1. ПЛОСКІ ПРЯМОКУТНІ КООРДИНАТИ ГАУССА-КРЮГЕРА

Тема 1.3: Формули проекції Гаусса-Крюгера.

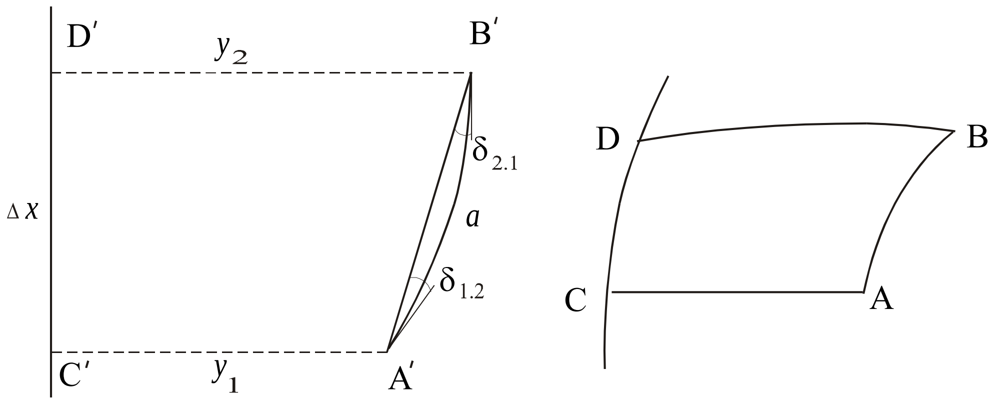
1. Формули для редукування напрямів і відстаней

1. Формули для редукування напрямів і відстаней

Під редукуванням напрямів і відстаней розуміють перехід від напрямів і довжин геодезичних ліній на еліпсоїді до відповідних їм величин на площині. Редукція напрямів полягає у визначенні поправки за кривизну зображення геодезичної лінії на площині, а редукція відстаней – знаходженні різниці довжини геодезичної лінії та хорди зображення геодезичної лінії. Після введення цих редукцій у виміряні величини, які приведені на поверхню еліпсоїда, ми отримаємо геодезичну мережу, редуковану з еліпсоїда на площину.

На практиці редукування мережі 1-го класу на площину проводиться тільки в окремих випадках і не має широкого розповсюдження, тому при виведенні формул будемо орієнтуватися на мережі нижчих (2-4) класів.

Для редукування напрямів вважатимемо, що *AB* є геодезичною лінією на поверхні еліпсоїда в складі деякої замкнутої геодезичної фігури *ABDC* (*рис. 1.5 б*).



а) *б)*

Рис. 1.5.

Нехай геодезична лінія *AB* зображена на площині в виді кривої $A'aB'$ (*рис. 1.5 а*). Кути в точках A' і B' між дотичними до кривої і хордою $A'B'$ позначимо через δ_{12} і δ_{21}. Координати точок A' і B' позначимо через x_1, y_1 і x_2, y_2. Нехай точки C' і D' є основами ординат точок A' і B' відповідно. Із-за конформності проекції фігури *ABCD* і *A'B'C'D'* будуть подібними, а відповідні кути у них рівними. Суми внутрішніх кутів складуть:

– на еліпсоїді $A+B+C+D=360^o+\varepsilon$;

– на площині $A'+B'+C'+D'=360^o+(\delta_{12}+\delta_{21})$.

Значить, $\varepsilon=\delta_{12}+\delta_{21}$, тобто сферичний надлишок рівний сумі поправок взаємно обернених напрямів. Як відомо, сферичний надлишок визначається формулою

$$\varepsilon=\frac{P}{R^2},$$

де P – площа фігури *A'B'C'D'*; $P=\dfrac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)=y_m\Delta x$.

Тоді

$$\varepsilon = \delta_{12} + \delta_{21} = \frac{y_m}{R^2}\Delta x.$$

Приймаючи наближено, $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta$, отримуємо

$$\delta = \Delta x \frac{y_m}{2R^2} \tag{1.30}$$

На практиці потрібно знати не тільки величину кута δ для даного напряму, але і як ввести його в цей напрям, щоб перейти на площині від кривих ліній до їхніх хорд. Оскільки відрахування кутів ведеться за ходом годинникової стрілки, то із *рис. 1.5 а* видно, що для переходу від напряму $A'aB'$ до хорди $A'B'$ кут δ при точці A' потрібно відняти від напряму $A'aB'$, а при точці B' – додати до напряму $B'aA'$. Отже, *поправки* δ_{12} *і* δ_{21} *у взаємні напрями мають протилежні знаки:*

$$\begin{aligned} \delta_{12}'' &= \frac{\rho''}{2R^2}(x_2 - x_1)y_m, \\ \delta_{21}'' &= -\frac{\rho''}{2R^2}(x_2 - x_1)y_m. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Формулами (1.31) користуються для редукування напрямів в тріангуляції 3 класу і нижче.

Поправки за редукцію δ <u>*алгебраїчно віднімаються*</u> від виміряних напрямів.

Значення редукованих плоских кутів *A’, B’* і *C’* за виміряними на фізичній поверхні і приведеними на еліпсоїд кутами *A, B* і *C* трикутника *ABC* отримують наступним чином

$$A' = A - (\delta_{AC} - \delta_{AB}) = A - \delta_A;$$
$$B' = B - (\delta_{BA} - \delta_{BC}) = B - \delta_B;$$
$$C' = C - (\delta_{CB} - \delta_{CA}) = C - \delta_C.$$

<u>*Сума поправок за редукцію кутів трикутника рівна його сферичному надлишку з оберненим знаком*</u>, що служить контролем обчислення ε та δ. Справді,

$$A' + B' + C' = A + B + C - (\delta_A + \delta_B + \delta_C),$$
$$A + B + C = A' + B' + C' + \varepsilon,$$
$$(\delta_A + \delta_B + \delta_C) = -\varepsilon.$$

В тріангуляції 2-го класу для обчислення поправок за кривину зображення геодезичних ліній застосовують більш точні формули, які приведемо без доведення

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{\Delta x}{6R_m^{\ 2}}(2y_1 + y_2); \\ \delta_{21} &= -\frac{\Delta x}{6R_m^{\ 2}}(2y_2 + y_1), \end{aligned} \tag{1.32}$$

де R_m – середній радіус кривизни, обчислений за широтою середньої точки заданої геодезичної лінії.

Як видно з наведених формул, для обчислення редукцій повинні бути відомі плоскі прямокутні координати початкового і кінцевого пунктів. Визначимо необхідну точність цих координат. Для цього достатньо дослідити формулу (1.30). Продиференціювавши дану формулу за координатами x і y, знаходимо

$$d\delta = \frac{\Delta x}{2R^2}dy_m + \frac{y_m}{2R^2}d\Delta x.$$

Позначивши $dy_m = d\Delta x = dp$, отримаємо

$$dp'' = \frac{2R^2}{y_m + \Delta x} \frac{d\delta''}{\rho''}.$$

Нехай:

– для тріангуляції 2-го класу $d\delta = 0.01''$; $y_m = 240 км$ (на краю шестиградусної зони); $\Delta x = 15 км$, тоді $dp \approx 10 м$;

– для тріангуляції 3-го класу $d\delta = 0.1''$; $y_m = 240 км$; $\Delta x = 10 км$, тоді $dp \approx 100 м$.

Стосовно опрацювання кутомірних вимірювань нижчих класів (розрядів), то поправки за кривизну (в межах шестиградусних зон) можна обчислювати за наближеною формулою

$$\delta''_{12} = -\delta''_{21} = 0{,}00253 \Delta x_{км} y_{m,км},$$

а наближені координати пунктів можна вибрати із карти або схеми геодезичної мережі.

Таблиця абсолютних величин поправок (редукцій) за кривину зображення геодезичної лінії для різних значень y_m та Δx

Таблиця 1.1

y_m, *км* / Δx, *км*	50	100	150	200	250
5	0.6”	1.2”	1.9”	2.5”	3.2”
10	1.3”	2.5”	3.8”	5.1”	6.4”
20	2.5”	5.0”	7.7”	10.1”	12.6”

Як видно із *таблиці 1.1*, в знімальних мережах ($\Delta x < 5$ км) поправками за кривину, через їх незначні величини, в порівнянні з похибками вимірювання кутів, можна нехтувати.

Перед виводом формул для редукцій відстаней розглянемо спочатку питання про різницю в довжинах зображення дуги геодезичної лінії на площині S та хорди d, що стягує цю дугу.

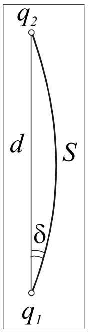


Рис. 1.6.

Нехай на *рис. 1.6* q_1q_2 – зображення дуги геодезичної лінії на площині; d – її хорда; δ – кут між хордою і початковим елементом дуги q_1q_2. Тоді можемо записати

$$d = \int_{q_1}^{q_2} \cos\delta dS.$$

Згідно *таблиці 1.1*, значення кута $\delta < 15''$ при стандартних довжинах сторін геодезичних мереж. Тому для малих кутів можемо записати

$$\cos\delta = 1 - \frac{\delta''^2}{2\rho''^2} = 1 - 3 \cdot 10^{-9}.$$

Отже, з похибкою на величину $3 \cdot 10^{-9}$ можна прийняти, що $\cos\delta = 1$, тоді $d = S$.

Із (1.12) можемо записати інтеграл

$$d = \int_0^s m ds \qquad (1.33)$$

де масштаб m визначається формулою (1.29).

Знайти інтеграл (1.33) в замкнутій формі надзвичайно важко, оскільки масштаб зображення є досить складною функцією довжини геодезичної лінії. Проте такі фактори як порівняно невелика довжина геодезичної лінії (<30 *км*) і незначне віддалення від осьового меридіану ($l \le 3^o$) спрощують задачу знаходження інтегралу (1.33), і її розв'язання можна буде шукати наближеними методами.

Одним із наближених методів обчислення вказаних означених інтегралів є чисельний метод. Конкретно для даного випадку можна застосувати формулу Сімпсона, розділивши інтервал інтегрування на дві частини. Тоді інтеграл (1.33) може бути представлений наступним наближенням

$$d = \frac{s}{6}(m_1 + 4m_m + m_2), \tag{1.34}$$

де

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{y_1^{\,2}}{2R_1^{\,2}} + \frac{y_1^{\,4}}{24R_1^{\,4}}, \\ m_m &= 1 + \frac{y_m^{\,2}}{2R_m^{\,2}} + \frac{y_m^{\,4}}{24R_m^{\,4}}, \\ m_2 &= 1 + \frac{y_2^{\,2}}{2R_2^{\,2}} + \frac{y_2^{\,4}}{24R_2^{\,4}}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Якщо обчислення проводяться з геодезичними координатами, то для масштабів зображення можна використати формулу (1.27).

При довжинах ліній, що не перевищують 30 *км*, у всіх трьох виразах для масштабу зображення радіус кривини R можна обчислювати тільки для середньої точки, а в членах четвертого порядку прийняти $y_1^{\,4} = y_2^{\,4} = y_m^{\,4}$.

Для ординат можемо записати такі очевидні співвідношення

$$2y_m = y_1 + y_2, \qquad 4y_m^{\,2} = y_1^{\,2} + 2y_1y_2 + y_2^{\,2},$$

$$y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2}, \qquad y_2 = y_m + \frac{\Delta y}{2},$$

$$y_1^{\,2} = y_m^{\,2} - y_m\Delta y + \frac{(\Delta y)^2}{4}, \quad y_2^{\,2} = y_m^{\,2} + y_m\Delta y + \frac{(\Delta y)^2}{4},$$

$$y_1y_2 = y_m^{\,2} - \frac{(\Delta y)^2}{4}.$$

Підставивши в рівняння (1.34) вирази для масштабів (1.35) та використавши приведені вище співвідношення, отримаємо остаточну формулу

$$d = s\left[1 + \frac{y_m^{\,2}}{2R_m^{\,2}} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^{\,2}} + \frac{y_m^{\,4}}{24R_m^{\,4}}\right]. \tag{1.36}$$

Із отриманої формули видно, що лінія на площині в проекції Гаусса-Крюгера завжди довша від ліній, що зображуються з еліпсоїда. Третій і четвертий члени формули (1.36) при $y_m = 320\,км$ (максимально можливі значення на краю шестиградусної зони) і $s = 20$ *км* складають 6 і 8 *мм* відповідно, тому в роботах, де не вимагається висока точність або коли розміри зони є меншими ($l < 3^0$), можна користуватися формулою

$$d = s + s\frac{y_m^{\,2}}{2R^2}. \tag{1.36'}$$

Підрахуємо тепер, з якою похибкою допустимо знати в (36) ординату y_m середньої точки редукованої лінії.

При похибці в y_m, рівній Δy_m, отримаємо в d похибку Δd, згідно (1.36’), рівну

$$\Delta d = s\frac{y_m}{2R^2}\Delta y_m,$$

звідки

$$\Delta y_m = \frac{2R^2}{y_m s}\Delta d\ .$$

Якщо поставити вимогу, щоб Δd не перевищувало 0,001 *м*, то, приймаючи $R = 6400$*км*, $y_m = 330$*км* і $s = 20$*км*, отримаємо, що $\Delta y_m \le 12$*м*.