

12. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З МАТЕМАТИЧНИХ ТА ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Практичне заняття 1. МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНОЇ СИСТЕМИ, ЩО ЗАДАНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ

12.1.1. План проведення практичного заняття

1. Стисло нагадати теоретичні відомості, необхідні для виконання індивідуального завдання практичного заняття.
2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального завдання (табл. 12.1).
3. Отримати різницеве рівняння для моделювання об'єкта управління.
4. Розробити програму моделювання об'єкта управління.
5. Отримати результати моделювання об'єкта управління.

Табл. 12.1

№ варіанту	Диференціальне рівняння	Метод чисельного інтегрування
1	$\ddot{y} + 3y = 5x$	прямокутників
2	$\ddot{y} + 3y = 5x$	трапецій
3	$2\ddot{y} - \dot{y} + y = 5\dot{x} - 2x$	прямокутників
4	$2\ddot{y} - \dot{y} + y = 5\dot{x} - 2x$	трапецій
5	$\dot{y} + 3y = 2\dot{x} + x$	прямокутників
6	$\dot{y} + 3y = 2\dot{x} + x$	трапецій
7	$\ddot{y} - \dot{y} + y = 3x$	прямокутників
8	$\ddot{y} - \dot{y} + y = 3x$	трапецій
9	$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 4x$	прямокутників
10	$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 4x$	трапецій
11	$\ddot{y} + \dot{y} - 5y = x$	прямокутників
12	$\ddot{y} + \dot{y} - 5y = x$	трапецій
13	$\ddot{y} - 5\dot{y} + y = 2x$	прямокутників
14	$\ddot{y} - 5\dot{y} + y = 2x$	трапецій
15	$\ddot{y} - 3\dot{y} + y = \dot{x} - 2x$	прямокутників
16	$\ddot{y} - 3\dot{y} + y = \dot{x} - 2x$	трапецій
17	$\dot{y} - 3y = \dot{x} + x$	прямокутників
18	$\dot{y} - 3y = \dot{x} + x$	трапецій

№ варіанту	Диференційне рівняння	Метод чисельного інтегрування
19	$\ddot{y} + \dot{y} + y = 5x$	прямокутників
20	$\ddot{y} + \dot{y} + y = 5x$	трапецій
21	$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	прямокутників
22	$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	трапецій
23	$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x$	прямокутників
24	$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x$	трапецій
25	$\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = \dot{x}$	прямокутників
26	$\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = \dot{x}$	трапецій
27	$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{x} - x$	прямокутників
28	$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{x} - x$	трапецій
29	$\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\dot{x} + 2x$	прямокутників
30	$\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	трапецій

2. Приклад виконання завдання практичного заняття

1. Задано диференційне рівняння

$$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x, c$$

де x – вхідний сигнал ОУ; y – вихідний сигнал ОУ.

2. Вводимо оператор диференціювання та підставляємо його в диференційне рівняння:

$$D = \frac{d}{dt}; \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2};$$

$$2D^2y + Dy + y = \dot{x} + 7Dx; \quad y + \frac{y}{D} + \frac{y}{D^2} = \frac{\dot{x}}{D^2} + \frac{7x}{D}.$$

3. Замінюємо оператор диференціювання на оператор інтегрування, для цього ліву і праву частину рівняння ділимо на старшу ступінь D :

$$I = \frac{1}{D} = \int \dots dx; \quad I^2 = \frac{1}{D^2};$$

$$2y + yI + yI^2 = xI + 7xI^2.$$

4. Виконуємо пряме z -перетворення з використанням таблиці підстановки (табл. 12.2) для оператора інтегрування з урахуванням методу чисельного інтегрування:

$$y(t) \rightarrow Y(z); \quad x(t) \rightarrow X(z).$$

Таблиця 12.2

Кількість інтегрувань	Оператор для кусочно-постійної функції		Оператор для кусочно-лінійної функції	
	Позначення	Вираз	Позначення	Вираз
1	$I_{П1}$	$\frac{\tau}{z-1}$	$I_{Л1}$	$\frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$
2	$I_{П2}$	$\frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$	$I_{Л2}$	$\frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{(z^2+4z+1)}{(z-1)^2}$

Застосовуємо метод трапецій для чисельного інтегрування:

$$I = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}; \quad I^2 = \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2};$$

$$2Y(z) + Y(z) \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + Y(z) \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} =$$

$$= X(z) \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} + X(z) \frac{7\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}.$$

5. Виносимо за дужки $Y(z)$, $X(z)$ та приводимо рівняння до спільного знаменника у лівій та правій частині. В результаті отримуємо:

$$Y(z) \left[2 + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} \right] = X(z) \left[\frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} + \frac{7\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right];$$

$$Y(z) \left[\frac{12(z-1)^2 + 3\tau(z+1)(z-1) + \tau^2(z^2+4z+1)}{6(z-1)^2} \right] =$$

$$= X(z) \left[\frac{21\tau(z+1)(z-1) + \tau^2(z^2+4z+1)}{6(z-1)^2} \right].$$

6. Відкидаємо однакові значення знаменника лівої та правої частини рівняння, в чисельнику приводимо подібні доданки щодо ступенів z :

$$Y(z) [(\tau^2 + 3\tau + 12)z^2 + (4\tau^2 - 24)z + (\tau^2 - 3\tau + 12)] =$$

$$= X(z) [(\tau^2 + 21\tau)z^2 + 4\tau^2 z + (\tau^2 - 21\tau)]$$

7. Переходимо до від'ємних ступенів змінної z шляхом ділення лівої і правої частини рівняння на старшу ступінь z :

$$Y(z) [(\tau^2 + 3\tau + 12) + (4\tau^2 - 24)z^{-1} + (\tau^2 - 3\tau + 12)z^{-2}] =$$

$$= X(z) [(\tau^2 + 21\tau) + 4\tau^2 z^{-1} + (\tau^2 - 21\tau)z^{-2}]$$

8. Виконуємо зворотне z -перетворення. Отримуємо різницеве рівняння та приводимо його до виду, зручному для моделювання:

$$y_n = \frac{24 - 4\tau^2}{\tau^2 + 3\tau + 12} y_{n-1} - \frac{\tau^2 - 3\tau + 12}{\tau^2 + 3\tau + 12} y_{n-2} + \frac{\tau^2 + 21\tau}{\tau^2 + 3\tau + 12} x_n + 4\tau^2 x_{n-1} + \frac{\tau^2 - 21\tau}{\tau^2 + 3\tau + 12} x_{n-2}.$$

9. Складаємо програму, яка буде обчислювати значення відліків, використовуючи різницеве рівняння. Вхідний сигнал ОУ є одиничним ступеневим впливом.

Лістинг програми моделювання

```
program pr1;
uses crt;
var y: array[-2..100] of real;
    x: array[-2..100] of real;
    f1: text;
    n: integer;
    i: integer;
    t: real;
begin
  clrscr;
  assign(f1, 'praktik1.txt'); rewrite(f1);
  write('N='); readln(n);
  write('t='); readln(t);
  y[-1]:=0; y[0]:=0; y[1]:=0;
  x[-1]:=0; x[0]:=0;
  for i:=1 to n do begin
    x[i]:=1;
    y[i]:=((12+3*sqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
    yn[i-1]-((12+3*sqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
    yn[i-1]-((4*sqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
    yn[i-1]-((sqr(t)*sqr(t)-21*sqr(t))/(sqr(t)*
    sqr(t)+21*sqr(t)))*yn[i-2];
  end;
  writeln(f1, ' ');
  writeln(f1, 'N=', n);
  writeln(f1, 't=', t:2:2);
  writeln(f1, ' ');
  writeln(f1, ' ');
  writeln(f1, '


|   |      |      |
|---|------|------|
| i | x[i] | y[i] |
|---|------|------|


');
  writeln(f1, '


|   |      |      |
|---|------|------|
| i | x[i] | y[i] |
|---|------|------|


');
  for i:=0 to n do begin
    writeln(f1, '|| ', i:3, ' || ', x[i]:1:0, ' ||
    ', y[i]:3:6, ' || ');
```

```

end;
writeln(f1, ' _____ ');
close(f1);
end.

```

Результати моделювання

Початкові умови: $y[-1]:=0$; $y[0]:=0$; $x[-1]:=0$; $x[0]:=0$
Кількість відліків та крок інтегрування:
 $N=100$; $t=0.10$

Табл. 12.3

i	x[i]	y[i]
1	1	0.000000
2	1	0.008292
3	1	0.024628
4	1	0.048521
5	1	0.079257
6	1	0.115920
7	1	0.157414
8	1	0.202501
9	1	0.249835
10	1	0.298003
11	1	0.345567
12	1	0.391108
13	1	0.433266
14	1	0.470782
15	1	0.502537
16	1	0.527583
17	1	0.545172
18	1	0.554779
19	1	0.556117
20	1	0.549147
.....		
96	1	0.469515
97	1	0.431810
98	1	0.389507
99	1	0.343868
100	1	0.296257

Вихідний сигнал ОУ, В

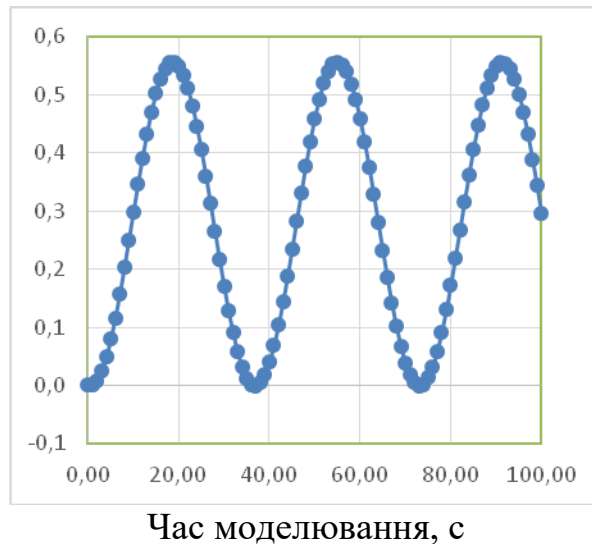


Рис. 12.1. Результат чисельного рішення диференційного рівняння, що є результатом моделювання ОУ

12.1.3. Контрольні питання

1. Наведіть основні етапи моделювання САУ за допомогою ЕОМ.
2. Виконайте порівняльний аналіз різних методів апроксимації вхідних сигналів (кусочно-постійна і кусочно-лінійна апроксимація).
3. Порівняйте (графічно) помилки при одержанні вихідного сигналу ОУ при чисельному інтегруванні по формулі прямокутників і формулі трапецій.
4. Чому при дворазовому застосуванні операції чисельного інтегрування виникає необхідність застосування формули трапецій?
5. Як отримати з диференційного рівняння n -го порядку систему з n диференціальних рівнянь першого порядку?
6. Обґрунтуйте (графічно) алгоритм передбачення і виправлення (модифікований метод Ейлера).
7. Проведіть порівняльний аналіз методів чисельного інтегрування з точки зору початкових умов, що вимагаються для початку обчислень.
8. Як отримати початкові умови для багатокрокових методів чисельного інтегрування?
9. Як оцінити похибку чисельного інтегрування для модифікованого методу Ейлера?
10. Поясніть, як оцінити похибку чисельного інтегрування для методу Рунге-Кутта?
11. Що таке процедура автоматичного регулювання кроку інтегрування?
12. Проведіть порівняльний аналіз методів чисельного інтегрування з точки зору точності і часу обчислень на ЕОМ.