двома ступенями вільності, показаної на рис. 6.1. рівняння руху мас 1 та 2 матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1'' + c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2x_2'' + c_2(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

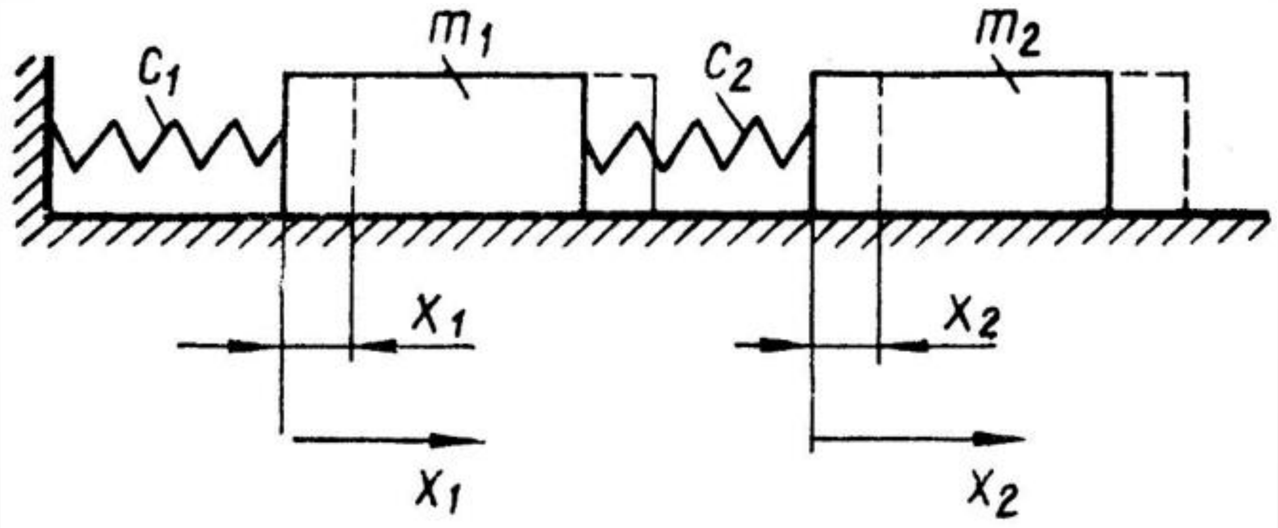


Рис. 6.1. Двомассова пружна система без демпфування

Шукаючи рішення системи рівнянь у вигляді

$x_1 = A_1 \sin(\omega t+\varphi)$; $x_2 = A_2 \sin(\omega t+\varphi)$

можна отримати формулу для визначення власних частот коливань пружної системи:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c_1 + c_2}{2m_1} + \frac{c_2}{2m_2} \mp \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{2m_1} + \frac{c_2}{2m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}. \qquad (6.2)$$

Додатні значення коренів рівняння (6.2) ω_1 та ω_2 є власними частотами системи.

Важливе значення в конструюванні машин є прикладний розгляд умов їх роботи на підставі аналізу математичних моделей.
Приєднання до різального елемента (інструмента) спеціального пристрою (динамічного гасителя коливань), створить систему (рис. 6.2, б) з двома ступенями вільності.

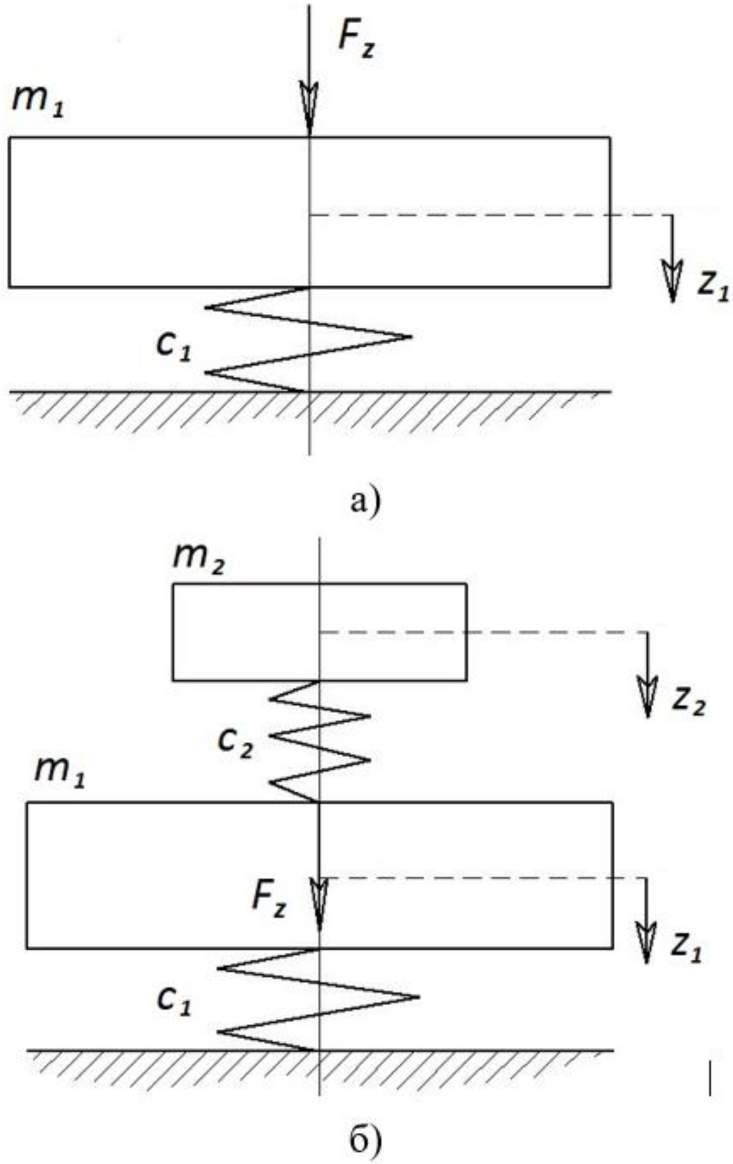


Рис. 6.2. Схема коливань одномасової системи з одним ступенем вільності, який знаходиться під дією періодичної збуджуючої сили F_z без динамічного гасителя коливань (а) та двохмасової з динамічним гасителем коливань (б).

Якщо ця нова система знаходиться під дією періодичної збуджуючої сили $F_z = F_1 sin\ (\omega t + \varphi)$, прикладеного до різального елемента, тоді диференціальні рівняння опису цієї коливальної системи матимуть вигляд:

$$m_1\ddot{z}_1 - b_1\dot{z}_1 + (c_1 + c_2)z_1 - c_2z_2 = F_z\,sin(\,\omega t + \phi) \qquad (6.4)$$
$$m_2\ddot{z}_2 - b_2\dot{z}_2 + c_2z_2 - c_2z_1 = 0$$

де m_i, b_i, c_i – інерційний, дисипативний та деформативний коефіцієнти відповідно, що відповідають параметрам різця (1) та динамічного гасителя (2).

Якщо не враховувати процес дисипації в двомасовій системі (складові $b_1\dot{z}_1$та $b_2\dot{z}_2$), її кінетична *T* та потенціальна *П* енергії визначатимуться за формулами:

$$T = \frac{m_1\dot{z}_1^2 + m_2\dot{z}_2^2}{2},$$
$$П = \frac{((c_1 + c_2)z_1^2 - 2c_2z_1z_2 + c_2z_2^2)}{2} \qquad (6.5)$$

Амплітуди вимушених коливань системи матимуть вигляд:

$$A_1 = \frac{F_1(c_{22} - a_{22}\omega^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2}$$

$$A_2 = \frac{F_1(c_{12} - a_{12}\omega^2)}{(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2} \qquad (6.6)$$

де $a_{11}=m_1$; $a_{12}=0$; $a_{22}=m_2$; $c_{11}=c_1+c_2$; $c_{12}=-c_2$; $c_{22}=c_2$.

Гасіння коливань забезпечується за умови:

$$\omega^2 = \frac{c_2}{m_2} \rightarrow \quad z_1 = 0; \quad z_2 = -\frac{F_z \sin(\omega\ t + \varphi)}{c_2}. \qquad (6.7)$$

Тоді

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = \frac{F_1}{c_{12} - a_{12}\omega^2} \qquad (6.8)$$

Тобто вимушені коливання, які відповідають першій узагальненій координаті (різальному елементу) повністю поглинаються.

Багатомасова система

У загальному випадку, коли кінетична *E* і потенціальна *П* енергії системи з багатьма ступенями вільності визначаються виразами

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i' q_j' \quad \text{та} \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i q_j$$

рівняння вільних коливань системи, отримані з рівняння Лагранжа, матимуть вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{1n}\ddot{q}_n + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \ldots + c_{1n}q_n = 0; \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{2n}\ddot{q}_n + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \ldots + c_{2n}q_n = 0; \\ \cdot\;\cdot \\ a_{n1}\ddot{q}_1 + a_{n2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{nn}\ddot{q}_n + c_{n1}q_1 + c_{n2}q_2 + \ldots + c_{nn}q_n = 0. \end{array}\right\} \quad (6.9)$$

де a_{ij} – коефіцієнти інерції, c_{ij} – коефіцієнти жорсткості, q_n – узагальнена координата (перший індекс коефіцієнтів інерції та жорсткості відповідає номеру рівняння, а другий – номеру узагальненої координати).

Система (6.9) може бути представлена в матричній формі:

$$\| a_{ij} \| \{\ddot{q}_i\} + \| c_{ij} \| \{q_i\} = 0, \quad (6.10)$$

де $||a_{ij}||$, $||c_{ij}||$ – квадратні матриці коефіцієнтів інерції та жорсткості; $\{q_i\}$, $\{q_i''\}$ – вектори-стовпці узагальнених координат та прискорень.

Для випадку вимушених коливань системи з багатьма ступенями вільності змінюється тільки права частина рівнянь системи (6.9) або (6.10) – додається узагальнені змушуючі сили Q_i або вектор-стовпець *{Q}:*

$$\left.\begin{array}{l} m_1\ddot{q}_1 + h_1\dot{q}_1 + c_1 q_1 = K_1 Q; \\ m_2\ddot{q}_2 + h_2\dot{q}_2 + c_2 q_2 = K_2 Q; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n\ddot{q}_n + h_n\dot{q}_n + c_n q_n = K_n Q, \end{array}\right\} \tag{6.11}$$

$$\| a_{ij} \| \{\ddot{q}_i\} + \| h_{ij} \| \{\dot{q}_i\} + \| c_{ij} \| \{q_i\} = \{Q\}, \tag{6.12}$$

де Q_i – вхідний вплив на систему (зовнішня сила), K_i – коефіцієнт приведення зовнішньої сили до нормальної координати.

Вихідну координату системи отримують алгебраїчним підсумуванням переміщень по окремих нормальних координатах:

$$q_{\text{вих}} = q_1 + q_2 + \dots + q_n \tag{6.13}$$

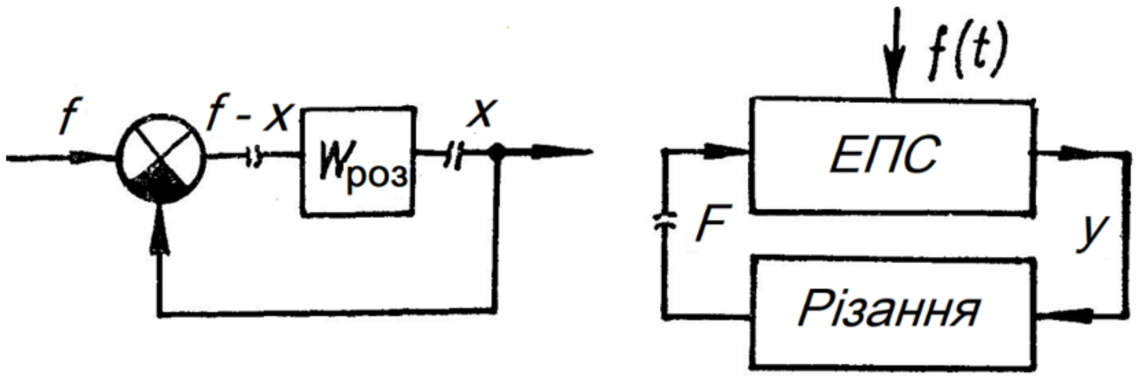
Цю систему можна розглядати як таку, що має паралельне з'єднання елементів-ланок.

Передаточна функція замкнутої динамічної системи може визначатися передатною функцією розімкнутої системи. Якщо вплив з виходу на вхід системи передається зі зворотним знаком, то після розмикання зв'язків передавальна функція розімкнутої системи має вираз (рис. 6.3, а):

$$W_{роз}(p) = \frac{x(p)}{f(p) - x(p)} \qquad (6.14)$$

Тому передатна функція замкнутої системи:

$$W_{зам}(p) = \frac{x(p)}{f(p)} = \frac{W_{роз}(p)}{1 + W_{роз}(p)} \qquad (6.15)$$



а) б)

Рис. 6.2. Схеми до визначення $W_{роз}$.