1. ПЛОСКІ ПРЯМОКУТНІ КООРДИНАТИ ГАУССА-КРЮГЕРА

Тема 1.2: Формули проекції Гаусса-Крюгера.

1. Обчислення координат
2. Формули для обчислення зближення меридіанів γ
3. Формули для обчислення масштабу проекції

1. Обчислення координат

а) плоских прямокутних x, y ***за геодезичними*** B, l

При малій величині різниці довгот $l = L - L_0$ залежність між плоскими прямокутними координатами і геодезичними координатами для симетричних проекцій, якою є проекція Гаусса-Крюгера можна представити у вигляді наступних степеневих рядів:

$$\begin{cases} x = X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + \ldots \\ y = b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7 + \ldots \end{cases}, \qquad (1.15)$$

де $X = \int_0^B M dB,$ а коефіцієнти в цих рядах є функціями тільки геодезичної широти B.

Характерною особливістю рівнянь (1.15) є залежність абсциси від членів парної степені різниці довгот, а ординати – тільки від непарної степені цієї різниці. Такі рівняння ще називають рівняннями симетричних проекцій. Для таких проекцій дві точки еліпсоїда, що мають однакову широту і однакову за абсолютною величиною різницю довгот $l = |L - L_0|$, після їх зображення на площині будуть мати однакову абсцису та однакову за абсолютною величиною ординату.

Знайдемо значення коефіцієнтів рівнянь (1.15).

Оскільки проекція має бути конформною, тоді поставимо вимогу, щоб рівняння зображення (1.15) задовольняли умови конформного зображення (1.3).

Підставимо в рівняння (1.3) часткові похідні рядів (1.15). Тоді отримаємо

$$\frac{dX}{dB} + \frac{da_2}{dB} l^2 + \frac{da_4}{dB} l^4 + \frac{da_6}{dB} l^6 + \ldots = \frac{M}{N \cos B}(b_1 + 3b_3 l^2 + 5b_5 l^4 + \ldots),$$
$$\frac{db_1}{dB} l + \frac{db_3}{dB} l^3 + \ldots = -\frac{M}{N \cos B}(2a_2 l + 4a_4 l^3 + 6a_6 l^5 + \ldots).$$

Із порівняння між собою в цих рівностях коефіцієнтів при однакових степенях l, знайдемо

$$b_1 = \frac{N \cos B}{M} \frac{dX}{dB}, \qquad a_2 = -\frac{N \cos B}{2M} \frac{db_1}{dB},$$
$$b_3 = \frac{N \cos B}{3M} \frac{da_2}{dB}, \qquad a_4 = -\frac{N \cos B}{4M} \frac{db_3}{dB},$$
$$b_5 = \frac{N \cos B}{5M} \frac{da_4}{dB}, \qquad a_6 = -\frac{N \cos B}{6M} \frac{db_5}{dB},$$

....

З цих формул видно, що для отримання кожного наступного коефіцієнта необхідно знайти похідну попереднього коефіцієнта. Враховуючи, що

$$\frac{dX}{dB} = M,$$
$$\frac{d(N\cos B)}{dB} = -M\sin B,$$

можна легко знайти всі коефіцієнти рядів (1.15).

Приведемо коефіцієнти рядів (1.15) в остаточному вигляді

$$\begin{aligned}
b_1 &= N\cos B,\\
a_2 &= \frac{1}{2}N\cos B\sin B,\\
b_3 &= \frac{1}{6}N\cos^3 B(1-tg^2B+e'^2\cos^2 B),\\
a_4 &= \frac{1}{24}N\cos^3 B\sin B(5-tg^2B+9e'^2\cos^2 B+4e'^4\cos^4 B),\\
b_5 &= \frac{1}{120}N\cos^5 B(5-18tg^2B+tg^4B+14e'^2\cos^2 B-58tg^2Be'^2\cos^2 B),\\
a_6 &= \frac{1}{720}N\cos^5 B\sin B(61-58tg^2B+tg^4B+270e'^2\cos^2 B-330tg^2Be'^2\cos^2 B),\\
b_7 &= \frac{1}{5040}N\cos^7 B(61-479tg^2B+179tg^4B-tg^6B).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Довжину дуги меридіана *X* від екватора до даної точки з широтою *B* можна обчислити за формулою

$$X = A_0B - A_2\sin 2B + A_4\sin 4B - A_6\sin 6B + ... \tag{1.17}$$

де коефіцієнти A_0, A_2, A_4, A_6, що визначаються через параметри прийнятого еліпсоїда, для еліпсоїда Красовського мають наступні значення:

$$\begin{aligned}
A_0 &= 6367558{,}4883,\\
A_2 &= 16036{,}4734,\\
A_4 &= 16{,}8263,\\
A_6 &= 0{,}0216.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Формули (1.15) разом з (1.16) – (1.18) мають високу точність (до 0,001 м в x і y) та можуть застосовуватись для різниці довгот $l \approx 3-4^o$, тобто для системи шестиградусних зон. Щодо триградусних зон, то ці формули можна спростити, а саме: в формулі для *x* можна не враховувати члени з $l^4\eta^4$ та l^6, а для *y* – члени з $l^5\eta^2$ та l^7

$$\begin{cases}
x = X + \frac{1}{2}l^2N\cos B\sin B + \frac{1}{24}l^4N\cos^3 B\sin B(5-tg^2B+9e'^2\cos^2 B)\\
y = lN\cos B + \frac{1}{6}l^3N\cos^3 B(1-tg^2B+e'^2\cos^2 B) + \frac{1}{120}l^5N\cos^5 B(5-18tg^2B+tg^4B)
\end{cases}. \tag{1.19}$$

Якщо виникає необхідність обчислення координат x і y з меншою точністю, наприклад, до 1 *м*, тоді формули (1.19) з врахуванням коефіцієнтів для еліпсоїда Красовського можна спростити, а саме

$$\begin{aligned}
x &= 6367558\cdot B - 16036\sin(2B) + 17\sin(4B) + (1594561 + 5336\sin^2 B)\sin(2B)\cdot l^2,\\
y &= (6378245 + 21346\sin^2 B)\cos(B)\cdot l\cdot\left(1+\frac{1}{6}\cos(2B)\cdot l^2\right).
\end{aligned} \tag{1.19'}$$

Відмітимо, що у наведених формулах координати x і y отримуємо в метрах, а аргументи B, l при цьому потрібно виразити в радіанах.

б) геодезичних B, l за плоскими прямокутними x, y

Щоб отримати формули для обчислення геодезичних координат за плоскими прямокутними координатами, представимо функції (1.6) у вигляді рядів за степенями ординати y, вважаючи її малою величиною. Для симетричних проекцій зображень ці ряди будуть мати вигляд

$$
\begin{aligned}
B &= B_x + \overline{a_2} y^2 + \overline{a_4} y^4 + \overline{a_6} y^6 + \dots, \\
l &= \overline{b_1} y + \overline{b_3} y^3 + \overline{b_5} y^5 + \overline{b_7} y^7 + \dots.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Всі коефіцієнти в цих рядах є функціями тільки абсциси x.

Як видно із формул (1.20) і *рис. 1.4*, при $y = 0$ величина $B_x = B$ є широтою точки Q_x (*рис. 1.4*).

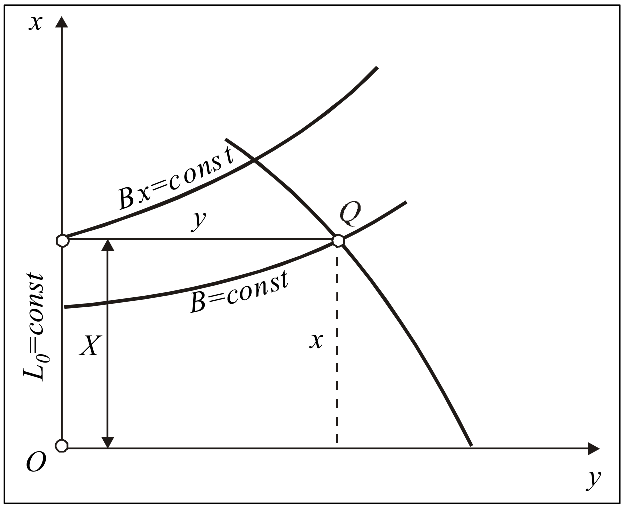

Рис. 1.4.

Плоскими прямокутними координатами точки Q_x є $\begin{Bmatrix} x = X, \\ y = 0. \end{Bmatrix}$, а геодезичними – $\begin{Bmatrix} B = B_x, \\ L = L_0. \end{Bmatrix}$.

Оскільки абсциса цієї точки рівна довжині дуги меридіана X, то широту B_x можна знайти як функцію довжини дуги меридіана

$$B_x = \overline{A_0} x + \overline{A_2} \sin(2\overline{A_0} x) + \overline{A_4} \sin(4\overline{A_0} x) + \overline{A_6} \sin(6\overline{A_0} x),$$

де коефіцієнти $\overline{A_0}, \overline{A_2}, \overline{A_4}, \overline{A_6}$ для еліпсоїда Красовського будуть мати наступні значення

$$
\begin{aligned}
\overline{A_0} &= 1.570460643310^{-7}, \\
\overline{A_2} &= 2.5184637 \cdot 10^{-3}, \\
\overline{A_4} &= 3.7002 \cdot 10^{-6}, \\
\overline{A_6} &= 7.4 \cdot 10^{-9},
\end{aligned}
$$

а коефіцієнти рядів (1.20) будуть тоді функціями широти B_x.

Перейдемо до визначення коефіцієнтів в рядах (1.20). Підставимо в рівняння (1.7) часткові похідні рядів (1.20), де замість аргументу x будемо брати аргумент X. Тоді отримаємо

$$\frac{dB}{dX}+\frac{d\bar{a}_2}{dX}y^2+\frac{d\bar{a}_4}{dX}y^4+\frac{d\bar{a}_6}{dX}y^6+...=\frac{N\cos B}{M}(\bar{b}_1+3\bar{b}_3y^2+5\bar{b}_5y^4+7\bar{b}_7y^7+...),$$
$$2\bar{a}_2y+4\bar{a}_4y^3+6\bar{a}_6y^5+...=-\frac{N\cos B}{M}\left(\frac{d\bar{b}_1}{dX}y+\frac{d\bar{b}_3}{dX}y^3+\frac{d\bar{b}_5}{dX}y^5+...\right).$$

Із порівняння між собою в цих рівностях коефіцієнтів при однакових степенях y, знайдемо

$$\bar{b}_1=\frac{M}{N\cos B}\frac{dB}{dX},\qquad \bar{a}_2=-\frac{N\cos B}{2M}\frac{d\bar{b}_1}{dX},$$
$$\bar{b}_3=\frac{M}{3N\cos B}\frac{d\bar{a}_2}{dX},\qquad \bar{a}_4=-\frac{N\cos B}{4M}\frac{d\bar{b}_3}{dX},$$
....

Для знаходження всіх необхідних коефіцієнтів застосовуємо послідовне диференціювання по довжині дуги меридіана X, враховуючи при цьому, що

$$\frac{dB}{dX}=M^{-1},\quad \frac{df(B)}{dX}=\frac{df(B)}{dB}\frac{dB}{dX}.$$

Остаточні значення коефіцієнтів рядів (1.20) мають наступний вигляд

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1&=\frac{1}{N_x\cos B_x},\\
\bar{a}_2&=-\frac{1}{2}\frac{tgB_x}{N_x^{\ 2}}(1+e'^2\cos^2B_x),\\
\bar{b}_3&=-\frac{1}{6}\frac{1}{N_x^{\ 3}\cos B_x}(1+2tg^2B_x+e'^2\cos^2B_x),\\
\bar{a}_4&=\frac{1}{24}\frac{tgB_x}{N_x^{\ 4}}(5+3tg^2B_x+6e'^2\cos^2B_x-6tg^2B_xe'^2\cos^2B_x-3e'^4\cos^4B_x-9tg^2B_xe'^4\cos^4B_x),\\
\bar{b}_5&=\frac{1}{120}\frac{1}{N_x^{\ 5}\cos B_x}(5+28tg^2B_x+24tg^4B_x+6e'^2\cos^2B_x+8tg^2B_xe'^2\cos^2B_x),\\
\bar{a}_6&=-\frac{1}{720}\frac{tgB_x}{N_x^{\ 6}}(61+90tg^2B_x+45tg^4B_x).
\end{aligned}\tag{1.21}$$

Обчислені таким чином геодезичні координати будуть виражені в радіанній мірі. Точність цих формул така, що вони забезпечують $0{,}0001''$ в координатах B,l при розміщені точки на краю шестиградусної зони.

2. Формули для обчислення зближення меридіанів γ

Для визначення зближення меридіанів γ скористаємось другою формулою (1.4)

$$tg\gamma=\frac{\partial x}{\partial L}:\frac{\partial y}{\partial L},\tag{1.22}$$

часткові похідні в якій знайдемо на основі формул (1.15). Отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial L}&=2a_2l+4a_4l^3+6a_6l^5+...,\\
\frac{\partial y}{\partial L}&=b_1+3b_3l^2+5b_5l^4+....
\end{aligned}\tag{1.22'}$$

Підставивши значення похідних у (1.22), отримаємо

$$tg\gamma = \frac{2a_2 l + 4a_4 l^3 + 6a_6 l^5}{b_1 + 3b_3 l^2 + 5b_5 l^4}. \qquad (1.23)$$

Значення коефіцієнтів $a_2, a_4, a_6, b_1, b_3, b_5$ даються виразами (1.16), підставивши які в (1.23) і виконавши елементарні математичні перетворення, остаточно отримаємо

$$tg\gamma = \sin Bl + \frac{1}{3}\frac{\sin B}{\cos^2 B}\left(1 + tg^2 B + 3e'^2 \cos^2 B\right)l^3 + \frac{1}{15}\frac{\sin B}{\cos^4 B}\left(2 + 4tg^2 B + 2tg^4 B\right)l^5 \qquad (1.24)$$

Аналогічним чином можна знайти вираз для обчислення зближення меридіанів за плоскими прямокутними координатами, тільки при цьому за вихідну беруть другу формулу (1.8)

$$tg\gamma = M\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) : N\cos B\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right).$$

Приведемо остаточну формулу для зближення меридіанів у функції плоских прямокутних координат

$$\begin{aligned} tg\gamma &= \frac{tgB_x}{N_x} y - \frac{tgB_x}{3N_x^{\,3}}(1 + tg^2 B_x + e'^2 \cos^2 B_x) y^3 + \\ &+ \frac{tgB_x}{15N_x^{\,5}}(2 + 5tg^2 B_x + 3tg^4 B_x + 2e'^2 \cos^2 B_x + tg^2 B_x e'^2 \cos^2 B_x) y^5. \end{aligned} \qquad (1.25)$$

У формулах (1.24) і (1.25) не враховано члени з e'^4. Точність приведених формул забезпечує обчислення γ в 0.001''.

Знак зближення меридіанів співпадає зі знаком різниці довгот l або знаком y, тобто для точок, які розташовані на схід від осьового меридіану, зближення меридіанів завжди буде додатнім, а на захід від нього – від'ємним.

3. Формули для обчислення масштабу проекції

Для знаходження формули масштабу зображення скористаємось формулою (1.5), яку представимо у вигляді

$$m^2 = \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2\right\}\frac{1}{N^2 \cos^2 B}. \qquad (1.26)$$

Вирази для часткових похідних нами вже отримано – ф-ли (1.22'). Підставивши квадрати цих виразів у (1.26) і додавши їх, отримаємо

$$m^2 = \frac{b_1^{\,2} + (4a_2^{\,2} + 6b_1 b_3) l^2 + (16a_2 a_4 + 9b_3^{\,2} + 5b_1 b_5) l^4}{N^2 \cos^2 B}.$$

В цій формулі збережено члени порядку l^4. З врахуванням виразів для a_2, a_4, b_1, b_3, b_5 (без сфероїдних членів при l^4) та простих алгебраїчних перетворень остаточно знаходимо

$$m = 1 + \frac{1}{2}\cos^2 B(1 + e'^2 \cos^2 B) l^2 + \frac{1}{24}\cos^4 B(5 - 4tg^2 B) l^4. \qquad (1.27)$$

Як видно із даної формули, при $l = 0$, тобто на осьовому меридіані, масштаб проекції рівний одиниці. При віддалені від осьового меридіана на схід і на захід значення масштабу швидко зростає.

Для отримання формули масштабу зображення у функції плоских прямокутних координат скористаємось другою формулою (1.19), яку, з прийнятими вище обмеженнями, запишемо

$$\left\{ y = Nl\cos B + \frac{1}{6} Nl^3 \cos^3 B(1 - tg^2 B). \right.$$

Застосовуючи формули обертання ряду для $l\cos B$, знайдемо

$$l\cos B = \frac{y}{N} - (1 - tg^2 B)\frac{y^3}{6N^3},$$

звідки з прийнятою точністю

$$l^2\cos^2 B = \frac{y^2}{N^2} - (1 - tg^2 B)\frac{y^4}{3N^4},$$

$$l^4\cos^4 B = \frac{y^4}{N^4}.$$

З врахуванням останніх двох виразів формулу (1.27) можна записати у наступному вигляді

$$m = 1 + \frac{1}{2}\frac{(1 + e'^2\cos^2 B_x)}{N_x^{\,2}}y^2 + \frac{1}{24}\frac{(5 - 4tg^2 B_x)}{N_x^{\,4}}y^4. \qquad (1.28)$$

Оскільки

$$\frac{1 + e'^2\cos^2 B_x}{N_x^{\,2}} = \frac{1}{R^2},$$

де R – середній радіус кривини еліпсоїда, то остаточно отримаємо

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \qquad (1.29)$$

В останньому члені формули (1.29) замість N^4 приведено R^4, що викличе похибку порядку e^4 на сфероїдні члени, якими знехтувано у членах порядку l^4.

Масштаб зображення є дуже важливою характеристикою конформної проекції. Згідно формули (1.28) або (1.29) можна встановити величини і розподіл лінійних спотворень при переході з еліпсоїда на площину. Так легко замітити, що із збільшенням ординати y лінійні спотворення зростають пропорційно y^2; постійному значенню ординати $y = const$ відповідає практично постійна величина масштабу $m = const$. Величина радіуса

$$R = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2\sin^2 B}$$

із зміною широти змінюється звісно, але досить незначно. Тому лінії рівних спотворень довжин в проекції Гаусса-Крюгера розташовуються практично паралельно осі абсцис на всій смузі проекції від екватора до полюса, а звідси виходить, що проекцію Гаусса-Крюгера найбільш оптимально застосовувати для зображення смуги, яка витягнута на еліпсоїді з півдня на північ. Межами такої смуги служать лінії рівних спотворень довжин $m = const$.