***<u>Стійкість рівноваги механічної системи у консервативному силовому полі</u>***

## 1. Малі коливання системи біля положення сталої рівноваги

**При вивченні малих коливань механічних систем важливо знати критерій стійкості рівноваги цих систем.**

**Для систем з голономними** (<u>механічний зв'язок, що накладає обмеження лише на положення або переміщення точок і тіл системи</u>) і стаціонарними (<u>незалежними від часу, в часі</u>) **зв'язками, що знаходиться в консервативному силовому полі** (коли значення сили, що діють на тіло залежать тільки від координати положення даного тіла), **цей критерій встановлюється спеціальними теоремами про потенційну енергію системи**.

### Потенційна енергія системи з кінечним числом ступенів вільності

Потенційна енергія П системи з s ступенями свободи є функцією узагальнених координат цієї системи:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_{12}, \dots, q_s) \qquad (3.1)$$

## ***Стійкість рівноваги механічної системи у консервативному силовому полі***

**Розкладаючи вираз потенційної енергії П в ряд Маклорена** (більшість математичних функцій можуть бути з будь-якою точністю представлені в околицях деякої точки у вигляді степеневих рядів, що містять ступені змінної в порядку зростання)
за ступенями узагальнених координат, маємо:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_{12}, \dots, q_s) = \Pi(0) + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{d\Pi}{dq_j}\right)_0 q_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{d^2\Pi}{dq_i dq_j}\right)_0 q_i q_j + \dots \qquad (3.2)$$

Потенційну енергію системи в положенні рівноваги можна прийняти рівною нулю:

$$\Pi\,(0) = \Pi\,(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

У разі консервативних сил узагальнена сила визначається формулою

$$Q_j = -\frac{d\Pi}{dq_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Так як у випадку рівноваги консервативної системи сил

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (3.1^*)$$

## ***Стійкість рівноваги механічної системи у консервативному силовому полі***

Умови рівноваги консервативної системи сил мають вигляд:

$$\left(\frac{d\Pi}{dq_j}\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \ast,$$

а тоді

$$\sum_{j=1}^{s} (\frac{d\Pi}{dq_j})_0 q_j = 0$$

Якщо знехтувати в рівності (3.2) усіма членами порядки вище другого, отримуємо:

$$\Pi(q_1, q_{12}, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} (\frac{d^2\Pi}{dq_i dq_j})_0 q_i q_j . \qquad (3.3)$$

***<u>Стійкість рівноваги механічної системи у консервативному силовому полі</u>***

Якщо позначити

$$\left(\frac{d^2\Pi}{dq_i dq_j}\right)_0 = c_{ij} = c_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s).$$

Наближений вираз для потенційної енергії остаточно отримує такий вигляд:

$$\Pi(q_1, q_{12}, \dots, q_s) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{s} c_{ij\,0} q_i q_j . \qquad (3.4)$$

Вираз (3.4) показує, що потенційна енергія системи є однорідною квадратичною функцією узагальнених координат, а постійні $c_{ij}$ називають коефіцієнтами жорсткості.

## 2. Теорема Лагранжа-Дирихле про стійкість рівноваги консервативної системи

Рівняння рівноваги для консервативної системи мають вигляд (3.5):

$$\left(\frac{d\Pi}{dq_j}\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \tag{3.5}$$

З цього рівняння випливає, що **положеннями рівноваги системи для випадку консервативних/потенційних сил** (інакше потенційні сили – сили, робота яких не залежить від виду траєкторії, точки прикладання цих сил і закону їх руху, і визначається тільки початковим і кінцевим положенням цієї точки) **є положення, при яких потенційна енергія даної системи приймає екстремальне значення.**

Проте рівняння рівноваги (3.5) не встановлює, є ці положення рівноваги системи стійкими чи нестійкими.

Відповідно, умова стійкості положення рівноваги системи з кінцевою кількістю ступенів вільності встановлюється **теоремою Лагранжа-Дирихле: рівноважні положення консервативної системи, в яких її потенційна енергія досягає мінімуму, стійкі.**

Рівноважне положення консервативної системи є стійким, якщо ця система, рівновага якої порушена малим початковим відхиленням $q_{j0}$ з малою початковою швидкістю $q'_{j0}$, виконує малі коливання відносно рівноважного положення. Тобто рівноважне положення консервативної системи є стійким, якщо при початкових відхиленнях

$$|q_{j0}| < \rho ,$$

де ρ – як завгодно мале число,

можна знайти $\dot{q}_{j0}$ при яких виконується умова: $|q_{j0}| \leq \rho$

## 3. Стійкість рівноваги консервативної системи з одним ступенем вільності

Згідно теореми Лагранжа-Діріхле для визначення стійкості положення рівноваги системи з одним ступенем вільності необхідно визначити (для заданого положення системи) чи має потенційна енергія системи в цьому положенні мінімум:

Умовою мінімуму є: $(\frac{d^2\Pi}{dq^2})_{q=q_0} > 0$

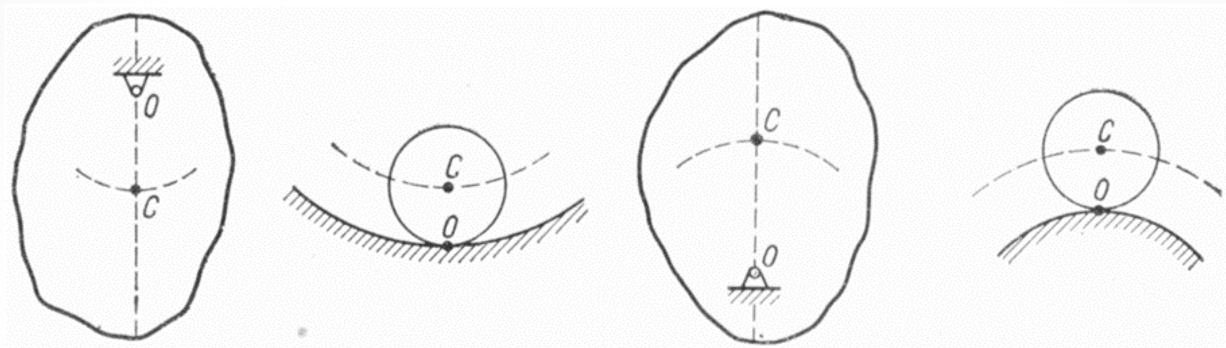
Якщо ж $(\frac{d^2\Pi}{dq^2})_{q=q_0} = 0$ , тоді друга похідна не може бути критерієм мінімуму потенційної енергії ( якщо більше нуля – це максимум і положення рівноваги нестійке).

В цьому випадку необхідно обчислити послідовні похідні: $(\frac{d^k\Pi}{dq^k})_{q=q_0}$

Тоді, якщо перша похідна не рівна нулю, матиме парний порядок і буде додатна, тоді в точці $q_0 = q$ потенційна енергія системи матиме мінімум (положення системи стійке).

Якщо перша похідна не рівна нулю, матиме непарний порядок, тоді в точці $q_0 = q$ потенційна енергія системи не матиме ні мінімуму ні максимуму.

## ***Стійкість рівноваги механічної системи у консервативному силовому полі***




а) б)

Рис. 3.1. Стійка та нестійка рівновага тіла

## 4. Рівняння Лагранжа другого роду. Кінетична енергія системи. Функція розсіювання

Положення голономної системи, що має $s$ ступенів свободи, в будь-який момент часу визначається $s$ узагальненими координатами $q_j$ $(j=1,2,\ldots,s)$.

Можна вважати, що в положенні рівноваги узагальнені координати дорівнюють нулю: $q_{j0} = 0$

У разі вільних коливань на матеріальні точки системи діють сили відновлення $P_i$ (сили пружності) і сили опору $R_i$ (розсіювання енергії коливань).

Рівняння Лагранжа другого роду для системи з $s$ ступенями свободи в цьому випадку приймають вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_j}\right) - \frac{dT}{dq_j} = F_{jP} + F_{jR} \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \qquad (3.6)$$

де $F_{jP}$ – узагальнена сила, відповідна відновлюючим силам $P_j$;

$F_{jR}$ – узагальнення сила, відповідна силам опору $R_j$.

***Стійкість рівноваги механічної системи у консервативному силовому полі***

Відомо, що узагальнену силу, відповідну відновлюючим силам, що мають потенціал, визначають за формулою:

$$F_{jP} = -\frac{d\Pi}{dq_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \qquad (3.7)$$

Для складання рівнянь Лагранжа другого роду необхідно мати насамперед вирази кінетичної енергії малих коливань системи Т і потенційної енергії цієї системи П.

Для голономної механічної системи із стаціонарними зв'язками, що має $s$ ступенів свободи, радіус-вектор будь-якої точки системи, є функцією $s$ узагальнених координат цієї системи, а вираз для кінетичної енергії цієї системи у загальному вигляді:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \mathrm{a}_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j . \qquad [T = mv^2/2] \qquad (3.8)$$

де $\mathrm{a}_{ij}$ – називаються коефіцієнтами інерції.

## ***Стійкість рівноваги механічної системи у консервативному силовому полі***

Використавши рівняння Лагранжа II роду (3.6) та (3.7) для напису диференціальних рівнянь руху системи, отримаємо (для випадку, коли сили опору дорівнюють нулю: $F_{jR} = 0$ ):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_j}\right) - \frac{dT}{dq_j} = - - \frac{d\Pi}{dq_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \qquad (3.9)$$

Якщо в це рівняння ввести складник, що враховує сили опору (розсіювання енергії), які залежать від швидкості – функцію розсіювання, або дисипативну функцію, як однорідну квадратичну функцію узагальнених швидкостей (функцію Релея):

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \qquad [\Phi = hv^2/2] \qquad (3.10)$$

де $b_{ij}$ – постійні коефіцієнти, названі коефіцієнтами дисипації.

***<u>Стійкість рівноваги механічної системи у консервативному силовому полі</u>***

Тоді кінцево отримуємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_j}\right)- \frac{dT}{dq_j} = - \frac{d\Pi}{dq_j} - \frac{d\Phi}{d\dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \qquad (3.11)$$

З останнього рівняння випливає суть дисипативної функції Релея:

$$\frac{d(\mathrm{T}+\Pi)}{dt} = -2\Phi. \qquad (3.11)$$

Величина 2Ф характеризує зменшення (розсіювання) енергії системи (Т+П) в одиницю часу.