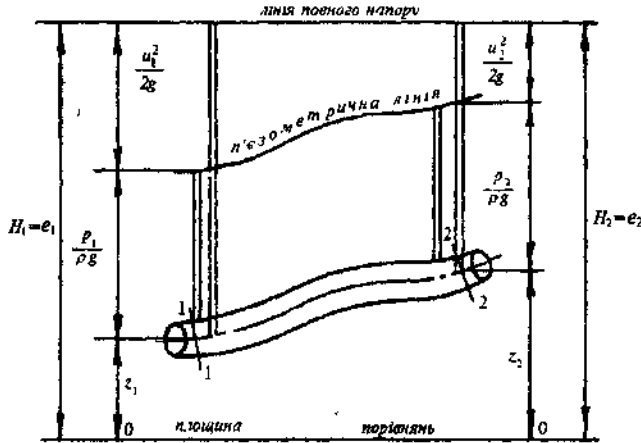


## ГЕОМЕТРИЧНА ТА ФІЗИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РІВНЯННЯ Д.БЕРНУЛЛІ

**Геометрична інтерпретація.** Розглянемо два перерізи ел. струминки 1-1 та 2-2. Виберемо довільну горизонтальну площину порівняння О-О і позначимо відстані від центрів перерізів  $z_1$  та  $z_2$  відповідно. Величини  $z_1$  та  $z_2$  є вертикальними координатами центрів ваги вибраних перерізів струминки, мають лінійну розмірність



і називаються геометричними напорами в перерізах.

Величини  $p/\rho g$  і  $u^2/2g$ , також мають лінійні розмірності і називаються п'єзометричним та швидкісним (динамічним) напорами відповідно.

З геометричної точки зору сума геом., п'єзометр. і швидк. напорів для ел. стр. ід. рідини є величина постійна.

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H = \text{const},$$

де  $H$  - повний гідродинамічний напір.

Лінії, які проведені через верхні точки відрізків: п'єзометричних напорів, називають *п'єзометричною лінією*, швидкісних напорів - *лінією повного напору* (вона паралельна площині порівняння (рис.)).

**Фізична інтерпретація.** Введемо поняття *питомої енергії рідини*  $e_n$  - долі всієї потенціальної енергії сили тяжіння рідини масою  $\Delta m$ , яка знаходиться на висоті геометричного напору  $z$   $\Delta E_{\text{пот}} = \Delta mgz$ . що приходить на одиницю сили тяжіння  $\Delta mg$ :

$$e_n = \frac{E_{\text{пот}}}{G} = \frac{\Delta mgz}{\Delta mg} = z.$$

Питома потенціальна енергія тиску маси рідини  $\Delta m$ , яка піднята під дією п'єзометричного напору на п'єзометричну висоту  $p/\rho g$ :

$$e_{\text{п тиску}} = \frac{\Delta mg \cdot p / \rho g}{\Delta mg} = \frac{p}{\rho g}.$$

Кінетична енергія маси рідини  $\Delta m$ , що рухається з швидкістю  $u$

$$E_k = \frac{\Delta m u^2}{2} = \frac{\Delta m g u^2}{2g}$$

а питома кінетична енергія  $e_k$ :

$$e_k = \frac{E_k}{G} = \frac{\Delta m g u^2}{2g \Delta m g} = \frac{u^2}{2g}$$

Суму трьох питомих енергій частинок рідини: питомої потенціальної енергії положення, питомої потенціальної енергії тиску та питомої кінетичної енергії називають **повною питомою енергією  $e$** :

$$e = e_n + e_{n\text{ тис}} + e_k = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const.}$$

Для даної елементарної струминки Ідеальної рідини вона є величина постійна уздовж струминки.

При русі рідини один вид енергії переходить в Інший, але повна питома енергія в струминці - величина постійна .

Рівняння Бернуллі виражає закон збереження енергії для струминки ідеальної рідини.

### Рівняння Д.Бернуллі для елементарної струминки реальної (в'язкої) рідини

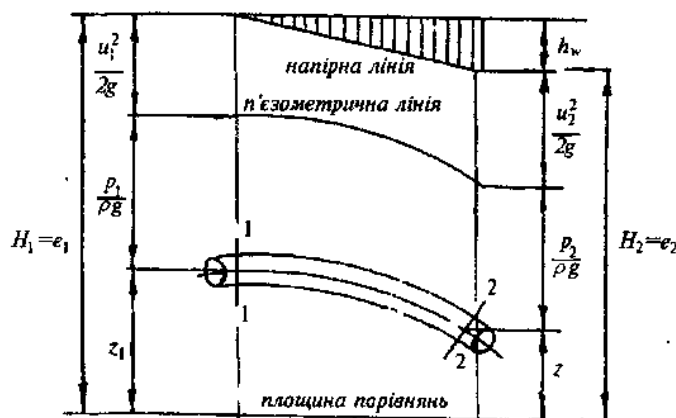
При практичних розрахунках необхідно враховувати тертя між шарами рідини і тертя між рідиною та обмежуючими її стінками. і вносити корективи в залежності, отримані для ідеальної рідини.

Розглянемо елементарну струминку реальної рідини (рис. ). Повна питома енергія в перерізі 1-1 буде:

$$e_1 = H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g}.$$

В перерізі 2-2 питома енергія буде менша, ніж в перерізі 1-1 через втрати енергії на подолання сил тертя на шляху між перерізами.

$$e_1 = H_1 > H_2 = e_2.$$



Позначимо втрату питомої енергії між перерізами  $h_w$ :

$$H_1 = H_2 + h_w \text{ або } e_1 = e_2 + h_w.$$

Тоді

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_w.$$

Це є рівняння Д.Бернуллі для елементарної струминки реальної рідини.

Рівняння представляють графічно сумою відрізків геометричного, п'єзометричного та швидкісного напорів, величина якої зменшується вздовж елементарної струминки.

З фізичної точки зору величина  $h_w$  є витратою питомої енергії, яка перетворюється в теплову і розсіюється.

### **Рівняння Д.Бернуллі для потоку реальної рідини**

Розглядаємо струминну модель потоку в'язкої рідини. Враховуємо нерівномірність швидкостей по живому перерізу потоку і втрати енергії на подолання сил тертя при русі рідини.

Кінетичну енергію частинок потоку рідини з врахуванням їх фактичних місцевих швидкостей  $u$  позначимо  $E^u_k$ . Відомо, що визначення місцевих швидкостей по перерізу каналу вимагає великих затрат часу. Простіше визначаються середні швидкості руху частинок по каналу. Енергію, яка визначається по середнім швидкостям, позначимо  $E^v_k$ . Дослідження показали, що  $E^u_k > E^v_k$  і їх співвідношення Гюстав Коріоліс позначив  $\alpha = E^u_k / E^v_k > 1$ . Він установив, що чим більша середня швидкість, тим більше  $\alpha$  наближається до одиниці. При наближених розрахунках приймають  $\alpha=1$ , при турбулентному русі  $\alpha=1,05 \dots 1,10$ , при ламінарному русі  $\alpha=2$ .

З врахуванням вказаних особливостей рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини матиме вигляд:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w.$$

Це рівняння є одним з основних рівнянь гідродинаміки.

Очевидно, що і в випадку потоку реальної рідини повний напір (питома енергія) (сума геометричного, п'єзометричного і швидкісного напорів або відповідних питомих енергій) зменшується вздовж потоку на величину втрат напору (питомої енергії) на подолання сил тертя.