

## ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ ТА ДИНАМІКИ

### Задачі кінематики та динаміки. Основні поняття і визначення

В **кінематиці та динаміці** розглядаються закони руху нестисливої (краплинної) рідини. Основна задача - визначення характеру руху рідини і параметрів цього руху: швидкості, тисків у будь-якій точці зайнятого простору, сил впливу рухомої рідини на поверхні каналів та тіла, що знаходяться в ній, а також на нерухомі і рухомі перешкоди.

Точка простору — це геометричний образ, що не має розмірів; положення точки в просторі визначається координатами  $x, y, z$ .

Частинка рідини — це фізичний образ; частинка має нескінченно малу масу і займає нескінченно малий об'єм.

Швидкість  $v$  руху частки рідини, а також тиск  $p$  у ній у кожен момент часу визначаються положенням її в потоці, тобто координатами  $x, y, z$  і часом  $t$ .

Рух рідини може бути сталим і несталим, рівномірним і нерівномірним, напірним і безнапірним.

Усталений рух — це рух, при якому швидкість потоку і тиск у будь-якій його точці не змінюються в часі, а залежать тільки від положення в потоці, тобто є функціями координат:

$$v = f_1(x, y, z); \quad p = f_2(x, y, z).$$

(приклад - витікання рідини з отвору резервуара з постійним напором (рівнем)).

При неусталеному русі швидкість і тиск у кожній точці потоку змінюються в часі, тобто залежать не тільки від координат, але і від часу:

$$v = f_1(x, y, z, t); \quad p = f_2(x, y, z, t).$$

(витікання рідини з отвору в резервуарі при змінному напорі (рівні)).

Рівномірним рухом називають усталений рух рідини, при якому швидкості частинок у схожих точках двох суміжних перетинів потоку рідини рівні між собою (рух рідини в циліндричній трубі постійного перетину).

Нерівномірний рух — це рух рідини, при якому швидкості частинок у відповідних точках двох суміжних перетинів потоку неоднакові і змінюються зі зміною цих перетинів (рух рідини в трубі кінцевого перетину).

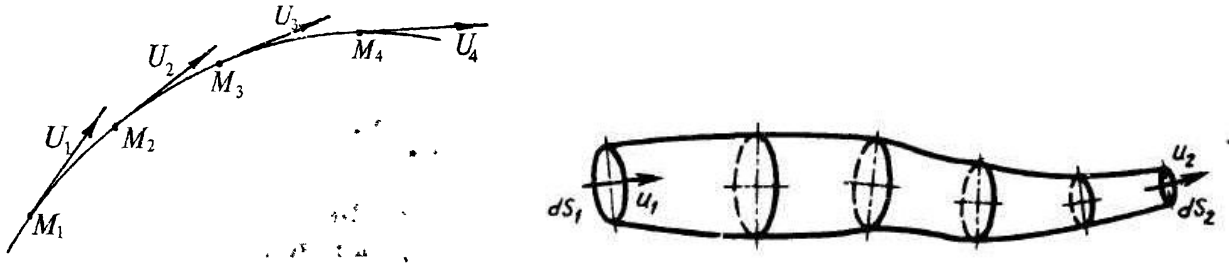
Напірний рух — це рух рідини в трубах, при якому потік не має вільної поверхні і цілком контактує з обмежуючими його твердими стінками, а тиск відрізняється від атмосферного (рух рідин у водопровідних трубах).

Безнапірний рух — це рух рідини, при якому потік має вільну поверхню, а тиск на неї дорівнює атмосферному (рух води в ріках, каналах, дренажних і каналізаційних трубах).

Для дослідження характеру руху рідини введено поняття лінії течії. Лінією течії називається лінія, проведена через ряд точок усередині потоку рідини таким чином, що вектори швидкості частинок рідини  $u$ , що знаходяться в даний момент у цих точках, дотичні до неї. Очевидно, що при усталеному русі рідини лінія течії збігається з траєкторією руху часток рідини.

Якщо в рідині, що рухається, узяти нескінченно малий замкнутий контур і через усі його точки провести лінії течії, то утвориться **трубка течії**.

Вважається, що рідина не може ні витікати з **трубки течії**., ні надходити до неї. Массив рідини в трубці течії



називається **елементарною струминкою**.

**Потік рідини** складається із сукупності елементарних струминок, що рухаються з різними швидкостями.

Поняття, що характеризують гідравлічні і геометричні елементи потоку:

**живим перетином** елементарної струминки чи потоку рідини називають перетин, проведений по нормалі до напрямку ліній течії, тобто нормально до напрямку векторів швидкості елементарних струминок; живий перетин потоку може обмежуватися твердими стінками цілком (у трубах) чи частково (у відкритих руслах);

**змочений периметр** - довжина частини периметра живого перетину, по якій потік контактує з обмежуючими його стінками; позначимо його літерою  $L$ ; при напірному русі змочений периметр збігається з геометричним, при безнапірному — менше геометричного, тому що в останньому випадку вільна поверхня потоку рідини буде контактувати не тільки зі стінками, а і з повітрям.

Відношення площі живого перетину потоку  $S$  до змоченого периметра  $L$  наз-ється гідравлічним радіусом  $R$

$$R = S/L.$$

Поняття «геометричний радіус» і «гідравлічний радіус» не однозначні. Для круглої труби:

$$S = \pi d^2/4, L = \pi d, \text{ геометричний радіус } r = d/2, \text{ а гідравлічний радіус } R = (\pi d^2/4)/\pi d = d/4.$$

### **Витрата рідини. Середня швидкість. Рівняння нерозривності потоку.**

Витратою рідини називається кількість рідини, що протікає через живий перетин потоку за одиницю часу. Вимірюється в одиницях об'ємних ( $Q$  м<sup>3</sup>/с), вагових ( $Q_G$  Н/с) або масових ( $Q_m$  кг/с).

У гідравліці найчастіше приходиться мати справу з об'ємною витратою, і називають її просто витратою.

Витрата потоку рідини  $Q$  складається з витрат елементарних струминок  $dQ = u dS$ :

$$Q = \int dQ = \int u dS,$$

де  $u$  – швидкість частинок рідини в елементарній струминці

Для визначення витрати потоку рідини по цій формулі необхідно знати закон розподілу швидкостей по перетину потоку. Часто це зв'язано зі значними труднощами, і тоді у формулі використовують середню швидкість руху рідини в перетині.

Середньою швидкістю потоку - така умовна швидкість, з якою усі частинки рідини повинні були б проходити через живий перетин потоку, щоб забезпечити ту ж витрату, що має місце при реальному розподілі швидкостей і позначається  $v$ :

$$v = (\int u dS)/S = Q/S.$$

Отже, об'ємна витрата рідини, виражена в м<sup>3</sup>/с, являє собою добуток середньої швидкості на живий перетин потоку:

Витрата рідини і середню швидкість потоку вимірюють спеціальними приладами, що будуть розглянуті пізніше.

Поняття витрати рідини дозволяє отримати рівняння нерозривності руху елементарної струминки і потоку рідини

Розглянемо елементарну струминку змінного перетину при усталеному русі рідини.

Виберемо два довільних перетини з площами перетинів  $dS_1$  і  $dS_2$  і швидкостями  $u_1$  і  $u_2$ . Для кожного з цих перетинів ми можемо написати рівняння елементарної витрати рідини:

$$dQ_1 = u_1 dS_1, \quad dQ_2 = u_2 dS_2.$$

З огляду на закон збереження речовини і прийняті раніше припущення про нестисливість рідини, суцільність (нерозривність) її потоку, а також відсутність витоків через бічні поверхні, можна зробити висновок, що елементарні витрати в розглянутих перетинах повинні бути рівні між собою  $dQ_1 = dQ_2$  і  $u_1 dS_1 = u_2 dS_2$ .

З огляду на те, що перетини були вибрані нами довільно, рівняння можна переписати в загальному виді:

$$u dS = \text{const.}$$

Це рівняння називається рівнянням нерозривності або сталості витрати.

Переходячи від елементарної струмки до потоку рідини, шляхом аналогічних міркувань одержимо рівняння нерозривності для потоку:

$$Q = vS = \text{const},$$

яке формулюється так: витрата рідини для будь-якого перетину потоку при усталеному русі є величина постійна. З рівняння випливає:

$$v_1/v_2 = S_2/S_1 \quad \text{або, наприклад,} \quad v_1 = v_2(S_2/S_1).$$

Очевидно, що середні швидкості в поперечних перерізах потоку для нерозривного руху нестисливої рідини пропорційні площам цих перетинів.

## Диференціальні рівняння руху нев'язкої рідини Л.Ейлера

На частинки рухомої рідини діють сили тяжіння і тиску (як і в стані спокою) та сили інерції (у нев'язкій рідині сили тертя відсутні).

Диференціальні рівняння Л. Ейлера для рідини, що знаходиться в стані спокою, мають вигляд

$$F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Згідно з принципом Даламбера диференціальні рівняння руху рідини можна отримати з рівнянь гідростатики, якщо у відповідні рівняння ввести сили інерції:

$$F = -ma,$$

де  $m$  - маса рідини;  $a$  - прискорення.

Знак мінус означає, що сила інерції направлена в бік, протилежний прискоренню. Сила інерції

одиниці маси:  $-a = F/m$ , - одинична сила інерції, що дорівнює прискоренню зі знаком мінус

Проекції одиничних сил інерції на координатні осі  $a_x, a_y, a_z$  можна представити і як похідні від швидкості за часом:

$$a_x = \frac{du_x}{dt}; \quad a_y = \frac{du_y}{dt}; \quad a_z = \frac{du_z}{dt}.$$

Введемо їх по принципу Даламбера, у рівняння гідростатики і отримаємо диф. рівняння руху невязкої рідини Л.Ейлера.

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} &= 0, \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{du_y}{dt} &= 0, \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{du_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

### Рівняння Д.Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини

Для зручності при використанні виконаємо інтегрування диференціальних рівнянь руху невязкої рідини Л.Ейлера

Кожне з рівнянь помножимо на  $dx, dy, dz$  відповідно:

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} &= 0, & dx \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{du_y}{dt} &= 0, & dy \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{du_z}{dt} &= 0. & dz \end{aligned} \right\}$$

складемо їх і одержимо:

$$\begin{aligned} &(F_x dx + F_y dy + F_z dz) - \\ &- \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - \\ &- \left( \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz \right) = 0. \end{aligned}$$

$F_x, F_y, F_z$  - проекції одиничних масових сил тяжіння на координатні осі. Якщо прийняти вісь  $OZ$  вертикальною, то проекції сили тяжіння на осі  $OX$  та  $OY$  будуть дорівнювати нулю, а проекція одиничної сили тяжіння на вісь  $OZ$  буде дорівнювати  $-g$ . Отже,  $F_x = 0, F_y = 0, F_z = -g$ , де  $g$  - прискорення вільного падіння.

Таким чином, тричлен

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -g dz.$$

Для стаціонарного руху тиск є функцією тільки координат:  $p = p(x, y, z)$ . У цьому випадку другий тричлен являється повним диференціалом тиску:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Складові третього тричлена рівняння представимо у вигляді:

$$\frac{uu_x}{dt} dx + \frac{uu_y}{dt} dy + \frac{uu_z}{dt} dz =$$

$$= du_x \frac{dx}{dt} + du_y \frac{dy}{dt} + du_z \frac{dz}{dt}.$$

Очевидно, що  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ,  $\frac{dy}{dt} = u_y$ ,  $\frac{dz}{dt} = u_z$  є не що

інше, як проекції швидкості на координатні осі. Тому третій тричлен можна записати у вигляді:

$$-\left( \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz \right) =$$

$$= -(u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z).$$

Підставимо отримані вирази в рівняння і одержимо:

$$g dz + \frac{1}{\rho} dp + (u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z) = 0.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$gz + \frac{1}{\rho} p + \left( \frac{u_x^2}{2} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2} \right) = C,$$

де  $C$  - постійна Інтегрування,

Враховуючи, що  $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2$ , одержимо:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C.$$

- рівняння Д.Бернеллі для елементарної струминки ідеальної рідини.

Із рівняння витікає, що сума трьох величин  $z$ ,  $\frac{p}{\rho g}$  та  $\frac{u^2}{2g}$  для даної елементарної струминки

ідеальної рідини є величина постійна.

Для любых двох перерізів елементарної струминки ідеальної рідини це рівняння можна записати у вигляді:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} = const,$$

де індекси 1 і 2 є номерами довільно вибраних перерізів.