

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Ю.О. Подчашинський, Л.О. Чепюк,
Т.С. Воронова, О.О. Лугових, Л.Й. Шавурська

**МАТЕМАТИЧНІ ТА ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ МОДЕЛЮВАННЯ
ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ**

Навчальний посібник

Житомирська політехніка
2024

УДК 621.317
МЗ4

Рекомендовано до друку Вченою радою
Державного університету «Житомирська політехніка»
(протокол № 7 від 26 червня 2024 р.)

Рецензенти: д.т.н., доцент *Киричук Ю.В.* (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», завідувач кафедри автоматизації та систем неруйнівного контролю); д.т.н., проф. *Пількевич І.А.* (Житомирський військовий інститут імені С.П. Корольова, професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій та кібербезпеки); д.т.н., доцент *Кирилович В.А.* (Державний університет «Житомирська політехніка», професор кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна).

МЗ4 Математичні та програмні засоби моделювання інформаційно-вимірювальних систем : навч. посібник / Подчашинський Ю.О., Чепюк Л.О., Воронова Т.С., Лугових О.О., Шавурська Л.Й. – Житомир : Житомирська політехніка, 2024. – 264 с.

ISBN 978-966-683-657-4

В навчальному посібнику викладено теорію та методи математичного моделювання, визначення динамічних характеристик та ідентифікації параметрів вимірювального каналу комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем. Розглянуто визначення характеристик детермінованих та випадкових сигналів, що обробляються програмно-алгоритмічними методами у вимірювальному каналі, застосування чисельних методів інтегрування, генерування випадкових сигналів, ідентифікації динамічних характеристик та параметрів вимірювального каналу. Матеріал навчального посібника має практичну спрямованість та супроводжується прикладами алгоритмів та програм. В посібнику також наведено завдання до лабораторних та практичних занять з навчальної дисципліни «Математичні та програмні засоби моделювання інформаційно-вимірювальних систем». Навчальний посібник призначено для студентів спеціальності 175 «Інформаційно-вимірювальні технології», він також може бути корисним для фахівців, які займаються моделюванням та розробкою комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем.

Обсяг 264 стор.; 134 іл.; 32 табл.; бібліогр. 23 назви.

УДК 621.317

ISBN 978-966-683-657-4

© Подчашинський Ю.О., Чепюк Л.О.,
Воронова Т.С., Лугових О.О., Шавурська Л.Й., 2024 р.

ЗМІСТ

	стор.
ВСТУП	10
1. БЕЗПЕРЕРВНІ, ДИСКРЕТНІ ТА ЦИФРОВІ СИГНАЛИ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ	12
1.1. Основні етапи перетворення аналогового сигналу на цифровий сигнал	12
1.1.1. Дискретизація сигналу за часом	12
1.1.2. Квантування за рівнем.....	14
1.1.3. Цифрове кодування.....	16
1.2. Приклад програми моделювання	18
1.2.1. Моделювання аналогового, дискретного, квантованого та цифрового сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів.....	18
1.2.2. Моделювання аналогового сигналу	19
1.2.3. Моделювання дискретного сигналу.....	19
1.2.4. Моделювання квантованого сигналу	20
1.2.5. Моделювання цифрового сигналу	21
1.2.6. Обчислення абсолютної похибки цифрового сигналу.....	22
1.2.7. Формування гістограми статистичного розподілу похибки...	23
2. ДЕТЕРМІНОВАНІ СИГНАЛИ ТА ЇХ ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	24
2.1. Основні визначення та характеристики детермінованих сигналів	24
2.2. Приклад програми моделювання.....	26
2.2.1. Моделювання детермінованих сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів	26
2.2.2. Моделювання трикутного імпульсу.....	27
2.2.3. Моделювання послідовності трикутних імпульсів	27
2.2.4. Моделювання сигналу з лінійною частотною модуляцією	28
2.2.5. Розрахунок енергетичних характеристик сигналу. Моделювання сигналу в часовій області.....	29
2.2.6. Розрахунок енергії та потужності сигналу на заданому інтервалі в часовій і частотній області	29
2.2.7. Розрахунок амплітудного спектра сигналу	30
2.2.8. Розрахунок енергетичного спектра сигналу	31
2.2.9. Розрахунок спектра потужності сигналу.....	32
2.2.10. Розрахунок функції спектральної щільності потужності сигналу	34

3. ВИПАДКОВІ СИГНАЛИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ.

ПСЕВДОВИПАДКОВІ СИГНАЛИ	35
3.1. Математичні моделі випадкових сигналів	35
3.2. Приклад програми моделювання.....	43
3.2.1. Моделювання випадкових сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів	43
3.2.2. Моделювання випадкового сигналу з нормальним розподілом	43
3.2.3. Моделювання випадкового сигналу з рівномірним розподілом	45
3.2.4. Моделювання псевдовипадкового гармонійного сигналу	47

4. ПРОСТІ ТА СКЛАДНІ СИГНАЛИ. БАЗА СИГНАЛУ. ФУНКЦІЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

4.1. Математичні моделі сигналів	49
4.2. Приклад програми моделювання.....	52
4.2.1. Моделювання автокореляційних функцій і функції невизначеності для простих сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів	52
4.2.2. Моделювання двовимірної автокореляційної функції для тонального імпульсу	52
4.2.3. Моделювання функції невизначеності для тонального імпульсу	54
4.2.4. Формування проекції функції невизначеності для тонального імпульсу	55
4.2.5. Моделювання автокореляційної функції за частотою для тонального імпульсу	56
4.2.6. Моделювання автокореляційної функції за часом для тонального імпульсу	57
4.2.7. Моделювання автокореляційних функцій та функції невизначеності для складних сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів	58
4.2.8. Моделювання двовимірної автокореляційної функції для імпульсу лінійною частотною модуляцією	58
4.2.9. Моделювання функції невизначеності для імпульсу з лінійною частотною модуляцією	60
4.2.10. Моделювання автокореляційної функції за частотою імпульсу з лінійною частотною модуляцією	62
4.2.11. Моделювання автокореляційної функції за частотою імпульсу з лінійною частотною модуляцією	63

5. ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ НА ЕОМ.....	65
5.1. Теоретичні відомості про чисельні методи моделювання складних динамічних систем	65
5.2. Методи та алгоритм програми моделювання інформаційно-вимірювальних систем	72
5.3. Приклад програми моделювання.....	78
5.3.1. Програма моделювання складних динамічних систем на ЕОМ.....	78
5.3.2. Результати обчислення вихідної реакції системи на основі методів чисельного інтегрування	84
5.3.3. Оцінка точності методів чисельного інтегрування	88
6. ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОГРАМНО-АЛГОРИТМІЧНИХ ГЕНЕРАТОРІВ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ.....	91
6.1. Теорія та методи моделювання випадкових сигналів	91
6.2. Методи та алгоритм програми дослідження програмно-алгоритмічних генераторів випадкових сигналів.....	103
6.3. Приклад програми моделювання.....	106
6.3.1. Програма дослідження програмно-алгоритмічних генераторів випадкових сигналів	106
6.3.2. Результати дослідження стандартних методів генерування випадкових сигналів	110
6.3.3. Результати дослідження псевдовипадкової бінарної послідовності.....	115
7. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ ВЗАЄМНОЇ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ	119
7.1. Теоретичні основи методу ідентифікації.....	119
7.2. Метод взаємної кореляційної функції та алгоритм визначення динамічних характеристик систем	122
7.3. Приклад програми моделювання.....	125
7.3.1. Програмна реалізація методу ідентифікації динамічних характеристик систем.....	125
7.3.2. Ідентифікація динамічних характеристик аперіодичної системи 1-го порядку.....	130
7.3.3. Ідентифікація динамічних характеристик системи 2-го порядку з інтеграторами.....	133

8. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ АДАПТИВНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ	136
8.1. Теоретичні основи адаптивної ідентифікації	136
8.2. Метод та алгоритми адаптивної ідентифікації систем.....	141
8.3. Приклад програми моделювання.....	145
8.3.1. Програмна реалізація методів адаптивної ідентифікації	145
8.3.2. Результати адаптивної ідентифікації за рекурентним алгоритмом	147
8.3.3. Результати адаптивної ідентифікації за ітераційним алгоритмом	154
9. ЗАСТОСУВАННЯ ФІЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПОТОЧНИХ КООРДИНАТ ТА ПАРАМЕТРІВ РУХУ ОБ'ЄКТІВ ВИМІРЮВАНЬ.....	158
9.1. Основні відомості з теорії Калмановської оптимальної фільтрації	158
9.2. Оптимальне послідовне оцінювання параметрів незбурюваної детермінованої траєкторії руху об'єктів вимірювань	159
9.3. Формульна схема оптимального алгоритму послідовного оцінювання векторного параметру руху об'єктів вимірювань	159
9.4. Програмна реалізація фільтра Калмана та приклад виконання лабораторної роботи	164
10. ЗАСТОСУВАННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПОТОЧНИХ КООРДИНАТ ОБ'ЄКТІВ ВИМІРЮВАНЬ.....	169
10.1. Основні відомості з теорії експоненціального згладжування	169
10.2. Помилки експоненціального згладжування параметрів руху об'єктів вимірювань. Вибір оптимального значення ξ	170
10.3. Рівняння згладжування в дискретній формі.....	174
10.4. Еквівалентна цифрова система для оцінки параметрів руху об'єктів вимірювань.....	175
10.5. Оцінка ефективності згладжування	176
10.6. Програмна реалізація експоненціального згладжування.....	179
11. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З МАТЕМАТИЧНИХ ТА ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ	187
11.1. Лабораторна робота №1. Безперервні, дискретні та цифрові сигнали в інформаційно-вимірювальних системах	187
11.1.1. Завдання та порядок виконання роботи	187
11.1.2. Вимоги до звіту	187

11.1.3. Варіанти завдань для індивідуальної роботи	188
11.1.4. Контрольні питання	189
11.2. Лабораторна робота №2. Детерміновані сигнали та їх основні характеристики	189
11.2.1. Завдання та порядок виконання роботи	189
11.2.2. Вимоги до звіту	190
11.2.3. Варіанти завдань для індивідуальної роботи	191
11.2.4. Контрольні питання	192
11.3. Лабораторна робота № 3. Випадкові сигнали та їх характеристики. Псевдовипадкові сигнали	193
11.3.1. Завдання та порядок виконання роботи	193
11.3.2. Вимоги до звіту	193
11.3.3. Варіанти завдань для індивідуальної роботи	194
11.3.4. Контрольні питання	198
11.4. Лабораторна робота № 4. Прості та складні сигнали. База сигналу. Функція невизначеності	198
11.4.1. Завдання та порядок виконання роботи	198
11.4.2. Вимоги до звіту	199
11.4.3. Варіанти завдань для індивідуальної роботи	199
11.4.4. Контрольні питання	200
11.5. Лабораторна робота № 5. Дослідження чисельних методів моделювання інформаційно-вимірювальних систем на ЕОМ	200
11.5.1. Порядок виконання роботи	200
11.5.2. Зміст звіту	202
11.5.3. Контрольні питання	202
11.6. Лабораторна робота № 6. Дослідження статистичних характеристик програмно-алгоритмічних генераторів випадкових сигналів	203
11.6.1. Порядок виконання роботи	203
11.6.2. Зміст звіту	205
11.6.3. Контрольні питання	206
11.7. Лабораторна робота № 7. Ідентифікація динамічних характеристик інформаційно-вимірювальних систем за методом взаємної кореляційної функції	206
11.7.1. Порядок виконання роботи	206
11.7.2. Зміст звіту	208
11.7.3. Контрольні питання	208

11.8. Лабораторна робота № 8. Дослідження методів адаптивної ідентифікації інформаційно-вимірювальних систем	208
11.8.1. Порядок виконання роботи	208
11.8.2. Зміст звіту	211
11.8.3. Контрольні питання	211
11.9. Лабораторна робота 9. Застосування фільтра Калмана для вимірювання поточних координат та параметрів руху об'єктів вимірювань	211
11.9.1. Завдання для лабораторної роботи.....	211
11.9.2. Зміст звіту	212
11.9.3. Контрольні питання	212
11.10. Лабораторна робота 10. Застосування експоненціального згладжування для вимірювання поточних координат об'єктів вимірювань	218
11.10.1. Завдання для лабораторної роботи.....	218
11.10.2. Зміст звіту	219
11.10.3. Контрольні питання	219
12. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З МАТЕМАТИЧНИХ ТА ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВІМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ	220
12.1. Практичне заняття 1. Моделювання складної системи, що задана диференціальним рівнянням.....	220
12.1.1. План проведення практичного заняття.....	220
12.1.2. Приклад виконання завдання практичного заняття	221
12.1.3. Контрольні питання	225
12.2. Практичне заняття 2. Розробка алгоритму та програми для генератора випадкових чисел на основі обчислення залишку від ділення.....	226
12.2.1. План проведення практичного заняття.....	226
12.2.2. Приклад виконання завдання практичного заняття	227
12.2.3. Контрольні питання	230
12.3. Практичне заняття 3. Розробка алгоритму та програми для генератора випадкових чисел на основі псевдовипадкової бінарної послідовності.....	231
12.3.1. План проведення практичного заняття.....	231
12.3.2. Приклад виконання завдання практичного заняття	231
12.3.3. Контрольні питання	235

12.4. Практичне заняття 4. Розрахунок перехідної характеристики інформаційно-вимірювальних систем	236
12.4.1. План проведення практичного заняття.....	236
12.4.2. Приклад виконання завдання практичного заняття	236
12.4.3. Контрольні питання	240
12.5. Практичне заняття 5. Ідентифікація динамічних характеристик інформаційно-вимірювальних систем за методом взаємної кореляційної функції	241
12.5.1. План проведення практичного заняття.....	241
12.5.2. Приклад виконання завдання на практичне заняття	242
12.5.3. Контрольні питання	248
12.6. Практичне заняття 6. Адаптивна ідентифікація інформаційно-вимірювальних систем на основі регресійної моделі	249
12.6.1. План проведення практичного заняття.....	249
12.6.2. Приклад виконання завдання на практичне заняття	250
12.6.3. Контрольні питання	253
12.7. Практичне заняття 7. Адаптивна ідентифікація інформаційно-вимірювальних систем на основі регресійно-авторегресійної моделі	254
12.7.1. План проведення практичного заняття.....	254
12.7.2. Приклад виконання завдання на практичне заняття	255
12.7.3. Контрольні питання	258
12.8. Практичне заняття 8. Застосування фільтра Калмана для визначення поточних координат об'єкту вимірювання.....	259
12.8.1. План проведення практичного заняття.....	259
12.8.2. Приклад виконання завдання практичного заняття	259
12.8.3. Контрольні питання	261
СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....	262

ВСТУП

Включення сучасних програмних засобів обробки інформації та прийняття рішень до складу інформаційно-вимірювальних систем дозволяє суттєво підвищити їх точність та швидкодію, розширити функціональні можливості. В результаті створюються сучасні комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні системи та автоматизовані системи управління технологічними процесами.

Бурхливий розвиток науки і техніки призводить до необхідності оновлення методів та алгоритмів обробки вимірювальної інформації в інформаційно-вимірювальних системах. Прискорити процес проектування та зробити його більш продуктивним можливо тільки шляхом розробки та впровадження прогресивних методів проектування при широкому застосуванні інформаційно-комп'ютерних технологій.

Звідси виникає необхідність переходу від фізичного моделювання до математичного і програмного моделювання, від евристичних методів до методів чисельного моделювання на комп'ютері. Прикладна математика та чисельні методи дають можливість алгоритмізувати велику кількість процедур обробки вимірювальної інформації та ідентифікації систем, які мають формальну математичну інтерпретацію.

Вирішення задач аналізу комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем отримують за допомогою програмно-алгоритмічних методів. Методи відрізняються один від одного витратами машинного часу, необхідним об'ємом оперативної пам'яті, вірогідністю отримання рішення, точністю рішення. Магістру з інформаційно-вимірювальних технологій важливо знати ці методи перш за все для правильного вибору параметрів прикладних програм в конкретній задачі проектування.

Результати аналізу інформаційно-вимірювальних систем не вказують однозначно на те, яку структуру системи потрібно вибрати, тобто вони не вирішують задачі синтезу. Але значення методів аналізу надзвичайно велике, тому що ці методи дозволяють перебрати декілька варіантів структури і порівняти їх між собою. Це дозволяє фахівцю знайти необхідну структуру інформаційно-вимірювальної системи.

В навчальному посібнику викладено теорію та методи математичного моделювання, визначення динамічних характеристик та ідентифікації параметрів вимірювального каналу комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем. Розглянуто визначення характеристик детермінованих та випадкових сигналів, що обробляються програмно-алгоритмічними методами у вимірювальному каналі, застосування чисельних методів інтегрування, генерування випадкових сигналів, ідентифікації динамічних характеристик та параметрів вимірювального каналу.

Навчальний посібник “Математичні та програмні засоби моделювання інформаційно-вимірювальних систем” складений відповідно до освітньо-

професійної програми «Комп'ютеризовані інформаційно-вимірювальні системи» підготовки магістрів спеціальності 175 «Інформаційно-вимірювальні технології» у Державному університеті «Житомирська політехніка».

Навчальний посібник відповідає робочій програмі навчальної дисципліни «Математичні та програмні засоби моделювання інформаційно-вимірювальних систем» загальним обсягом 4 кредити ЄКТС. Предметом вивчення даної навчальної дисципліни є математичні та програмні засоби моделювання комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем та їх складових частин, що реалізуються на основі сучасних цифрових ЕОМ. Мета викладання навчальної дисципліни «Математичні та програмні засоби моделювання інформаційно-вимірювальних систем» – дати майбутнім магістрам знання основних положень та методів чисельного моделювання складних систем, їх математичного опису, складання та дослідження їх математичних моделей; знання методів прогнозування розвитку інформаційно-вимірювальних систем та їх програмного забезпечення.

Основними завданнями вивчення навчальної дисципліни «Математичні та програмні засоби моделювання інформаційно-вимірювальних систем» є набуття студентами знань, умінь і компетентностей щодо математичного моделювання та розробки комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем та ефективного вирішення завдань професійної діяльності. Розглянуто програмно-алгоритмічні методи, що використовуються для математичного моделювання комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем.

Матеріал навчального посібника має практичну направленість та супроводжується прикладами. В навчальному посібнику також наведено завдання до лабораторних та практичних занять з математичних та програмних засобів моделювання комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем.

Навчальний посібник призначено для здобувачів вищої освіти спеціальності 175 «Інформаційно-вимірювальні технології», він також може бути корисним для фахівців, які займаються розробкою комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем та автоматизованих систем управління.

Автор висловлює вдячність рецензентам д.т.н., проф. Пількевичу І.А., д.т.н., доц. Кириловичу В.А., д.т.н., доц. Киричуку Ю.В. за підтримку, корисні поради та зауваження, що дозволили покращити якість навчального посібника.

1. БЕЗПЕРЕРВНІ, ДИСКРЕТНІ ТА ЦИФРОВІ СИГНАЛИ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

1.1. Основні етапи перетворення аналогового сигналу на цифровий сигнал

Безперервним або аналоговим називається сигнал, функція опису якого має безперервні області визначення та значень.

Цифровим називається сигнал, функція опису якого дискретна, а значення відповідають кінцевому набору закодованих певним чином рівням (рівні квантування).

Перетворення сигналу з аналогового у цифровий вигляд виконується спеціальним електронним пристроєм (мікросхемою) – аналого-цифровим перетворювачем (АЦП), а зворотна операція – цифро-аналоговим перетворювачем (ЦАП). Основні етапи перетворення аналогового сигналу в цифровий представлені на рис. 1.1. Розглянемо послідовно етапи аналого-цифрового перетворення.

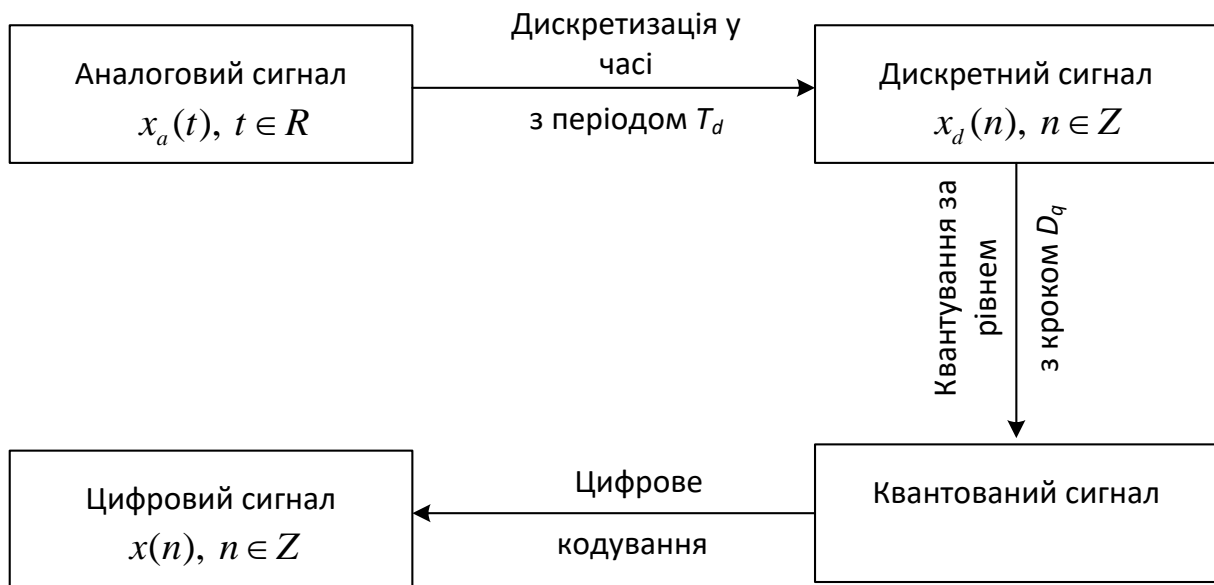


Рис. 1.1. Основні етапи перетворення аналогового сигналу на цифровий сигнал

1.1.1. Дискретизація сигналу за часом

Дискретизацією за часом називається процес вибірки значень функції, що описує сигнал, для заданих дискретних значень аргументу (рис. 1.2). Значення, отримані в результаті дискретизації, часто називають *відліками* сигналу.

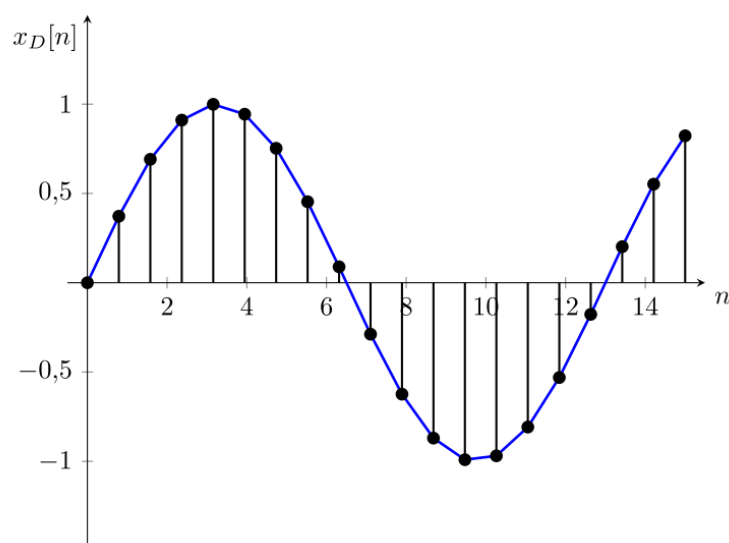


Рис. 1.2. Дискретизація сигналу за часом

Як правило, на практиці застосовується рівномірна дискретизація. У даному випадку значення аргументу функції вибираються через рівні проміжки часу – *період дискретизації* T_d . На практиці замість періоду дискретизації часто застосовується зворотна величина – *частота дискретизації*

$$f_d = \frac{1}{T_d}.$$

Вибір частоти дискретизації для сигналів з обмеженим частотним спектром повинен виконуватися на підставі теореми Найквіста-Котельникова, відповідно до якої частота дискретизації повинна визначатися співвідношенням

$$f_d > 2f_{\max}, \quad (1.1)$$

де f_{\max} - максимальне значення частоти в спектрі сигналу. Невиконання цієї вимоги призводить до спотворень сигналу, пов'язаних із ефектом накладання спектру. Як видно із співвідношення (1.1), теорема Найквіста-Котельникова не накладає обмеження зверху на значення частоти дискретизації, при цьому на практиці вибір надто великих значень призводить до надмірних вимог до обсягу пам'яті та обчислювальної продуктивності пристрою цифрової обробки сигналів.

Формально дискретизацію за часом можна описати виразом

$$x_d(nT_d) = x(t)|_{t = nT_d}, n = 0, 1, 2, \dots$$

У разі, якщо $T_d = \text{const}$ (рівномірна дискретизація), то часто позначення відліків дискретного сигналу замінюють позначенням еквівалентної послідовності – $x_d(n)$.

Область визначення функції опису дискретного сигналу є дискретною, а область значень безперервною.

1.1.2. Квантування за рівнем

Квантуванням за рівнем називається процес заміщення безлічі можливих значень функції, що описує дискретний сигнал $x_d(n)$, у заданому діапазоні зміни кінцевим числом значень $x_q(n)$ (рис. 1.3).

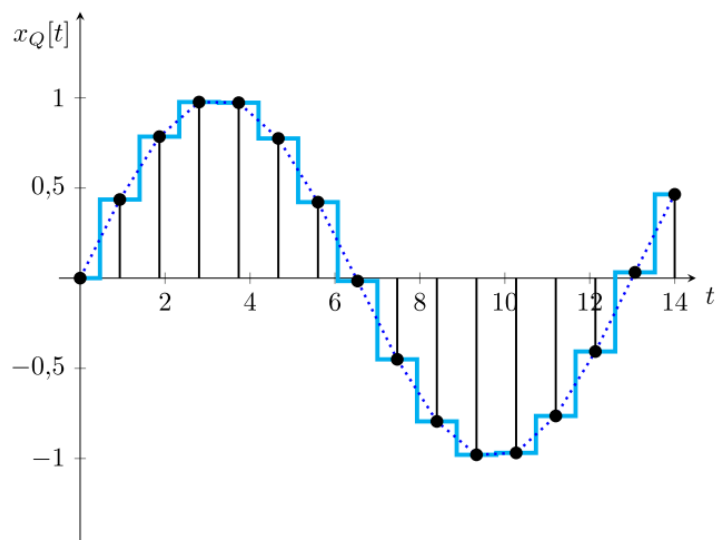


Рис. 1.3. Квантування сигналу за рівнем

Значення квантованого сигналу називаються *рівнями квантування*. Інтервал між рівнями квантування називається *кроком квантування* та для рівномірного квантування визначається виразом

$$D_q = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_q},$$

де n_q – число рівнів квантування;

x_{\max} – максимальне значення функції;

x_{\min} – мінімальне значення функції.

На практиці в електронній обчислювальній техніці найширше застосування знайшло цифрове кодування в двійковому коді. Кількість рівнів квантування практично можна обчислити за формулою:

$$n_q = 2^b,$$

де b – розрядність аналого-цифрового перетворювача.

Залежно від способу заміщення нескінченної кількості значень функції кінцевою розрізняють квантування з усіченням і округленням. Значення сигналу, отримані в процесі квантування з усіченням визначаються виразом:

$$x_q(n) = \left[\frac{x_q(n)}{D_q} \right] \cdot D_q, \quad (1.2)$$

Значення сигналу, отримані в процесі квантування з округленням визначаються виразом:

$$x_q(n) = \left[\frac{x_q(n)}{D_q} + 0,5 \right] \cdot D_q, \quad (1.3)$$

Аналізуючи вирази (1.2) і (1.3), можна зробити висновок, що при квантуванні за рівнем неминуче виникають нелінійні спотворення сигналу, які мають назву *шум квантування*.

Абсолютна похибка квантування визначається виразом:

$$\varepsilon(n) = x_q(n) - x_d(n),$$

і є рівномірно розподіленою випадковою величиною. Її максимальне значення обчислюється за формулою:

$$\max(|\varepsilon(n)|) = \frac{D_q}{2}.$$

Дисперсія визначається виразом:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{D_q^2}{12},$$

а щільність ймовірності дорівнює:

$$f_{\varepsilon} = \frac{1}{D_q},$$

Таким чином, очевидно, що абсолютна похибка квантування зменшується із зменшенням кроку квантування або збільшенням кількості рівнів квантування.

1.1.3. Цифрове кодування

Цифрове кодування - це процес зіставлення цифрового коду, що відповідає рівню квантування, кожному значенню дискретного квантованого сигналу.

На рис. 1.4 представлено розрядну сітку електронної обчислювальної машини.

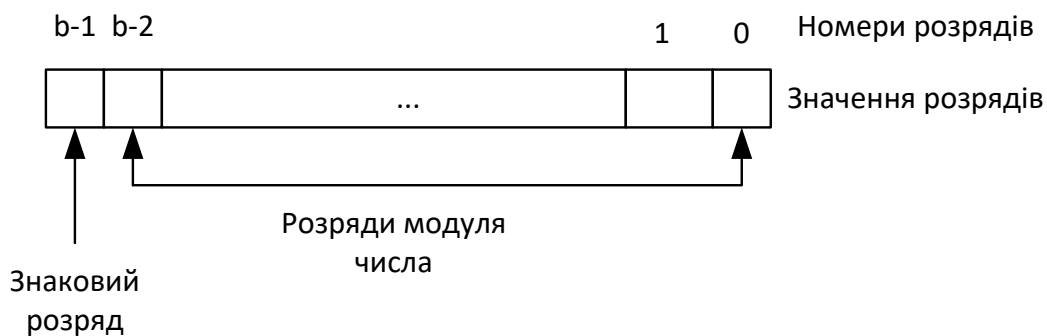


Рис 1.4. Розрядна сітка електронної обчислювальної машини

Розглянемо кодування цілих чисел. Крайній правий розряд вважається молодшим розрядом, а крайній лівий – старшим. При перетворенні біполярних сигналів використовується спеціальне кодування, наприклад, прямий, зворотний або додатковий коди. У цьому випадку крайній лівий розряд служить для зберігання знаку числа. У прямому, зворотному та додатковому кодах знаковий розряд формується однаково: для негативних чисел він набуває значення "1", а для позитивних - "0", а правила кодування розрядів модуля числа відрізняються.

При виконанні кодування у *прямий код* числові розряди позитивних і негативних чисел залишаються без зміни. З урахуванням зміни знакового розряду для негативних чисел перетворення можна описати виразом:

$$x_f''(n) = \begin{cases} x(n), & x(n) \geq 0 \\ 2^{b-1} + |x(n)|, & x(n) < 0 \end{cases}$$

При виконанні кодування у *зворотний код* числові розряди позитивних чисел залишаються без зміни, а негативних чисел – інвертуються. З урахуванням формування значення знакового розряду перетворення можна описати виразом:

$$x_r''(n) = \begin{cases} x(n), & x(n) \geq 0 \\ 2^b - 1 + |x(n)|, & x(n) < 0 \end{cases}$$

При виконанні кодування у *додатковий код* числові розряди позитивних чисел залишаються без зміни, а для негативних чисел перетворення здійснюється додаванням «1» до зворотного коду. З урахуванням формування значення знакового розряду перетворення можна описати виразом:

$$x_a''(n) = \begin{cases} x(n), & x(n) \geq 0 \\ 2^b - |x(n)|, & x(n) < 0 \end{cases}$$

У таблиці 1 як приклад наведено кодування чисел для розрядності $b = 4$. Як видно з таблиці, особливістю прямого і зворотного кодів є двоїстість нуля: позитивний нуль «+0» і негативний нуль «-0».

Додатковий код має лише один нуль і є найпоширенішим способом кодування інформації в сучасних електронних обчислювальних машинах. Основною перевагою його застосування є можливість заміни в арифметико-логічних пристроях комп'ютера операції віднімання операцією додавання.

Приклад зображення аналогового та відповідного йому цифрового сигналу в часовій області після послідовного виконання операцій дискретизації, квантування та цифрового кодування з поданням додаткового коду наведено на рис. 1.5.

Таблиця 1.1. Кодування чисел у прямому, зворотному та додатковому кодах для розрядності $b = 4$

Число	Прямий код	Зворотній код	Додатковий код
-8	—	—	1000
-7	1111	1000	1001
-6	1110	1001	1010
-5	1101	1010	1011
-4	1100	1011	1100
-3	1011	1100	1101
-2	1010	1101	1110
-1	1001	1110	1111
0	1000(0000)	1111(0000)	0000
1	0001	0001	0001
2	0010	0010	0010
3	0011	0011	0011
4	0100	0100	0100
5	0101	0101	0101
6	0110	0110	0110
7	0111	0111	0111

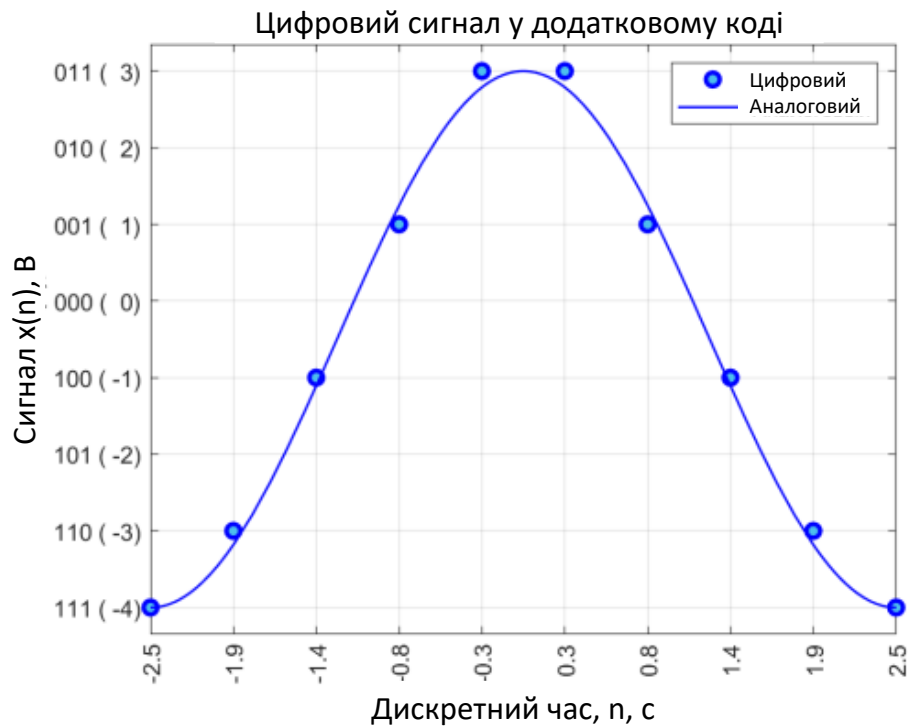


Рис. 1.5. Зображення аналогового та відповідного йому цифрового сигналу

1.2. Приклад програми моделювання

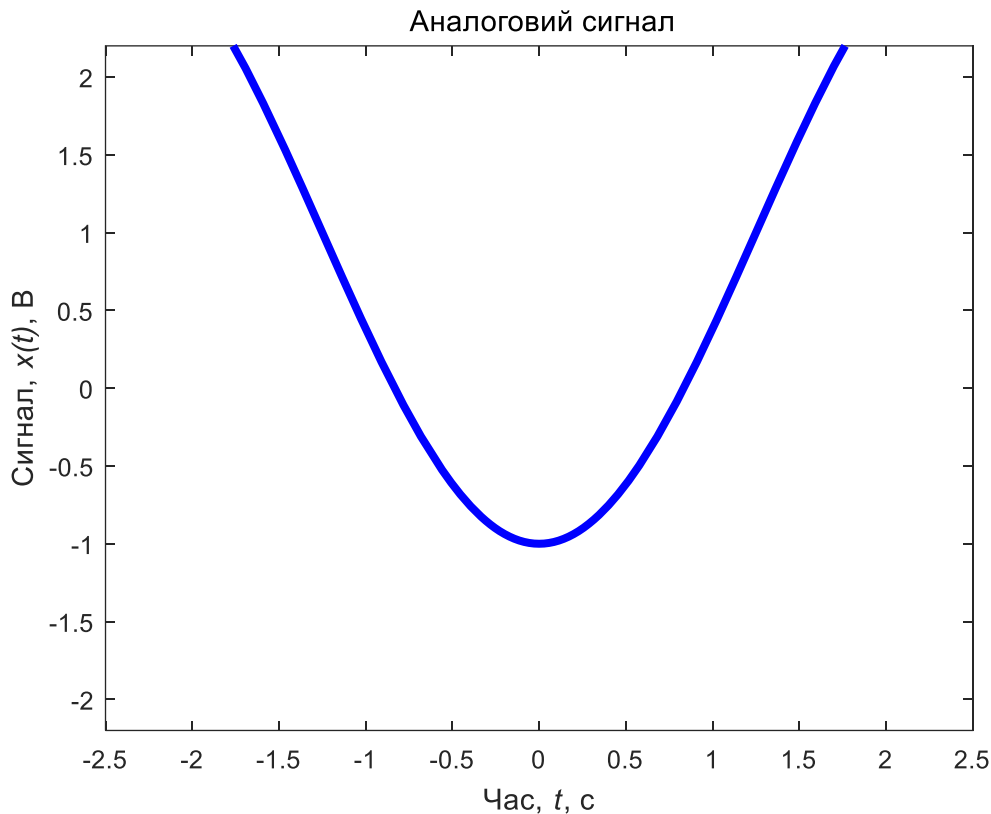
1.2.1. Моделювання аналогового, дискретного, квантованого та цифрового сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів

```
% Імітаційне моделювання аналогового, дискретного та
% квантованого сигналу на прикладі функції косинуса
clear all; % Очищення пам'яті
close all; % Закриття всіх вікон із графіками
clc; % Очищення вікна команд та повідомлень
tColor='b'; % Колір графіків у часовій області
Color0='r'; % Колір графіків еталонного сигналу
tColorLight=[0.3 0.7 0.9]; % Колір графіків у часовій області
fColor=[1 0.4 0]; % Колір графіків у частотній області
eColor=[0.85 0.325 0.098]; % Колір графіків похибки
eColorLight=[0.9 0.9 0.4]; % Колір графіків похибки
eColorDark=[0.635 0.078 0.184]; % Колір графіків похибки

syms x y; % Визначаємо символічні змінні
A=2; % Амплітуда сигналу, В
A0=1; % Початкова амплітуда
f=0.2; % Частота сигналу, Гц
fd=5; % Частота дискретизації, Гц
b=4; % Розрядність АЦП
phi = pi;
tmin=-2.5; % Початковий час моделювання
tmax= 2.5; % Кінцевий час моделювання
```

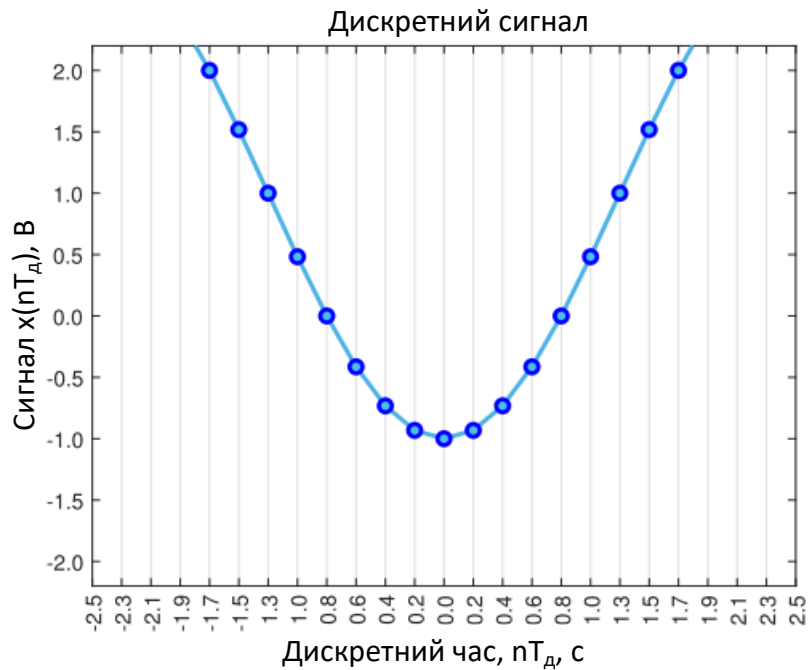
1.2.2. Моделювання аналогового сигналу

```
% Моделювання аналогового сигналу
xa=A0 + A*cos(2*pi*x*f+ phi); % Формування значень
% Формування графіка
figure;hPlot=fplot(xa, 'Color', tColor, 'LineWidth', 3);
axis([tmin tmax -A-0.2 A+0.2]); % Діапазон значень осей
title({'\rm Аналоговий сигнал'}); % Заголовок
xlabel('Час, \it t\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал, \it x(t)\rm, В'); % Напис осі ординат
ytickformat('%.1f'); % Формат значень по осі ординат
```



1.2.3. Моделювання дискретного сигналу

```
% Моделювання дискретного сигналу
td=linspace(tmin,tmax,round((tmax-tmin)*fd)); % Формування області визначення
xd1=subs(xa, x, td); % Формування значень
xd=double(xd1); % Перетворення символічних виразів на числові
% Формування графіка
figure; plot(td,xd, 'o-', 'Color', tColorLight,...
    'LineWidth', 2, 'MarkerEdgeColor', tColor,...
    'MarkerFaceColor',[0.3010, 0.7450, 0.9330]);
axis([tmin tmax -A-0.2 A+0.2]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Дискретний сигнал'}); % Заголовок
xlabel('Дискретний час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал \it x(nT_d)\rm, В'); % Напис осі ординат
xticks(td); % Написи по осі абсцис
xtickangle(90); % Поворот написів по осі абсцис
xtickformat('%.1f'); % Формат значень по осі абсцис
ytickformat('%.1f'); % Формат значень по осі ординат
set(gcf, 'XGrid', 'on'); % Сітка графіка
```



1.2.4. Моделювання квантованого сигналу

```

% Моделювання квантованого сигналу
N=2^b; % Кількість рівнів квантування
q=2*A/(N-1); % Крок квантування
levels=-A+q/2:q:A-q/2; % Рівні порівняння сигналу
codebook=-A:q:A; % Рівні квантування сигналу
[ind, xq, D]=quantiz(xd, levels, codebook); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(td,xq, 'o-', 'Color', tColorLight,...
    'LineWidth', 2, 'MarkerEdgeColor', tColor,...
    'MarkerFaceColor',tColorLight);
xticks(td); % Написи по осі абсцис
yticks(codebook); % Написи по осі ординат
xtickformat('%.1f'); % Формат значень по осі абсцис
ytickformat('%.2f'); % Формат значень по осі ординат
xtickangle(90); % Поворот написів по осі абсцис
grid on; % Сітка графіка
axis([tmin tmax -A-0.2 A+0.2]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Квантований за рівнем сигнал'}); % Заголовок
xlabel('Дискретний час, \it nT_d\rm, с'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал\it x(nT_d)\rm, В'); % Напис осі ординат

```

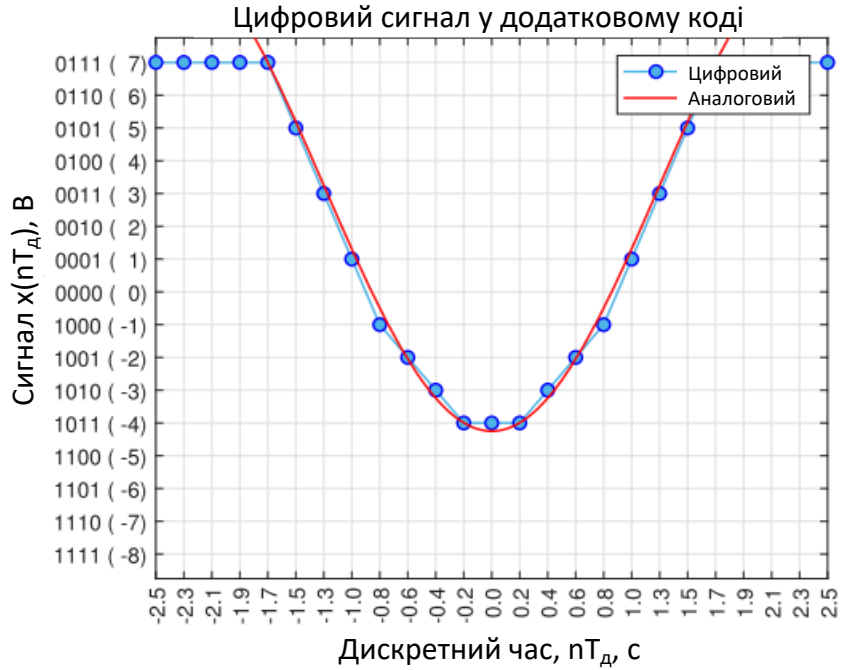


1.2.5. Моделювання цифрового сигналу

```

% Моделювання цифрового сигналу
codes=-N/2:N/2-1; % Масив кодованих значень
codescomp=codes;
codescomp(1:end/2)=N/2-1-codes(1:end/2); % Додатковий код
bincodes=dec2bin(codescomp); % Коди у двійковій системі
ylabel=compose('%s (%3d)',bincodes,codes'); % Написи по осі ординат
% Формування графіка
figure; plot(td,xq, 'o-', 'Color', tColorLight,...
    'LineWidth', 1, 'MarkerEdgeColor', tColor,...
    'MarkerFaceColor',tColorLight);
xticks(td); % Написи по осі абсцис
yticks(codebook); % Написи по осі ординат
xtickformat('%0.1f'); % Формат значень по осі абсцис
yticklabels(ylabels); % Формат значень по осі ординат
xtickangle(90); % Поворот написів по осі абсцис
grid on; % Сітка графіка
axis([tmin tmax -A-0.2 A+0.2]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Цифровий сигнал у додатковому коді'}); % Заголовок
xlabel('Дискретний час, \it nT_д\rm, с'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал\it x(nT_д)\rm, код'); % Напис осі ординат
hold on; fplot(xa,'Color',Color0,'LineWidth', 1);
legend('Цифровий', 'Аналоговий');

```

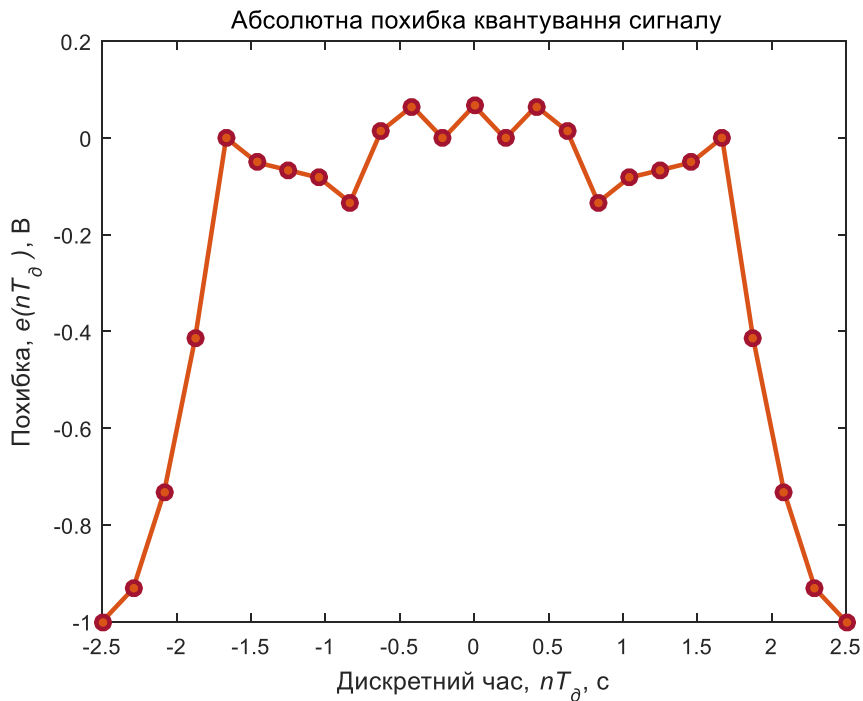


1.2.6. Обчислення абсолютної похибки цифрового сигналу

```

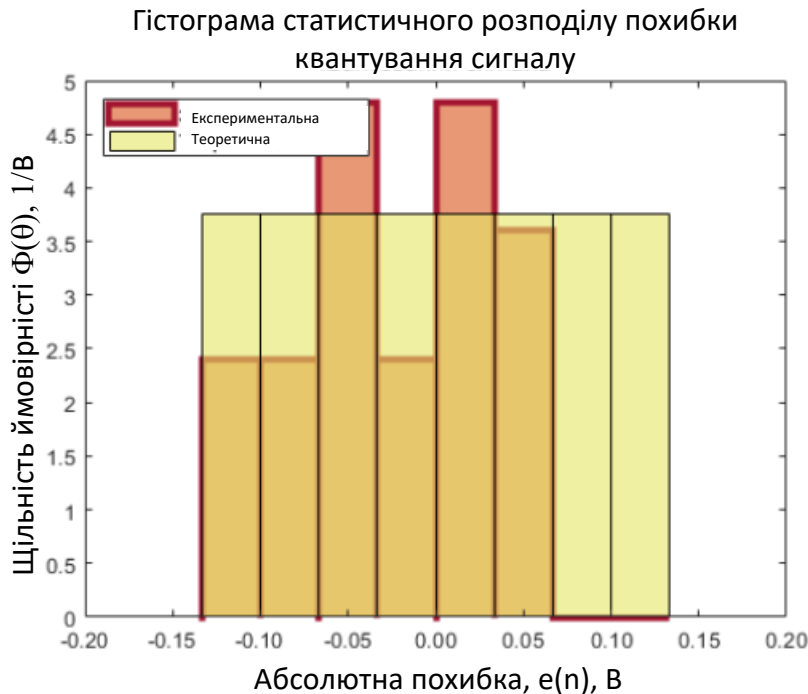
% Обчислення похибки цифрового сигналу
ex=xq-xd; % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(td,ex,'o-','Color', eColor,'LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor',eColorDark,...
'MarkerFaceColor',eColor);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Абсолютна похибка квантування сигналу'}); % Заголовок
xlabel('Дискретний час, \it nT_d\rm, с'); % Напис осі абсцис
ylabel('Похибка, \it e(nT_d) \rm, В'); % Напис осі ординат

```



1.2.7. Формування гістограми статистичного розподілу похибки

```
% Формування гістограми статистичного розподілу похибки
% квантування сигналу
nBars=8; % Кількість прямокутників гістограми
edges=linspace(-A/(N-1),A/(N-1),nBars+1); % Формування меж діапазонів
figure; histogram(ex,edges,'EdgeColor',eColorDark,...
    'Normalization','pdf','FaceColor',eColor,...
    'LineWidth',3); % Експериментальна
set(get(gcf,'CurrentAxes'),'FontSize',10); % Зміна шрифту
xlim([-1.5*A/(N-1) 1.5*A/(N-1)]); % Діапазон значень осей
xtickformat('%0.2f'); % Формат значень по осі абсцис
title({'\rm Гістограма статистичного розподілу похибки',...
    'квантування сигналу'}); % Заголовок
xlabel('Абсолютна похибка, \it e(n)\rm, B'); % Напис осі абсцис
ylabel('Щільність ймовірності, \it \Phi(e)\rm, 1/B'); % Напис осі ординат
hold on; histogram('BinEdges',edges,'BinCounts',ones(nBars,1),...
    'Normalization','pdf','FaceColor',eColorLight); % Теоретична
legend('Експериментальна','Теоретична','Location','northwest');
```



2. ДЕТЕРМІНОВАНІ СИГНАЛИ ТА ЇХ ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.1. Основні визначення та характеристики детермінованих сигналів

Детермінований сигнал - це сигнал, закон зміни і всі параметри якого заздалегідь відомі. Оскільки сигнал, параметри якого повністю відомі, не може бути носієм нової інформації, то на практиці під детермінованими сигналами також часто розуміють сигнали, закон зміни яких визначений, а параметри можуть бути заздалегідь невідомі [1].

Детермінований сигнал характеризується:

- функцією, що описує (законом зміни);
- аргументами функції;
- параметрами функції;
- енергетичними характеристиками.

Закон зміни детермінованого сигналу у загальному вигляді визначається функцією що описує, $x(\vec{T}, \vec{P})$ де $\vec{T} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ – вектор аргументів сигналу, $\vec{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор параметрів сигналу.

Такий опис (математична модель) сигналу дає змогу абстрагуватися від фізичної природи при аналізі його властивостей.

За кількістю елементів вектору аргументів сигнали поділяють на одновимірні та багатовимірні. В якості аргументів, як правило, використовують змінні часу і координат простору. Розглянемо як приклад найпростіший детермінований гармонійний сигнал вигляду

$$x(t) = A_0 \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0),$$

У цьому випадку сигнал є одновимірним часовим. Його єдиним аргументом є змінна часу t , а параметрами: A_0 – амплітуда; f_0 – частота; φ_0 – початкова фаза.

Зміна одного з параметрів або декількох параметрів одночасно може кодувати інформацію під час передачі її за допомогою сигналу несучої частоти. Значення несучої частоти вибирається залежно від властивостей фізичного середовища, у якому поширюється сигнал. Прикладами областей практичного застосування такого роду кодування інформації є бездротовий зв'язок, радіолокація, гідролокація та ультразвукові дослідження.

Енергетичні характеристики сигналу безпосередньо не беруть участі у кодуванні інформації, але дають змогу оцінювати дальність передачі інформації з урахуванням загасання сигналу у реальному фізичному середовищі та порівнювати між собою різні види сигналів.

Енергією дійсного сигналу називають величину

$$E_{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt, \quad (2.1)$$

де $p(t)$ – миттєва потужність сигналу.

Середньою потужністю дійсного сигналу називають величину

$$P_{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt . \quad (2.2)$$

Оскільки на практиці доводиться мати справу із сигналами скінченними, то уточнимо вирази (2.1) і (2.2) для сигналів, визначених на інтервалі $[t_{\min}; t_{\max}]$ для $t_{\min} > -\infty$ і $t_{\max} < \infty$. Енергією дійсного сигналу на заданому інтервалі називають величину

$$E_{x(t)} = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} p(t) dt = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x^2(t) dt , \quad t \in [t_{\min}; t_{\max}]$$

а середньою потужністю на тому ж інтервалі - величину

$$P_{x(t)} = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min}} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x^2(t) dt , \quad t \in [t_{\min}; t_{\max}]$$

За допомогою перетворення Фур'є будь-який безперервний сигнал $x(t)$ може бути представлений у частотній області виразом

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

де ω – кутова (циклічна) частота, яка визначається виразом

$$\omega = 2\pi f . \quad (2.3)$$

Відповідно до теореми Парсеваля енергія сигналу у часовій області дорівнює енергії сигналу у частотній області

$$E_{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 df , \quad (2.4)$$

З урахуванням (2.3) вираз (2.4) набуває вигляду

$$E_{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(2\pi f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} A(2\pi f) df ,$$

Величина $A(2\pi f)$ називається *функцією спектральної густини енергії* і визначає розподіл енергії сигналу за частотами. Вираз (5) з урахуванням (6) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} P_{x(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(2\pi f)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(2\pi f)|^2}{T} df = \int_{-\infty}^{\infty} S(2\pi f) df \end{aligned}$$

Величина $S(2\pi f)$ називається *функцією спектральної густини потужності* і визначає розподіл потужності сигналу за частотами. Часто на практиці у якості енергетичної характеристики зручніше мати справу саме з функцією спектральної густини потужності сигналу.

Під час імітаційного моделювання сигналів та оцінки їх енергетичних характеристик виникає необхідність визначення аналогічних характеристик для дискретних величин.

Енергія дискретного сигналу визначається виразом

$$E_{x(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2.$$

Миттєва потужність дискретного сигналу визначається виразом

$$p(n) = x^2(n).$$

Середня потужність дискретного сигналу визначається виразом

$$P_{x(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2,$$

а на кінцевому інтервалі $[n_1; n_2]$ для $n_1 > -\infty$ і $nt_2 < \infty$ визначається виразом

$$P_{x(n)} = \frac{1}{n_1 - n_2} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2, \quad n \in [n_1; n_2].$$

Обчислення частотного спектра дискретного сигналу $x(n)$ для $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. реалізується через дискретне перетворення Фур'є, яке визначається виразом

$$X_{(k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1..$$

Відповідно до рівності Парсеваля енергія дискретного сигналу також може бути обчислена і у частотній області

$$E_{x(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(k)|^2.$$

2.2. Приклад програми моделювання

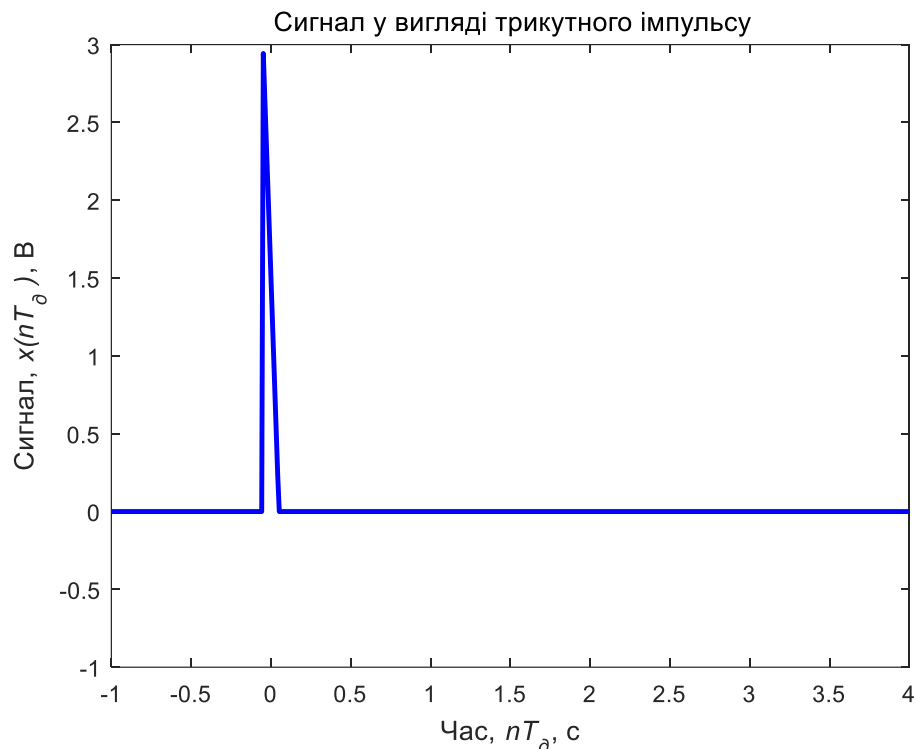
2.2.1. Моделювання детермінованих сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів

```
% Імітаційне моделювання детермінованих сигналів
% Розрахунок енергетичних характеристик сигналу
clear all; % Очищення пам'яті
close all; % Закриття всіх вікон із графіками
clc; % Очищення вікна команд та повідомлень
tColor='b'; % Колір графіків у часовій області
```

```
fColor=[1 0.4 0]; % Колір графіків у частотній області
A0=2; % Постійна складова сигналу
A=3; % Амплітуда сигналу
fmin=2; fmax=10; f0=15; % Частота сигналу, Гц
fd=100; % Частота дискретизації, Гц
tmin=-1; tmax=4; dt=tmax-tmin; % Інтервал визначення функції
N = dt*fd; % Кількість відліків
```

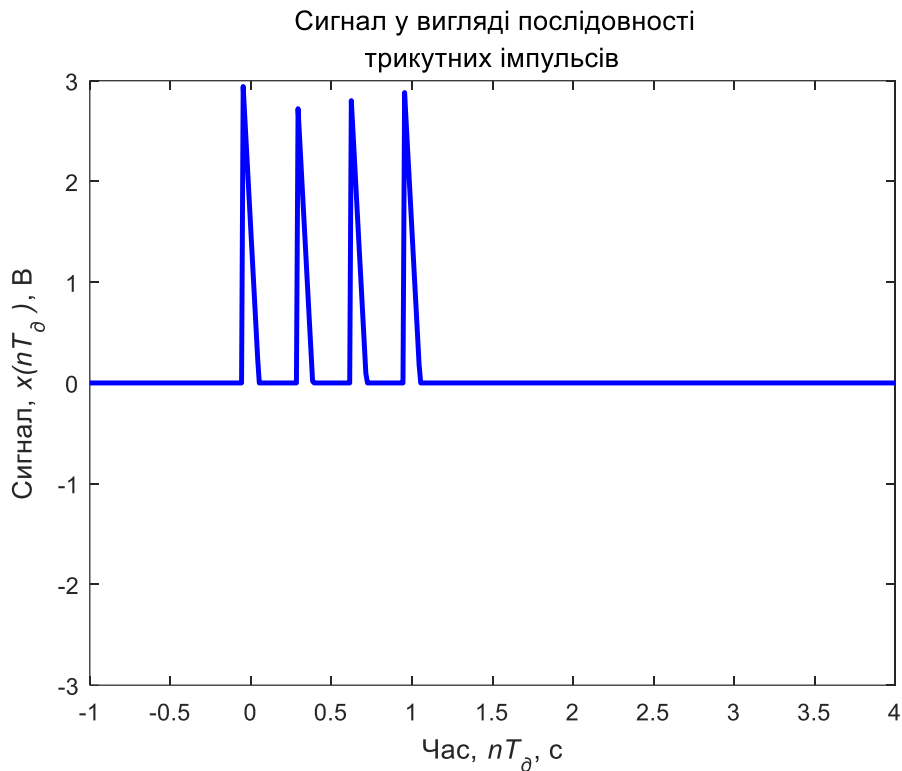
2.2.2. Моделювання трикутного імпульсу

```
% Моделювання трикутного імпульсу
xd = linspace(tmin,tmax,N); % Формування області визначення
zd = A*tripuls(xd,0.1,-1); % Формування значень
% Формування графіка
figure;plot(xd, zd, 'Color', tColor,'LineWidth',2);
axis([tmin tmax -1 A]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Сигнал у вигляді трикутного імпульсу'}); % Заголовок
xlabel('Час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал, \it x(nT_d)\rm, B'); % Напис осі ординат
```



2.2.3. Моделювання послідовності трикутних імпульсів

```
% Моделювання послідовності трикутних імпульсів
d = 0 : 1/3 : 1; % Період повторення імпульсу
zd = A*pulstran(xd,d,'tripuls',0.1,-1); % Формування значень
% Формування графіка
figure;plot(xd, zd, 'Color', tColor,'LineWidth',2);
axis([tmin tmax -A A]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Сигнал у вигляді послідовності',...
      'трикутних імпульсів'}); % Заголовок
xlabel('Час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал, \it x(nT_d)\rm, B'); % Напис осі ординат
```

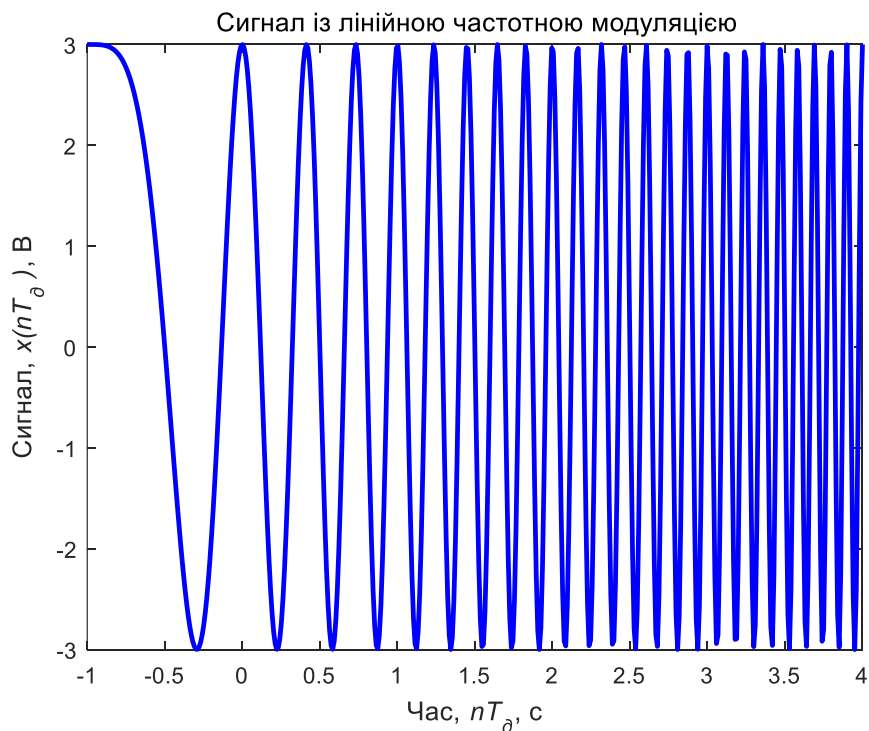


2.2.4. Моделювання сигналу з лінійною частотною модуляцією

```

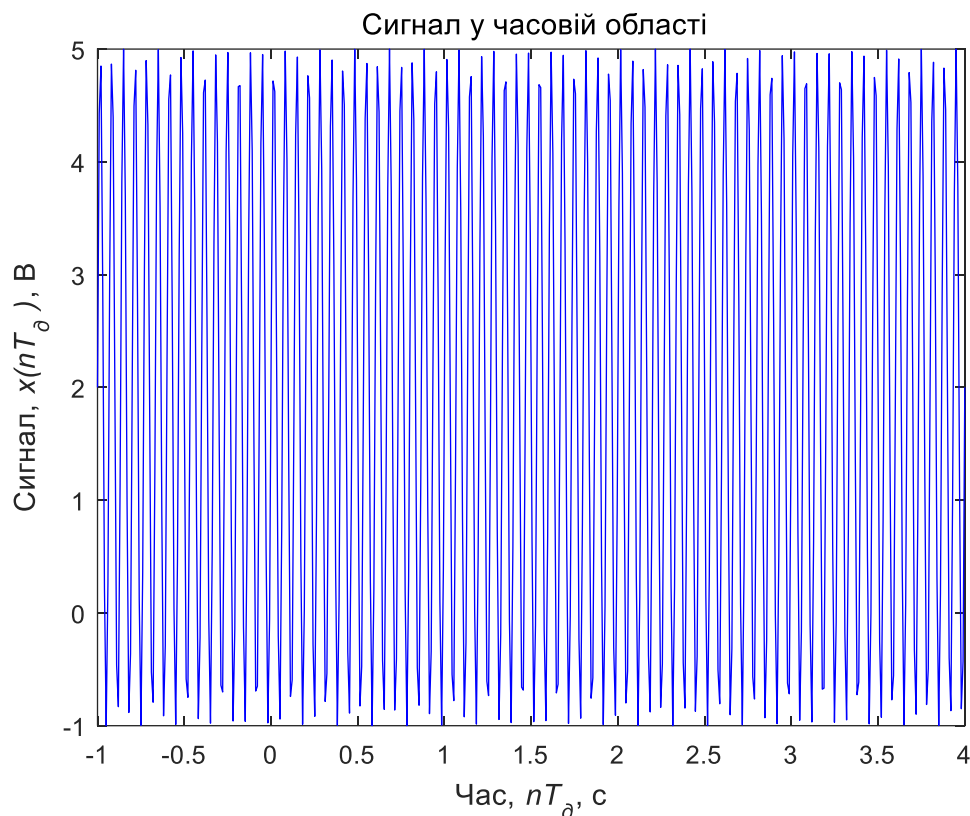
% Моделювання сигналу з лінійною частотною модуляцією
zd = A*chirp(xd, fmin, tmax, fmax); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(xd, zd, 'Color', tColor, 'LineWidth', 2);
axis([tmin tmax -A A]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Сигнал із лінійною частотною модуляцією'}); % Заголовок
xlabel('Час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал, \it x(nT_d)\rm, В'); % Напис осі ординат

```



2.2.5. Розрахунок енергетичних характеристик сигналу. Моделювання сигналу в часовій області

```
zd = A0+A*sin(2*pi*f0*xd); % Формування значень
% Формування графіка
figure;hPlot=plot(xd, zd, 'Color', tColor);
axis([tmin tmax -A+A0 A+A0]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Сигнал у часовій області'}); % Заголовок
xlabel('Час, \it nT_д\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал, \it x(nT_д)\rm, B'); % Напис осі ординат
```



2.2.6. Розрахунок енергії та потужності сигналу на заданому інтервалі в часовій і частотній області

```
% Розрахунок енергії та середньої потужності сигналу у часовій області
Et = 1/fd * sum(zd.^2);
Pt = Et/dt;
% Розрахунок енергії та середньої потужності сигналу в частотній області
X = fft(zd,N);
Ew = 1/(fd*N) * sum(abs(X).^2);
% Виведення результату
fprintf('Енергія сигналу у часовій області: %f \n', Et);
fprintf('Енергія сигналу у частотній області : %f \n', Ew);
fprintf('Середня потужність сигналу у часовій області: %f \n', Pt);
```

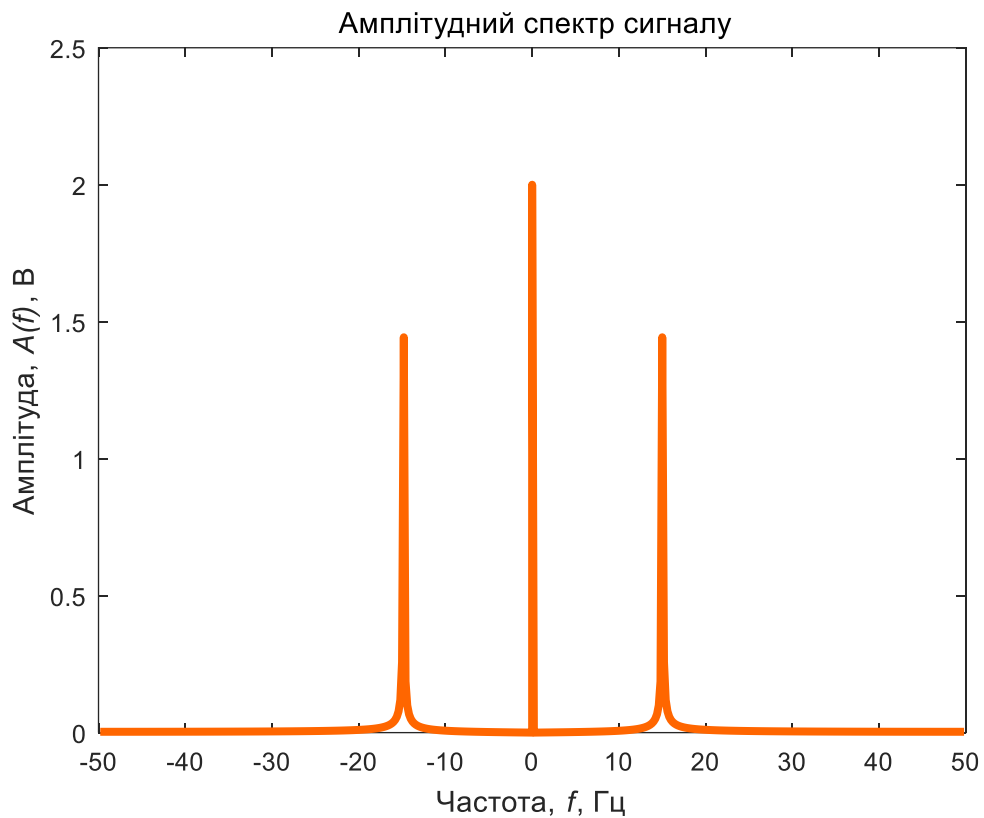
Енергія сигналу у часовій області: 42.455000

Енергія сигналу у частотній області: 42.455000

Середня потужність сигналу у часовій області: 8.491000

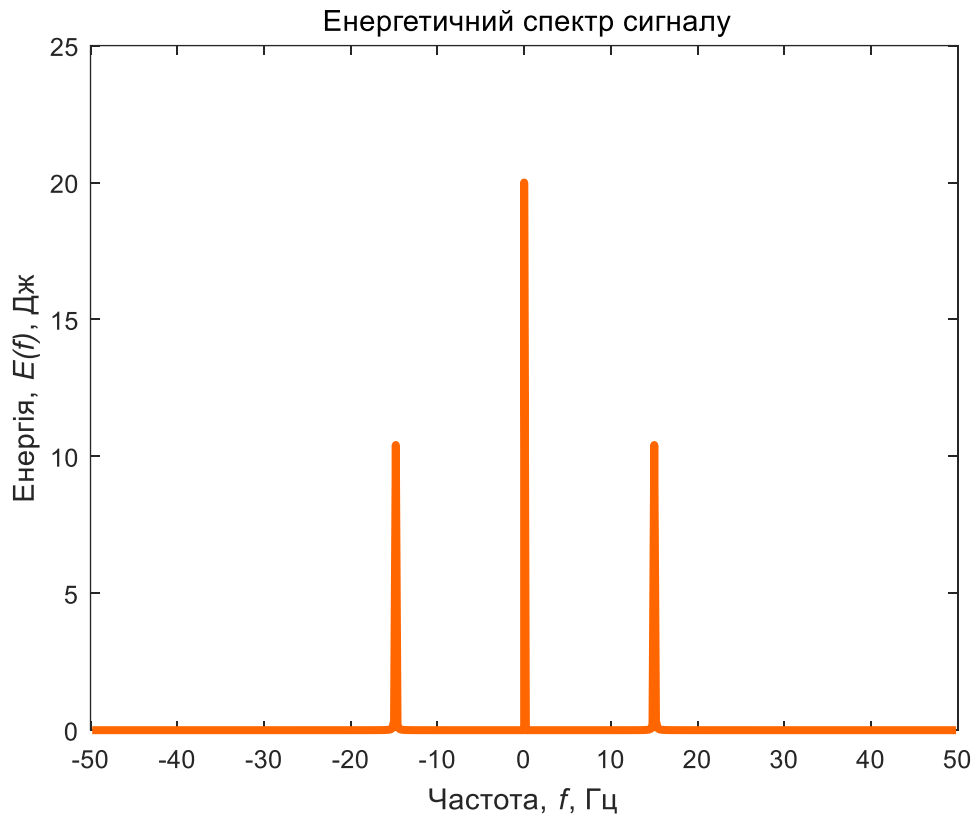
2.2.7. Розрахунок амплітудного спектра сигналу

```
% Розрахунок амплітудного спектру сигналу
f=0:fd/N:fd-fd/N; % Формування області визначення
af = abs(fft(zd)/N); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot([-fliplr(f(1:end/2)) f(1:end/2)],fftshift(af),...
'Color', fColor,'LineWidth',3);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Амплітудний спектр сигналу'}); % Заголовок
xlabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі абсцис
ylabel('Амплітуда, \it A(f)\rm, В'); % Напис осі ординат
```



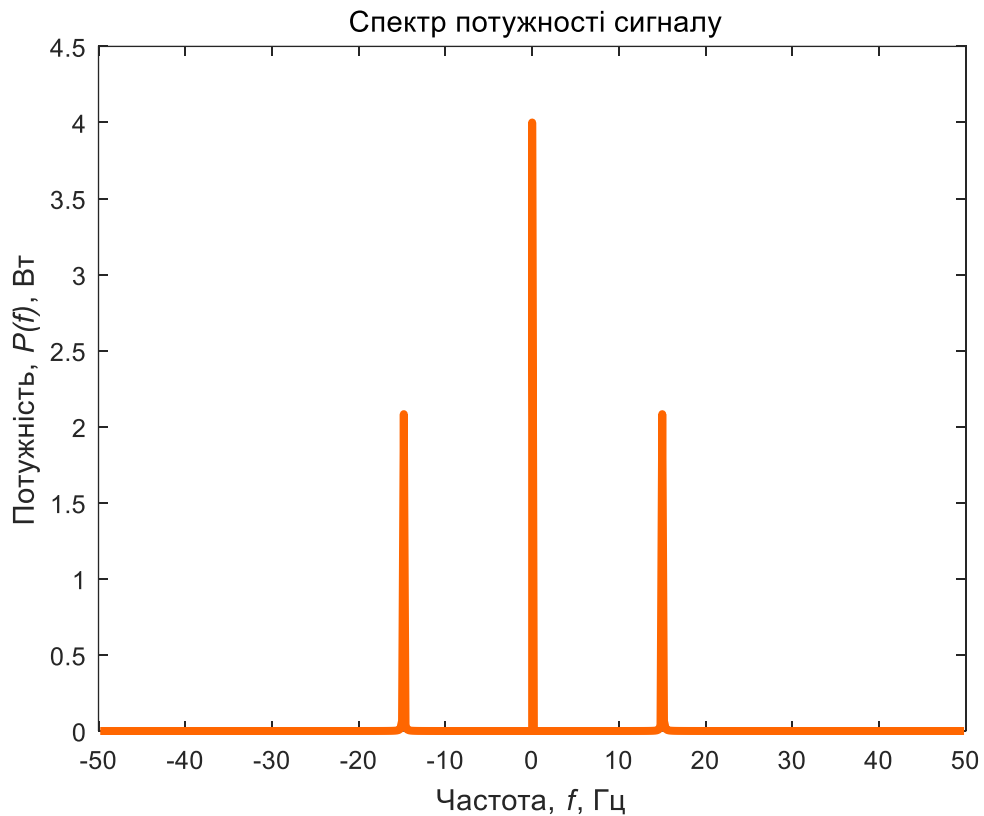
2.2.8. Розрахунок енергетичного спектра сигналу

```
% Розрахунок енергетичного спектра сигналу
ef = 1/(N*fd) * (abs(fft(zd)).^2); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot([-fliplr(f(1:end/2)) f(1:end/2)],fftshift(ef),...
'Color',fColor,'LineWidth',3);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Енергетичний спектр сигналу'}); % Заголовок
xlabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі абсцис
ylabel('Енергія, \it E(f)\rm, Дж'); % Напис осі ординат
```



2.2.9. Розрахунок спектра потужності сигналу

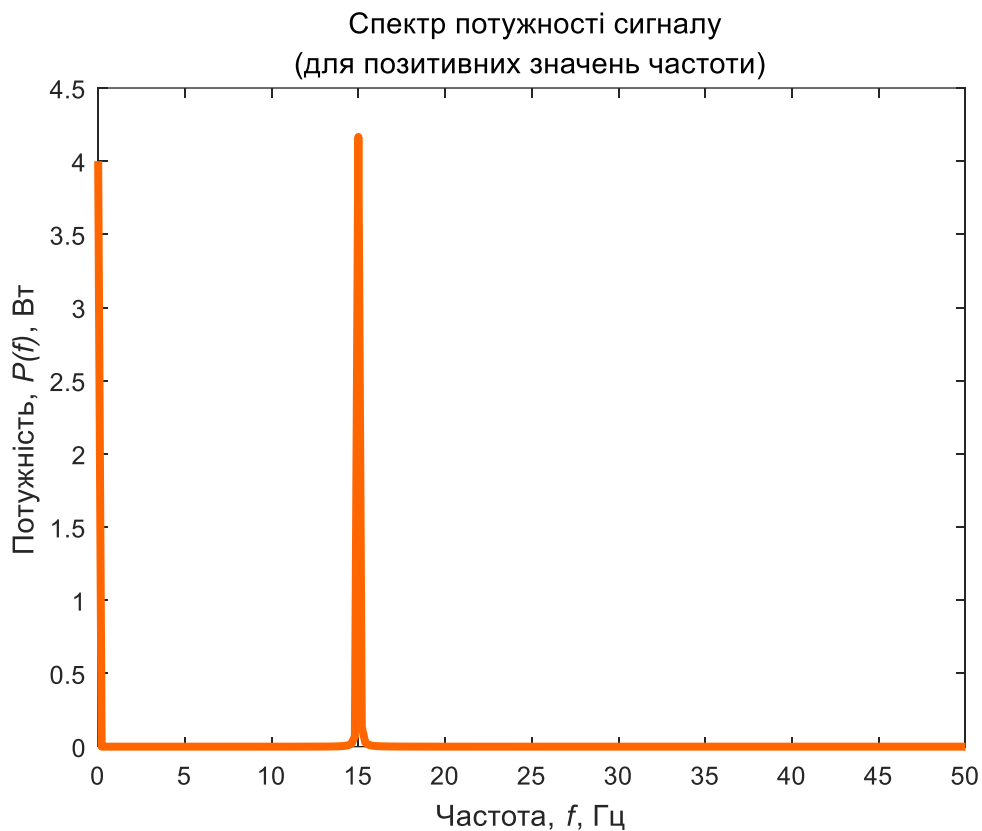
```
% Розрахунок спектра потужності сигналу
pf = ef/dt; % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot([-fliplr(f(1:end/2)) f(1:end/2)],fftshift(pf),...
'Color', fColor,'LineWidth',3);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Спектр потужності сигналу'}); % Заголовок
xlabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі абсцис
ylabel('Потужність, \it P(f)\rm, Вт'); % Напис осі ординат
```




```

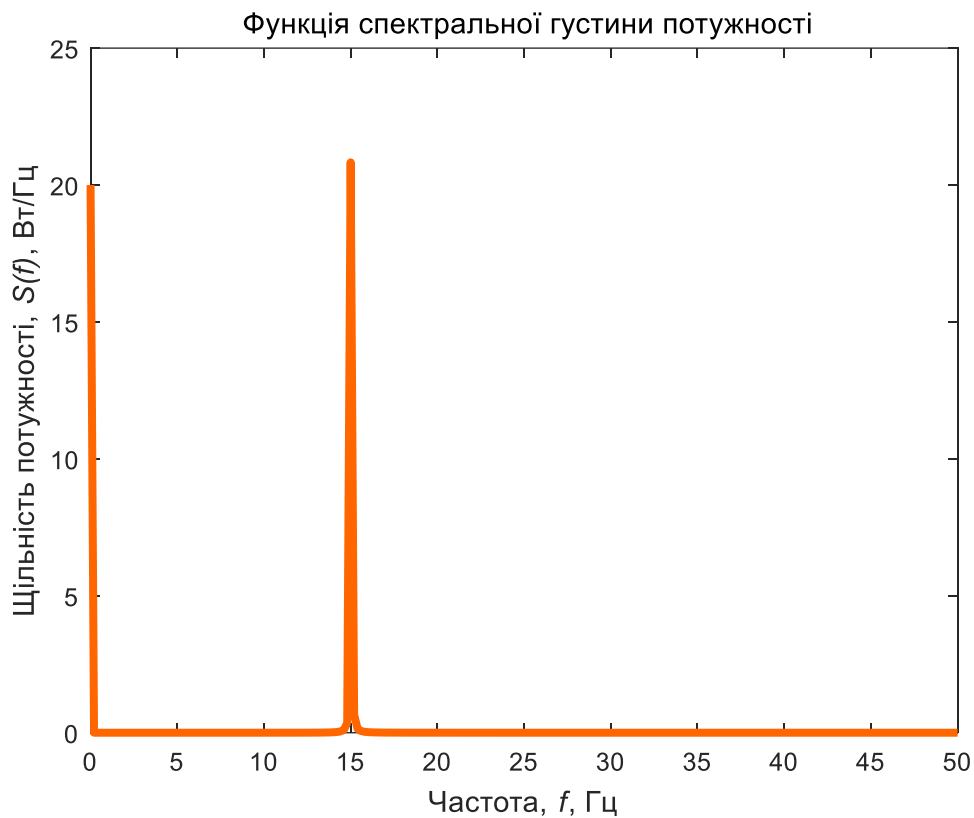
[pf,ff]=periodogram(zd,rectwin(length(zd)),...
length(zd),fd,'power'); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(ff,pf, 'Color', fColor,'LineWidth',3);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Спектр потужності сигналу',...
'(для позитивних значень частоти)'}); % Заголовок
xlabel('Частота,\it f\rm, Гц'); % Напис осі абсцис
ylabel('Потужність,\it P(f)\rm, Вт'); % Напис осі ординат

```



2.2.10. Розрахунок функції спектральної щільності потужності сигналу

```
% Розрахунок функції спектральної потужності сигналу
[pf,ff]=periodogram(zd,rectwin(length(zd)),...
length(zd),fd,'psd'); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(ff,pf, 'Color', fColor,'LineWidth',3);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Функція спектральної густини потужності'}); % Заголовок
xlabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі абсцис
ylabel('Щільність потужності, \it S(f)\rm, Вт/Гц'); % Напис осі ординат
```



3. ВИПАДКОВІ СИГНАЛИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПСЕВДОВИПАДКОВІ СИГНАЛИ

3.1. Математичні моделі випадкових сигналів

Випадковий сигнал – це сигнал, закон зміни і всі параметри якого заздалегідь невідомі, але відомі їхні ймовірнісні характеристики.

Псевдовипадковий сигнал – це сигнал, закон зміни якого відомий, а параметри є випадковими величинами з відомими ймовірнісними характеристиками [1].

Функція розподілу ймовірностей – функція, що визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина x_0 набуде значення меншого, ніж довільне дійсне x , тобто

$$\forall x \in R: F_{x_0}(x) = P(x_0 \leq x).$$

Знаючи функцію розподілу ймовірностей, можна визначити ймовірність того, що випадкова величина x_0 потрапить у заданий інтервал $[x_A; x_{Bx}]$:

$$P(x_0 \in [x_A; x_{Bx}]) = F(x_{Bx}) - F(x_A).$$

Очевидно, що область значень функції розподілу ймовірностей лежить в інтервалі $[0; 1]$. Приклад функції розподілу ймовірностей безперервної випадкової величини наведено на рис. 3.1. Для дискретної випадкової величини функція розподілу ймовірностей набуває ступінчастого вигляду (рис. 3.2), область значень також стає дискретною, але лежить у тому самому інтервалі $[0; 1]$, що й для безперервної випадкової величини.

Якщо функція розподілу безперервної випадкової величини диференційована, то більш наочне уявлення про випадкову величину дає щільність ймовірності випадкової величини.

Функція щільності розподілу ймовірностей випадкової величини – перша похідна від функції розподілу ймовірностей. Визначити ймовірність того, що безперервна випадкова величина x_0 потрапить в інтервал $[x_A; x_{Bx}]$ за допомогою цієї функції можна відповідно до виразу

$$\forall x \in R: P(x_0 \in [x_A; x_{Bx}]) = \int_{x_A}^{x_{Bx}} f(x) dx.$$

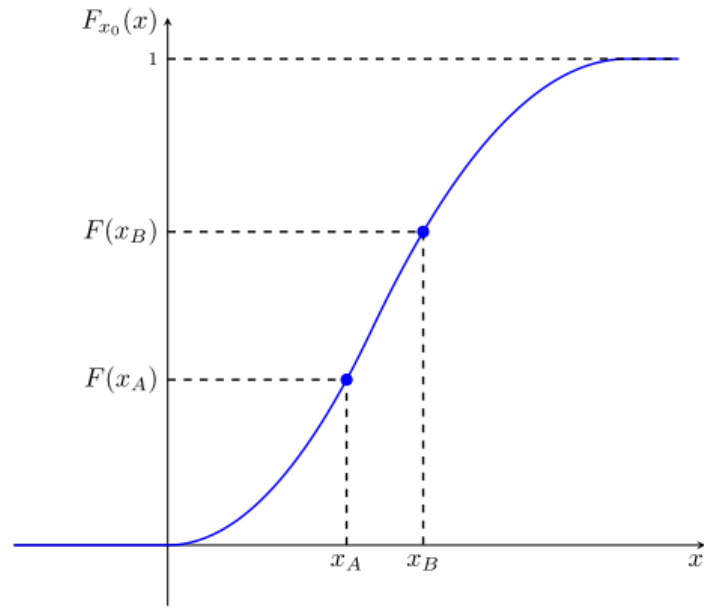


Рис. 3.1. Приклад функції розподілу безперервної випадкової величини

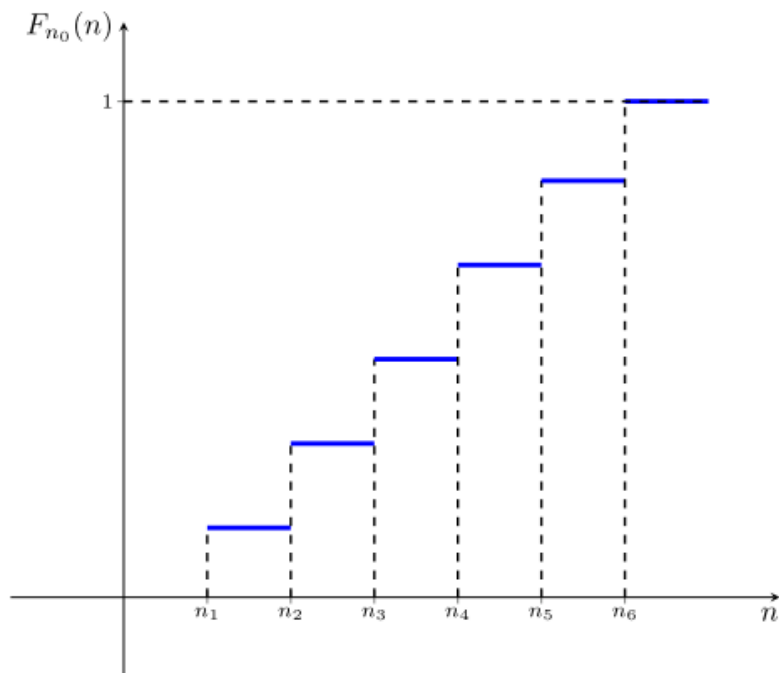


Рис. 3.2. Приклад функції розподілу дискретної випадкової величини

Таким чином, імовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал дорівнює площі під графіком функції щільності ймовірності, визначеної на цьому інтервалі. Відповідно, загальна площа під графіком функції щільності ймовірності на всій області визначення не може перевищувати одиниці. Приклад функції розподілу ймовірностей безперервної випадкової величини наведено на рис. 3.3.

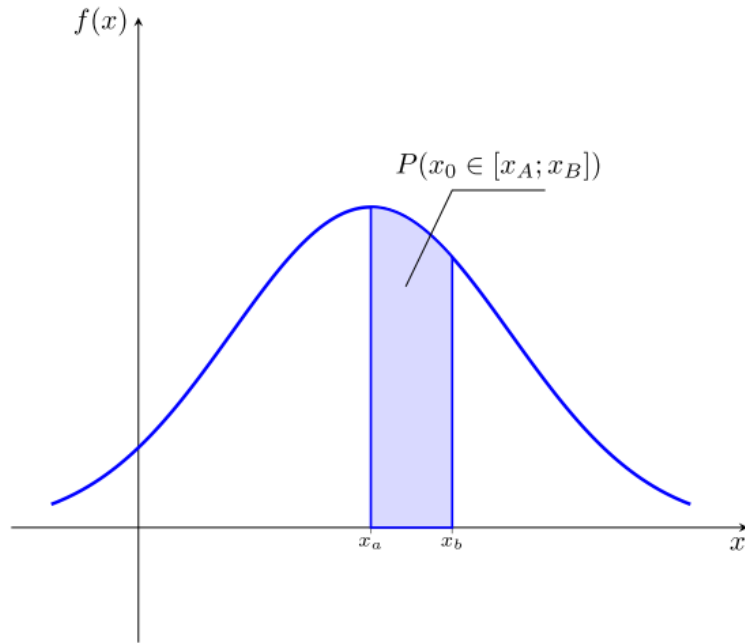


Рис. 3.3. Приклад функції щільності розподілу ймовірностей випадкової величини

Математичним очікуванням безперервної випадкової величини x_0 називається величина

$$m_{x_0} = M[x_0] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF_{x_0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{x_0}(x) dx, x \in R, \quad (3.1)$$

Приклад визначення математичного очікування на графіку функції щільності розподілу випадкової величини наведено на рис. 3.4.

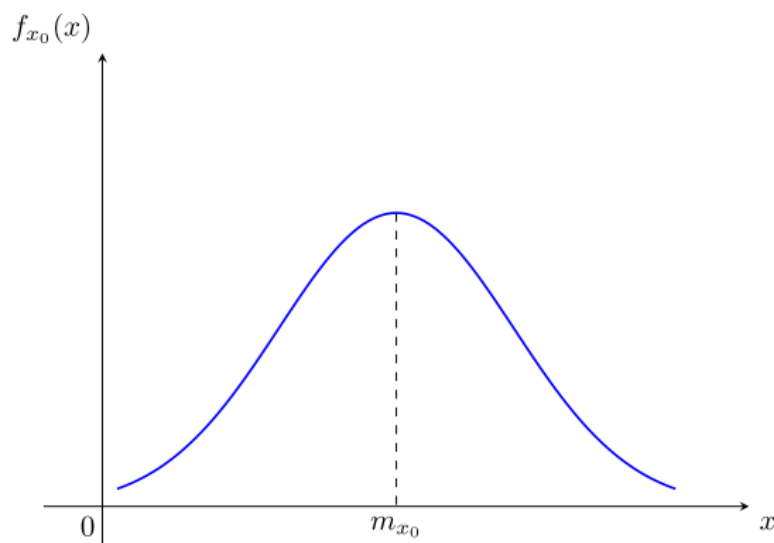


Рис. 3.4. Приклад визначення математичного очікування на графіку функції щільності розподілу випадкової величини

У випадку дискретної випадкової величини вираз (3.1) для визначення математичного очікування перетворюється на вигляд

$$m_{x_0} = M[x_0] = \sum_{i=1}^N x_i \cdot p_i, i \in N,$$

де $p_i = P(x_0 = x_i)$ – відповідні ймовірності значень x_i дискретної випадкової величини x_0 .

Дисперсія випадкової величини – міра відхилення значень випадкової величини від величини відносно її математичного очікування, що визначається як математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини x_0 від її середнього значення

$$D_{x_0} = M[(x_0 - m)^2],$$

Середньоквадратичне відхилення визначається як квадратний корінь із дисперсії випадкової величини

$$\sigma = \sqrt{D_{x_0}},$$

Існує низка стандартних розподілів імовірності. Нижче коротко розглянуто такі види:

- нормальне;
- рівномірне;
- трикутне.

Випадкова безперервна величина має нормальний закон розподілу, якщо її щільність розподілу ймовірності визначається виразом

$$f_{x_0}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_{x_0})^2}{2\sigma^2}}.$$

Приклади графіків функцій щільності розподілу ймовірності для нормального розподілу наведено на рис. 3.5.

Функція розподілу ймовірності в цьому випадку визначається виразом

$$f_{x_0}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_{x_0})^2}{2\sigma^2}} dx,$$

а приклади її графіків подано на рис. 3.6.

Згідно з граничною центральною теоремою при збільшенні кількості слабко залежних нормованих випадкових величин їхня сума має розподіл, що прагне до нормального.

На практиці цей вид розподілу є одним із найпоширеніших у використанні, у тому числі, в рамках імітаційного моделювання природних процесів. Крім того, для нормального розподілу випадкової величини діє так зване "правило 3σ ", відповідно до якого всі значення випадкової величини x_0 зосереджені в інтервалі $(-3\sigma + m_{x_0}; 3\sigma + m_{x_0})$.

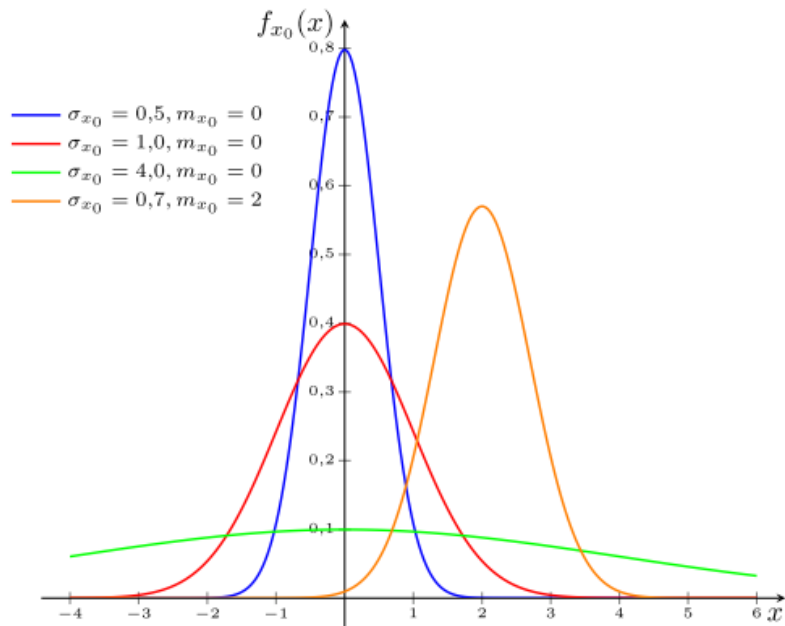


Рис. 3.5. Приклади графіків функцій щільності розподілу ймовірності нормально розподіленої випадкової величини для різних значень середньоквадратичного відхилення σ_{x_0} і математичного очікування m_{x_0}

Таким чином, розподіл, заданий на нескінченному інтервалі, може бути розглянутий на скінченному інтервалі з похибкою близько 0,3 % (рис. 3.7).

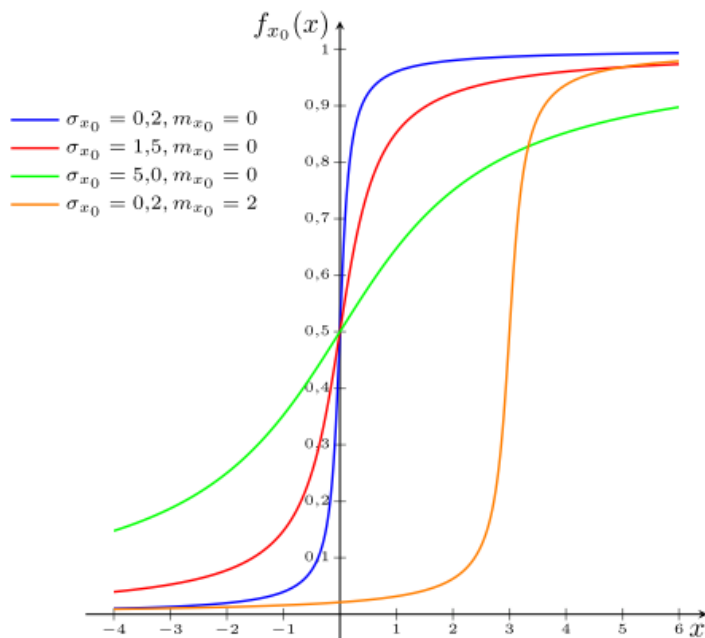


Рис. 3.6. Приклади графіків функції розподілу ймовірності нормально розподіленої випадкової величини для різних значень середньоквадратичного відхилення σ_{x_0} і математичного очікування m_{x_0}

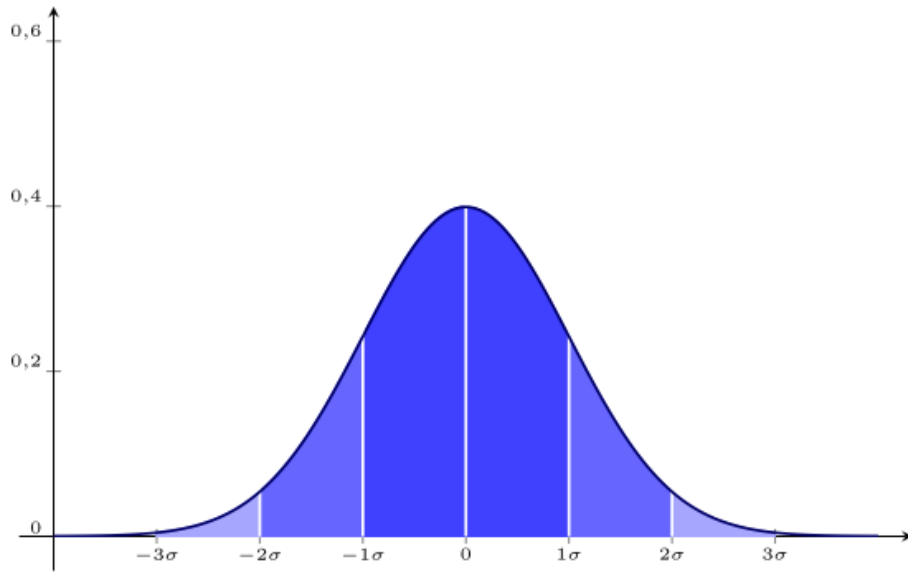


Рис. 3.7. Графік функції щільності розподілу ймовірності розподілу нормально розподіленої випадкової величини

Випадкова величина x_0 на проміжку від a до b має рівномірний розподіл, якщо функцію густини розподілу можна записати у вигляді

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Графік функції щільності розподілу ймовірності для рівномірного розподілу наведено на рис. 3.8.

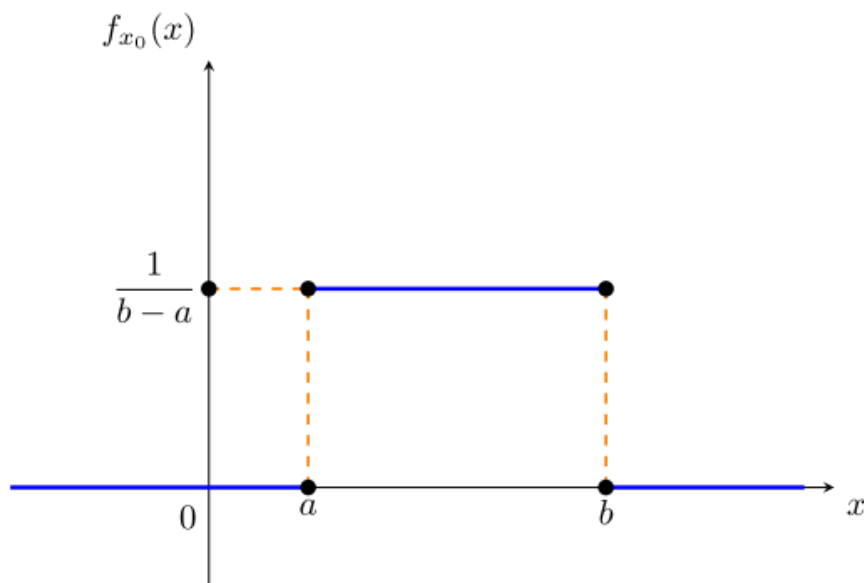


Рис. 3.8. Графік функції щільності розподілу ймовірності рівномірно розподіленої випадкової величини

Функція розподілу в цьому випадку визначається виразом

$$F_{x_0}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

і має вигляд, представлений на рис. 3.9.

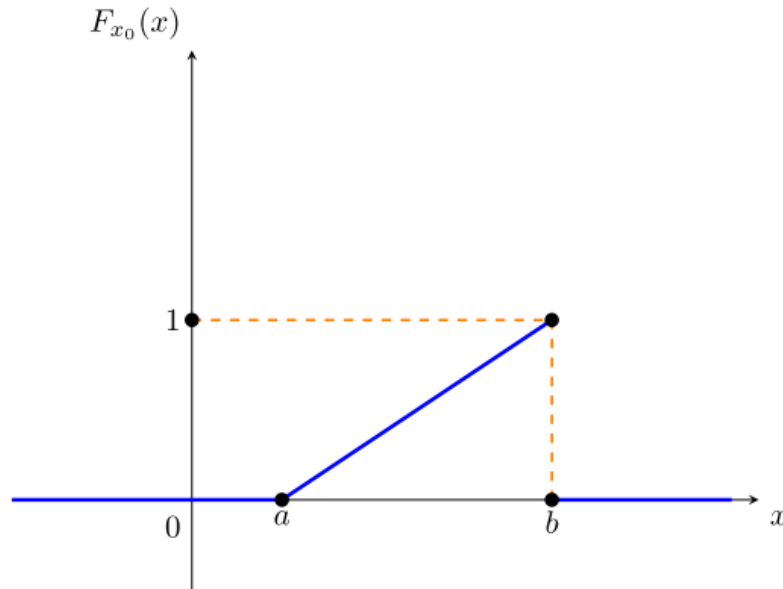


Рис. 3.9. Графік функції розподілу ймовірності рівномірно розподіленої випадкової величини

Математичне очікування випадкової безперервної величини x_0 обчислюється за формулою

$$m_{x_0} = \frac{a+b}{2},$$

а дисперсія – за формулою

$$D_{x_0} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Випадкова величина має трикутний розподіл, якщо її функція щільності розподілу має вигляд

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & x \in [a, c] \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & x \in [c, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Функція трикутного розподілу ймовірності випадкової величини визначається формулою

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & x \in [a, c] \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)}, & x \in [c, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Математичне очікування визначається виразом

$$m_{x_0} = \frac{a+b+c}{3},$$

а дисперсія визначається виразом

$$D_{x_0} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}.$$

Приклади графіків функції та функції щільності трикутного розподілу випадкової величини наведено на рис. 3.10 і 3.11 відповідно. Трикутний розподіл є приблизною моделлю і застосовується для побудови складніших законів розподілу.

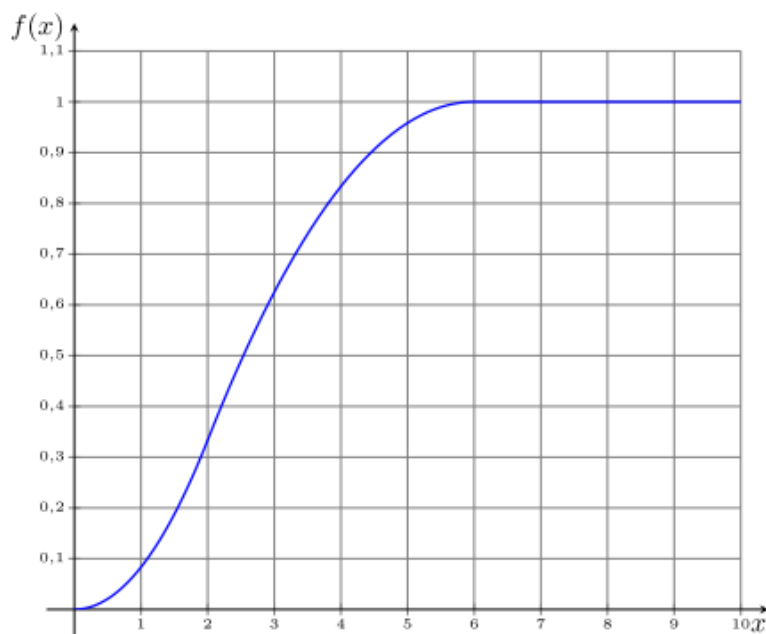


Рис. 3.10. Приклад графіка функції трикутного розподілу випадкової величини ($a=0$, $c=2$, $b=6$)

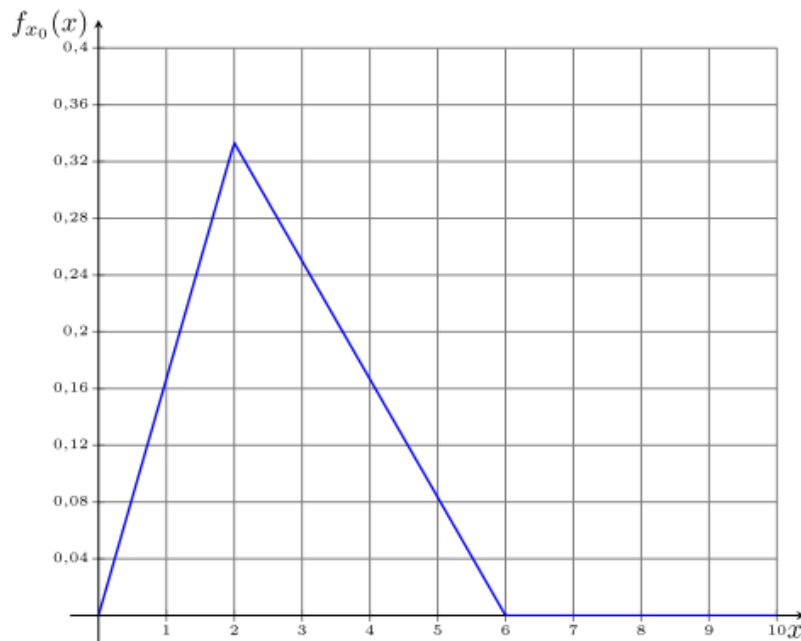


Рис. 3.11. Приклад графіка функції щільності трикутного розподілу випадкової величини ($a = 0$, $c = 2$, $b = 6$)

3.2. Приклад програми моделювання

3.2.1. Моделювання випадкових сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів

```

% Імітаційне моделювання випадкових сигналів
% Розрахунок енергетичних характеристик сигналу
clear all; % Очищення пам'яті
close all; % Закриття всіх вікон із графіками
clc; % Очищення вікна команд та повідомлень
tColor='b'; % Колір графіків у часовій області
Color0='r'; % Колір графіків еталонного сигналу
tColorLight=[0.3 0.7 0.9]; % Колір графіків у часовій області
fColor=[1 0.4 0]; % Колір графіків у частотній області
eColor=[0.85 0.325 0.098]; % Колір графіків похибки
eColorLight=[0.9 0.9 0.4]; % Колір графіків похибки
eColorDark=[0.635 0.078 0.184]; % Колір графіків похибки
fd=100; % Частота дискретизації, Гц
tmin=-1; tmax=2; dt=tmax-tmin; % Інтервал визначення функції
N = dt*fd; % Кількість відліків
f_mu = 15; % Математичне очікування частоти сигналу
f_sigma = 0.5; % Середньоквадратичне відхилення частоти сигналу
f_a = f_mu-5*f_sigma; % Інтервал випадкового розподілу
f_b = f_mu+5*f_sigma; % частоти
A_a = 10; A_b = 12; % Інтервал випадкового розподілу амплітуди
dA = A_b-A_a; % Довжина інтервалу випадкового розподілу амплітуди
rng(2020); % Ініціалізація генератора випадкових чисел

```

3.2.2. Моделювання випадкового сигналу з нормальним розподілом

```

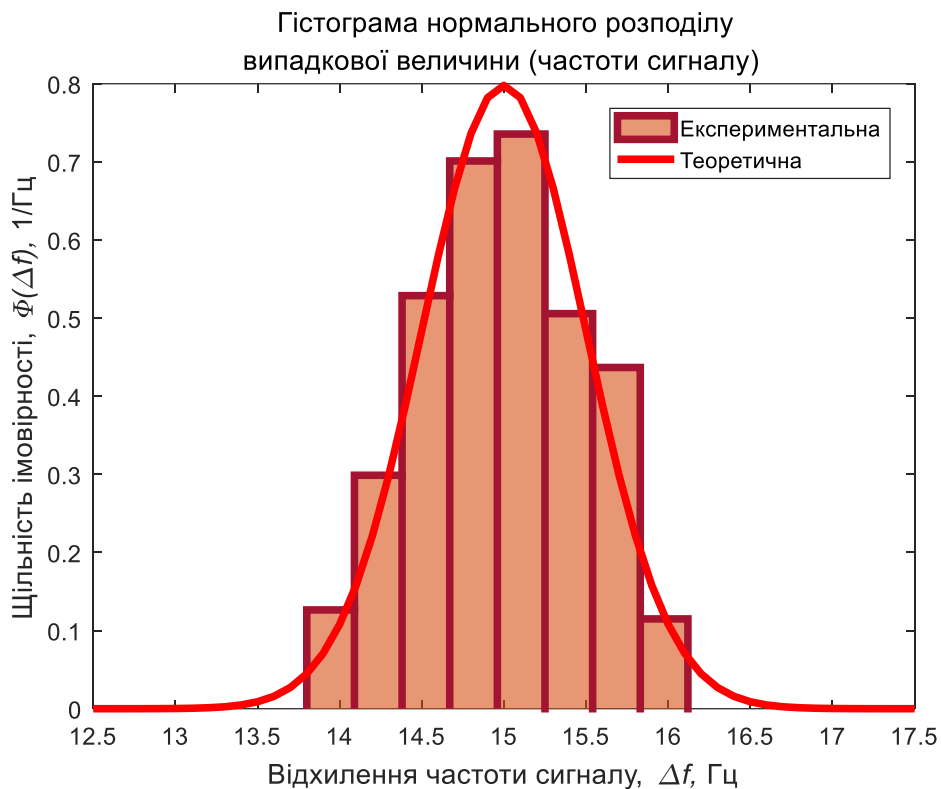
% Моделювання випадкового сигналу з нормальним розподілом
% (частота псевдовипадкового сигналу)

```

```

td = linspace(tmin,tmax,N); % Формування області визначення
f_prob = makedist('Normal',f_mu,f_sigma); % Розподіл імовірності
f = random(f_prob,N,1); % Формування значень
% Формування гистограми
Npsd = 50; % Кількість точок гистограми
nBars = 8; % Кількість прямокутників гистограми
figure; histogram(f,nBars,'EdgeColor',eColorDark,...
    'Normalization','pdf','FaceColor',eColor,...
    'LineWidth',3); % Експериментальна
title({'\rm Гистограма нормального розподілу',...
    'випадкової величини (частоти сигналу)'}); % Заголовок
xlabel('Відхилення частоти сигналу,\it \Delta f,\rm Гц'); % Напис осі абсцис
ylabel('Щільність імовірності,\it \Phi(\Delta f),\rm 1/Гц'); % Напис осі
ординат
% Формування теоретичної функції щільності розподілу
f_pdf = f_a:(f_b-f_a)/Npsd:f_b; % Область визначення
Phi_f = pdf(f_prob,f_pdf); % Щільність розподілу
% Формування графіку
hold on; plot(f_pdf,Phi_f,'Color',Color0,'LineWidth',3);
legend('Експериментальна','Теоретична','Location','northeast');

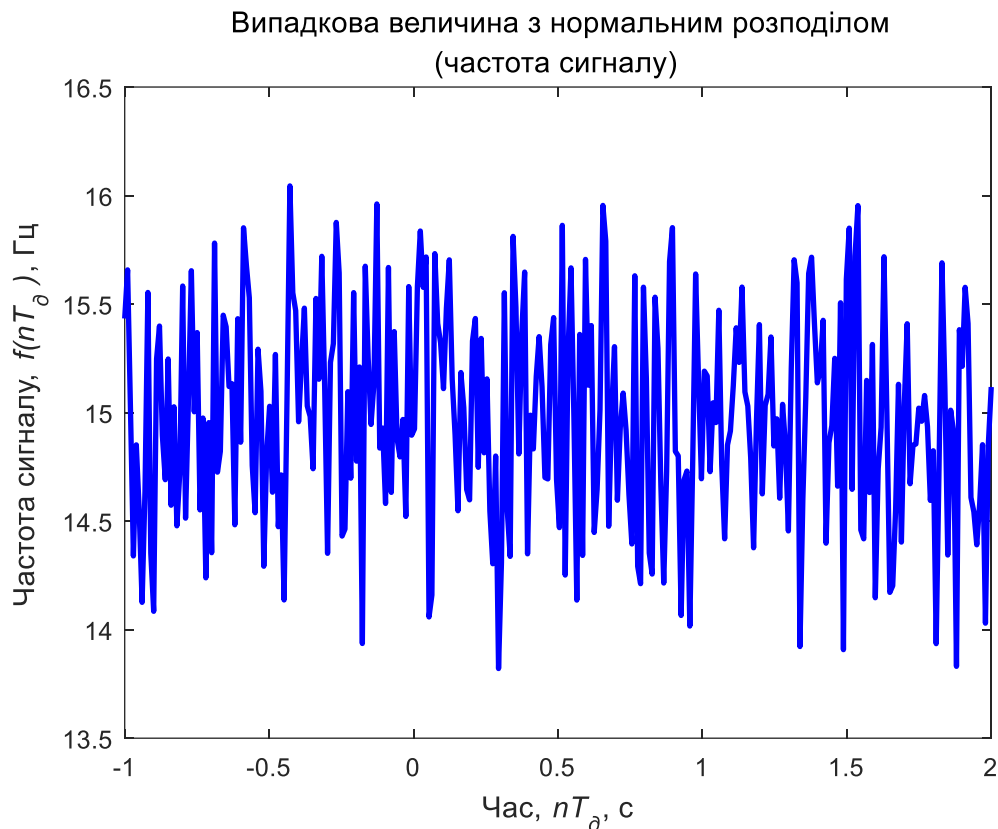
```



```

% Формування графіку
figure; plot(td,f,'Color',tColor,'LineWidth',2);
set(get(gcf,'CurrentAxes'),'FontSize',10); % Зміна шрифту
title({'\rm Випадкова величина з нормальним розподілом','(частота сигналу)'}); % Заголовок
xlabel('Час,\it nT_d,\rm c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Частота сигналу,\it f(nT_d)\rm, Гц'); % Напис осі ординат

```

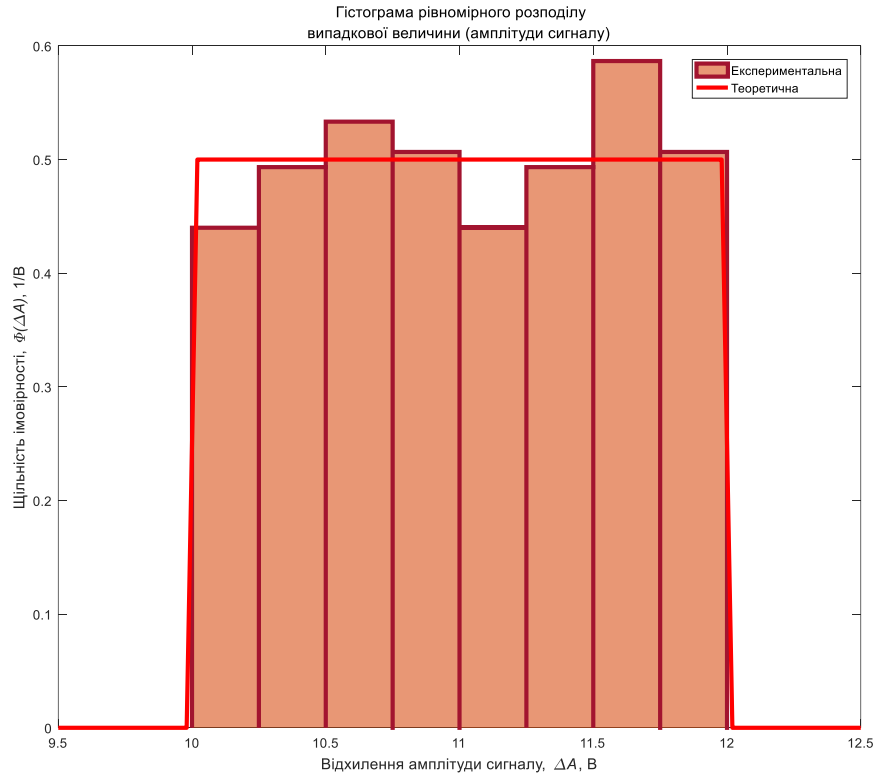


3.2.3. Моделювання випадкового сигналу з рівномірним розподілом

```

% Моделювання випадкового сигналу з рівномірним розподілом
% (амплітуда псевдовипадкового сигналу)
A_prob = makedist('Uniform',A_a,A_b); % Розподіл імовірності
A = random(A_prob,N,1); % Формування значень
% Формування гистограми
Npsd = 50; % Кількість точок гистограми
nBars = 8; % Кількість прямокутників гистограми
figure; histogram(A,nBars,'EdgeColor',eColorDark,...
    'Normalization','pdf','FaceColor',eColor,...
    'LineWidth',3); % Експериментальна
title({'\rm Гістограма рівномірного розподілу',...
    'випадкової величини (амплітуди сигналу)'}); % Заголовок
xlabel('Відхилення амплітуди сигналу,\it \Delta\rm, B'); % Напис осі абсцис
ylabel('Щільність імовірності,\it \Phi(\Delta)\rm, 1/B'); % Напис осі
ординат
% Формування теоретичної функції щільності розподілу
A_pdf = A_a-0.25*dA:dA/Npsd:A_b+0.25*dA; % Область визначення
Phi_A = pdf(A_prob,A_pdf); % Щільність розподілу
% Формування графіку
hold on; plot(A_pdf,Phi_A,'Color',Color0,'LineWidth',3);
legend('Експериментальна','Теоретична','Location','northeast');

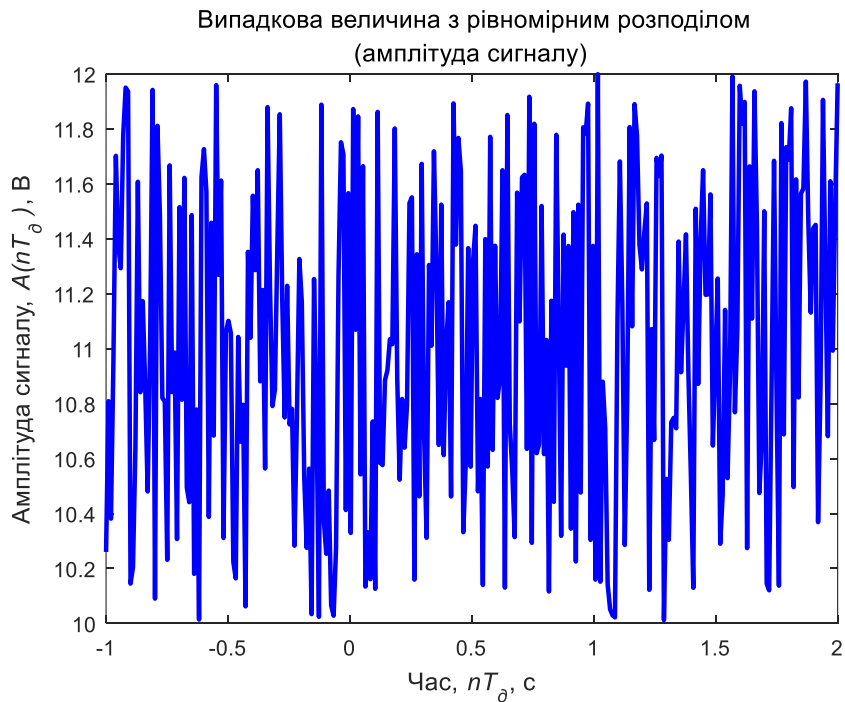
```



```

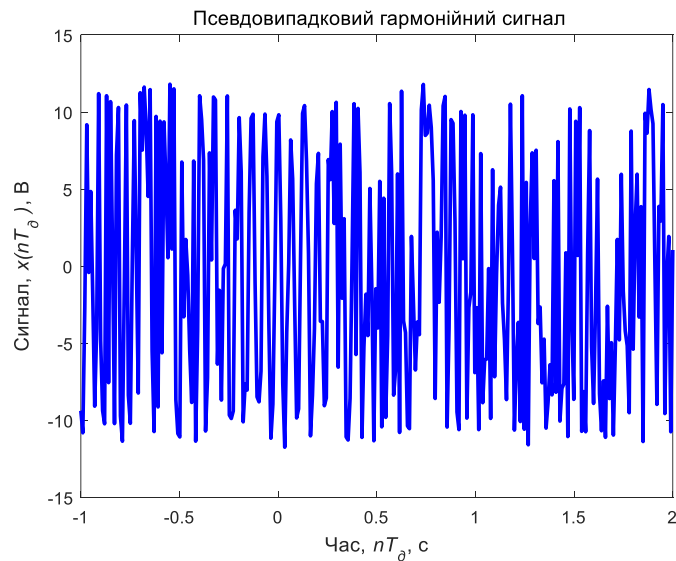
% Формування графіку
figure;plot(td,A, 'Color', tColor, 'LineWidth', 2);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', 10); % Зміна шрифту
title({'\rm Випадкова величина з рівномірним розподілом', '(амплітуда
сигналу)'}); % Заголовок
xlabel('Час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Амплітуда сигналу, \it A(nT_d)\rm, В'); % Напис осі ординат

```

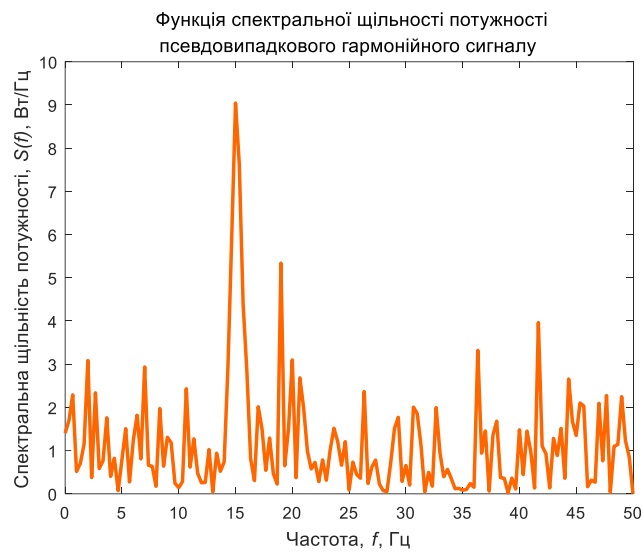


3.2.4. Моделювання псевдовипадкового гармонійного сигналу

```
% Моделювання псевдовипадкового гармонійного сигналу
xd = A'.*cos(2*pi*f'.*td); % Формування значень
% Формування графіку
figure;plot(td,xd,'Color',tColor,'LineWidth',2);
set(get(gcf,'CurrentAxes'),'FontSize',10); % Зміна шрифту
title({'\rm Псевдовипадковий гармонійний сигнал'}); % Заголовок
xlabel('Час,\it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Сигнал,\it x(nT_d)\rm, B'); % Напис осі ординат
```



```
% Формування функції спектральної щільності потужності
[psd,freq] = periodogram(xd,rectwin(length(xd)),...
length(xd),fd,'psd'); % Формування значень
% Формування графіку
figure; plot(freq,psd,'Color',fColor,'LineWidth',2);
set(get(gcf,'CurrentAxes'),'FontSize',10); % Зміна шрифту
title({'\rm Функція спектральної щільності потужності',...
'псевдовипадкового гармонійного сигналу'}); % Заголовок
xlabel('Частота,\it f\rm, Гц'); % Напис осі абсцис
ylabel('Спектральна щільність потужності,\it S(f)\rm, Вт/Гц'); % Напис осі
ординат
```



4. ПРОСТІ ТА СКЛАДНІ СИГНАЛИ В ЛОКАЦІЇ. БАЗА СИГНАЛУ. ФУНКЦІЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

4.1. Математичні моделі сигналів

У цифровій обробці сигналів, як правило, корисний сигнал є детермінованим, його спотворення здійснюється природними або штучними шумами – випадковими сигналами. Імовірність і точність виявлення корисного сигналу на тлі завад залежить, зокрема, від співвідношення сигнал-шум, яке визначається виразом

$$K_{SNR} = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2, \quad (4.1)$$

де P - середня потужність; A - середньоквадратичне значення амплітуди.

Параметри сигналу і шуму вимірюються в смузі пропускання системи. На практиці співвідношення сигнал-шум часто виражається в децибелах (дБ). У такому випадку вираз (4.1) набуває вигляду

$$K_{SNRDB} = 10 \lg \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = 20 \lg \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right)^2.$$

Для збільшення цього співвідношення необхідне збільшення енергії корисного сигналу. У разі активної локації – енергії зондувального сигналу. У теорії для простого гармонійного сигналу це може бути виконано двома способами: збільшення потужності сигналу, або збільшення тривалості сигналу. На практиці збільшення потужності сигналу безпосередньо пов'язане з обмеженнями апаратури передавача, а збільшення тривалості сигналу додатково може спричинити невідповідність алгоритмічним вимогам.

Для забезпечення кращої завадостійкості в локації без збільшення енергії зондувальних сигналів використовують певні види сигналів.

Базою сигналу називається величина

$$B = \Delta f \cdot \Delta t,$$

де Δf – ефективна ширина спектра сигналу; Δt – тривалість сигналу.

Простим називається сигнал, якщо його база $B \approx 1$. База складного сигналу $B \gg 1$. Складні сигнали також прийнято називати широкосмуговими.

У локації під час опрацювання прийнятого сигналу розв'язують задачу визначення часу затримки (визначення дальності до цілі) і частоти сигналу (визначення радіальної складової відносної швидкості цілі відповідно до виразів, що описують ефект Доплера).

Функція *автокореляції* сигналу дає змогу визначити роздільну здатність як за дальністю, так і за швидкістю. У загальному випадку вона є комплексною і має вигляд

$$\begin{aligned}
R(\Delta t, \Delta f) &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \Delta t) e^{-j2\pi \Delta f t} dt = \dots \\
&\dots = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s^*(f) s(f - \Delta f) e^{-j2\pi f t} df .
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

У тому випадку, якщо зміщення за часом і частотою відсутнє (дорівнюють нулю), то функція досягає свого максимуму $R(0,0) = 1$. З виразу (4.2) можна отримати окремі вирази для кореляційної функції за часом ($\Delta f=0$)

$$R(\Delta t, 0) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t - \Delta t) dt$$

і частотою ($\Delta t = 0$)

$$R(0, \Delta f) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(f) s(f - \Delta f) df .$$

Функцією невизначеності називається квадрат модуля двовимірної функції кореляції сигналу за часом і частотою

$$A(\Delta t, \Delta f) = |R(\Delta t, \Delta f)|^2 .$$

Функція невизначеності сигналу, ідеального з погляду забезпечення роздільної здатності, являє собою гострий пік зі значенням, що дорівнює нескінченності в точці (0,0) і дорівнює нулю в усіх інших точках (рис. 4.1).

Вигляд функції невизначеності реального сигналу на прикладі тонального імпульсу наведено на рис. 4.2.

Функція невизначеності завжди симетрична.

Зміна форми сигналу деформує поверхню невизначеності, але об'єм під поверхнею залишається незмінним. Таким чином, неможливо поліпшити точність визначення дальності цілі, не погіршивши точність визначення відносної радіальної швидкості цілі і навпаки. Неможливість підвищення потенційної роздільної здатності одночасно за дальністю і за швидкістю в локації має назву *принципу невизначеності*.

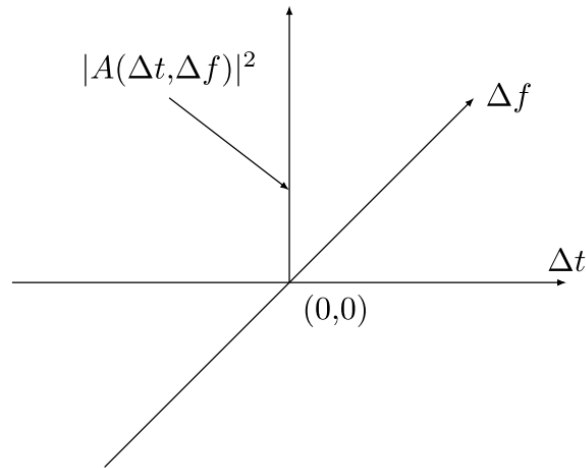


Рис. 4.1. Графік функції невизначеності сигналу, ідеального з точки зору забезпечення роздільної здатності

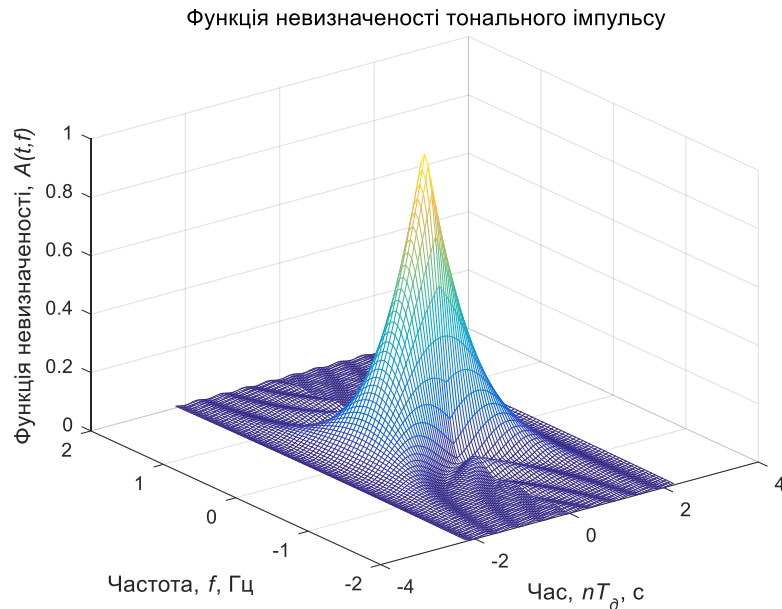


Рис. 4.2. Графік функції невизначеності тонального імпульсу

Поверхня невизначеності характеризує роздільну здатність за дальністю і швидкістю і, отже, дає змогу обґрунтувати вибір зондувального сигналу. Для зручності вибору типу зондувального сигналу поверхню невизначеності іноді замінюють еквівалентною циліндричною поверхнею з одиничною площею основи і висотою, що дорівнює одиниці. Приклад основи еквівалентної циліндричної поверхні наведено на рис. 4.3.

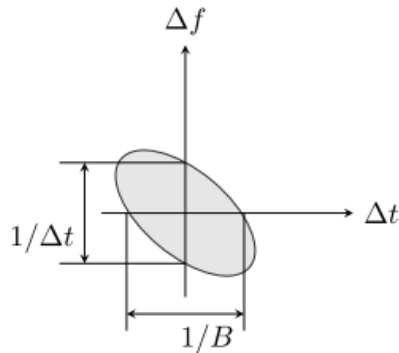


Рис. 4.3. Узагальнений вигляд основи циліндричної поверхні, еквівалентної поверхні невизначеності

4.2. Приклад програми моделювання

4.2.1. Моделювання автокореляційних функцій і функції невизначеності для простих сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів

```

% Імітаційне моделювання та графічна візуалізація
% функції невизначеності простих і складних сигналів
clear all; % Очищення пам'яті
close all; % Закриття всіх вікон із графіками
clc; % Очищення вікна команд і повідомлень
fontSize=10; % Розмір шрифту графіків
fontType=''; % Тип шрифту графіків
% Колір графіків
tColor='b'; % Часова область
tColorLight=[0.3 0.7 0.9]; % Часова область
Color0='r'; % Еталонні сигнали
fColor=[1 0.4 0]; % Частотна область
eColor=[0.85 0.325 0.098]; % Похибки
eColorLight=[0.9 0.9 0.4]; % Похибки
eColorDark=[0.635 0.078 0.184]; % Похибки
tstep = 0.05; % Крок по осі часу
fstep = 0.05; % Крок по осі частоти
dT = 2; % Тривалість імпульсу
tmin = -1.1 * dT; % Діапазон значень за часом (мін)
tmax = 1.1 * dT; % Діапазон значень за часом (макс)
fmin = -4/dT; % Діапазон значень за частотою (мін)
fmax = 4/dT; % Діапазон значень за частотою (макс)
t = tmin:tstep:tmax; % Значення по осі часу
f = fmin:fstep:fmax; % Значення по осі частоти

```

4.2.2. Моделювання двовимірної автокореляційної функції для тонального імпульсу

```

% Формування значень двовимірної автокореляційної автокореляційної
% функції тонального імпульсу
eps = 0.000001;
i = 0;
for ti = tmin:tstep:tmax

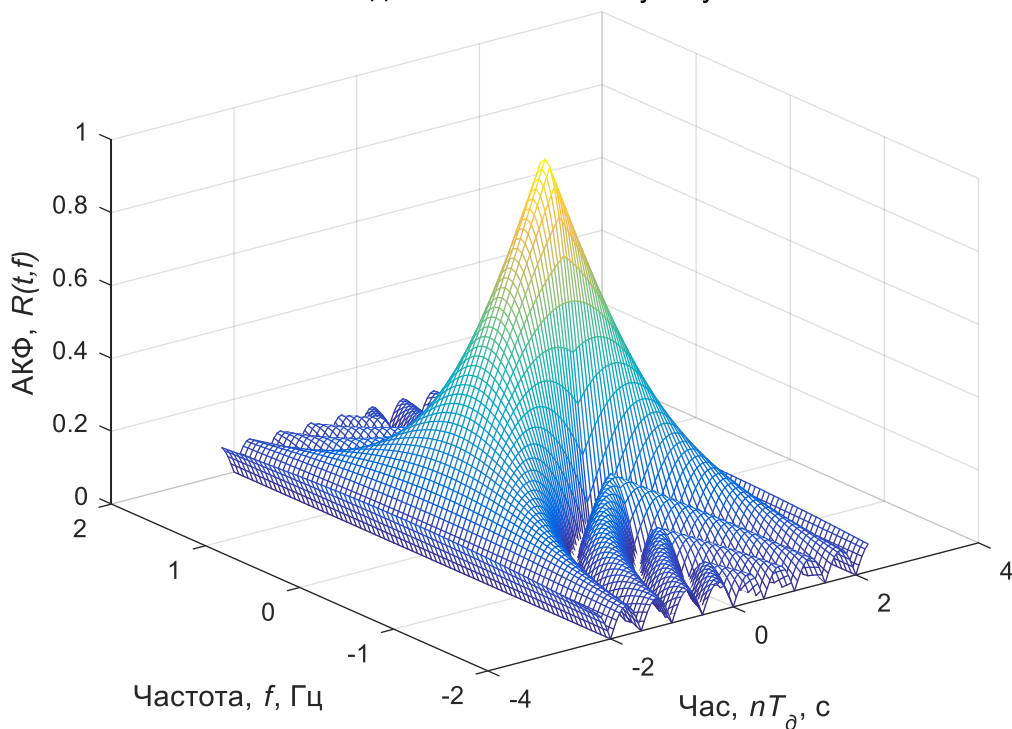
```

```

i = i + 1;
j = 0;
for fj = fmin:fstep:fmax
    j = j + 1;
    vall1 = 1 - abs(ti) / dT;
    val2 = pi * dT * (1.0 - abs(ti) / dT) * fj;
    x(j,i) = abs( vall1 * sin(val2+eps)/(val2+eps));
end
end
% Формування тривимірного графіка
figure; mesh(t,f,x);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel('Час, \it nT_d\rm, с'); % Напис осі абсцис
ylabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі ординат
zlabel('АКФ, \it R(t,f)'); % Напис осі аплікату
title({'\rm Двовимірна автокореляційна функція';...
'для тонального імпульсу'}); % Заголовок

```

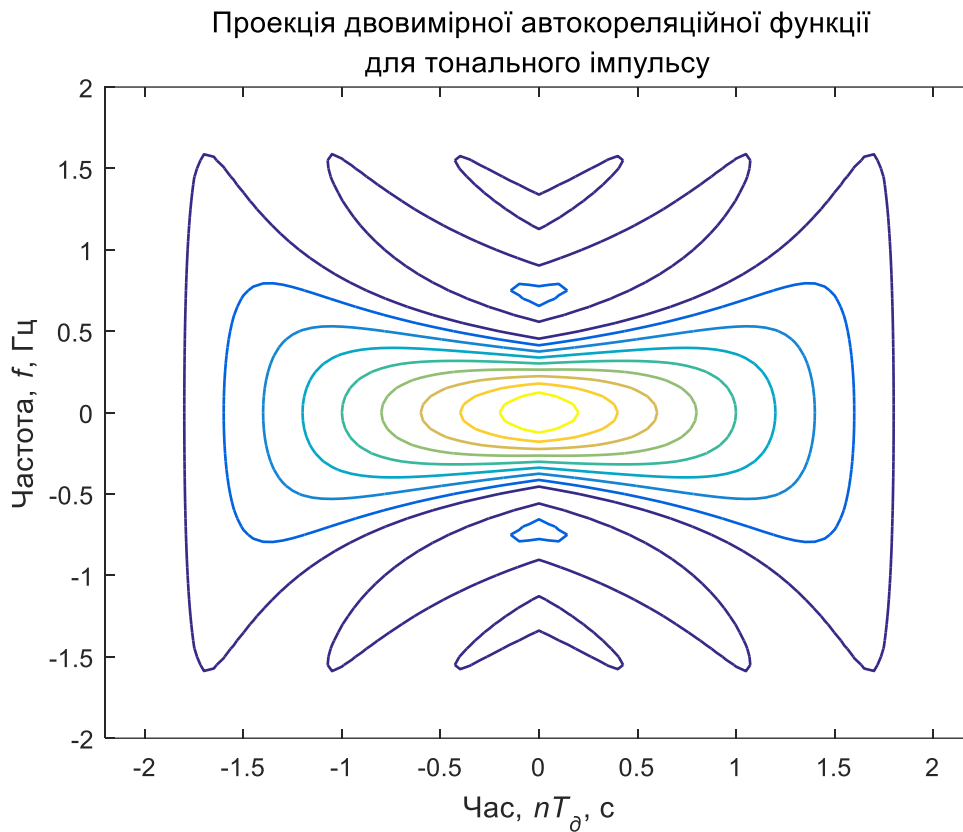
Двовимірна автокореляційна функція
для тонального імпульсу



```

% Формування проєкції
figure; contour(t,f,x, 'Linewidth',1);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel('Час, \it nT_d\rm, с'); % Напис осі абсцис
ylabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі ординат
title({'\rm Проєкція двовимірної автокореляційної функції';...
'для тонального імпульсу'}); % Заголовок

```



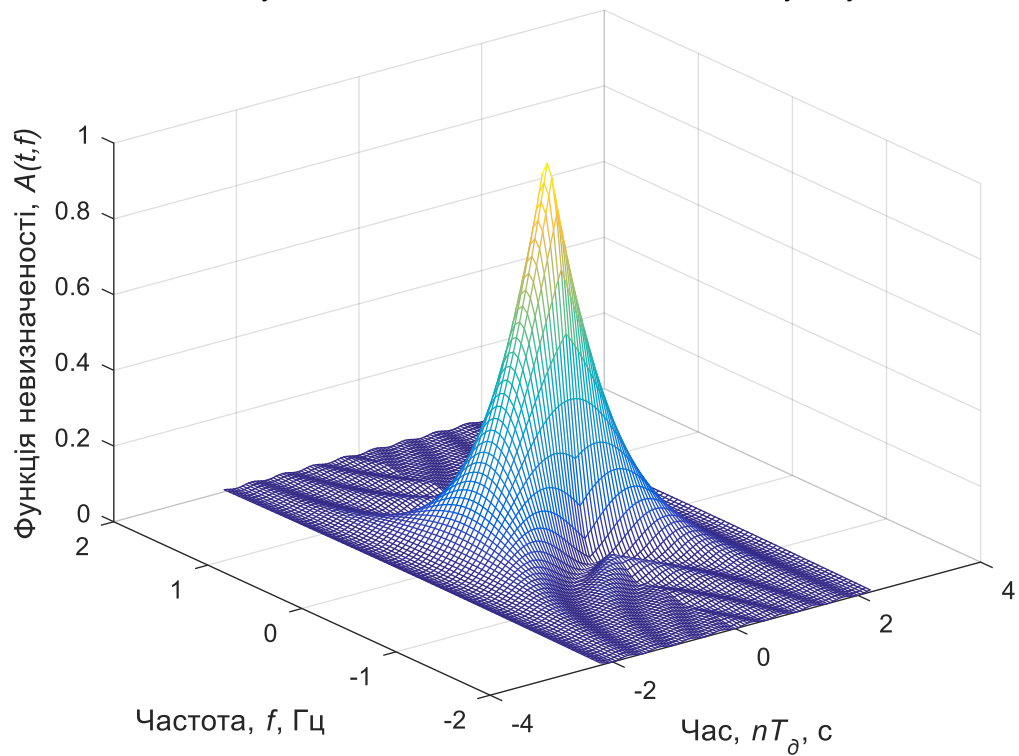
4.2.3. Моделювання функції невизначеності для тонального імпульсу

```

% Моделювання функції невизначеності імпульсу з лінійною частотною модуляцією
y = x.^2; % Формування значень
% Формування тривимірного графіка
figure; mesh(t,f,y);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel ('Час, \it nT_0\rm, с'); % Напис осі абсцис
ylabel ('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі ординат
zlabel ('Функція невизначеності, \it A(t,f)'); % Напис осі аплікату
title({'\rm Функція невизначеності тонального імпульсу'}); % Заголовок

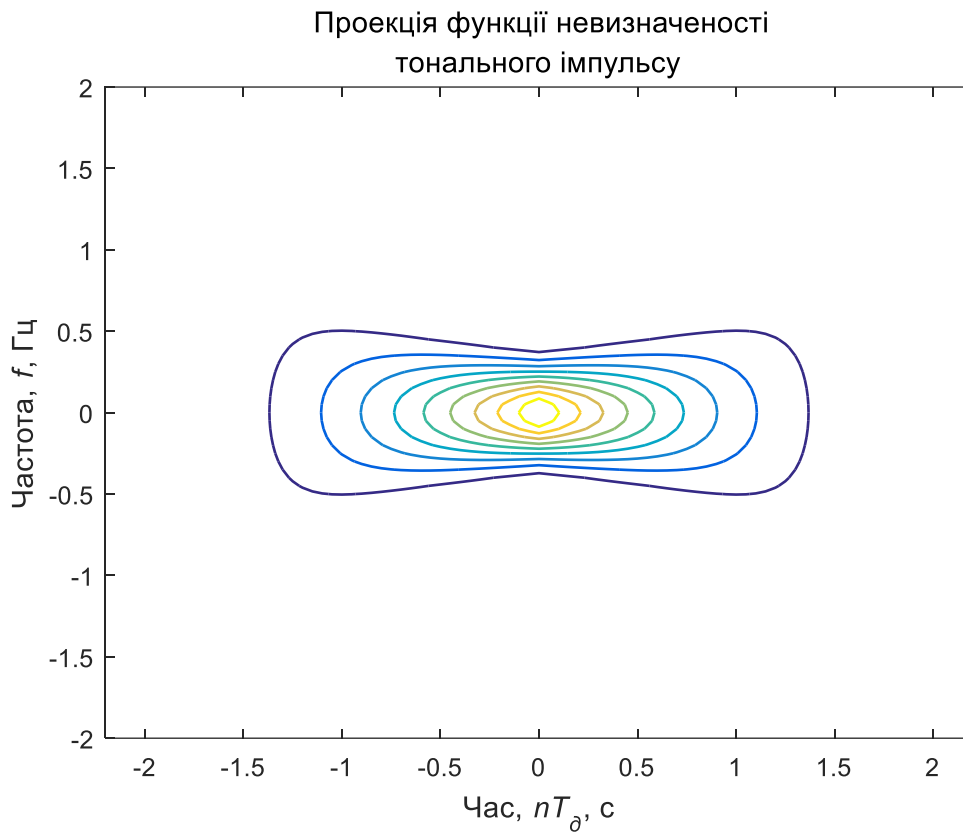
```

Функція невизначеності тонального імпульсу



4.2.4. Формування проєкції функції невизначеності для тонального імпульсу

```
% Формування проєкції
figure; contour(t,f,y,'Linewidth',1);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel ('Час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel ('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі ординат
title({'\rm Проекція функції невизначеності';...
'тонального імпульсу'}); % Заголовок
```

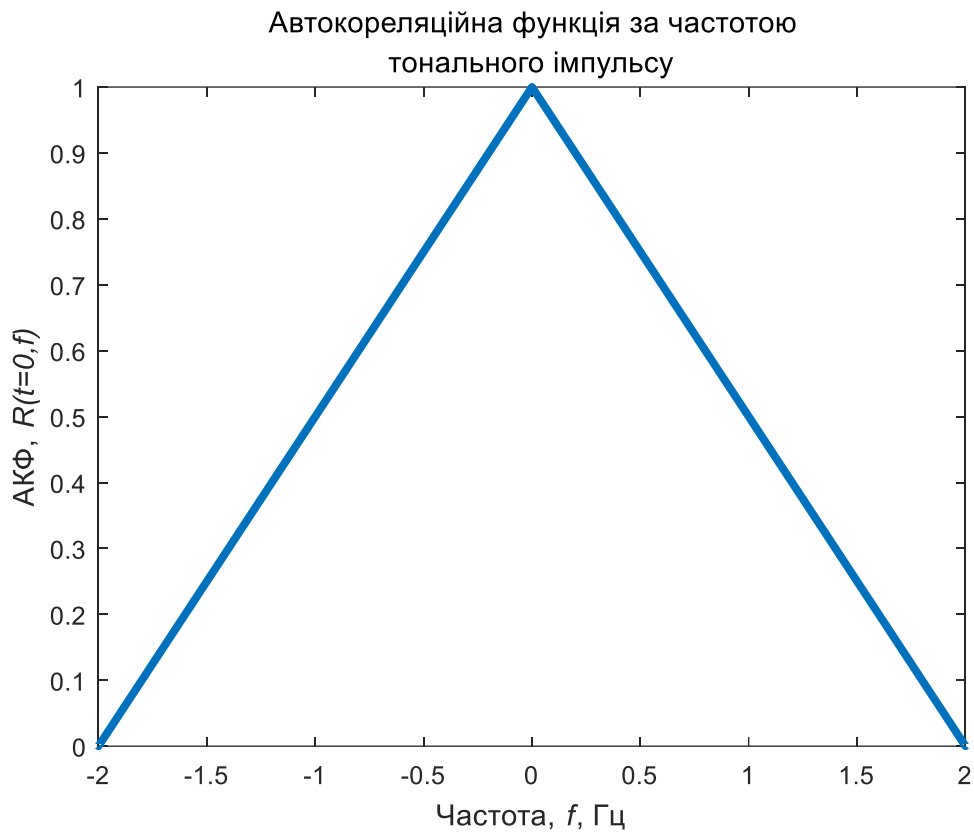


4.2.5. Моделювання автокореляційної функції за частотою для тонального імпульсу

```

% Формування автокореляційної функції за частотою для тонального
% імпульсу
xf=x((fmax-fmin)/(2*fstep)+1,:); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(t,xf,'Linewidth',3);
axis([fmin fmax 0 1]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
title({'\rm Автокореляційна функція за частотою';...
'тонального імпульсу'}); % Заголовок
xlabel ('Частота,\it f\rm, Гц'); % Напис осі абсцис
ylabel('АКФ,\it R(t=0,f)\rm'); % Напис осі ординат

```

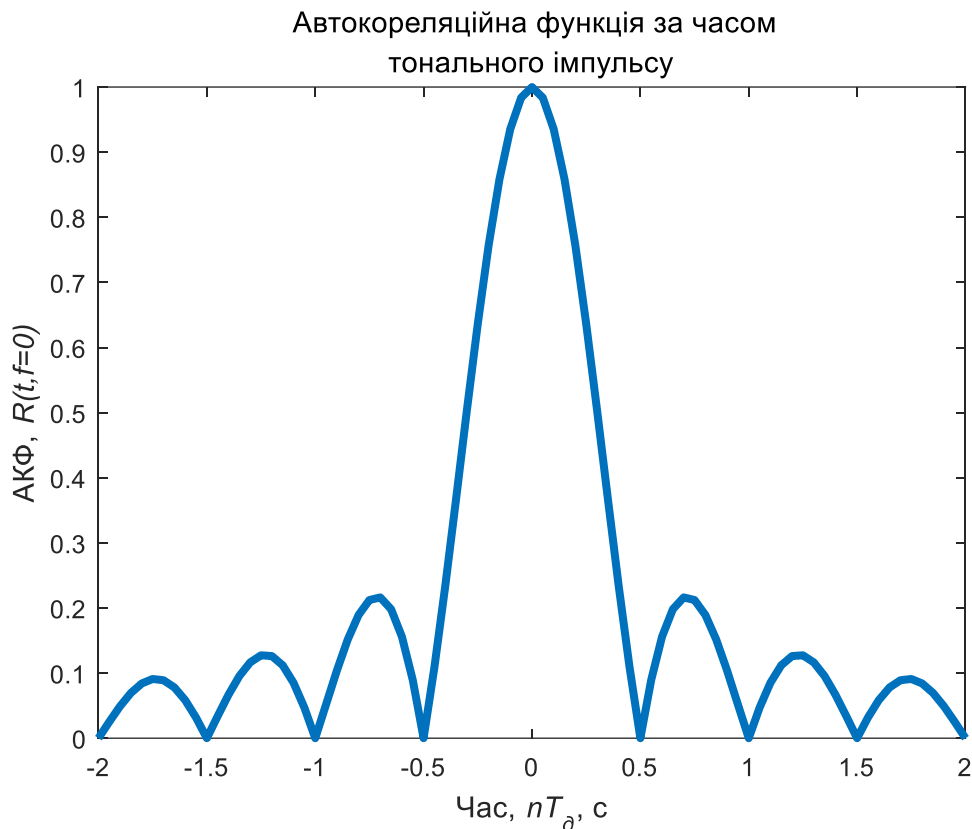



4.2.6. Моделювання автокореляційної функції за часом для тонального імпульсу

```

% Формування автокореляційної функції за часом для тонального
% імпульсу
xt=x(:, (tmax-tmin)/(2*tstep)+1); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(f,xt, 'Linewidth',3);
axis([fmin fmax 0 1]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
title({'\rm Автокореляційна функція за часом'; 'тонального імпульсу'}); %
Заголовок
xlabel ('Час, \it nT_d\rm, с'); % Напис осі абсцис
ylabel ('АКФ, \it R(t, f=0)\rm'); % Напис осі ординат

```



4.2.7. Моделювання автокореляційних функцій та функції невизначеності для складних сигналів. Ініціалізація та формування значень основних параметрів

```
% Формування двовимірної автокореляційної функції ЛЧМ-імпульсу
fDelta = 2; % Ширина спектра імпульсу
mu = (fDelta*fmax)/(2*dT); % Лінійний коефіцієнт девіації частоти
```

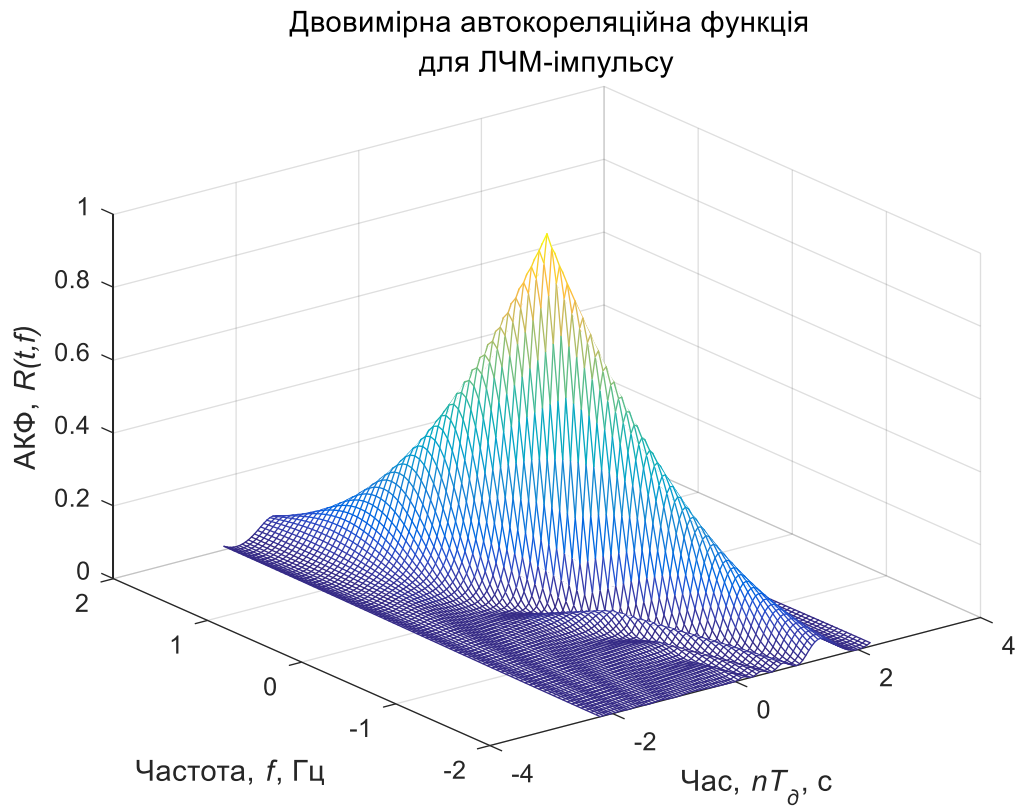
4.2.8. Моделювання двовимірної автокореляційної функції для імпульсу лінійною частотною модуляцією

```
i=0;
for ti = tmin:tstep:tmax
    i = i + 1;
    j = 0;
    for fj = fmin:fstep:fmax
        j = j + 1;
        val1 = 1. - abs(ti) / dT;
        val2 = pi * dT * (1.0 - abs(ti) / dT);
        val3 = (fj + mu * ti);
        val = val2 * val3;
        x(j,i) = abs( val1 * (sin(val+eps)/(val+eps)) ).^2;
    end
end
end
% Формування тривимірного графіка
figure; mesh(t,f,x);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel ('Час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel ('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі ординат
```

```

zlabel('АКФ, \it R(t,f)'); % Напис осі аплікату
title({'\rm Двовимірна автокореляційна функція';...
'для ЛЧМ-імпульсу'}); % Заголовок

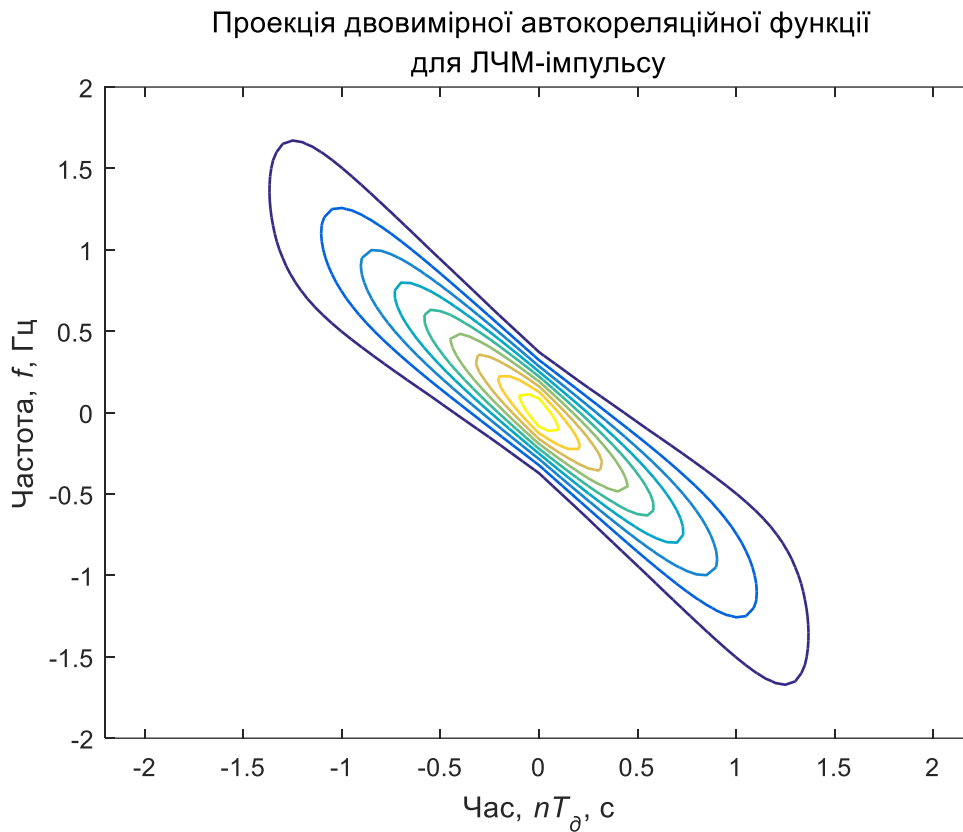
```



```

figure; contour(t,f,x,'Linewidth',1);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel('Час, \it nT_d\rm, с'); % Напис осі абсцис
ylabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі ординат
title({'\rm Проекція двовимірної автокореляційної функції';...
'для ЛЧМ-імпульсу'}); % Заголовок

```



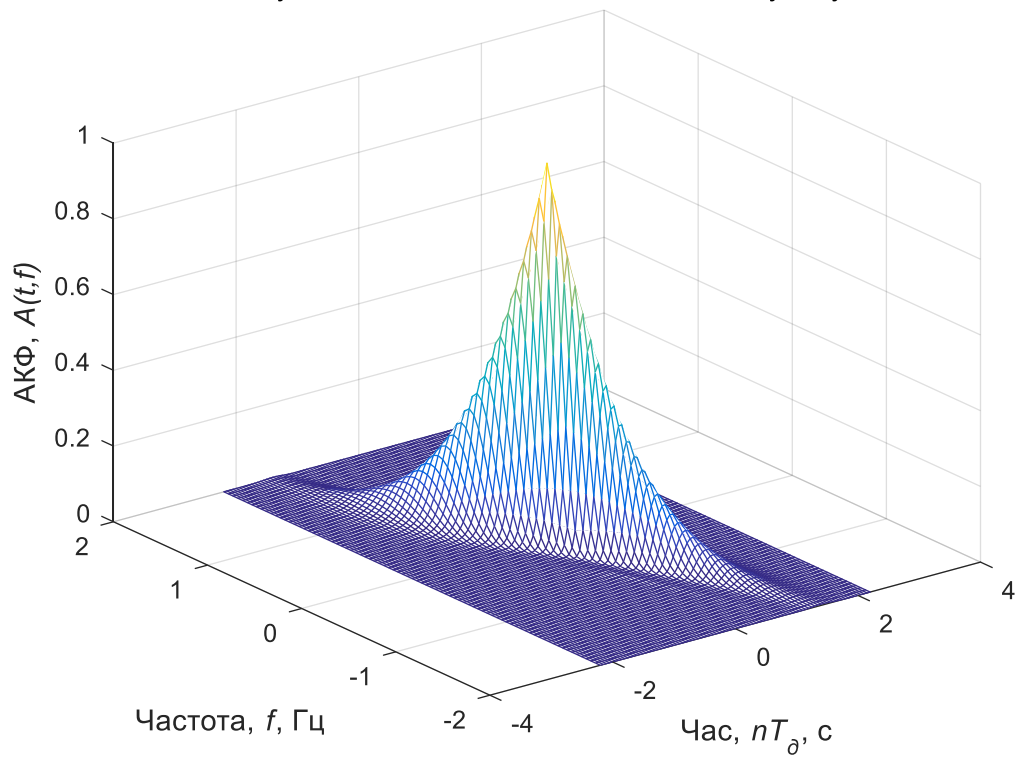
4.2.9. Моделювання функції невизначеності для імпульсу з лінійною частотною модуляцією

```

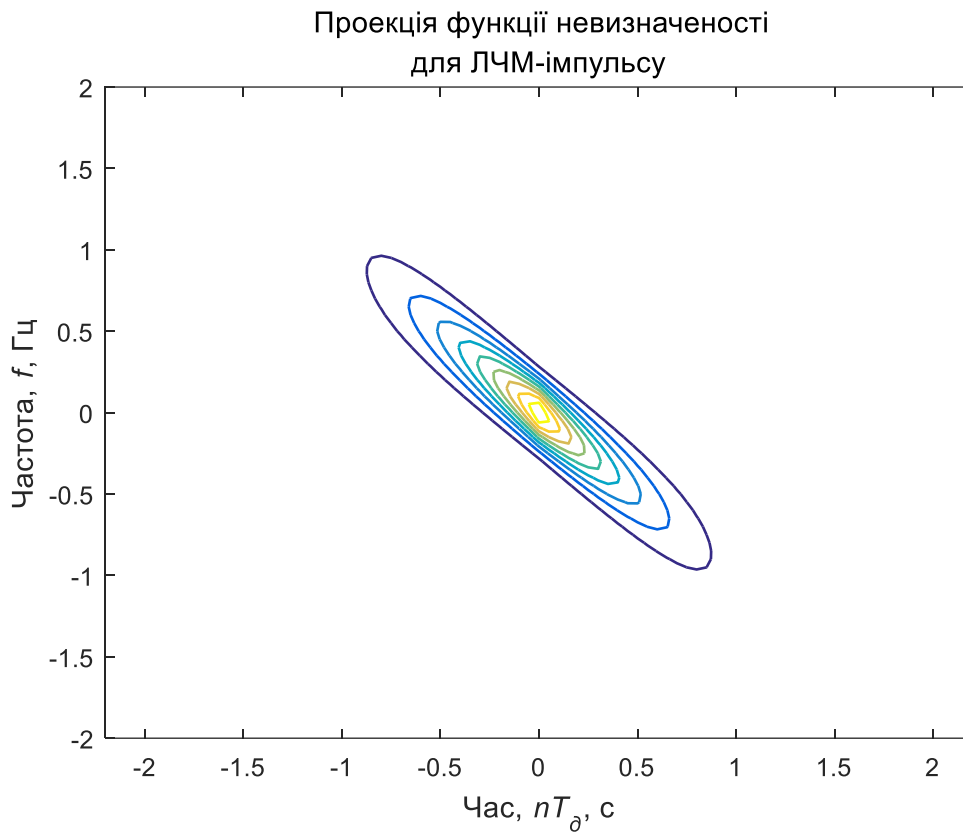
% Моделювання функції невизначеності імпульсу з лінійною частотною модуляцією
y = x.^2; % Формування значень
% Формування тривимірного графіка
figure; mesh(t,f,y);
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel('Час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис
ylabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі ординат
zlabel('АКФ, \it A(t,f)'); % Напис осі аплікату
title({'\rm Функція невизначеності для ЛЧМ-імпульсу'}); % Заголовок

```

Функція невизначеності для ЛЧМ-імпульсу



```
% Формування проєкції  
figure; contour(t, f, y, 'Linewidth', 1);  
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту  
xlabel('Час, \it nT_d\rm, c'); % Напис осі абсцис  
ylabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Напис осі ординат  
title({'\rm Проекція функції невизначеності';...  
'для ЛЧМ-імпульсу'}); % Заголовок
```

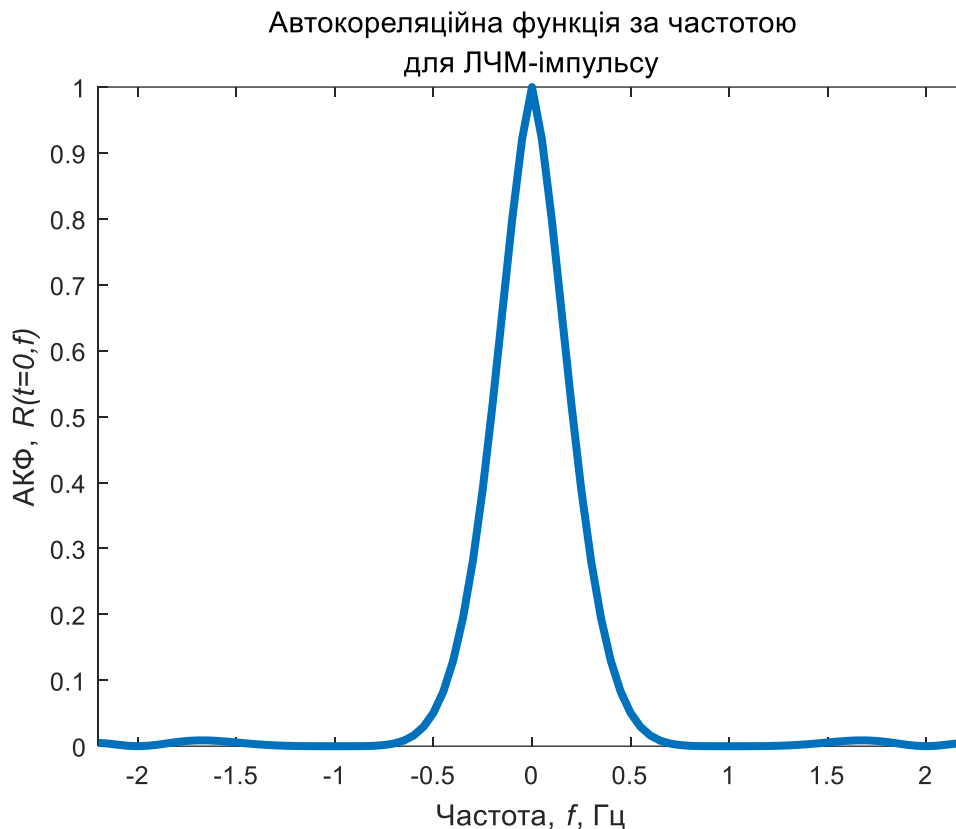


4.2.10. Моделювання автокореляційної функції за частотою імпульсу з лінійною частотною модуляцією

```

% Формування автокореляційної функції за частотою для ЛЧМ-імпульсу
xf=x((fmax-fmin)/(2*fstep)+1,:); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(t,xf,'Linewidth',3);
axis([tmin tmax 0 1]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel('Частота, \it f\rm, Гц'); % Надпись оси абсцисс
ylabel('АКФ, \it R(t=0, f)\rm'); % Напис осі ординат
title({'\rm Автокореляційна функція за частотою';...
'для ЛЧМ-імпульсу'}); % Заголовок

```



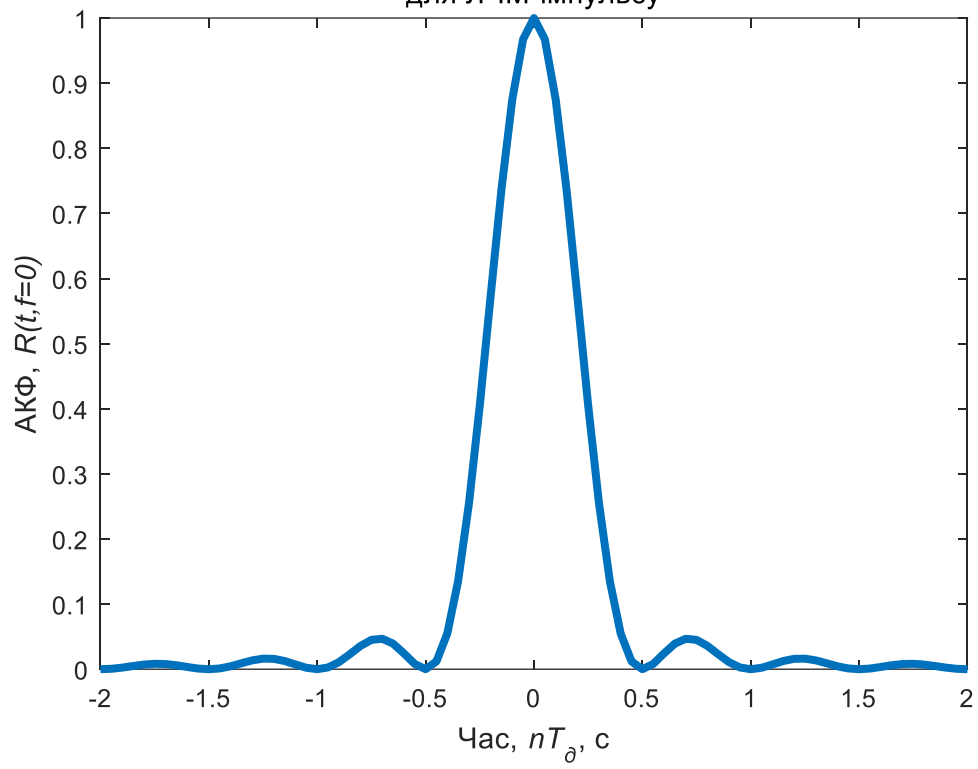
4.2.11. Моделювання автокореляційної функції за частотою імпульсу з лінійною частотною модуляцією

```

% Формування автокореляційної функції за часом для ЛЧМ-імпульсу
xt=x(:, (tmax-tmin)/(2*tstep)+1); % Формування значень
% Формування графіка
figure; plot(f, xt, 'Linewidth', 3);
axis([fmin fmax 0 1]); % Діапазон значень осей
set(get(gcf, 'CurrentAxes'), 'FontSize', fontSize); % Зміна шрифту
xlabel('Час, \it nT_d\rm, c'); % Надпись оси абсцисс
ylabel('АКФ, \it R(t, f=0)'); % Напис осі ординат
title({'\rm Автокореляційна функція за часом';...
      'для ЛЧМ-імпульсу'}); % Заголовок

```

Автокореляційна функція за часом
для ЛЧМ-імпульсу



5. ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ НА ЕОМ

5.1. Застосування чисельних методів до моделювання складних динамічних систем

При розробці складних динамічних систем (СДС) важливою задачею є моделювання фізичних процесів, що протікають в цих системах. Опис поведінки СДС за допомогою математичних рівнянь (або інших співвідношень) та наступне їх дослідження називається математичним моделюванням, а відповідні рівняння (або інші співвідношення) – математичною моделлю СДС.

Відтворення математичної моделі на ЕОМ називається машинним моделюванням.

При моделюванні СДС на ЕОМ послідовно виконуються наступні дії:

- постановка задачі;
- одержання математичної моделі СДС;
- вибір методу розв'язання поставленої задачі;
- розробка алгоритму розв'язання задачі;
- написання програми для ЕОМ;
- налагодження програми;
- виконання обчислень на ЕОМ, одержання та оцінка результатів моделювання.

При створенні математичної моделі СДС фізичні процеси, що протікають в системі, звичайно описуються диференційними рівняннями. Для того, щоб вирішити таке рівняння на ЕОМ (отримати вираз, що описує вихідну реакцію СДС при заданому вхідному впливі), необхідно застосовувати різноманітні засоби чисельного інтегрування диференційних рівнянь, тобто засоби відшукування загального і часткового рішення цих рівнянь.

При моделюванні на ЕОМ безперервна СДС зводиться до еквівалентної дискретної системи (при такому переході властивості системи в загальному випадку змінюються, наприклад, безперервна лінійна СДС першого порядку завжди стійка, в той час як відповідна їй дискретна СДС стійка тільки при обмежених значеннях параметрів тощо).

Одна з задач, що часто зустрічаються при моделюванні СДС на ЕОМ – це визначення вихідної реакції $y(t)$ по вхідному впливу $x(t)$ і параметрам математичної моделі СДС (рис. 5.1). Найчастіше така математична модель складається з одного або декількох диференційних рівнянь.

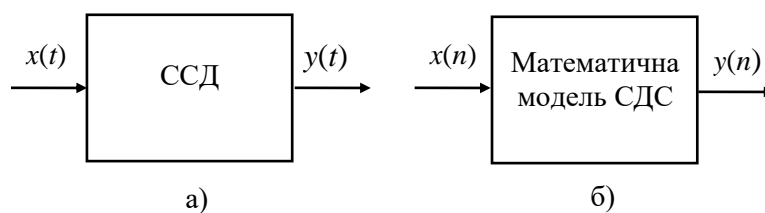


Рис. 5.1

Для розв'язання поставленої задачі на ЕОМ необхідно виконати чисельне інтегрування диференціальних рівнянь одним з відомих засобів.

Розглянемо детальніше процедуру чисельного інтегрування. Нехай вимагається виконати інтегрування деякої безперервної функції $x(t)$, де змінна t – це час. Звичайно, при моделюванні СДС $x(t)$ - це вхідний вплив СДС. Якщо СДС, що моделюється, є інтегратором, то його вихідна реакція

$$y(t) = \int_0^T x(t) dt. \quad (5.1)$$

Геометрична інтерпретація $y(t)$ представляє собою площу, обмежену кривою $x(t)$ та віссю часу в межах від 0 до T (рис. 5.2).

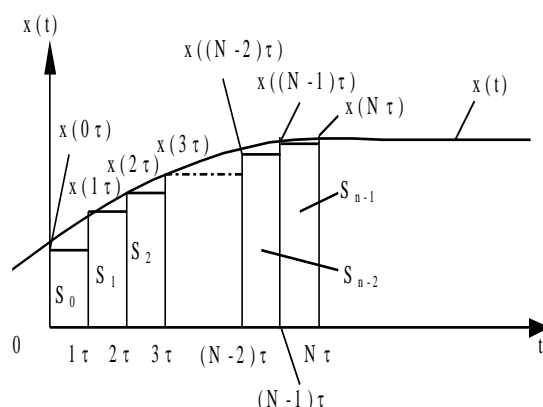


Рис. 5.2

Найпростіший прийом чисельного інтегрування полягає в заміні безперервної функції $x(t)$ кусочно-постійною функцією $x(n\tau)$, де $n = 0, 1, \dots, N$; $N = T / \tau$.

В цьому випадку вихідна реакція СДС $y(t)$ і, відповідно, вказана площа буде приблизно дорівнювати сумі площ прямокутників, побудованих на основі кусочно-постійної функції $x(n\tau)$:

$$y(N\tau) \approx S_0 + S_1 + \dots + S_{N-1} = \tau x(0) + \tau x(1 \cdot \tau) + \dots + \tau x((N-1) \cdot \tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} x(k\tau). \quad (5.2)$$

На основі (5.2) отримаємо рекурентний вираз для $y(t)$, тобто такий, що на основі значень $x(t)$ і $y(t)$ в момент $t = (N-1)\tau$ дозволяє отримати значення $y(t)$ в момент $t = N\tau$.

Маємо

$$y(n\tau) \approx \tau \sum_{k=0}^{n-1} x(k\tau) = \tau \sum_{k=0}^{n-2} x(k\tau) + \tau x((n-1) \cdot \tau) = y((n-1) \cdot \tau) + \tau x((n-1) \cdot \tau). \quad (5.3)$$

Або в іншій формі запису, опускаючи позначення інтервалу часу τ , одержуємо

$$y_n = y_{n-1} + \tau x_{n-1}. \quad (5.4)$$

Перш ніж розпочати обчислення, необхідно мати стартове значення (початкову умову) x_0 , що обирається рівною потрібному початковому значенню функції $x(t)$ на початку інтервалу інтегрування. На основі рекурентного виразу (5.4) отримаємо передаточну функцію інтегратора, вхідний вплив якого апроксимовано кусочно-постійною функцією.

Застосуємо Z -перетворення до (5.4):

$$\begin{aligned} Z\{y_n\} &= Z\{y_{n-1} + \tau x_{n-1}\}; \\ Y(z) &= z^{-1}Y(z) + \tau z^{-1}X(z); \\ Y(z) - z^{-1}Y(z) &= \tau z^{-1}X(z). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Помножимо обидві частини отриманого виразу на z :

$$zY(z) - Y(z) = \tau X(z) \quad (5.6)$$

Остаточно маємо вираз для дискретної передаточної функції при кусочно-постійній апроксимації вхідного сигналу

$$I_n = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\tau}{z-1}. \quad (5.7)$$

Блок-схема, що відповідає формулам чисельного інтегрування (5.4) і (5.7), наведена на рис. 5.3. Вона дозволяє ввести поняття дискретного еквівалента інтегратора (в літературі він отримав найменування «дигратор»).

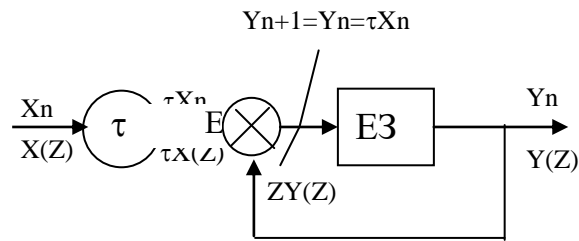


Рис. 5.3

Таким чином, щоб отримати вихідну реакцію інтегратора $Y(z)$ на вхідний вплив $X(z)$, необхідно помножити $X(z)$ на дискретну передатну функцію, що визначається виразом

$$I_n = \frac{\tau}{z-1}.$$

Описаний метод чисельного інтегрування називається методом Ейлера або методом чисельного інтегрування по формулі прямокутників.

Однак кусочно-постійна апроксимація вхідного впливу $x(t)$ дає великі помилки, особливо в випадку багаторазового виконання процедури інтегрування (наприклад, при моделюванні двох послідовно включених інтеграторів).

Функцію $x(t)$ можна апроксимувати кусочно-лінійною функцією (рис. 5.4).

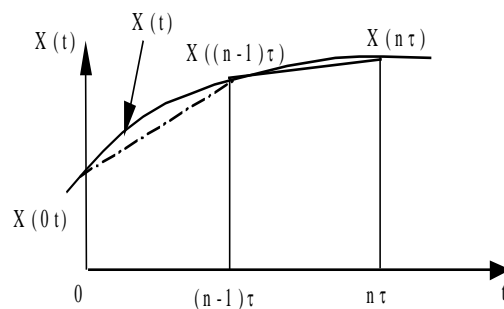


Рис. 5.4

При цьому площа, обмежена кривою $x(t)$, подається у вигляді суми площ окремих трапецій, основою яких є значення $x((n-1)\tau)$ і $x(n\tau)$. Площа такої трапеції

$$S_n = \frac{\tau}{2} (x((n-1)\tau) + x(n\tau)). \quad (5.8)$$

В результаті обчислень, аналогічних проведеним у випадку кусочно-постійної апроксимації $x(t)$, можна отримати наступну формулу для визначення $y(t)$:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{2}(x_{n-1} + x_n). \quad (5.9)$$

Одержимо дискретну передаточну функцію для рекурентного виразу (5.9) аналогічно випадку кусочно-постійної апроксимації $x(t)$ (див. формули (5.4) - (5.7)):

$$\begin{aligned} Z\{y_n\} &= Z\{y_{n-1} + \frac{\tau}{2}(x_{n-1} + x_n)\}; \\ Y\{z\} &= z^{-1}Y(z) + \frac{\tau}{2}[z^{-1}X(z) + X(z)]; \\ Y(z) - z^{-1}Y(z) &= \frac{\tau}{2}[z^{-1}X(z) + X(z)]; \\ zY(z) - Y(z) &= \frac{\tau}{2}[X(z) + zX(z)]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Остаточно маємо вираз дискретної передаточної функції для кусочно-лінійної апроксимації вхідного сигналу

$$I_T = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}. \quad (5.11)$$

Описаний метод називають методом чисельного інтегрування по формулі трапецій.

При виконанні двох послідовних операцій інтегрування можна поступити наступним чином. Вхідну функцію першого інтегратора апроксимувати кусочно-постійною функцією. Вихідна функція першого інтегратора буде мати вид кусочно-лінійної функції (що слідує з властивостей операції інтегрування) і вона точно апроксимується кусочно-лінійною функцією на вході другого інтегратора. В результаті подвійного інтегрування кусочно-постійної функції отримаємо кусочно-квадратичну функцію (формула Симпсона):

$$y_n = y_{n-2} + \frac{\tau}{3}(x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2}). \quad (5.12)$$

Виразу (5.12) відповідає дискретна передаточна функція

$$I = \frac{\tau}{3} \cdot \frac{(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^2}. \quad (5.13)$$

Проводячи обчислення, аналогічні вже наведеним, і використовуючи кусочно-лінійну апроксимацію вхідного сигналу, для випадків

багаторазового інтегрування можна отримати дискретні передаточні функції, наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1. Дискретні передаточні функції

Кількість інтегрувань	Оператор для кусочно-постійної функції		Оператор для кусочно-лінійної функції	
	Позначення	Вираз	Позначення	Вираз
1	$I_{П1}$	$\frac{\tau}{z-1}$	$I_{Т1}$	$\frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$
2	$I_{П2}$	$\frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$	$I_{Т2}$	$\frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{(z^2+4z+1)}{(z-1)^2}$

Розглянемо методи, що застосовуються при інтегруванні диференційних рівнянь першого порядку виду

$$\dot{y} = f(y, x, t) \quad (5.14)$$

де $f(y, x, t)$ – нелінійна функція;

$y(t)$ – вихідна реакція СДС;

$x(t)$ – вхідний вплив СДС;

t - незалежна змінна (час).

Відзначимо, що диференційне рівняння n -го порядку можна перетворити по формі Коши в систему n -диференційних рівнянь виду (5.14).

Проінтегруємо диференційне рівняння (5.14) по формулі трапецій (5.9):

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{2} (f(y_{n-1}) + f(y_n)). \quad (5.15)$$

В даному рівнянні y_n входить лінійно в ліву частину та нелінійно – в праву частину. Для рішення такого рівняння необхідно застосування ітераційних методів, які вимагають великих витрат машинного часу на кожному кроці інтегрування і тому неприйнятні. Для прискорення обчислень застосовується алгоритм передбачення та виправлення вихідної величини $y(t)$. Для спрощення обчислень попереднє значення $y(t)$ на n -му кроці інтегрування (передбачення) обчислюється за формулою прямокутників (5.4):

$$p_n = y_{n-1} + \tau f(y_{n-1}). \quad (5.16)$$

Після цього визначаємо виправлене значення $y(t)$ на n -му кроці інтегрування, використовуючи в правій частині (5.15) замість y_n вже відоме попереднє значення p_n :

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{2} (f(y_{n-1}) + f(p_n)). \quad (5.17)$$

Формули (5.16) і (5.17) являють собою метод чисельного інтегрування за алгоритмом передбачення і виправлення, або модифікований метод Ейлера.

В описаному методі передбачення і виправлення при розв'язанні рівняння виду (5.14) в процедурі чисельного інтегрування по формулі прямокутників використовується значення похідної $y(t)$ в одній точці $f(y_n)$. В процедурі чисельного інтегрування по формулі трапецій використовується значення похідної в двох точках $(f(y_{n-1}), f(y_n))$.

Часто для підвищення точності інтегрування необхідно застосовувати в парі формул передбачення і виправлення формули більш високого порядку, тобто ті, що використовують значення похідної в точках $f(y_{n-k}), f(y_{n-k+1}), \dots, f(y_{n-1}), f(y_n)$.

Ці формули використовуються в багатокрокових методах по алгоритму передбачення і виправлення.

Багатокрокові методи чисельного інтегрування застосовуються для підвищення точності при заданому часі обчислень або для зменшення часу обчислень при заданій точності.

Наведемо формули передбачення та виправлення для деяких багатокрокових методів.

Метод Мілна:

– передбачення

$$p_n = y_{n-4} + \frac{4\tau}{3} [2f(y_{n-1}) - f(y_{n-2}) + f(y_{n-3})]; \quad (5.18)$$

– виправлення

$$y_n = y_{n-2} + \frac{\tau}{3} [f(p_n) + 4f(y_{n-1}) + f(y_{n-2})]. \quad (5.19)$$

Метод Адамса-Мултона:

– передбачення

$$p_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{24} [55f(y_{n-1}) - 59f(y_{n-2}) + 37f(y_{n-3}) - 9f(y_{n-4})]; \quad (5.20)$$

– виправлення

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{24} [9f(p_n) - 19f(y_{n-1}) - 5f(y_{n-2}) + f(y_{n-3})]. \quad (5.21)$$

Недолік цих багатокрокових методів полягає в тому, що для моделювання необхідно мати стартові значення. Одним з засобів одержання стартових значень є інтегрування по формулі прямокутників з малим кроком до тих пір, доки не будуть отримані стартові значення, що вимагаються.

Від зазначеного недоліку вільний однокроковий метод Рунге-Кутта четвертого порядку, заснований на оцінці похідних вихідної величини у середині інтервалу обчислень:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.22)$$

де $k_1 = f(y_{n-1})$;

$$k_2 = f\left(y_{n-1} + \frac{\tau}{2}k_1\right);$$

$$k_3 = f\left(y_{n-1} + \frac{\tau}{2}k_2\right);$$

$$k_4 = f(y_{n-1} + k_3).$$

Часто метод Рунге-Кутта використовується для одержання стартових значень багатокрокових методів. Вибір конкретного методу чисельного інтегрування при моделюванні СДС на ЕОМ визначається багатьма факторами, в тому числі часом обчислень, точністю обчислень, що вимагається, простотою програмування тощо.

5.2. Методи та алгоритм програми моделювання інформаційно-вимірювальних систем

Алгоритм програми моделювання СДС зображений на рис. 5.5.

В програмі досліджується СДС, що описується диференціальним рівнянням

$$y'(t) + ay(t) = bx(t) \text{ або } y'(t) = -ay(t) + bx(t) \quad (5.23)$$

де a , b – коефіцієнти, що задаються в процесі роботи програми;

$y(t)$ – вихідна реакція СДС;

$x(t)$ – вхідний вплив.

При роботі програми можна формувати два види вхідних впливів:

– гармонійний

$$x(t) = A \cdot \sin(2f t\pi + \varphi_0); \quad (5.24)$$

– одиничний

$$x(t) = 1(t). \quad (5.25)$$

Для визначення вихідної реакції СДС використовується один з 7 методів чисельного інтегрування:

- прямокутників (Ейлера);
- трапецій;
- Симпсона;
- модифікований метод Ейлера (передбачення по формулі прямокутників і виправлення по формулі трапецій);
- Мілна четвертого порядку;
- Адамса-Мултона;
- Рунге-Кутта четвертого порядку.

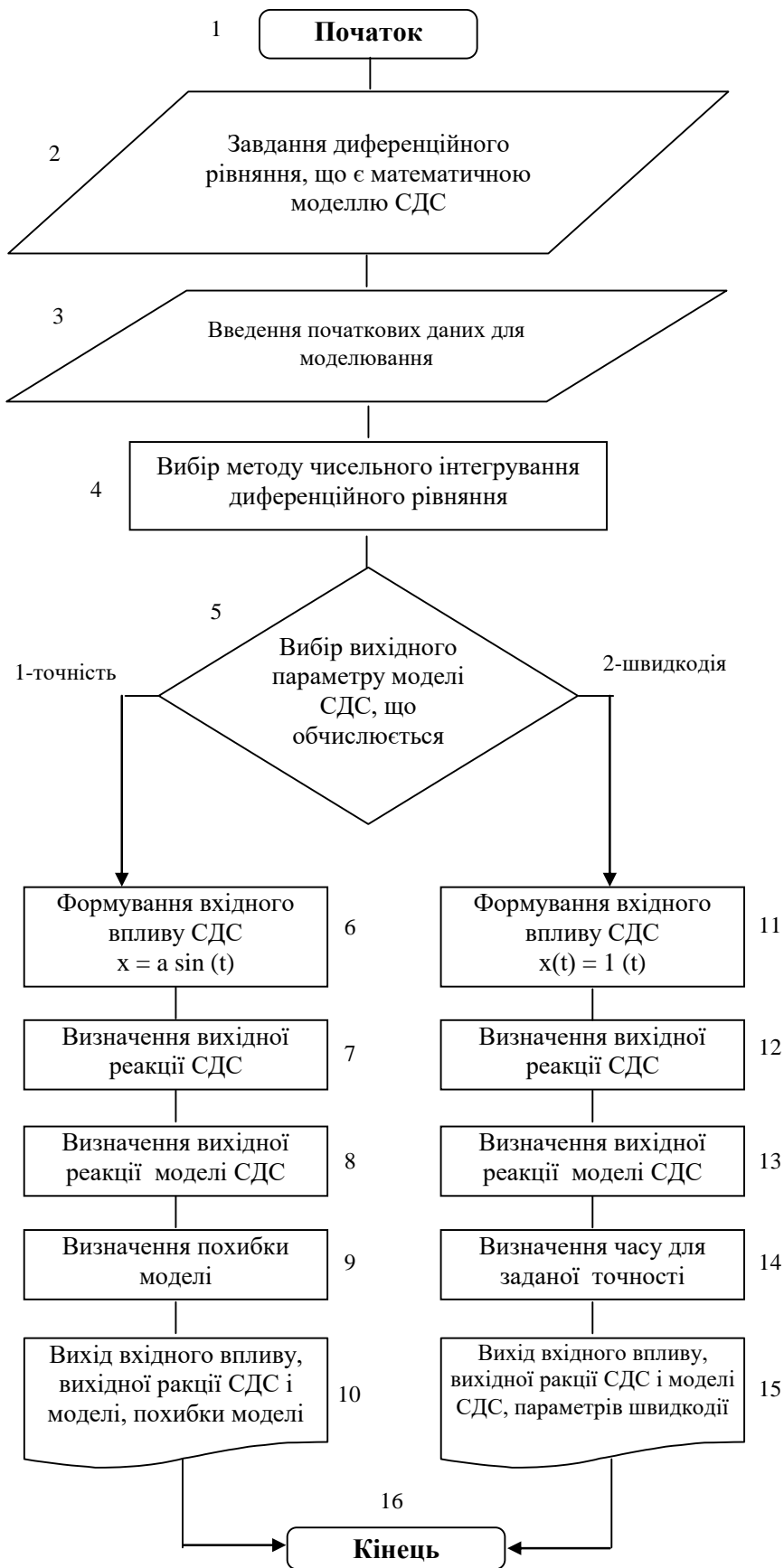


Рис 5.5

Отримаємо рекурентний вираз для чисельного інтегрування диференційного рівняння (5.23) по методу прямокутників.

Перепишемо вихідне рівняння із застосуванням операторів диференціювання D і інтегрування I :

$$Dy = -ay + bx. \quad (5.26)$$

Поділимо обидві частини (5.26) на оператор D і, враховуючи, що $1/D = I$, отримаємо

$$Y = I(-ay + bx). \quad (5.27)$$

Для методу прямокутників оператор інтегрування в формі z - перетворення має вид

$$I = \frac{\tau}{z-1}, \quad (5.28)$$

де τ - крок чисельного інтегрування.

Перепишемо (5.27) застосовуючи пряме z -перетворення:

$$Y(z) = \frac{\tau}{z-1}(-aY(z) + bX(z)); \quad (5.29)$$

$$zY(z) - Y(z) = -\tau a Y(z) + \tau b X(z); \quad (5.30)$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = -\tau a z^{-1}Y(z) + \tau b z^{-1}X(z); \quad (5.31)$$

Застосуємо до (31) зворотне z -перетворення:

$$y_n - y_{n-1} = -\tau a y_{n-1} + \tau b x_{n-1}. \quad (5.32)$$

Остаточно маємо

$$y_n = (1 - \tau a) y_{n-1} + \tau b x_{n-1}. \quad (5.33)$$

Виконавши обчислення, аналогічні (5.26) - (5.33), отримаємо наступні рекурентні вирази для інших методів чисельного інтегрування.

Метод трапецій:

$$y(n) = \frac{1}{1 + \frac{a\tau}{2}} \left[\left(1 - \frac{a\tau}{2} \right) y_{n-1} + \frac{b\tau}{2} x_n + \frac{b\tau}{2} x_{n-1} \right]; \quad (5.34)$$

Метод Симпсона:

$$y_n = \frac{1}{1 + \frac{a\tau}{3}} \left[-\frac{4a\tau}{3} y_{n-1} + \left(1 - \frac{a\tau}{3}\right) y_{n-2} + \frac{b\tau}{3} x_n + \frac{4b\tau}{3} x_{n-1} + \frac{b\tau}{3} x_{n-2} \right]; \quad (5.35)$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{\tau}{3} (-ay_{i-1} + bx_{i-1}) + \frac{4\tau}{3} (-ay_i + bx_i) + \frac{\tau}{3} (-ay_{i+1} + bx_{i+1}); \quad (5.35,a)$$

Метод передбачення по формулі прямокутників і виправлення по формулі трапецій (модифікований метод Ейлера):

– передбачення

$$p_n = y_{n-1} + \tau [-a y_{n-1} + b x_{n-1}]; \quad (5.36)$$

– виправлення

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{2} [-a y_{n-1} + b x_{n-1} - a p_n + b x_n]; \quad (5.37)$$

Метод Мілна:

$$p_n = y_{n-4} + \frac{4\tau}{3} [2(-a y_{n-1} + b x_{n-1}) - (-a y_{n-2} + b x_{n-2}) + 2(-a y_{n-3} + b x_{n-3})]; \quad (5.38)$$

$$y_n = y_{n-2} + \frac{\tau}{3} [(-a p_n + b x_n) + 4(-a y_{n-1} + b x_{n-1}) + (-a y_{n-2} + b x_{n-2})]. \quad (5.39)$$

Метод Адамса-Мултона:

$$p_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{24} [55(-a y_{n-1} + b x_{n-1}) - 59(-a y_{n-2} + b x_{n-2}) + 37(-a y_{n-3} + b x_{n-3}) - 9(-a y_{n-4} + b x_{n-4})]; \quad (5.40)$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{24} [9(-a p_n + b x_n) - 19(-a y_{n-1} + b x_{n-1}) - 5(-a y_{n-2} + b x_{n-2}) + (-a y_{n-3} + b x_{n-3})]. \quad (5.41)$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\tau}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5.42)$$

де $k_1 = -a y_{n-1} + b x_{n-1}$;

$$k_2 = -a \left(y_{n-1} + \frac{\tau}{2} k_1 \right) + b x_{n-1};$$

$$k_3 = -a(y_{n-1} + \frac{\tau}{2}k_2) + b x_{n-1};$$

$$k_4 = -a(y_{n-1} + \tau k_3) + b x_{n-1}.$$

В методах Мілна і Адамса-Мутона для одержання чотирьох стартових значень y_i використовується метод прямокутників.

Похибка обчислення вихідної реакції СДС визначається наступним чином:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i^* - y_i|, \quad (5.43)$$

де N – кількість точок, в яких обчислюється вихідна реакція моделі СДС;

y_i^* – вихідна реакція моделі СДС на i -му кроці інтегрування (розрахунок на основі методу чисельного інтегрування);

y_i – вихідна реакція СДС на i -му кроці інтегрування (аналітичний розрахунок).

При коефіцієнті диференційного рівняння $a = -1$, $b = 1$ маємо $y_i = x_i$.

Для обчислення вихідної реакції СДС використовується чисельне інтегрування по формулі трапеції з шагом у 10 разів меншим, ніж для обчислення вихідної реакції моделі СДС.

У програмі вхідний сигнал СДС має назву безперервний вхідний сигнал, вхідний сигнал моделі СДС – дискретний вхідний сигнал, вихідна реакція СДС – безперервний вихідний сигнал, вихідна реакція моделі СДС – дискретний вихідний сигнал.

Швидкодія моделі СДС $t_{м\ СДС}$ визначається інтервалом часу, що пройшов від початку подачі на вхід моделі СДС одиничного впливу $x(t) = 1(t)$ до моменту, коли вихідна реакція моделі СДС буде знаходитися в межах

$$0,95 \leq y_i^* \leq 1,05 \quad (5.44)$$

Швидкодія СДС $t_{СДС}$ визначається інтервалом часу, що пройшов від початку подачі на вхід СДС одиничного впливу $x(t) = 1(t)$ до моменту, коли вихідна реакція СДС буде знаходитися в межах, визначених співвідношенням (5.44).

Різниця цих двох величин визначає вплив методу чисельного інтегрування на динамічні властивості моделі СДС. Вказану різницю можна вважати швидкодією методу чисельного інтегрування $t_{мчі}$ (рис. 5.6).

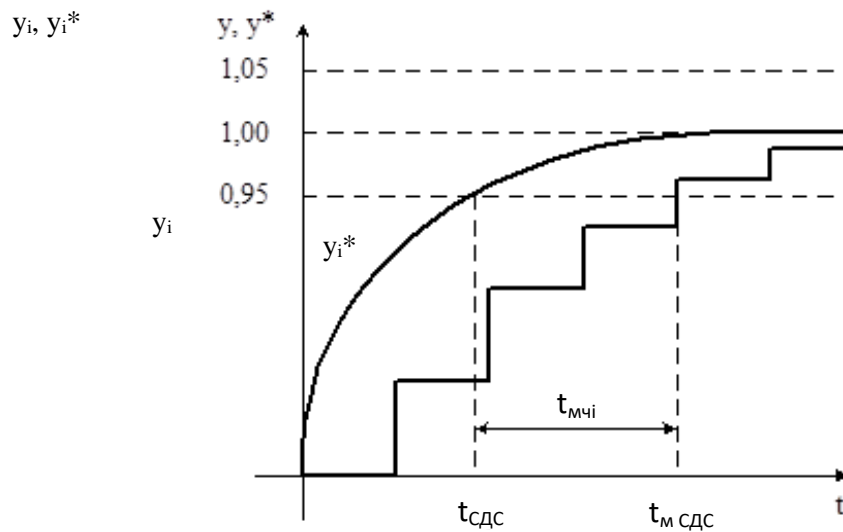


Рис. 5.6

Початкові дані для програми:

- тип моделі СДС, що досліджується;
- метод чисельного інтегрування диференціальних рівнянь;
- коефіцієнти диференціального рівняння;
- кількість точок для розрахунків вихідної реакції моделі СДС;
- крок інтегрування.

Вихідні дані програми:

- вихідна реакція моделі СДС;
- похибка обчислень для моделі СДС;
- швидкодія моделі СДС.

5.3. Приклад програми моделювання

5.3.1. Програма моделювання складних динамічних систем на ЕОМ

```
% Математичні та програмні засоби моделювання ІВС
% Лабораторна робота № 5
% Дослідження чисельних методів моделювання ІВС на ЕОМ
% Диференціальне рівняння першого порядку  $dy(t)/dt+ay(t)=bx(t)$ 
% - - - Стандартні методи рішення ode45 ode23 ode113,
% всі методи, що програмуються, та оцінка точності методів - - -

% --- Початкові дані ---
clear variables;
% Диференціальне рівняння  $dy(t)/dt+ay(t)=bx(t)$ 
% Передаточна функція  $W(p)=K/(Tp+1)$ 
%  $a=1/T$   $b=K/T$   $T=1/a$   $K=b/a$ 
a=1; b=1;
% Початкова умова  $y(0)$ 
y0=0;
% Вхідний сигнал системи  $x(t)$ 
% тип сигналу: step - ступеневий вплив;
% sin - синусоїда;
% sin_exp - синусоїда, що згасає
Type_input_x='step';
% амплітуда сигналу, В
A_input_x=1;
% частота сигналу, Гц
f_input_x=0.1;
% Інтервал спостереження, с
Tmax=10;
% Крок чисельного методу, с
tau=0.01;
% Автоматичний вибір кроку чисельного методу для ode45 ode23 ode113,
так=1/ні=0
tau_auto=0;

% --- Моделювання ---
% Формування вхідного сигналу Input_x, потрібен тільки для відображення на
% графіку разом з рішенням диференціального рівняння та для методів, що про-
% грамуються по крокам
% В функції ODE_IMS вхідний сигнал обчислюється окремо з врахуванням поточно-
% го кроку інтегрування
ts=(0:tau:Tmax)';
Input_x=zeros(size(ts));

% Функція ODE_IMS для обчислення правої частини диференціального рівняння
switch lower(Type_input_x)
case 'step'
    Input_x(:)=A_input_x;
    ODE_IMS=@(t, y)[-a*y+b*A_input_x];
case 'sin'
    Input_x=A_input_x*sin(2*pi*f_input_x*ts);
    ODE_IMS=@(t, y)[-a*y+b*A_input_x*sin(2*pi*f_input_x*t)];
case 'sin_exp'
    Input_x=A_input_x*exp(-ts).*sin(2*pi*f_input_x*ts);
    ODE_IMS=@(t, y)[-a*y+b*A_input_x*exp(-t).*sin(2*pi*f_input_x*t)];
end;

% Визначення відліків часу на інтервалі інтегрування Tspan для чисельного
% методу
if tau_auto==1
```

```

    Tspan=[0 Tmax];
else
    Tspan=0:tau:Tmax;
end;

% Задання параметрів методу чисельного рішення диференціального рівняння
% відносна похибка рішення, абсолютна похибка рішення, максимальний розмір
кроку
Option_Lab_1 = odeset('RelTol', 0.001, 'AbsTol', 1e-6, 'MaxStep', Tmax/10);

% Рішення диференціального рівняння чисельним методом
% Yout - вектор-стовбець рішень диференціального рівняння першого порядку,
% в якому кожен елемент відповідає моменту часу у вектор-стовбці Tout
% ode45 - однокроковий явний метод Рунге-Кутта 4 та 5 порядків
tic;
[Tout45,Yout45] = ode45(ODE_IMS, Tspan, y0, Option_Lab_1);
Time45=toc;
% ode23 - однокроковий явний метод Рунге-Кутта 2 та 3 порядків
tic;
[Tout23,Yout23] = ode23(ODE_IMS, Tspan, y0, Option_Lab_1);
Time23=toc;
% ode113 - багатокроковий метод Адамса-Вашфорта_Мултона
tic;
[Tout113,Yout113] = ode113(ODE_IMS, Tspan, y0, Option_Lab_1);
Time113=toc;

% метод прямокутників (Ейлера)
YoutRect=zeros(size(ts)); YoutRect(1)=y0;
tic;
for i=2:size(ts,1)
    YoutRect(i)=(1-tau*a)*YoutRect(i-1)+tau*b*Input_x(i-1);
end;
TimeRect=toc;
% метод трапецій
YoutTrap=zeros(size(ts)); YoutTrap(1)=y0;
tic;
for i=2:size(ts,1)
    YoutTrap(i)=((1-tau*a/2)*YoutTrap(i-1)+tau*b*Input_x(i)/2+tau*b*Input_x(i-1)/2)/(1+tau*a/2);
end;
TimeTrap=toc;
% метод Симпсона
YoutSimp=zeros(size(ts)); YoutSimp=YoutTrap; % оцінка значень функції під
інтегралом за методом трапецій
tic;
for i=2:(size(ts,1)-1)
    YoutSimp(i+1)=YoutSimp(i-1)+tau/3*(-a*YoutSimp(i-1)+b*Input_x(i-1))+...
        4*tau/3*(-a*YoutSimp(i)+b*Input_x(i))+tau/3*(-
a*YoutSimp(i+1)+b*Input_x(i+1));
end;
TimeSimp=toc;
% метод модифікований Ейлера (передбачення методом прямокутників та виправ-
лення методом трапецій)
YoutReTr=zeros(size(ts)); YoutReTr(1)=y0;
tic;
for i=2:size(ts,1)
    p=YoutReTr(i-1)+tau*(-a*YoutReTr(i-1)+b*Input_x(i-1));
    YoutReTr(i)=YoutReTr(i-1)+(tau/2)*(-a*YoutReTr(i-1)+b*Input_x(i-1)-
a*p+b*Input_x(i));
end;
TimeReTr=toc;

```

```

% метод Мілна 4-го порядку багатокроковий
YoutMiln=zeros(size(ts)); YoutMiln(1)=y0;
% перші значення за методом прямокутників
YoutMiln(2)=YoutRect(2); YoutMiln(3)=YoutRect(3); YoutMiln(4)=YoutRect(4);
tic;
for i=5:size(ts,1)
    p=YoutMiln(i-4)+(tau/3)*(2*(-a*YoutMiln(i-1)+b*Input_x(i-1))-(-
a*YoutMiln(i-2)+b*Input_x(i-2))+...
    2*(-a*YoutMiln(i-3)+b*Input_x(i-3)));
    YoutMiln(i)=YoutMiln(i-2)+(tau/3)*((-a*p+b*Input_x(i))+4*(-a*YoutMiln(i-
1)+b*Input_x(i-1))+...
    (-a*YoutMiln(i-2)+b*Input_x(i-2)));
end;
TimeMiln=toc;
% метод Адамса-Мултона багатокроковий
YoutAMult=zeros(size(ts)); YoutAMult(1)=y0;
% перші значення за методом прямокутників
YoutAMult(2)=YoutRect(2); YoutAMult(3)=YoutRect(3); YoutAMult(4)=YoutRect(4);
tic;
for i=5:size(ts,1)
    p=YoutAMult(i-1)+(tau/24)*(55*(-a*YoutAMult(i-1)+b*Input_x(i-1))-59*(-
a*YoutAMult(i-2)+b*Input_x(i-2))+...
    37*(-a*YoutAMult(i-3)+b*Input_x(i-3))-9*(-a*YoutAMult(i-4)+b*Input_x(i-
4)));
    YoutAMult(i)=YoutAMult(i-1)+(tau/24)*(9*(-a*p+b*Input_x(i))+19*(-
a*YoutAMult(i-1)+b*Input_x(i-1))-...
    5*(-a*YoutAMult(i-2)+b*Input_x(i-2))+(-a*YoutAMult(i-3)+b*Input_x(i-
3)));
end;
TimeAMult=toc;
% метод Рунге-Кутта 4 порядку
YoutRC4=zeros(size(ts)); YoutRC4(1)=y0;
tic;
for i=2:size(ts,1)
    k1=-a*YoutRC4(i-1)+b*Input_x(i-1);
    k2=-a*(YoutRC4(i-1)+(tau/2)*k1)+b*Input_x(i-1);
    k3=-a*(YoutRC4(i-1)+(tau/2)*k2)+b*Input_x(i-1);
    k4=-a*(YoutRC4(i-1)+(tau/2)*k3)+b*Input_x(i-1);
    YoutRC4(i)=YoutRC4(i-1)+(tau/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end;
TimeRC4=toc;

% Обчислення значень точного рішення диференціального рівняння
switch lower(Type_input_x)
    case 'step'
        YoutPrecise=b/a+(y0-b/a)*exp(-a*ts);
        YoutPrecise45=b/a+(y0-b/a)*exp(-a*Tout45);
        YoutPrecise23=b/a+(y0-b/a)*exp(-a*Tout23);
        YoutPrecise113=b/a+(y0-b/a)*exp(-a*Tout113);
    case 'sin'
        YoutPrecise=b*A_input_x*(a*sin(2*pi*f_input_x*ts)-
2*pi*f_input_x*cos(2*pi*f_input_x*ts))/(a^2+(2*pi*f_input_x)^2)+...
        (y0+b*A_input_x*2*pi*f_input_x/(a^2+(2*pi*f_input_x)^2))*exp(-
a*ts);
        YoutPrecise45=b*A_input_x*(a*sin(2*pi*f_input_x*Tout45)-
2*pi*f_input_x*cos(2*pi*f_input_x*Tout45))/(a^2+(2*pi*f_input_x)^2)+...
        (y0+b*A_input_x*2*pi*f_input_x/(a^2+(2*pi*f_input_x)^2))*exp(-
a*Tout45);
        YoutPrecise23=b*A_input_x*(a*sin(2*pi*f_input_x*Tout23)-
2*pi*f_input_x*cos(2*pi*f_input_x*Tout23))/(a^2+(2*pi*f_input_x)^2)+...

```



```

        (y0+b*A_input_x*2*pi*f_input_x/(a^2+(2*pi*f_input_x)^2))*exp(-
a*Tout23);
        YoutPrecise113=b*A_input_x*(a*sin(2*pi*f_input_x*Tout113)-
2*pi*f_input_x*cos(2*pi*f_input_x*Tout113))/(a^2+(2*pi*f_input_x)^2)+...
        (y0+b*A_input_x*2*pi*f_input_x/(a^2+(2*pi*f_input_x)^2))*exp(-
a*Tout113);
        case 'sin_exp'
            YoutPrecise=b*A_input_x*exp(-ts).*((a-1)*sin(2*pi*f_input_x*ts)-
2*pi*f_input_x*cos(2*pi*f_input_x*ts))/((a-1)^2+(2*pi*f_input_x)^2)+...
            (y0+b*A_input_x*2*pi*f_input_x/(a-
1)^2+(2*pi*f_input_x)^2))*exp(-a*ts);
            YoutPrecise45=b*A_input_x*exp(-Tout45).*((a-
1)*sin(2*pi*f_input_x*Tout45)-2*pi*f_input_x*cos(2*pi*f_input_x*Tout45))/((a-
1)^2+(2*pi*f_input_x)^2)+...
            (y0+b*A_input_x*2*pi*f_input_x/((a-
1)^2+(2*pi*f_input_x)^2))*exp(-a*Tout45);
            YoutPrecise23=b*A_input_x*exp(-Tout23).*((a-
1)*sin(2*pi*f_input_x*Tout23)-2*pi*f_input_x*cos(2*pi*f_input_x*Tout23))/((a-
1)^2+(2*pi*f_input_x)^2)+...
            (y0+b*A_input_x*2*pi*f_input_x/((a-
1)^2+(2*pi*f_input_x)^2))*exp(-a*Tout23);
            YoutPrecise113=b*A_input_x*exp(-Tout113).*((a-
1)*sin(2*pi*f_input_x*Tout113)-
2*pi*f_input_x*cos(2*pi*f_input_x*Tout113))/((a-1)^2+(2*pi*f_input_x)^2)+...
            (y0+b*A_input_x*2*pi*f_input_x/((a-
1)^2+(2*pi*f_input_x)^2))*exp(-a*Tout113);
end;

```

```

% Оцінка точності методів чисельного рішення диференціального рівняння
Delta45=zeros(size(Yout45)); Delta23=zeros(size(Yout23));
Delta113=zeros(size(Yout113));
DeltaRect=zeros(size(YoutRect)); DeltaTrap=zeros(size(YoutTrap));
DeltaSimp=zeros(size(YoutSimp));
DeltaReTr=zeros(size(YoutReTr)); DeltaMiln=zeros(size(YoutMiln));
DeltaAMult=zeros(size(YoutAMult));
DeltaRC4=zeros(size(YoutRC4));
Delta45=Yout45-YoutPrecise45;
Delta23=Yout23-YoutPrecise23;
Delta113=Yout113-YoutPrecise113;
DeltaRect=YoutRect-YoutPrecise;
DeltaTrap=YoutTrap-YoutPrecise;
DeltaSimp=YoutSimp-YoutPrecise;
DeltaReTr=YoutReTr-YoutPrecise;
DeltaMiln=YoutMiln-YoutPrecise;
DeltaAMult=YoutAMult-YoutPrecise;
DeltaRC4=YoutRC4-YoutPrecise;
Delta45Max=max(abs(Delta45)); Delta23Max=max(abs(Delta23));
Delta113Max=max(abs(Delta113));
Delta45Mean=mean(Delta45); Delta23Mean=mean(Delta23);
Delta113Mean=mean(Delta113);
Delta45Std=std(Delta45); Delta23Std=std(Delta23); Delta113Std=std(Delta113);
DeltaRectMax=max(abs(DeltaRect)); DeltaRectMean=mean(DeltaRect);
DeltaRectStd=std(DeltaRect);
DeltaTrapMax=max(abs(DeltaTrap)); DeltaTrapMean=mean(DeltaTrap);
DeltaTrapStd=std(DeltaTrap);
DeltaSimpMax=max(abs(DeltaSimp)); DeltaSimpMean=mean(DeltaSimp);
DeltaSimpStd=std(DeltaSimp);
DeltaReTrMax=max(abs(DeltaReTr)); DeltaReTrMean=mean(DeltaReTr);
DeltaReTrStd=std(DeltaReTr);
DeltaMilnMax=max(abs(DeltaMiln)); DeltaMilnMean=mean(DeltaMiln);
DeltaMilnStd=std(DeltaMiln);

```

```

DeltaAMultMax=max(abs(DeltaAMult)); DeltaAMultMean=mean(DeltaAMult);
DeltaAMultStd=std(DeltaAMult);
DeltaRC4Max=max(abs(DeltaRC4)); DeltaRC4Mean=mean(DeltaRC4);
DeltaRC4Std=std(DeltaRC4);

% Оцінка швидкодії методів чисельного рішення диференціального рівняння
% тільки для ступеневого вхідного сигналу, фіксується час досягнення
% рівня 95% від сталого значення амплітуди вихідного сигналу
if strcmp(Type_input_x,'step')==1
    NState=find(Yout45>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(Yout45,1); end;
    TState45=Tout45(NState(1));
    NState=find(Yout23>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(Yout23,1); end;
    TState23=Tout23(NState(1));
    NState=find(Yout113>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(Yout113,1); end;
    TState113=Tout113(NState(1));
    NState=find(YoutRect>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(YoutRect,1); end;
    TStateRect=ts(NState(1));
    NState=find(YoutTrap>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(YoutTrap,1); end;
    TStateTrap=ts(NState(1));
    NState=find(YoutSimp>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(YoutSimp,1); end;
    TStateSimp=ts(NState(1));
    NState=find(YoutReTr>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(YoutReTr,1); end;
    TStateReTr=ts(NState(1));
    NState=find(YoutMiln>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(YoutMiln,1); end;
    TStateMiln=ts(NState(1));
    NState=find(YoutAMult>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(YoutAMult,1); end;
    TStateAMult=ts(NState(1));
    NState=find(YoutRC4>=(0.95*A_input_x));
    if size(NState,1)==0, NState(1)=size(YoutRC4,1); end;
    TStateRC4=ts(NState(1));
else
    TState45=0; TState23=0; TState113=0;
    TStateRect=0; TStateTrap=0; TStateSimp=0;
    TStateReTr=0; TStateMiln=0; TStateAMult=0;
    TStateRC4=0;
end;

% --- Виведення результатів моделювання ---
figure;
plot(ts, Input_x, 'k--', ts, YoutPrecise, 'k-', ...
     Tout45, Yout45(:,1), 'r-', Tout23, Yout23(:,1), 'g-', Tout113,
     Yout113(:,1), 'b:');
legend('вхід', 'вихід точно', 'вихід ode45', 'вихід ode23', 'вихід ode113');
title('Моделювання систем першого порядку чис. мет. MATLAB');
xlabel('Час, c'); ylabel('Амплітуда сигналів входу і виходу, B');
grid on;
figure;
plot(ts, Input_x, 'k--', ts, YoutPrecise, 'k-', ...
     ts, YoutRect, 'r-', ts, YoutTrap, 'g-', ts, YoutSimp, 'b-', ...
     ts, YoutReTr, 'r--', ts, YoutMiln, 'g--', ts, YoutAMult, 'b--', ts,
     YoutRC4, 'r-.');

```

```

legend('вхід', 'вихід точно', 'вихід метод прямок.', 'вихід метод трап.',
'вихід метод Симпс.', ...
'вихід метод мод.Ейл.', 'вихід метод Мілна', 'вихід метод Адамс.М',
'вихід метод Р-К 4п');
title('Моделювання систем першого порядку чис. мет., що програмуються');
xlabel('Час, с'); ylabel('Амплітуда сигналів входу і виходу, В');
grid on;
fprintf(1, 'Лабораторна робота № 1\n');
fprintf(1, 'Дослідження чисельних методів моделювання ІВС на ЕОМ\n');
fprintf(1, 'Чисельні методи рішення диф рівняння ode45, ode23, ode113 та 7
методів, що програмуються по крокам\n');
fprintf(1, 'Диференціальне рівняння dy/dt+ay(t)=bx(t), a = %7.3f, b =
%7.3f\n', a, b);
fprintf(1, 'Початкова умова y(0) = %7.3f\n', y0);
fprintf(1, 'Вхідний сигнал системи x(t) %s\n', Type_input_x);
fprintf(1, 'Амплітуда сигналу, В та частота сигналу, Гц %7.3f %7.3f\n',
A_input_x, f_input_x);
fprintf(1, 'Автоматичний вибір кроку чисельного методу для ode45 ode23 ode113,
так=1/ні=0 %7.3f\n', tau_auto);
fprintf(1, 'Інтервал спостереження, с та Крок чисельного методу, с %7.3f
%7.3f\n', Tmax, tau);
fprintf(1, 'Час вирішення диф рівняння для ode45 ode23 ode113, с %10.5f %10.5f
%10.5f\n', ...
Time45, Time23, Time113);
fprintf(1, 'Час вирішення диф рівняння для методів, що програмуються по крокам
, с %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', ...
TimeRect, TimeTrap, TimeSimp, TimeReTr, TimeMiln, TimeAMult, TimeRC4);
fprintf(1, 'Оцінки амплітудних похибок (В) та швидкодії (с) вихідного сигналу
для чисельних методів\n');
fprintf(1, '
макс зн середне зн СКЗ, В швидкодія,
с\n');
fprintf(1, 'Метод ode45 %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', Delta45Max,
Delta45Mean, Delta45Std, TState45);
fprintf(1, 'Метод ode23 %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', Delta23Max,
Delta23Mean, Delta23Std, TState23);
fprintf(1, 'Метод ode113 %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', Delta113Max,
Delta113Mean, Delta113Std, TState113);
fprintf(1, 'Метод прямокутників %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', DeltaRectMax,
DeltaRectMean, DeltaRectStd, TStateRect);
fprintf(1, 'Метод трапецій %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', DeltaTrapMax,
DeltaTrapMean, DeltaTrapStd, TStateTrap);
fprintf(1, 'Метод Симпсона %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', DeltaSimpMax,
DeltaSimpMean, DeltaSimpStd, TStateSimp);
fprintf(1, 'Метод модиф.Ейлера %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', DeltaReTrMax,
DeltaReTrMean, DeltaReTrStd, TStateReTr);
fprintf(1, 'Метод Мілна 4п %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', DeltaMilnMax,
DeltaMilnMean, DeltaMilnStd, TStateMiln);
fprintf(1, 'Метод Адамса-Мултона %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', DeltaAMultMax,
DeltaAMultMean, DeltaAMultStd, TStateAMult);
fprintf(1, 'Метод Рунге-Кутта 4п %10.5f %10.5f %10.5f %10.5f\n', DeltaRC4Max,
DeltaRC4Mean, DeltaRC4Std, TStateRC4);
fprintf(1, '\n');

```

5.3.2. Результати обчислення вихідної реакції системи на основі методів чисельного інтегрування

Лабораторна робота № 5

Дослідження чисельних методів моделювання ІВС на ЕОМ

Чисельні методи рішення диф рівняння ode45, ode23, ode113 та 7

методів, що програмуються по крокам

Диференціальне рівняння $dy/dt+ay(t)=bx(t)$, $a = 1.000$, $b = 1.000$

Початкова умова $y(0) = 0.000$

Вхідний сигнал системи $x(t)$ step

Амплітуда сигналу, В та частота сигналу, Гц 1.000 0.100

Автоматичний вибір кроку чисельного методу для ode45 ode23 ode113,

так=1/ні=0 0.000

Інтервал спостереження, с та Крок чисельного методу, с 10.000 0.010

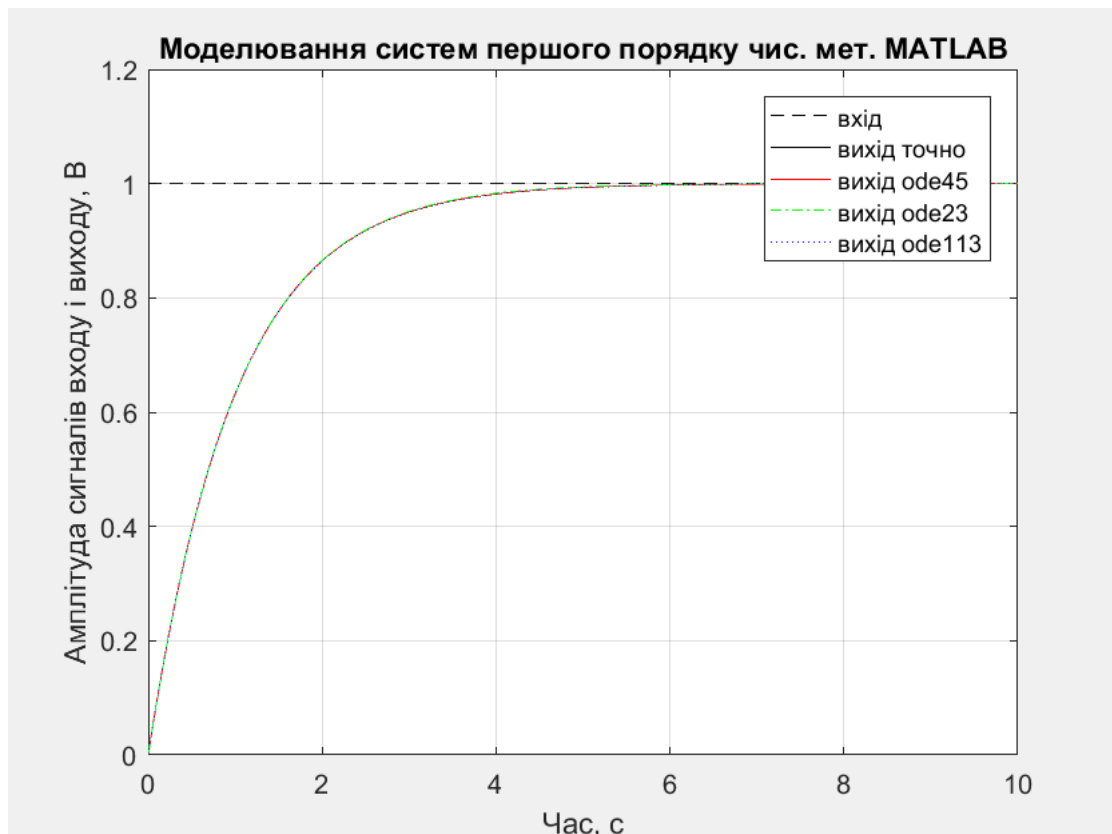
Час вирішення диф рівняння для ode45 ode23 ode113, с 0.75631

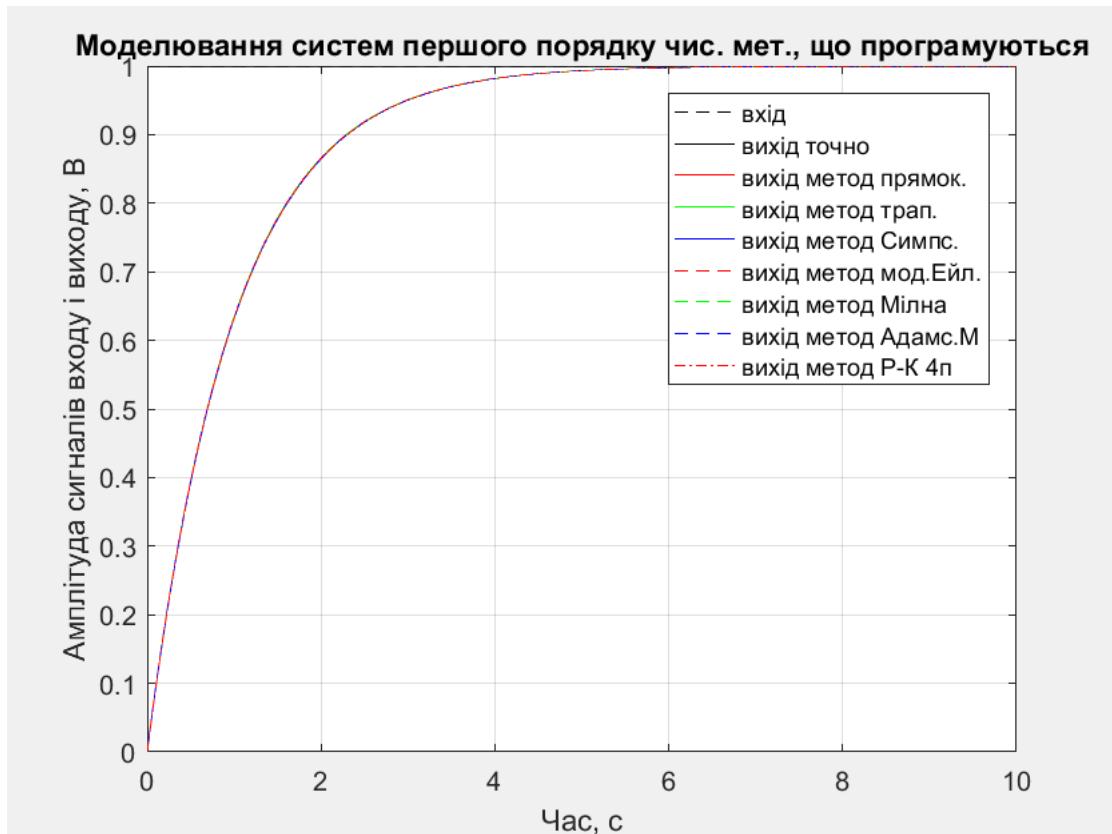
0.25313 0.49593

Час вирішення диф рівняння для методів, що програмуються по крокам, с

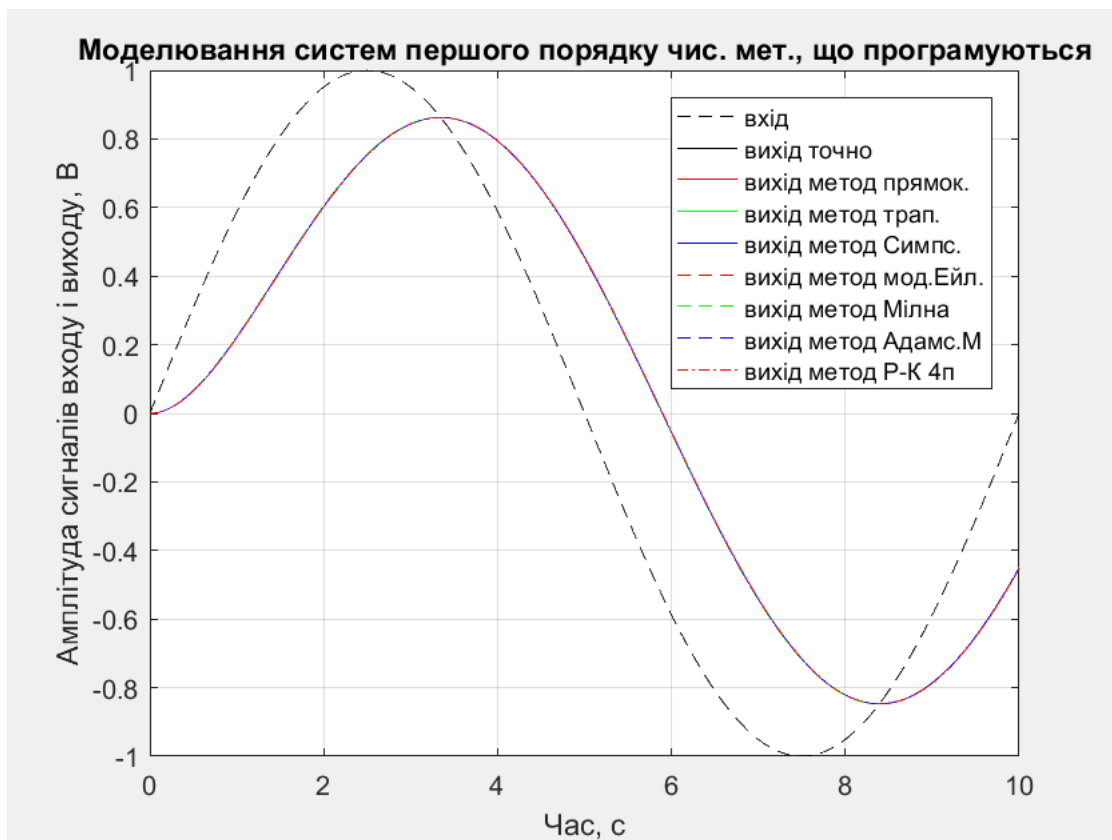
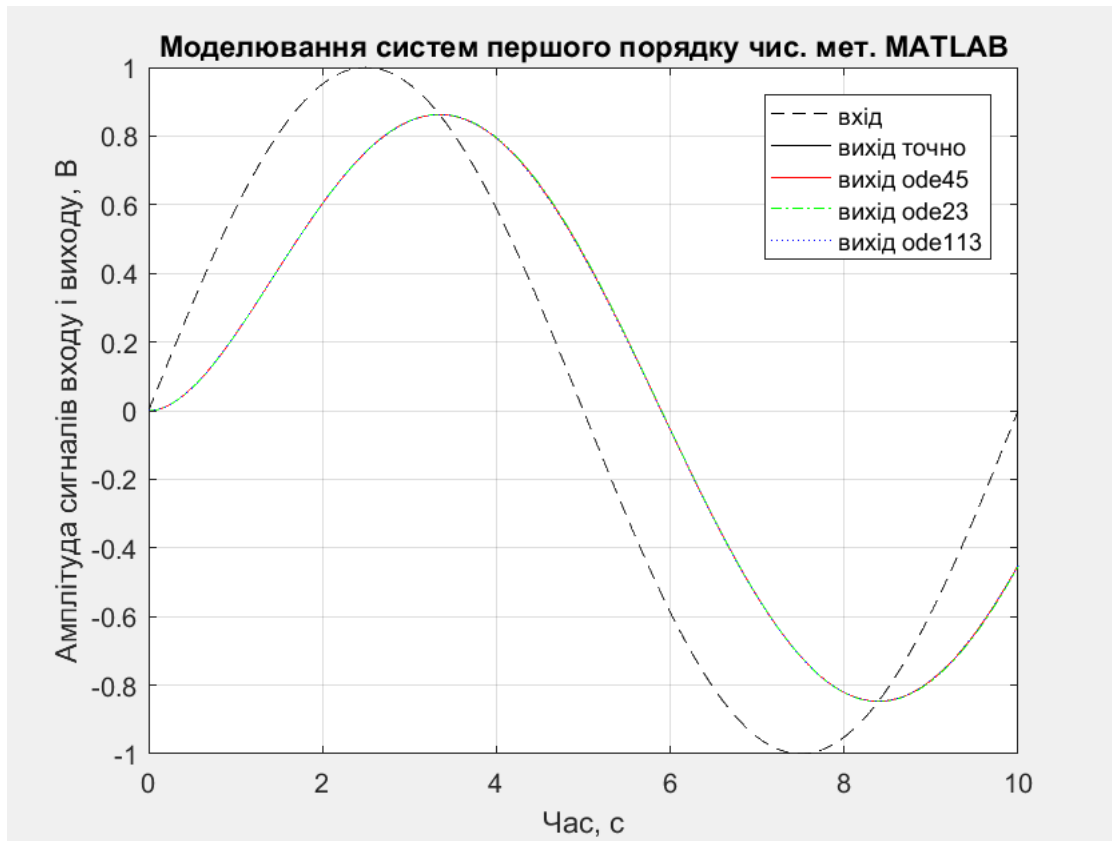
0.00679 0.00497 0.00702 0.01132 0.01018 0.01226

0.01692

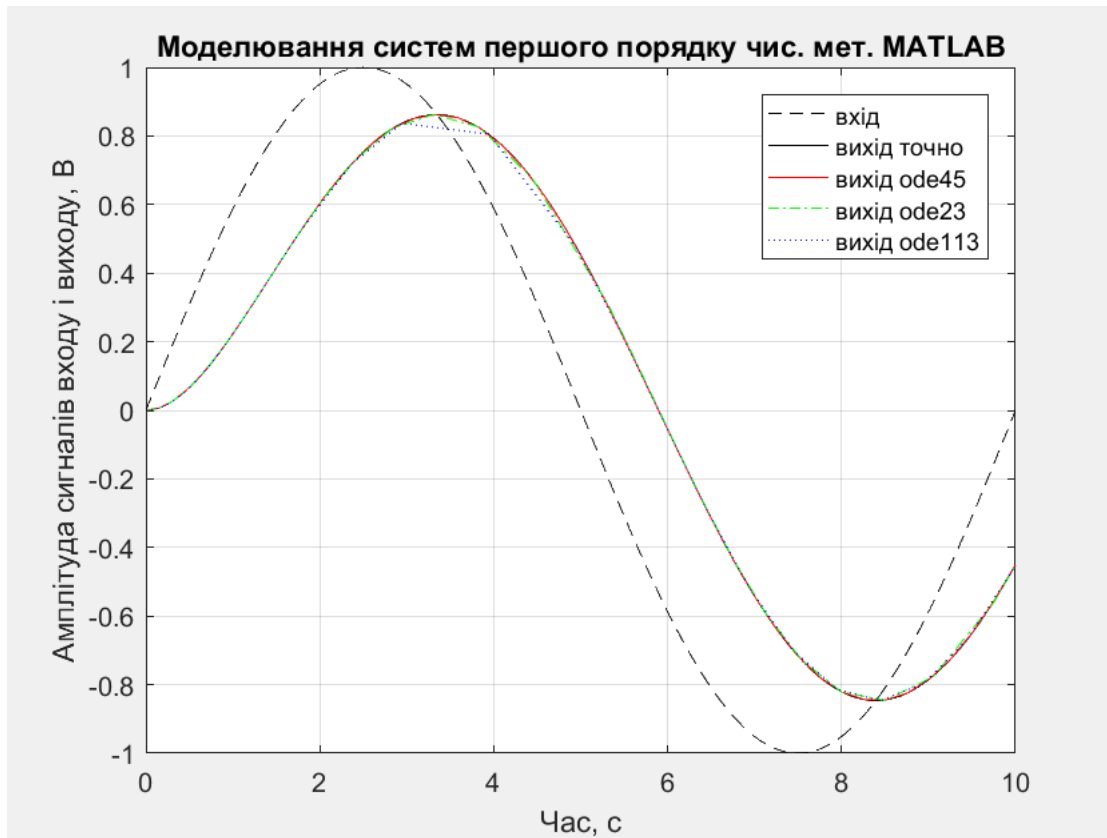


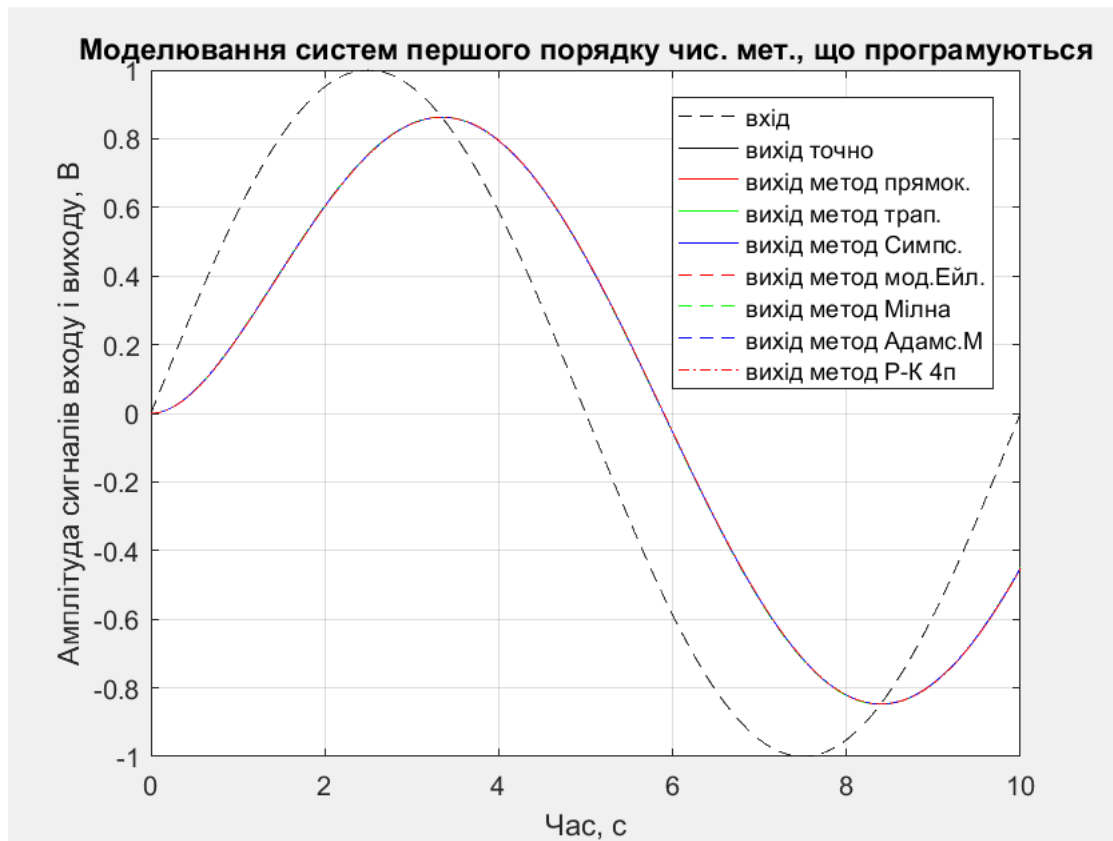


Лабораторна робота № 5
 Дослідження чисельних методів моделювання ІВС на ЕОМ
 Чисельні методи рішення диф рівняння ode45, ode23, ode113 та 7
 методів, що програмуються по крокам
 Диференціальне рівняння $dy/dt+ay(t)=bx(t)$, $a = 1.000$, $b = 1.000$
 Початкова умова $y(0) = 0.000$
 Вхідний сигнал системи $x(t) \sin$
 Амплітуда сигналу, В та частота сигналу, Гц 1.000 0.100
 Автоматичний вибір кроку чисельного методу для ode45 ode23 ode113,
 $\text{так}=1/\text{ні}=0$ 0.000
 Інтервал спостереження, с та Крок чисельного методу, с 10.000
 0.010
 Час вирішення диф рівняння для ode45 ode23 ode113, с 0.15254
 0.14854 0.23841
 Час вирішення диф рівняння для методів, що програмуються по крокам
 , с 0.00670 0.00582 0.00726 0.01079 0.01023 0.01223
 0.01674



Лабораторна робота № 5
 Дослідження чисельних методів моделювання ІВС на ЕОМ
 Чисельні методи рішення диф рівняння ode45, ode23, ode113 та 7 методів, що програмуються по крокам
 Диференціальне рівняння $dy/dt+ay(t)=bx(t)$, $a = 1.000$, $b = 1.000$
 Початкова умова $y(0) = 0.000$
 Вхідний сигнал системи $x(t) \sin$
 Амплітуда сигналу, В та частота сигналу, Гц 1.000 0.100
 Автоматичний вибір кроку чисельного методу для ode45 ode23 ode113, так=1/ні=0 1.000
 Інтервал спостереження, с та Крок чисельного методу, с 10.000 0.010
 Час вирішення диф рівняння для ode45 ode23 ode113, с 0.05875 0.04697 0.11951
 Час вирішення диф рівняння для методів, що програмуються по крокам, с 0.00604 0.00494 0.00632 0.01044 0.00989 0.01209 0.01577





5.3.3. Оцінка точності методів чисельного інтегрування

Лабораторна робота № 5

Дослідження чисельних методів моделювання ІВС на ЕОМ

Чисельні методи рішення диф рівняння ode45, ode23, ode113 та 7 методів, що програмуються по крокам

Диференціальне рівняння $dy/dt + ay(t) = bx(t)$, $a = 1.000$, $b = 1.000$

Початкова умова $y(0) = 0.000$

Вхідний сигнал системи $x(t)$ step

Амплітуда сигналу, В та частота сигналу, Гц 1.000 0.100

Автоматичний вибір кроку чисельного методу для ode45 ode23 ode113, так=1/ні=0 0.000

Інтервал спостереження, с та Крок чисельного методу, с 10.000 0.010

Час вирішення диф рівняння для ode45 ode23 ode113, с 0.75631 0.25313 0.49593

Час вирішення диф рівняння для методів, що програмуються по крокам, с 0.00679 0.00497 0.00702 0.01132 0.01018 0.01226 0.01692

Оцінки амплітудних похибок (В) та швидкодії (с) вихідного сигналу для чисельних методів

	макс зн	середнє зн	СКЗ, В	швидкодія, с
Метод ode45	0.00009	0.00000	0.00003	3.00000
Метод ode23	0.00182	0.00060	0.00053	2.98000
Метод ode113	0.00084	-0.00016	0.00035	3.01000
Метод прямокутників	0.00185	0.00050	0.00062	2.99000
Метод трапецій	0.00000	0.00000	0.00000	3.00000
Метод Симпсона	0.00001	-0.00000	0.00000	3.00000
Метод модиф.Ейлера	0.00001	-0.00000	0.00000	3.00000
Метод Мілна 4п	0.00187	0.00051	0.00062	2.99000
Метод Адамса-Мултона	0.00015	0.00001	0.00003	3.00000
Метод Рунге-Кутта 4п	0.00031	0.00008	0.00010	3.00000

Лабораторна робота № 5
Дослідження чисельних методів моделювання ІВС на ЕОМ
Чисельні методи рішення диф рівняння ode45, ode23, ode113 та 7 методів, що програмуються по крокам
Диференціальне рівняння $dy/dt+ay(t)=bx(t)$, $a = 1.000$, $b = 1.000$
Початкова умова $y(0) = 0.000$
Вхідний сигнал системи $x(t) \sin$
Амплітуда сигналу, В та частота сигналу, Гц 1.000 0.100
Автоматичний вибір кроку чисельного методу для ode45 ode23 ode113, так=1/ні=0 0.000
Інтервал спостереження, с та Крок чисельного методу, с 10.000 0.010
Час вирішення диф рівняння для ode45 ode23 ode113, с 0.15254 0.14854 0.23841
Час вирішення диф рівняння для методів, що програмуються по крокам, с 0.00670 0.00582 0.00726 0.01079 0.01023 0.01223 0.01674
Оцінки амплітудних похибок (В) та швидкодії (с) вихідного сигналу для чисельних методів

	макс зн	середнє зн	СКЗ, В	швидкодія, с
Метод ode45	0.00027	-0.00001	0.00011	0.00000
Метод ode23	0.00364	0.00033	0.00159	0.00000
Метод ode113	0.00235	-0.00038	0.00086	0.00000
Метод прямокутників	0.00142	-0.00010	0.00095	0.00000
Метод трапецій	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000
Метод Симпсона	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Метод модиф.Ейлера	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
Метод Мілна 4п	0.00243	-0.00033	0.00130	0.00000
Метод Адамса-Мултона	0.00009	-0.00001	0.00002	0.00000
Метод Рунге-Кутта 4п	0.00235	0.00017	0.00148	0.00000

Лабораторна робота № 5
Дослідження чисельних методів моделювання ІВС на ЕОМ
Чисельні методи рішення диф рівняння ode45, ode23, ode113 та 7 методів, що програмуються по крокам
Диференціальне рівняння $dy/dt+ay(t)=bx(t)$, $a = 1.000$, $b = 1.000$
Початкова умова $y(0) = 0.000$
Вхідний сигнал системи $x(t) \sin$
Амплітуда сигналу, В та частота сигналу, Гц 1.000 0.100
Автоматичний вибір кроку чисельного методу для ode45 ode23 ode113, так=1/ні=0 1.000
Інтервал спостереження, с та Крок чисельного методу, с 10.000 0.010
Час вирішення диф рівняння для ode45 ode23 ode113, с 0.05875 0.04697 0.11951
Час вирішення диф рівняння для методів, що програмуються по крокам, с 0.00604 0.00494 0.00632 0.01044 0.00989 0.01209 0.01577

Оцінки амплітудних похибок (В) та швидкодії (с) вихідного сигналу для чисельних методів

	макс зн	середнє зн	СКЗ, В	швидкодія,
с				
Метод ode45	0.00027	-0.00002	0.00011	0.00000
Метод ode23	0.00644	0.00066	0.00199	0.00000
Метод ode113	0.00105	-0.00015	0.00030	0.00000
Метод прямокутників	0.00142	-0.00010	0.00095	0.00000
Метод трапецій	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000
Метод Симпсона	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Метод модиф.Ейлера	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
Метод Мілна 4п	0.00243	-0.00033	0.00130	0.00000
Метод Адамса-Мултона	0.00009	-0.00001	0.00002	0.00000
Метод Рунге-Кутта 4п	0.00235	0.00017	0.00148	0.00000

6. ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОГРАМНО-АЛГОРИТМІЧНИХ ГЕНЕРАТОРІВ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

6.1. Теорія та методи моделювання випадкових сигналів

При проведенні експериментальних досліджень складних динамічних систем (СДС) та інших технічних приладів, при моделюванні таких систем і розв'язанні задачі ідентифікації широко використовують випадкові сигнали (процеси) з заданими статистичними характеристиками.

Як відомо, найбільш повними статистичними характеристиками випадкових процесів є диференціальний закон розподілу ймовірностей (щільність розподілу ймовірностей) і інтегральний закон (функція ймовірності).

При вивченні стаціонарних і ергодичних процесів звичайно обмежуються розглядом перших двох моментів цих законів (кореляційна теорія випадкових процесів).

Незалежно від стаціонарної або нестаціонарної природи випадкового сигналу з заданими характеристиками найбільш часто такі сигнали одержують з допомогою відповідних фільтрів (моделей сигналів) породжуючого білого шуму.

Білий шум – це гіпотетичний стаціонарний випадковий процес, що не має місця в дійсності, і у якого будь-які два значення, роздільні скільки завгодно малими інтервалами часу, статистично незалежні. В силу цього кореляційна функція шуму дорівнює дельта-функції

$$R(\tau) = a^2 \cdot \delta(\tau), \quad (6.1)$$

а спектральна щільність

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = a^2 = const \quad (6.2)$$

На практиці зустрічаються випадкові процеси, спектральні щільності яких постійні в деякій обмеженій смузі частот. Якщо ця смуга частот по величині перевищує смугу пропускання формуючого фільтру, тобто моделі сигналу (в інших випадках перевищує смугу пропускання досліджуємої СДС) і спектральна щільність приблизно постійна, то такий процес наближено може вважатися білим шумом. Щоб відрізнити реальний (наближений) білий шум від гіпотетичного (математичної абстракції), будемо брати прикметник в лапки, тобто “білий” шум – це наближений випадковий процес, що можна генерувати за допомогою технічних або алгоритмічних засобів.

В практиці експериментальних досліджень виникає необхідність знати не тільки спектральний склад випадкових сигналів, але і розподіл ймовірностей миттєвих значень цих сигналів. При цьому заданий розподіл миттєвих значень випадкового сигналу краще всього одержувати за допомогою спеціальних функціональних перетворювачів з породжуючого “білого” шуму, що має рівномірний розподіл в деякому інтервалі значень.

Типовим прикладом дискретного “білого” шуму може служити помилка квантування сигналів по рівню, що виконується в АЦП. Як відомо, квантування сигналів по рівню може бути ототожене з їхнім проходженням через перетворювач з нелінійною статистичною характеристикою, показаною на рис. 6.1.

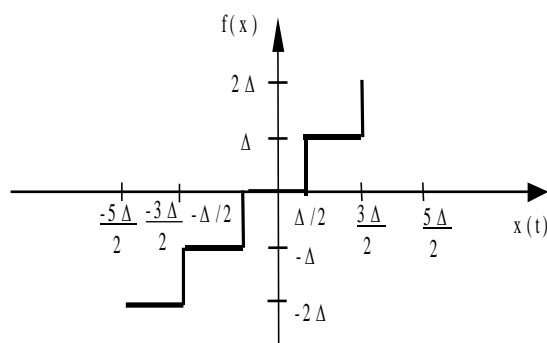


Рис. 6.1

Якщо вважати, що в ідеальному випадку (перетворювач не вносить помилок в сигнали що передаються) вихідний сигнал повинен мати значення

$$y = f(x) = kx \quad (6.3)$$

(k – коефіцієнт перетворення пристрою, $k = \operatorname{tg} \alpha$), то під помилкою квантування розуміють різницю двох сигналів, утворених на виході ідеального перетворювача з характеристикою, що показана на рис. 6.1. Процес формування помилки можна відобразити блок-схемою, зображеною на рис. 6.2.

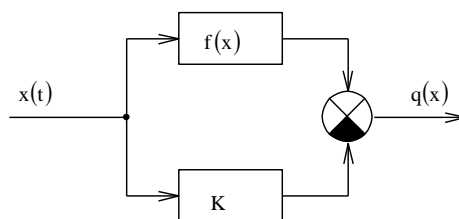


Рис. 6.2

Оскільки

$$q(x) = f(x) - kx, \quad (6.4)$$

то графік (осцилограма) зміни помилки квантування має вигляд, показаний на рис. 6.3, а.

Графік щільності розподілу імовірностей випадкової помилки квантування сигналів по рівню зображений на рис. 6.3, б. Аналітично щільність розподілу записується наступним чином:

$$W(q) = \begin{cases} 1/\Delta, & \text{при } -\Delta/2 \leq q \leq \Delta/2; \\ 0, & \text{при } |q| \geq \Delta/2. \end{cases} \quad (6.5)$$

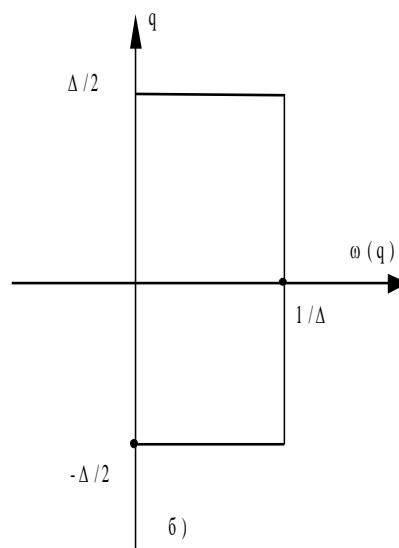
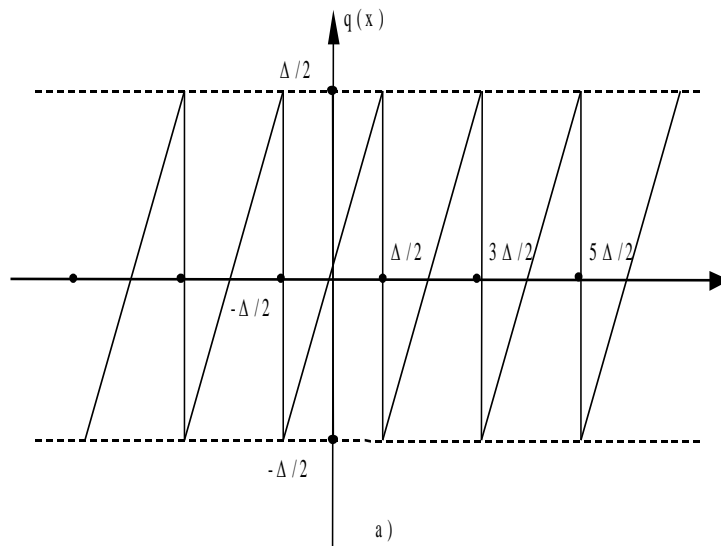


Рис 6.3

Існує три методи генерування випадкових чисел: табличний, фізичний, аналітичний (алгоритмічний). В різних генераторах випадкових чисел (ГВЧ) має місце послідовне, паралельне або змішане формування двійкових розрядів числа. Недоліком послідовних ГВЧ є низька швидкодія. Паралельні ГВЧ забезпечують високу швидкодію, але потребують значних апаратних засобів. Змішані ГВЧ використовують переваги двох попередніх типів ГВЧ і тому є найбільш поширеними.

Табличний метод формування випадкових чисел полягає у занесенні в запам'ятовуючий пристрій ЕОМ таблиць випадкових чисел і зчитуванні їх в міру необхідності. Цей метод може використовуватися при малому обсязі статистичних випробувань, так як для зберігання таблиць потрібний великий обсяг пам'яті ЕОМ.

Фізичний генератор складається з джерела шуму, підсилювача і формувача випадкових чисел. В якості джерела шуму використовуються p - n переходи діодів і транзисторів, газорозрядні прилади, вугільні стовпчики тощо. Формувач випадкових чисел може бути виконаний у вигляді обмежувача і лічильника, що підраховує кількість перевищень шумовим коливанням встановленого рівня обмеження за фіксований інтервал часу Δt . Якщо кількість підрахованих перевищень парна, то записується нуль, якщо непарна – то одиниця. Найбільш поширеним є метод побудови ГВЧ, в якому кожний розряд вихідного числа формується незалежно за допомогою ймовірнісних блоків, в яких джерелом шуму є фізичні генератори. Отримані нулі і одиниці записуються в спеціальну комірку пам'яті. В будь-який момент можна звернутися до цієї комірки і взяти звідти значення випадкового числа.

Недоліками цього метода формування випадкових чисел є:

1. Складність перевірки якості отриманих випадкових чисел. Ці перевірки потрібно робити періодично, так як через коливання напруги живлення, температури тощо може виникнути так званий “дрейф розподілу”.

2. Досить часто розрахунки на ЕОМ потрібно перепроверити, щоб виключити можливість випадкового збою. Але відтворити ті самі випадкові числа неможливо, якщо по ходу експерименту їх не запам'ятовувати. Якщо їх запам'ятовувати, то знову отримуємо табличний метод.

Досить поширеними є також ГВЧ, побудовані на основі регістра зсуву. Ці ГВЧ формують так звані М-послідовності, тобто послідовності максимальної довжини, які містять $N = 2^m - 1$ чисел, що не повторюються, де m – число розрядів регістра зсуву.

Аналітичний метод дозволяє отримати випадкові числа шляхом реалізації на ЕОМ математичного алгоритму, що складається із послідовності математичних і логічних операцій, які реалізують рекурсивні співвідношення. Аналітичні методи не дозволяють отримати випадковий процес в його суворо математичному визначенні, так як числа, отримані за допомогою формули неможливо вважати випадковими, хоча формула і може

бути досить складна. Найчастіше застосовується рекурсивний алгоритм розрахунку, який визначає всі інші числа по першому заданому числу. При цьому можливі цикли, що повторюються. Крім того, через обмежену розрядність ЕОМ неможливо отримати суворо рівномірний розподіл в заданому інтервалі значень. Тому такий випадковий процес називають псевдовипадковим. Однак, випадкові процеси, що формуються за цим методом, доволі придатні для технічних задач.

Розглянемо деякі аналітичні методи генерування випадкових чисел.

Найпростішим є алгоритм Дж. Неймана. Береться довільне число a_0 , що складається з $2n$ двійкових цифр, і обчислюється його квадрат. Отримуємо a_0^2 , що складається вже з $4n$ двійкових цифр. Далі вибирається число a_1 , що складається з $2n$ середніх двійкових цифр, шляхом відкидання старших і молодших n розрядів. Далі процес обчислень повторюється для a_1 і так далі.

Перевагою цього алгоритму є його простота. Для отримання кожного випадкового числа потрібно лише декілька простих операцій. Програма займає лише декілька комірок пам'яті ЕОМ. Будь-яке число можна легко відтворити для перевірки якості послідовності випадкових чисел. Недоліком даного алгоритму є те, що розподіл випадкових чисел дещо відхиляється від рівномірного, так як дає більше малих значень.

Також відомі і інші алгоритми генерації випадкових чисел: модифікований метод Неймана, алгоритми на основі рекурентного співвідношення, метод порівнянь, запропонований Д. Лемером.

В особливу групу виділяють специфічний дискретний випадковий процес, що отримав назву «випадкові числа» (потік випадкових чисел). Цей процес являє собою аперіодичну послідовність біполярних прямокутних імпульсів напруги, що відповідає аперіодичній виборці обмежених по значенню чисел в тій або іншій системі числення, наприклад в інтервалі значень від 0 до $(m^n - 1)$, де m - основа системи лічби, що використовується; n – кількість розрядів числа. В ряді випадків використовують періодичну послідовність випадкових чисел.

Інколи виявляється зручним пронормувати числа діленням їх на найбільше число, тобто на $(m^n - 1)$. При цьому випадкові числа розподілені в інтервалі 0...1.

Пристрій (або алгоритм), що формує послідовність (аперіодичну або періодичну) випадкових чисел, називають генератором випадкових чисел (ГВЧ). За допомогою n -розрядного генератора можна отримати $N = m^n$ різноманітних чисел.

Найбільш розповсюджені генератори двійкових чисел ($m = 2$). Фіксація отриманої цифри в кожному з n розрядів здійснюється за допомогою бістабільних елементів (один стан фіксує одиницю, а інший - нуль). Побудова ГВЧ, що використовують системи лічби, кратні двом, тобто 4, 8,

16, ..., виконується об'єднанням декількох ГВЧ з двійковою системою лічби (при вісімковій системі використовується три двійкових канали тощо).

Будь-яке випадкове двійкове число A_i можна представити у вигляді

$$A_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot 2^{j-1} \quad (6.6)$$

де α_j – випадкова величина, що приймає в кожному з n розрядів двійкового числа значення 0 або 1.

Поява нулів і одиниць в кожному розряді числа – події єдино можливі і несумісні, тому сума імовірностей цих подій

$$P(a_j = 1) + P(a_j = 0) = 1 \quad (6.7)$$

Числа, що генеруються, можуть бути корельованими і некорельованими. При цьому умова некорельованості послідовності випадкових чисел має вигляд

$$R_{kr} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k,r=1}^N (A_k - \langle A \rangle) \cdot (A_r - \langle A \rangle) = \begin{cases} 0, & k \neq r, \\ \sigma_A^2, & k = r, \end{cases} \quad (6.8)$$

де $\langle A \rangle$ – математичне очікування послідовності випадкових чисел; σ_A^2 – дисперсія послідовності випадкових чисел.

Як вже відзначалося, найбільший інтерес представляє генерація випадкових рівноймовірних десяткових чисел. В цьому випадку кожне з $N = 2^n$ чисел повинно з'являтися на виході ГВЧ з імовірністю

$$P(A_i) = 1/2^n. \quad (6.9)$$

Як видно з наведеної формули, розподіл чисел є дискретним і, отже, квазірівномірним в інтервалі $0 \dots (2^n - 1)$ або $0 \dots 1$.

Щоб випадкові числа, що генеруються, підкорялися рівномірному розподілу, необхідно виконання, принаймні, двох умов:

1) Рівність ймовірностей появи нулів і одиниць в кожному з розрядів N - розрядного числа

$$P(a_j = 1) = P(a_j = 0) = 1/2; \quad (6.10)$$

2) Відсутність статистичного або детермінованого зв'язку між розрядами чисел, що генеруються.

В найпростішому випадку генерування n - розрядних рівноймовірних чисел зводиться до отримання n однорозрядних рівно ймовірних двійкових чисел з наступним їхнім об'єднанням з урахуванням ваги кожного розряду

$$a_i = \frac{2^{i-1}}{2^n - 1}, \quad (6.11)$$

де i – номер розряду.

По засобам формування розрядів випадкових двійкових чисел ГВЧ можна поділити на наступні типи:

1) З використанням принципу випадкового чергування одного з двох тривких станів рівноваги;

2) З переліченням імпульсів випадкової послідовності за фіксований інтервал часу;

3) З переліченням періодичних імпульсів, що надходять на лічильник за випадковий інтервал часу.

Крім того, в окрему групу виділяють ГВЧ, у яких для формування одного розряду двійкового числа використовується аналізатор знаку випадкового процесу $U(t)$ у фіксовані моменти $t_i = t_0 + i \cdot T_{ГВЧ}$, де $i = 0, 1, 2, \dots$; $T_{ГВЧ}$ – тактовий період роботи ГВЧ.

Якщо $U(t_i) > 0$, то генерується одиниця; якщо $U(t_i) < 0$, генерується нуль.

ГВЧ з переліченням випадкових, по моментах появи, імпульсів за фіксований інтервал часу $T_{ГВЧ}$ і ГВЧ з переліченням періодичних імпульсів за випадковий інтервал $\Delta t_i \leq T_{ГВЧ}$ містить загальний елемент – лічильник імпульсів.

Число тригерів у лічильнику визначає розрядність одержуваних чисел і може змінюватися від 1 до n .

Якщо вимагається отримати n – розрядне випадкове число і у лічильнику міститься n ступенів лічби, то ГВЧ називають однотоковим з переліченням імпульсів по модулю $M = 2^n$.

Паралельний ГВЧ складається з n однорозрядних лічильників, що рахують імпульси, які надходять від автономних генераторів пакетів імпульсів. При цьому всі n однорозрядних лічильників з'єднуються колами зчитування.

Якщо ГВЧ складається з одного лічильника, а n -розрядне число формується за n послідовних циклів його роботи, то такий ГВЧ називають послідовним.

Послідовний ГВЧ містить вихідну пам'ять, куди через регістр зсуву заносяться значення чисел (0 або 1), отримані в кожному з n послідовних циклів.

Паралельні ГВЧ надто складні в реалізації, а послідовні ГВЧ мають низьку продуктивність. Компромісом є паралельно – послідовна структура ГВЧ.

Одним з варіантів побудови алгоритмічного ГВЧ (такі ГВЧ інколи називають «математичною моделлю ГВЧ») є завдання випадкової послідовності чисел за допомогою виразу

$$A_{i+1} = a \cdot A_i \pmod{C}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (6.12)$$

де A_i , a та C_i – цілі числа, причому

$$A_0 \neq 0 \pmod{C} \dots \quad (6.13)$$

Умова $A \equiv B \pmod{C}$ означає, що A та B співпадають по модулю N , тобто A та B мають однаковий залишок при діленні на C .

Записаний алгоритм отримання випадкових чисел A_i визначає, що при довільному початковому значенні A_0 випадкові числа A_i являють собою результат множення a на A_i та нормування по модулю C . При цьому випадкові числа мають розподіл від 0 до C , $C = 2^k$. Отримана таким чином послідовність є періодичною. Правильним вибором чисел a , C та k цей період можна зробити достатньо великим.

Практичне використання випадкових чисел звичайно ускладнене. Так, не завжди вдається забезпечити необхідні по умовам експерименту характеристики послідовностей випадкових чисел. Для цього потрібні контроль, регулювання і стабілізація ГВЧ.

Тому випадкові числа замінюють так званими псевдовипадковими послідовностями чисел. Така заміна можлива, якщо характеристики псевдовипадкової послідовності близькі до характеристик випадкової послідовності.

Псевдовипадкова послідовність є регулярним періодичним сигналом, будь-які необхідні характеристики якого можна отримати по реалізації в один період. Такими сигналами успішно вдається замінити послідовність випадкових однорозрядних чисел – «бінарний шум».

Варіант псевдовипадкової послідовності показаний на рис. 6.4, де T – тривалість двійкового сигналу (дискретна); T_n – період послідовності.

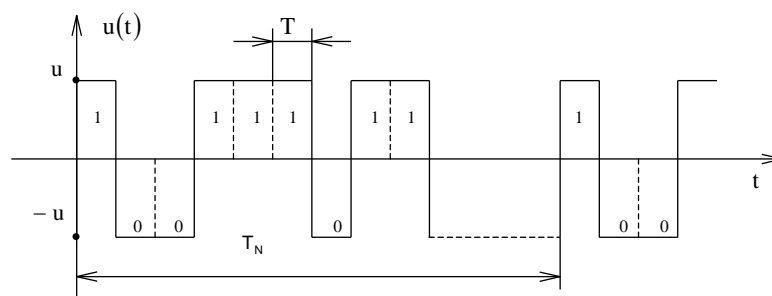


Рис. 6.4

Як «бінарний шум» найбільш широко застосовуються лінійні послідовності максимальної довжини (ПМД, або НПМД – послідовності), що генеруються за допомогою генераторів, які складаються з n – каскадних регістрів зсуву і суматорів по модулю 2 ($\text{mod } 2$). Спрощена блок – схема такого генератора зображена на рис. 6.5.

Згідно рис. 6.5 сигнали з одиничних виходів k – го і r – го тригерів додаються по $\text{mod } 2$ і надходять на вхід першого тригера. Схема з n тригерів може мати $N = 2^n$ різноманітних станів. Не можна використати лише один стан: коли в усіх тригерах зафіксовані нулі (генеруються тільки нулі). Тому максимальний період повторення буде визначатися наступним чином:

$$T_N = T(2^n - 1). \quad (6.14)$$

Оскільки стан тригера змінюється тільки через один такт (період) імпульсами зсуву, то при введенні «оператора затримки» на один такт сигнал на виході будь-якого тригера можна записати аналітично

$$x_i = D \cdot x_{i-1}. \quad (6.15)$$

Тоді робота генератора (див. рис. 6.5) відбувається наступним чином. Якщо в тригері T_1 на j – му такті зафіксоване деяке число x_1 (+1 або 0), то в результаті зсуву через один такт x_1 виявиться зафіксованим в T_2 , а в T_1 переходить число з суматора по $\text{mod } 2$. Означені оператори з кожним черговим тактом повторюються.

У відповідності з цим для станів тригерів можна записати:

$$x_1 = D \cdot x_0; x_2 = D^1 \cdot x_1; \dots; x_i = D^i \cdot x_0. \quad (6.16)$$

Сигнал на виході суматора по $\text{mod } 2$ одержуємо послідовною підстановкою:

$$D^0 \cdot x_0 = D \cdot x_k \oplus D \cdot x_n = D^k \cdot x_0 \oplus D^r \cdot x_0 \quad (6.17)$$

Для прикладу нехай $N = 3$, $k = 2$. Тоді для x_0 запишемо

$$D^0 \cdot x_0 = D^2 \cdot x_0 \oplus D^3 \cdot x_0 \quad (6.18)$$

Або

$$x_0 = (D^3 \oplus D^2 \oplus D^0) \cdot x_0 = 0 \quad (6.19)$$

де $D^0 \cdot x_0 = x_0$, так як $D^0 = 1$.

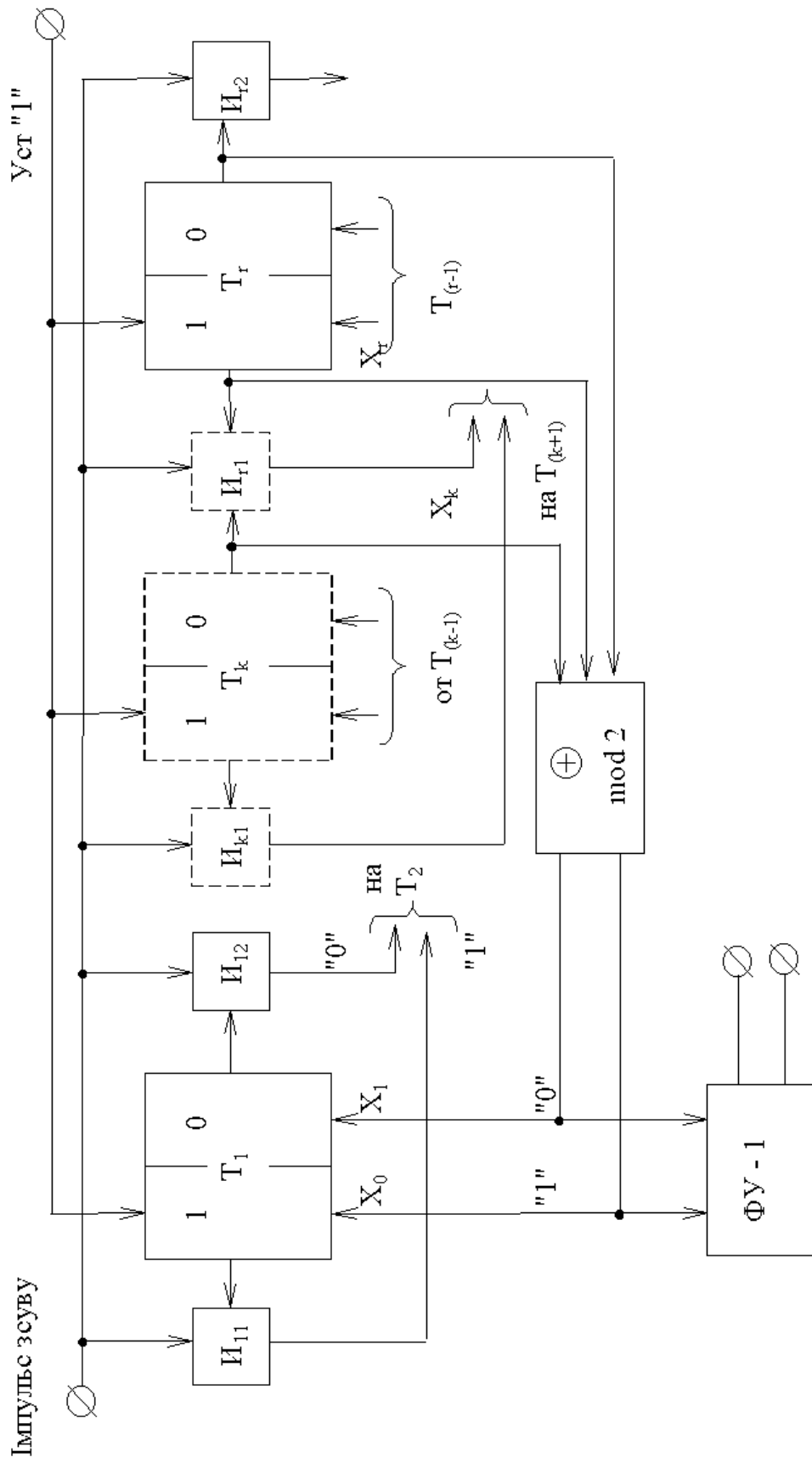


Рис. 6.5

Якщо $N = 3$, а сумуються сигнали з виходів T_1 і T_2 , то схема описується виразом

$$x_0(D^3 \oplus D^1 \oplus D^0) = x_0 \cdot Q[D]. \quad (6.20)$$

Вираз

$$Q[D] = (D^r \oplus D^k \oplus D^0) \quad (6.21)$$

називається характеристичним поліномом.

В ланцюзі зворотного зв'язку генератора може бути один або декілька суматорів по mod 2. Тому характеристичний поліном може містити велике число операторів затримки D в відповідних степенях.

Вибір числа суматорів і точок підключення їхніх входів визначається тим, який сигнал потрібно отримати від генератора. Для отримання послідовності з максимальним періодом достатньо мати один суматор на два входи.

Якщо в схемі визначається і початок першого періоду, то вихідний сигнал буде суворо детермінованим. При цьому статистичні характеристики реалізації двійкових випадкових чисел і описаних ПМД тим не менше будуть співпадати.

Порівнюємо ці послідовності. В випадковій послідовності зміна знаків сигналу відбувається в моменти $t_i = i \cdot T$. При рівній імовірності появи символів можна передбачити, що після $+U_c$ з імовірністю $P_1 = P_0 = 1/2$ з'явиться або нуль, або одиниця.

В послідовності максимальної довжини, оскільки вона включає всі можливі $N = 2^n - 1$ числа (окрім 00...0), буде 2^{n-1} одиниць і $(2^{n-1} - 1)$ нулів.

Ймовірності появи нулів і одиниць в псевдовипадковій послідовності (в середньому):

$$P_{11} = 1/2 + 1/2^{n-1}; \quad (6.22)$$

$$P_{10} = 1/2 - 1/2^{n-1}. \quad (6.23)$$

З формул (6.22), (6.23) видно, що при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{11} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{10} = \frac{1}{2}. \quad (6.24)$$

Однакові також ймовірності появи серій з нулів і одиниць, що йдуть одне за одним.

Так, в випадковій послідовності серія з j одиниць (нулів) буде зустрічатися з ймовірністю

$$P_{j1} = (1/2)^{j+1} = 1/2^{j+1} \quad (6.25)$$

В ПМД серії з однієї одиниці будуть зустрічатися 2^{n-2} раз, з двох одиниць – 2^{n-3} раз і так далі до серії з n одиниць, що зустрінеється 1 раз. Тоді для серії з двох нулів (одиниць) ліворуч і праворуч можна записати

$$P_{0,0,0} = 2^{n-2} / 2^{n-1} \cong 1/2^2; \quad (6.26)$$

$$P_{1,1,1} = 2^{n-3} / 2^{n-1} \cong 1/2^3 \quad (6.27)$$

і т. п.

Автокореляційні функції (АКФ) випадкових вибірок з послідовностей максимальної довжини і «бінарного шуму» будуть відрізнятися зміщенням по осі ординат на величину

$$R(\infty) = u^2 / 2^{n-1}. \quad (6.28)$$

Це зв'язано з тим, що в ПМД відсутні числа вигляду $00\dots0$ математичне очікування не дорівнює нулю. Вираз для АКФ має вигляд

$$R(\tau) = \begin{cases} u^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| \leq T, \\ \frac{u^2}{2^n - 1}, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (6.29)$$

Графіки АКФ і спектральної щільності ПМД показані на рис. 6.6, а, б.

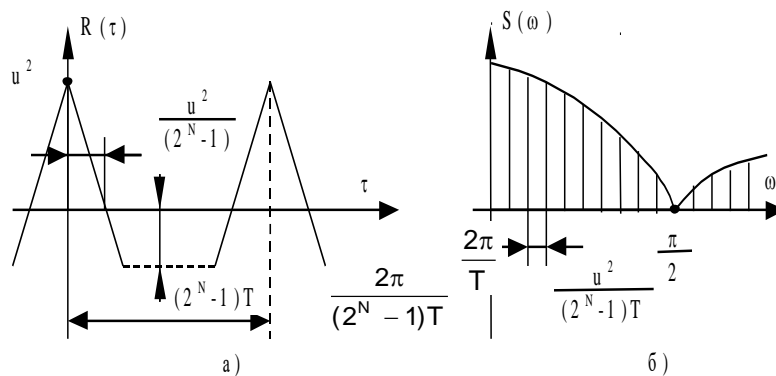


Рис. 6.6

Спектральна щільність ПМД

$$S(\omega) = \frac{2\pi * 2^{n+1}}{(2^n - 1)^2} \cdot \left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \right)^2 \times \sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{(2^n - 1)T}\right) + \frac{u^2}{2^n - 1} \delta(\omega). \quad (6.30)$$

З формул і графіків (див. рис. 6.6, б) видно, що спектральна щільність лінійчата з огинаючою вигляду $\sin(x)/x$.

Перший нуль відповідає частоті роботи тактового генератора $f_t = 1/T$. Таким чином, ширина спектру $\Delta f = 1/T$ визначається тривалістю окремого символу і залежить від тактового періоду генератора, а інтервал між елементами спектра $\Delta f = 1/T_n$,

де $T_n = \frac{2\pi k}{(2^n - 1)T}$, по шкалі частот дорівнює

$$\Delta F = 1/(T(2^n - 1)).$$

Він залежить від періоду послідовності $T_n = (2^n - 1)T$ і швидко спадає з зростанням числа каскадів регістра зсуву n . При $n \rightarrow \infty$ спектр прагне до суцільного, тобто ПМД зі зростанням n по своїм характеристикам швидко наближається до характеристик «бінарного шуму». При підвищенні частоти генератора імпульсів зсуву (зменшення T) спектр сигналу поширюється, наближаючись до спектру білого шуму. Саме ця обставина дозволяє використати псевдовипадкові послідовності як заміну сигналів з суцільним рівномірним спектром в заданому діапазоні частот.

Характеристичні поліноми дозволяють створювати генератори, що реалізуються у вигляді моделі на ЕОМ.

6.2. Методи та алгоритм програми дослідження програмно-алгоритмічних генераторів випадкових сигналів

Алгоритм програми дослідження цифрових генераторів шуму зображений на рис. 6.7.

В програмі реалізовані наступні цифрові генератори шуму:

1. Генератор випадкових чисел “ГВЧ1”, що відповідає формулам (6.12), (6.13). В даному випадку $C = 2$, $A_0 = (22563)_8$;

2. Генератор псевдовипадкової бінарної послідовності “ГВЧ2”, що відповідає формулам (6.16), (6.17). В даному випадку $n = 7$, $r = 7$, $k = 4$, а характеристичний багаточлен

$$Q[D] = (D^7 \oplus D^4). \quad (6.31)$$

Отже, період повторення псевдовипадкової бінарної послідовності буде рівний 127.

Автокореляційна функція обчислюється в припущенні стаціонарності і ергодичності процесу, що досліджується:

$$R_{xx}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-k} \sum_i (x(i)x(i+k)), \quad (6.32)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

де $x(i)$ – дискретні відліки шуму, $i = 1, 2, \dots, N$; $i = 1, 2, \dots, N$,
 N – кількість випадкових чисел.

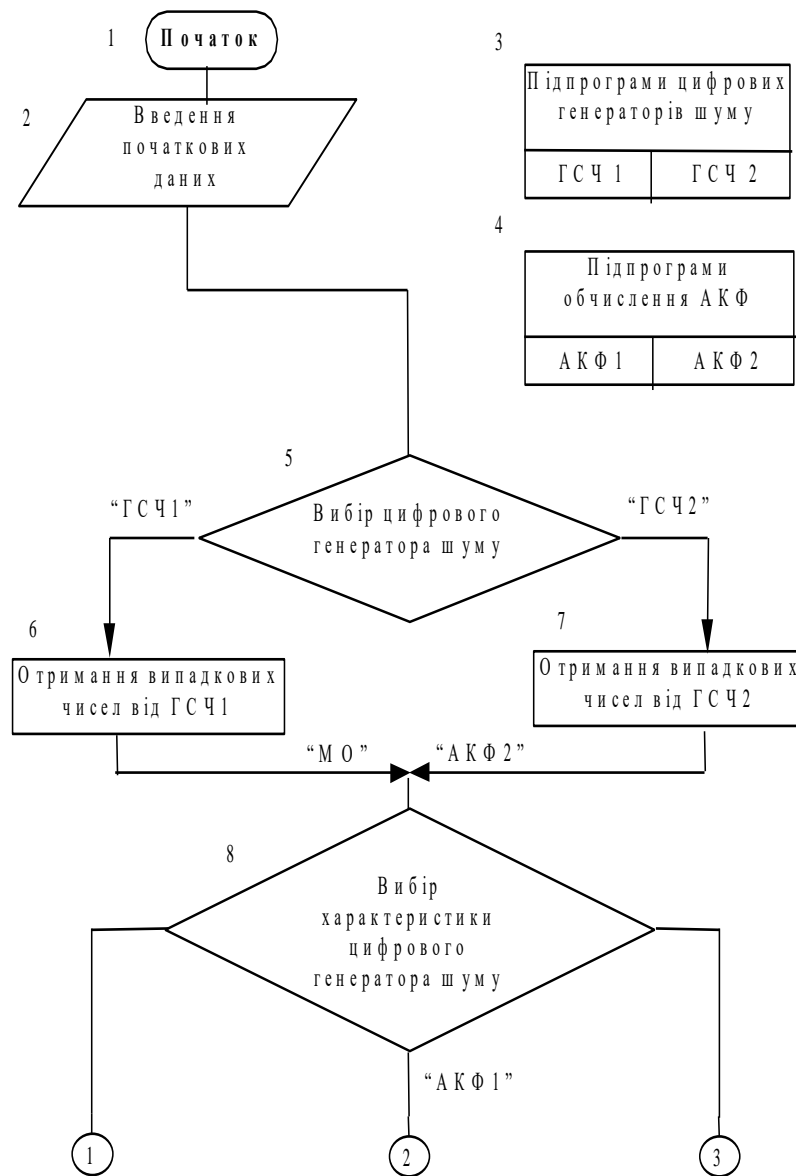


Рис. 6.7

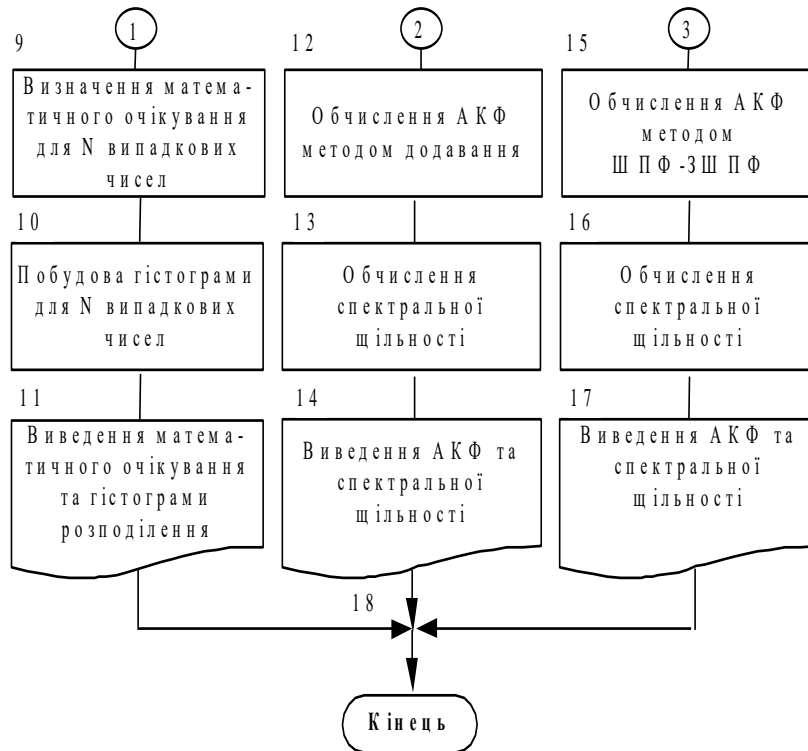


Рис. 6.7 (продовження)

На практиці потрібно обмежуватися кінцевими вибірками процесів, що зумовлює перехід до близького алгоритму згідно формули

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x(i)x(i+k)), \quad (6.33)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ступінь наближення пропонується оцінити в ході виконання лабораторної роботи при розгляді різноманітних обсягів вибірки відліків шуму. Цей засіб обчислення АКФ позначимо «АКФ1».

Існують інші засоби обчислення АКФ. Так АКФ може бути знайдена по відомій спектральній щільності через зворотне перетворення Фур'є:

$$R_{xx}(\tau) = \Phi^{-1}\{S_{xx}(\omega)\}. \quad (6.34)$$

В свою чергу, спектральна щільність стаціонарних ергодичних процесів

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \{X_T(j\omega)X_T(-j\omega)\}, \quad (6.35)$$

де T – інтервал спостереження, $T = N\Delta t$.

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.36)$$

Обчислення інтегралів перетворення Фур'є на ЕОМ виконується по процедурі швидкого перетворення Фур'є (ШПФ):

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cos\left(\frac{mk 2\pi}{N}\right) + j \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sin\left(\frac{mk 2\pi}{N}\right) = \operatorname{Re}[X(m)] + j \operatorname{Im}[X(m)],$$

(6.37)

$m = 0, 1, \dots, N-1$.

Тоді для знаходження АКФ необхідно виконати для заданого обсягу вибірки спочатку пряме ШПФ, а після цього – зворотне ШПФ (ЗШПФ).

В підсумку приходимо до алгоритму

$$S_{xx}(\omega) = X(j\omega) X^*(j\omega),$$

(6.38)

де $X(j\omega)$ – результат застосування процедури ШПФ до $x(i)$;

$X^*(j\omega)$ – функція, комплексно-спряжена з $X(j\omega)$.

Застосуванням ЗШПФ до $S_{xx}(\omega)$ з (6.38) одержуємо АКФ.

Цей засіб отримання АКФ позначимо «АКФ2».

Розглянемо отримання спектральної щільності процесу для кожного засобу обчислення АКФ:

АКФ1 – спектральна щільність одержується застосуванням процедури ШПФ до $R_{xx}(k)$ з (6.33);

АКФ2 – спектральна щільність є проміжним результатом при обчисленні АКФ (формула (6.38)).

Початкові дані для програми:

- кількість відліків шуму;
- тип цифрового генератора шуму;
- засіб обчислення АКФ.

Вихідні дані програми:

- математичне очікування вибірки дискретних відліків шуму;
- гістограма розподілу дискретних сигналів шуму;
- АКФ;
- спектральна щільність.

6.3. Приклад програми моделювання

6.3.1. Програма дослідження програмно-алгоритмічних генераторів випадкових сигналів

% Математичні та програмні засоби моделювання ІВС

% Лабораторна робота № 6

% Програмні генератори випадкових впливів на складну динамічну систему

% Генерування некорельованих випадкових впливів з рівномірним та нормальним розподілом

% - - - Стандартні методи rand, randi, randn,

% метод на основі залишку від операції множення, псевдовипадкова бінарна послідовність - - -

% --- Початкові дані ---

clear variables;

```

% Кількість відліків у реалізації випадкового впливу
N=1024;
% Діапазон значень амплітуди випадкових впливів (для рівномірного розподілу)
A_random=1;
% Середньоквадратичне значення амплітуди випадкових впливів (для нормального
розподілу)
STD_random=1;
% Рівномірний розподіл/цілі числа з рівномірним розподілом/нормальний розпо-
діл =uniform/int/normal
Type_distributed='normal';
% Тип генератора випадкових чисел в Матлаб
% 'twister' - MATLAB: rand, randi, randn - Mersenne Twister
% 'simdTwister' - MATLAB: rand, randi, randn - SIMD-oriented Fast Mersenne
Twister
% 'combRecursive' - MATLAB: rand, randi, randn - Combined Multiple
Recursive
% 'multFibonacci' - MATLAB: rand, randi, randn - Multiplicative Lagged
Fibonacci
% 'modn' - залишок від ділення за модулем N
% 'pvbp1' - псевдовипадкова бінарна послідовність (нуль-послідовність мак-
симальної довжини)
% 'pvbp2' - псевдовипадкова бінарна послідовність (квадратична залишкова
послідовність)
Type_generator='pvbp1';
% Період псевдовипадкової бінарної послідовності 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255,
511, 1023, 2047
Type_PSBP=127;
% Кількість інтервалів на гістограмі
N_bins=10;

% --- Моделювання ---
switch lower(Type_generator)
case {'twister','simdtwister','combrecursive','multifibonacci'}
    rng(0,Type_generator);
    if strcmp(Type_distributed,'uniform')==1
        X_random=A_random*rand(N,1);
    elseif strcmp(Type_distributed,'int')==1
        X_random=randi(A_random,N,1);
    else % 'normal' при інших значеннях Type_distributed
        X_random=STD_random*randn(N,1);
    end;
case 'modn'
    X_random=zeros(N,1); A_mod=7^9; X_random(1)=1; N_mod=10^10;
    for i=2:N
        X_random(i)=mod(A_mod*X_random(i-1),N_mod);
    end;
    if strcmp(Type_distributed,'uniform')==1
        X_random=A_random.*(X_random./N_mod);
    elseif strcmp(Type_distributed,'int')==1
        X_random=round(A_random.*(X_random./N_mod));
    else % 'normal' при інших значеннях Type_distributed
        X_random3=zeros(3*N,1); X_random3(1)=1;
        for i=2:(3*N)
            X_random3(i)=mod(A_mod*X_random3(i-1),N_mod);
        end;
        for i=1:N
            X_random(i)=(X_random3(i)./N_mod-
0.5).*(X_random3(i+N)./N_mod-0.5).*(X_random3(i+2*N)./N_mod-0.5);
        end;
        X_random=3*2^3*STD_random*X_random;
    end;
end;

```

```

case 'pvbp1'
    X_random=zeros(N,1); x101=ones(1,13);
    for i=1:N
        if Type_PSBP==3
            rx101=xor(x101(2), x101(1)); x101max=2;
        elseif Type_PSBP==7
            rx101=xor(x101(3), x101(1)); x101max=3;
        elseif Type_PSBP==15
            rx101=xor(x101(4), x101(3)); x101max=4;
        elseif Type_PSBP==31
            rx101=xor(x101(5), x101(3)); x101max=5;
        elseif Type_PSBP==63
            rx101=xor(x101(6), x101(5)); x101max=6;
        elseif Type_PSBP==127
            rx101=xor(x101(7), x101(4)); x101max=7;
        elseif Type_PSBP==255
            rx101=xor(xor(x101(8), x101(4)),xor(x101(3), x101(2)));
x101max=8;
        elseif Type_PSBP==511
            rx101=xor(x101(9), x101(5)); x101max=9;
        elseif Type_PSBP==1023
            rx101=xor(x101(10), x101(7)); x101max=10;
        elseif Type_PSBP==2047
            rx101=xor(x101(11), x101(9)); x101max=11;
        else % 127 при інших значеннях Type_PSBP
            rx101=xor(x101(7), x101(4)); x101max=7;
        end;
        for j=x101max:(-1):2
            x101(j)=x101(j-1);
        end;
        x101(1)=rx101;
        if rx101==1
            X_random(i)=1;
        else
            X_random(i)=-1;
        end;
    end;
case 'pvbp2'
    X_random=zeros(N,1); xqN=-ones(1,Type_PSBP);
    for i=1:round((Type_PSBP-1)/2)
        xqN(mod(i^2-1,Type_PSBP)+1)=1;
    end;
    for i=1:N
        X_random(i)=xqN(mod((i-1),Type_PSBP)+1);
    end;
end;

% Гістограма випадкових впливів
figure; [N_hist, Bin_hist]=hist(X_random,N_bins); hist(X_random,N_bins); grid
on;
xlabel('Амплітуда випадкових впливів, дискр.рівнів'); ylabel('Кільк. відліків
в інтервалі значень ампл. ');
title('Гістограма розподілу значень випадкових чисел');
figure; histogram(X_random,'Normalization','pdf'); grid on;
xlabel('Амплітуда випадкових впливів, дискр.рівнів'); ylabel('Відносна кільк.
відліків в інтервалі');
title('Нормалізована гістограма випадкових чисел');
if strcmp(Type_distributed,'normal')==1
    PDF_Arg=-3*STD_random:0.01:3*STD_random;
    PDF_Theory = pdf('normal',PDF_Arg,0,STD_random);
    hold on; plot(PDF_Arg,PDF_Theory,'r-','LineWidth',2); hold off;

```

```

else
    PDF_Arg=0:0.1:A_random;
    PDF_Theory = pdf('uniform',PDF_Arg,0,A_random);
    hold on; plot(PDF_Arg,PDF_Theory,'r-','LineWidth',2); hold off;
end;

% Автокореляційна функція випадкових впливів
% Розрахунок на основі функції MATLAB xcorr
Autocorr1 = xcorr(X_random)./N;
figure; plot(0:(N-1),Autocorr1(N:end),'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Номер відліку випадкових чисел'); ylabel('Автокореляційна функція, дискр.рівнів^2');
title('Автокор. функція вип. посл. чисел - функція MATLAB xcorr');
% Розрахунок суми на основі визначення кореляційної функції
X_random2=[X_random; X_random];
Autocorr2 = zeros(N,1);
for j=1:N
    kor_sum=0;
    for i=1:N
        kor_sum=kor_sum+X_random2(i+j-1)*X_random2(i)/N;
    end;
    Autocorr2(j)=kor_sum;
end;
figure; plot(0:(N-1),Autocorr2,'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Номер відліку випадкових чисел'); ylabel('Автокореляційна функція, дискр.рівнів^2');
title('Автокор. функція вип. посл. чисел - сума');
% Розрахунок на основі перетворення Фур'є
S_random=abs(fft(X_random));
Autocorr3=abs(ifft(S_random));
figure; plot(0:(N-1),Autocorr3,'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Номер відліку випадкових чисел'); ylabel('Автокореляційна функція, дискр.рівнів^2');
title('Автокор. функція вип. посл. чисел - перетворення Фур''є');

% - - - Чисельні параметри розподілу випадкових чисел
% Середнє значення
X_mean=mean(X_random);
% Середньоквадратичне значення
X_STD=std(X_random);
% Максимальне значення
X_max=max(X_random);
% Мінімальне значення
X_min=min(X_random);
% Асиметрія
X_skewness=skewness(X_random,0);
% Екссес
X_kurtosis=kurtosis(X_random,0)-3;

% --- Виведення результатів моделювання ---
fprintf(1,'Лабораторна робота № 2\n');
fprintf(1,'Програмні генератори випадкових впливів на складну динамічну систему\n');
fprintf(1,'Генерування некорельованих випадкових впливів з рівномірним та нормальним розподілом\n');
fprintf(1,'Стандартні методи MATLAB rand, randi, randn\n');
fprintf(1,'Метод на основі залишку від операції множення, псевдовипадкова бінарна послідовність\n');
fprintf(1,'Кількість відліків у реалізації випадкового впливу %d\n', N);
fprintf(1,'Діапазон значень ампл. вип. впливів (для рівн. розподілу) %7.3f\n', A_random);

```

```

fprintf(1,'Середньокв. значення ампл. вип. впливів (для норм. розподілу)
%7.3f\n', STD_random);
fprintf(1,'Рівн. розподіл/цілі числа з рівн. розподілом/норм. розподіл %s\n',
Type_distributed);
fprintf(1,'Тип генератора випадкових чисел %s\n', Type_generator);
fprintf(1,'Період псевдовипадкової бінарної послідовності %d\n', Type_PSBP);
fprintf(1,'Кількість інтервалів на гістограмі %d\n', N_bins);
fprintf(1,'- - - Чисельні параметри розподілу випадкових чисел\n');
fprintf(1,'Середнє значення та Середньокв. зн. %7.3f %7.3f\n', X_mean,
X_STD);
fprintf(1,'Макс. значення та Мін. значення %7.3f %7.3f\n', X_max, X_min);
fprintf(1,'Асиметрія та Ексцес %7.3f %7.3f\n', X_skewness, X_kurtosis);
fprintf(1,'Гістограма: значення вип. чисел; кількість вип. чисел на інт.\n');
for i=1:size(N_hist,2)
    fprintf(1,'%7.3f %7.3f\n', Bin_hist(i), N_hist(i));
end;
fprintf(1,'\n');

```

6.3.2. Результати дослідження стандартних методів генерування випадкових сигналів

Лабораторна робота № 6

Програмні генератори випадкових впливів на складну динамічну систему
Генерування некорельованих випадкових впливів з рівномірним та
нормальним розподілом

Стандартні методи MATLAB rand, randi, randn

Метод на основі залишку від операції множення, псевдовипадкова
бінарна послідовність

Кількість відліків у реалізації випадкового впливу 1024

Діапазон значень ампл. вип. впливів (для рівн. розподілу) 1.000

Середньокв. значення ампл. вип. впливів (для норм. розподілу)
1.000

Рівн. розподіл/цілі числа з рівн. розподілом/норм. розподіл uniform

Тип генератора випадкових чисел twister

Період псевдовипадкової бінарної послідовності 127

Кількість інтервалів на гістограмі 10

- - - Чисельні параметри розподілу випадкових чисел

Середнє значення та Середньокв. зн. 0.489 0.283

Макс. значення та Мін. значення 0.999 0.001

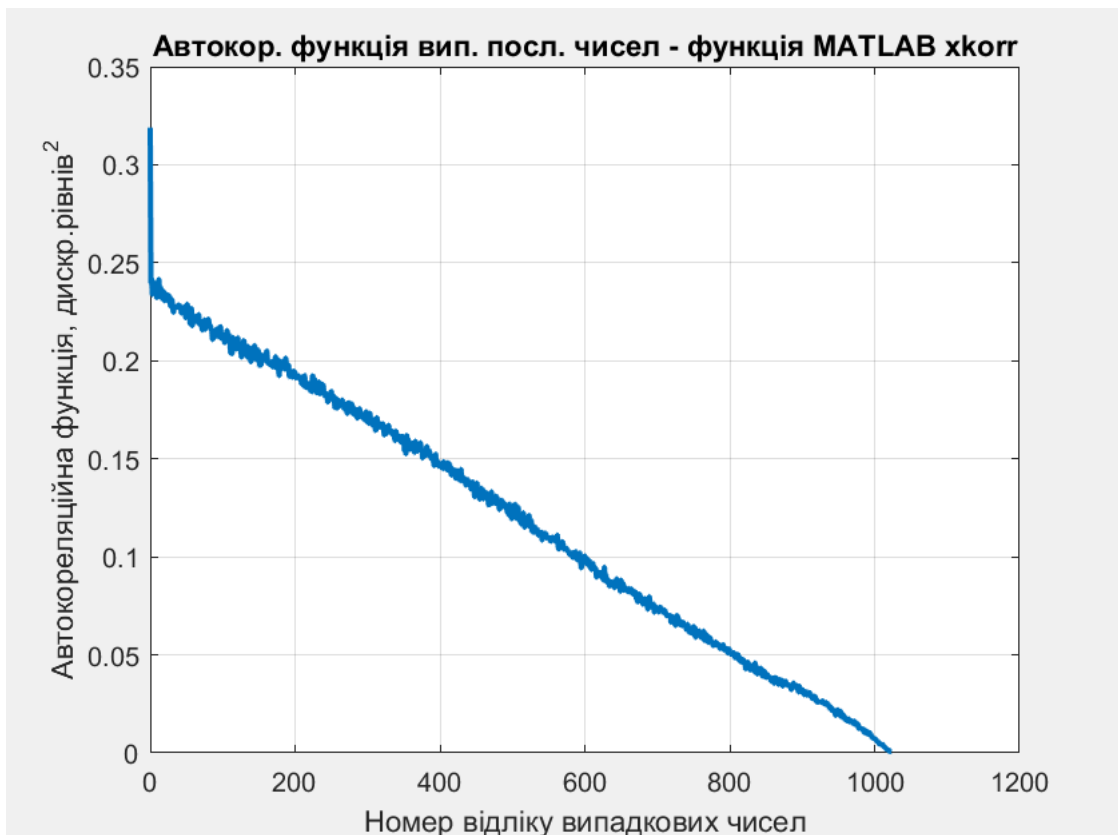
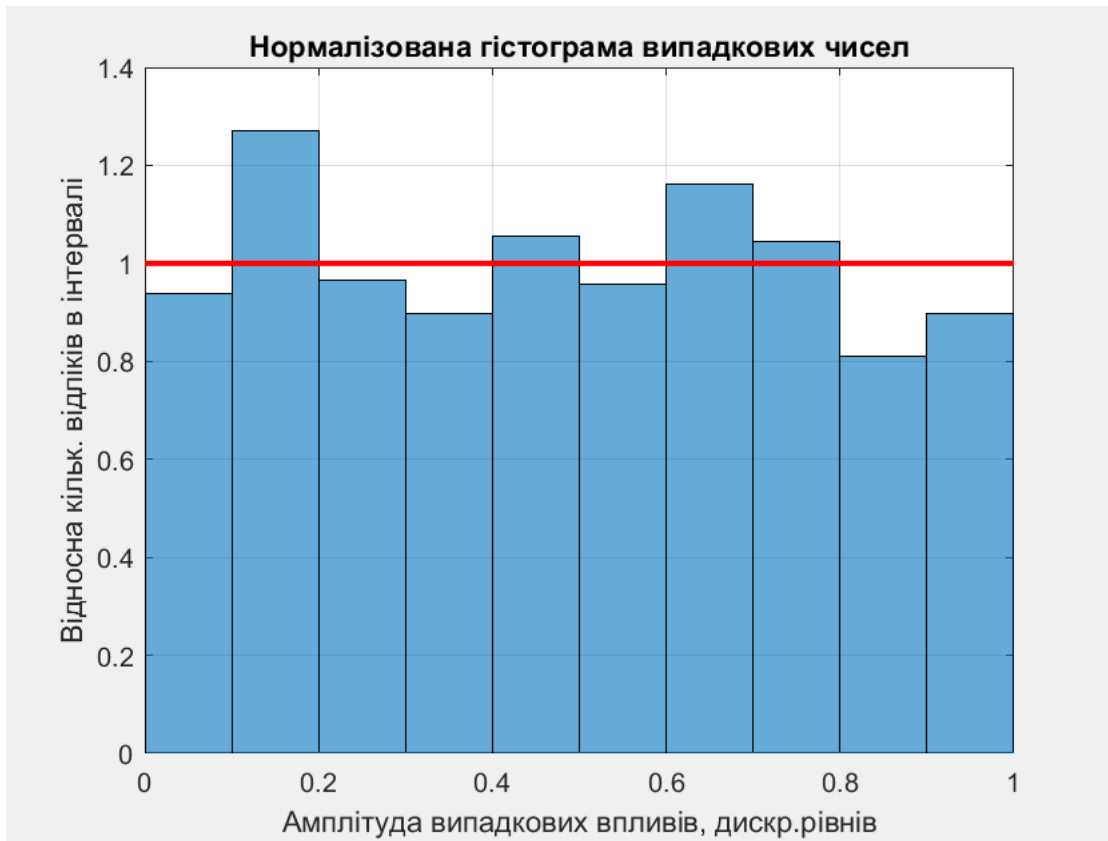
Асиметрія та Ексцес 0.036 -1.199

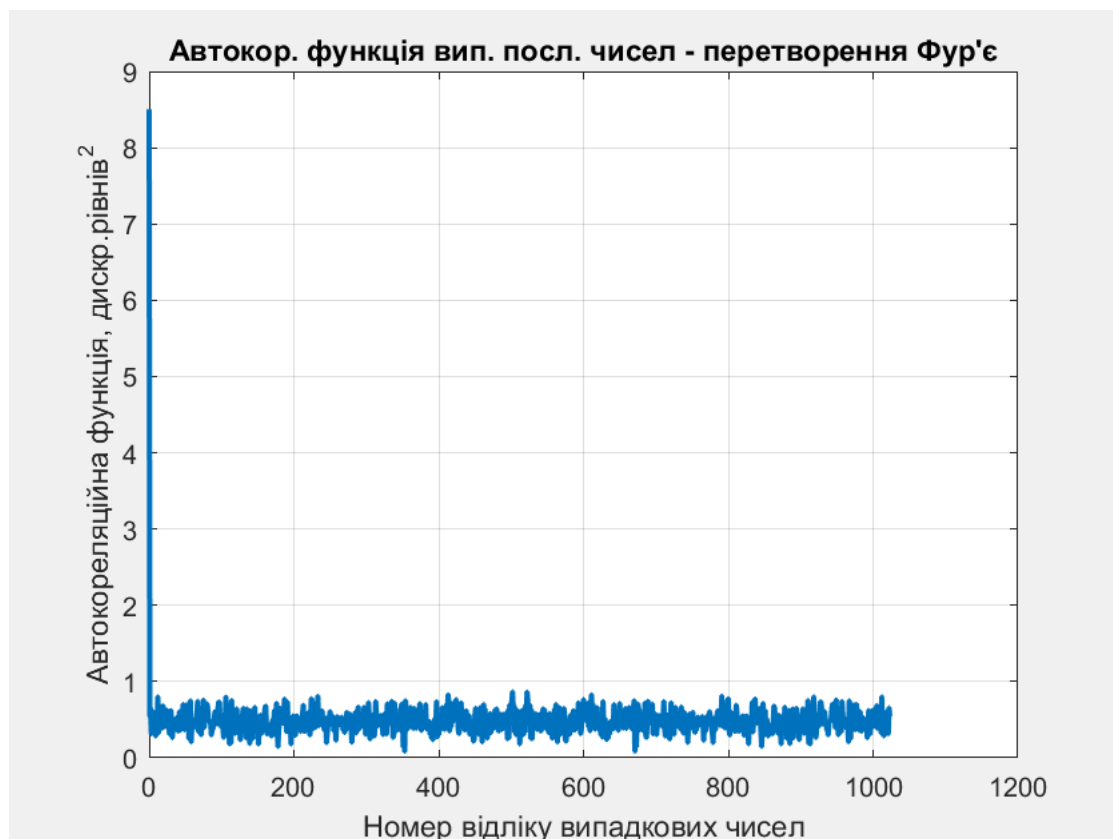
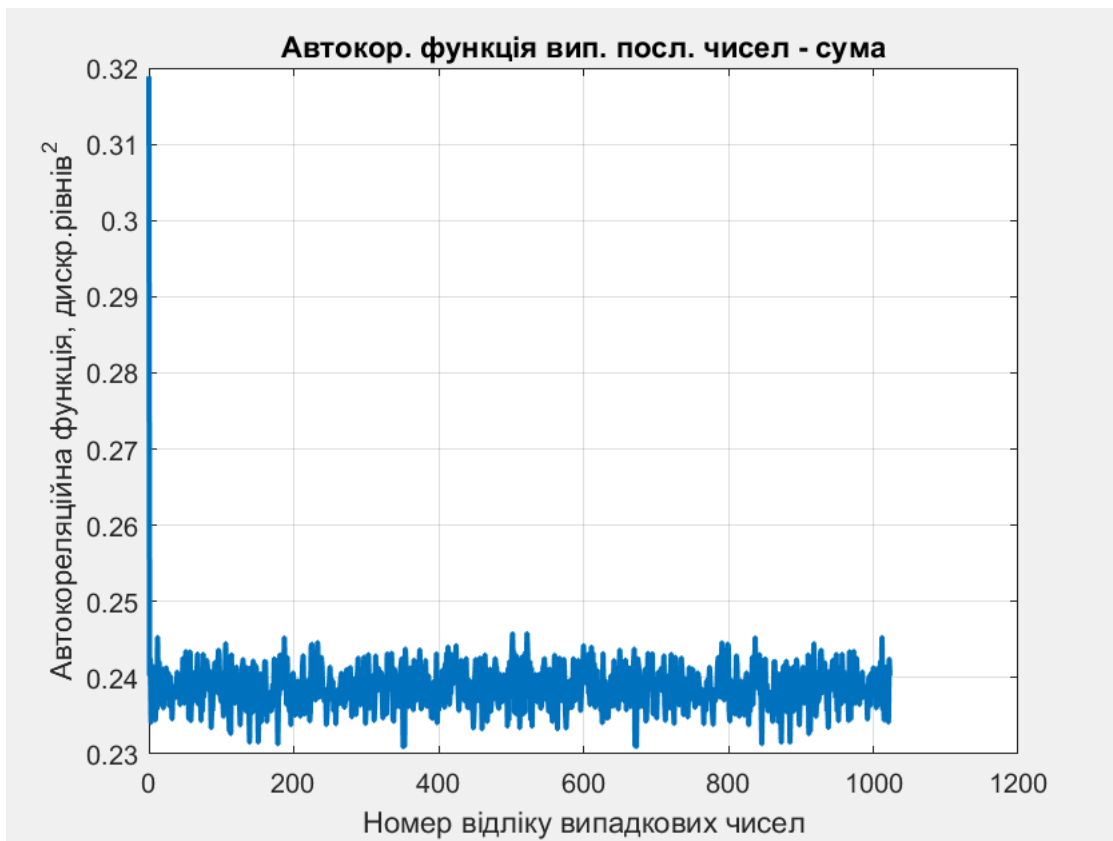
Гістограма: значення вип. чисел; кількість вип. чисел на інт.

```

0.050 97.000
0.150 129.000
0.250 99.000
0.350 92.000
0.450 108.000
0.550 98.000
0.650 118.000
0.750 108.000
0.850 83.000
0.950 92.000

```





Лабораторна робота № 6
 Програмні генератори випадкових впливів на складну динамічну систему

Генерування некорельованих випадкових впливів з рівномірним та нормальним розподілом

Стандартні методи MATLAB `rand`, `randi`, `randn`

Метод на основі залишку від операції множення, псевдовипадкова бінарна послідовність

Кількість відліків у реалізації випадкового впливу 1024

Діапазон значень ампл. вип. впливів (для рівн. розподілу) 1.000

Середньокв. значення ампл. вип. впливів (для норм. розподілу) 1.000

Рівн. розподіл/цілі числа з рівн. розподілом/норм. розподіл `normal`

Тип генератора випадкових чисел `twister`

Період псевдовипадкової бінарної послідовності 127

Кількість інтервалів на гістограмі 10

- - - Чисельні параметри розподілу випадкових чисел

Середнє значення та Середньокв. зн. -0.033 0.996

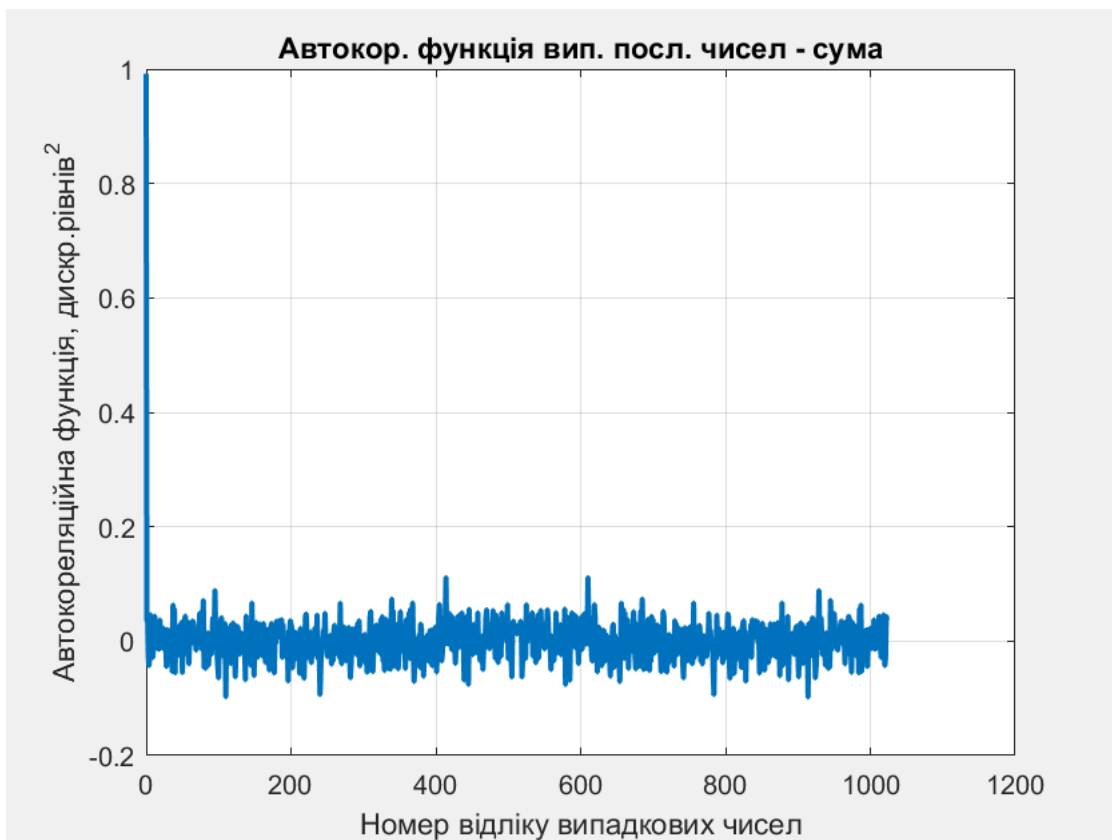
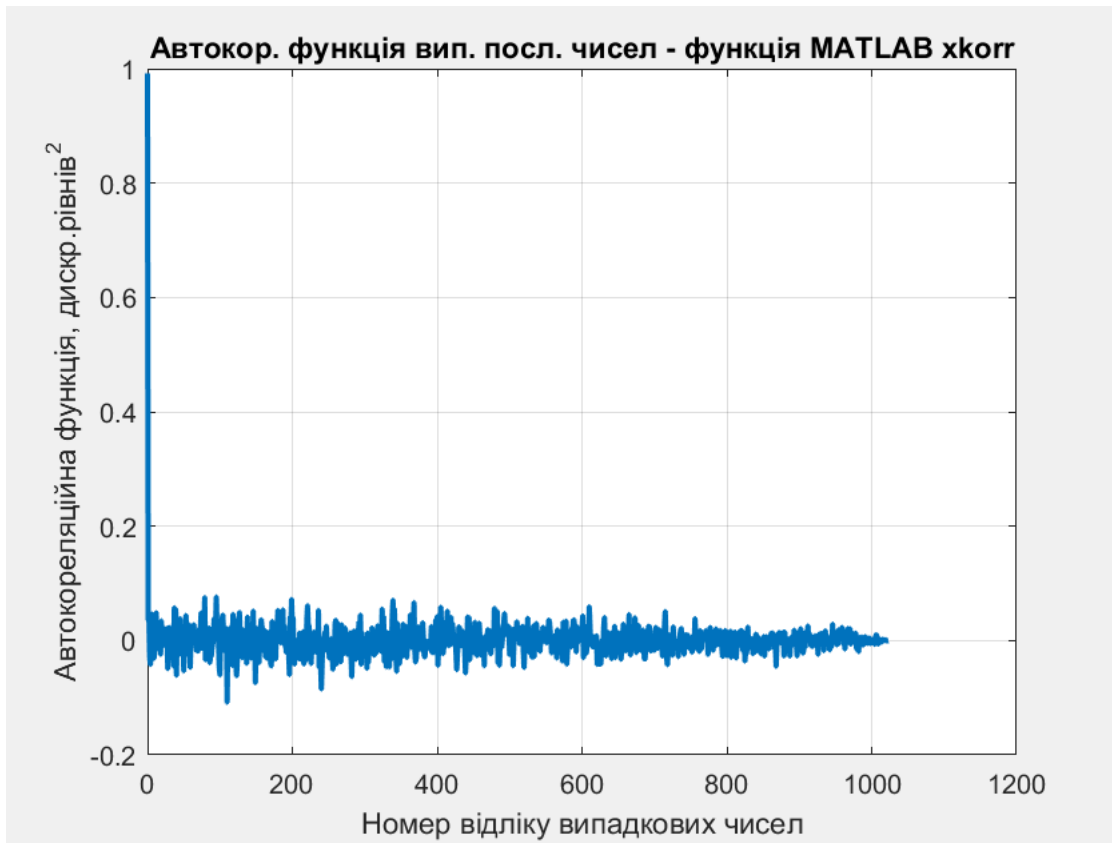
Макс. значення та Мін. значення 3.578 -3.232

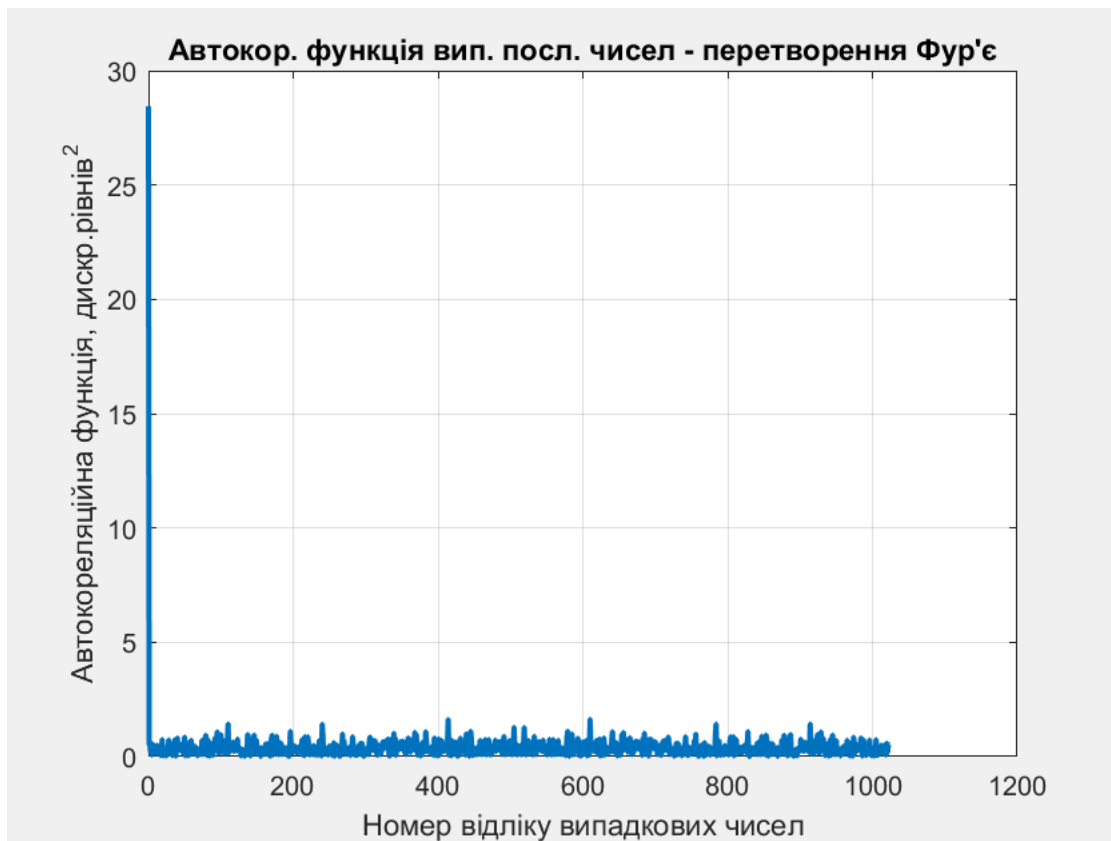
Асиметрія та Експес 0.086 0.311

Гістограма: значення вип. чисел; кількість вип. чисел на інт.

-2.892	5.000
-2.210	27.000
-1.529	88.000
-0.848	195.000
-0.167	277.000
0.514	251.000
1.195	125.000
1.876	39.000
2.557	13.000
3.238	4.000







6.3.3. Результати дослідження псевдовипадкової бінарної послідовності

Лабораторна робота № 6

Програмні генератори випадкових впливів на складну динамічну систему
 Генерування некорельованих випадкових впливів з рівномірним та нормальним розподілом

Стандартні методи MATLAB rand, randi, randn

Метод на основі залишку від операції множення, псевдовипадкова бінарна послідовність

Кількість відліків у реалізації випадкового впливу 1024

Діапазон значень ампл. вип. впливів (для рівн. розподілу) 1.000

Середньокв. значення ампл. вип. впливів (для норм. розподілу) 1.000

Рівн. розподіл/цілі числа з рівн. розподілом/норм. розподіл normal

Тип генератора випадкових чисел rvbr1

Період псевдовипадкової бінарної послідовності 127

Кількість інтервалів на гістограмі 10

- - - Чисельні параметри розподілу випадкових чисел

Середнє значення та Середньокв. зн. 0.006 1.000

Макс. значення та Мін. значення 1.000 -1.000

Асиметрія та Екссес -0.012 -2.004

Гістограма: значення вип. чисел; кількість вип. чисел на інт.

-0.900 509.000

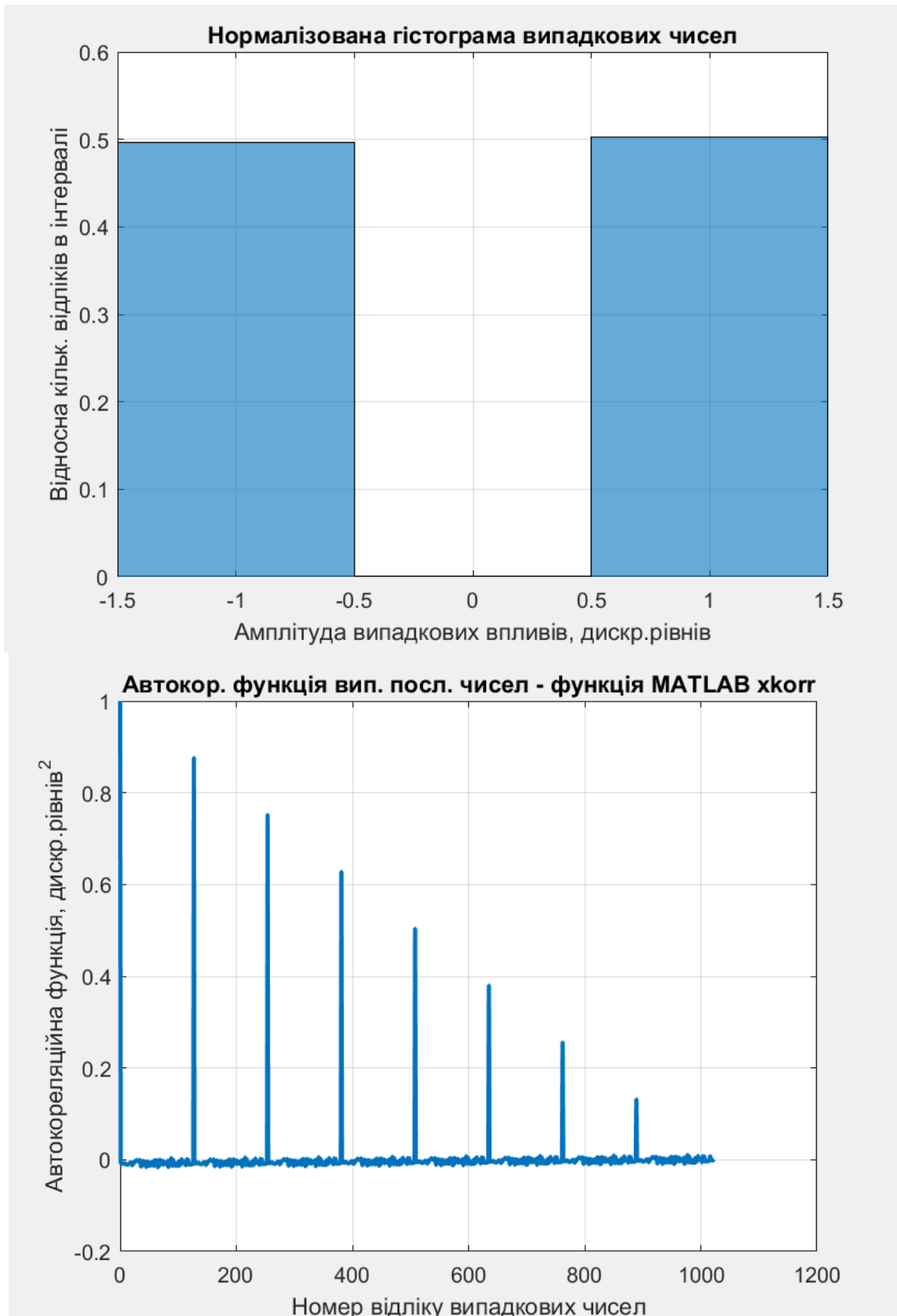
-0.700 0.000

-0.500 0.000

-0.300 0.000

-0.100 0.000

```
0.100  0.000
0.300  0.000
0.500  0.000
0.700  0.000
0.900  515.000
```



Лабораторна робота № 6

Програмні генератори випадкових впливів на складну динамічну систему
Генерування некорельованих випадкових впливів з рівномірним та нормальним розподілом

Стандартні методи MATLAB rand, randi, randn

Метод на основі залишку від операції множення, псевдовипадкова бінарна послідовність

Кількість відліків у реалізації випадкового впливу 1024

Діапазон значень ампл. вип. впливів (для рівн. розподілу) 1.000

Середньокв. значення ампл. вип. впливів (для норм. розподілу) 1.000

Рівн. розподіл/цілі числа з рівн. розподілом/норм. розподіл normal

Тип генератора випадкових чисел rvbr2

Період псевдовипадкової бінарної послідовності 127

Кількість інтервалів на гістограмі 10

- - - Чисельні параметри розподілу випадкових чисел

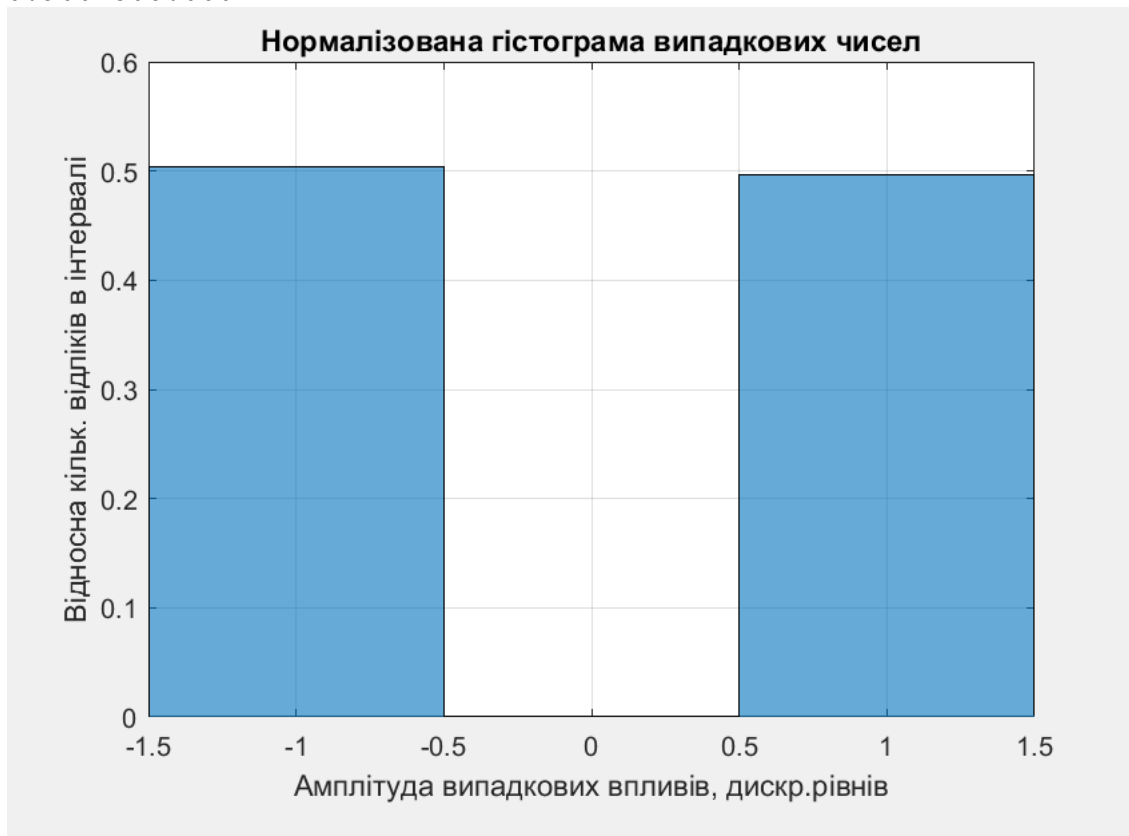
Середнє значення та Середньокв. зн. -0.008 1.000

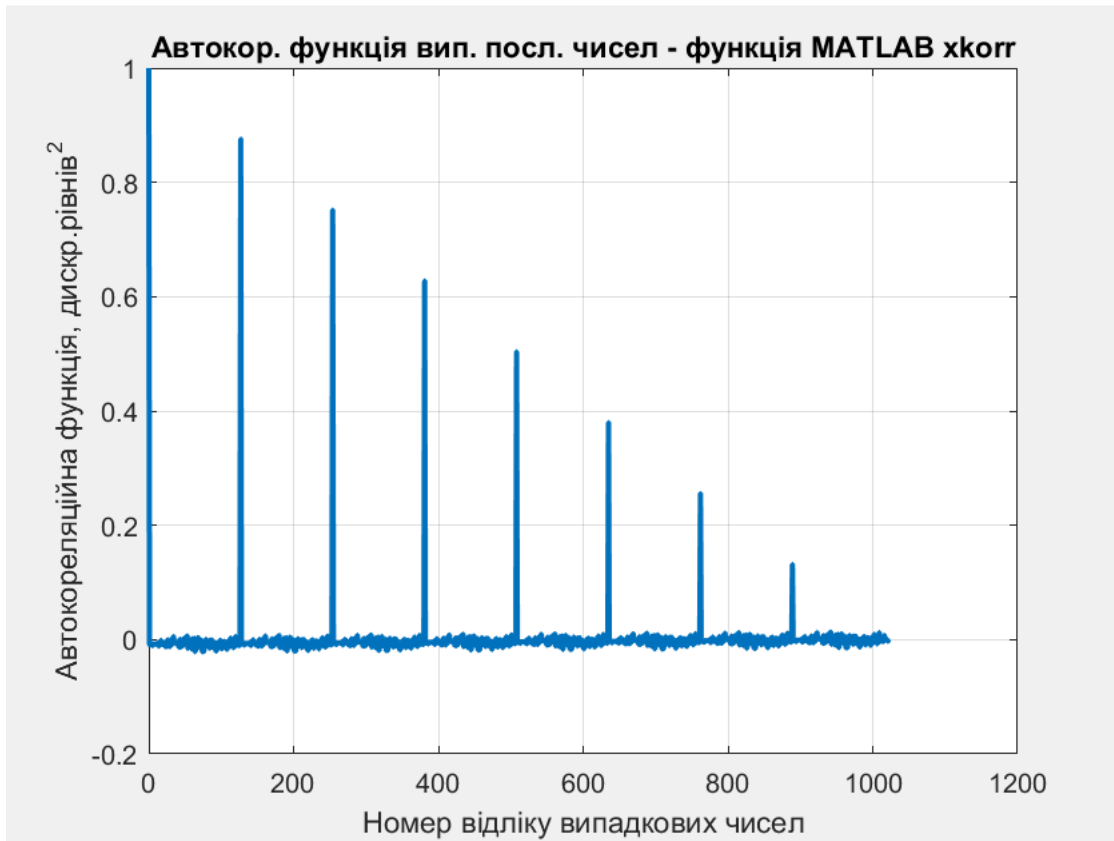
Макс. значення та Мін. значення 1.000 -1.000

Асиметрія та Експес 0.016 -2.004

Гістограма: значення вип. чисел; кількість вип. чисел на інт.

-0.900	516.000
-0.700	0.000
-0.500	0.000
-0.300	0.000
-0.100	0.000
0.100	0.000
0.300	0.000
0.500	0.000
0.700	0.000
0.900	508.000





7. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ ВЗАЄМНОЇ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

7.1. Теоретичні основи методу ідентифікації

При моделюванні складної динамічної системи (СДС) однією з задач є визначення її динамічних характеристик (ідентифікація об'єкту). Ця задача може бути вирішена по методу взаємної кореляційної функції (ВКФ) вхідного і вихідного сигналів.

При дослідженні даного методу будемо припускати, що процеси, які протікають в СДС, є стаціонарні і ергодичні. Точне рішення задачі ідентифікації вимагає спостереження за процесами, що досліджуються, на достатньо великому (теоретично нескінченному) відрізку часу, але в реальній системі потрібно обмежувати час спостереження, розповсюджуючи отримані дані на нескінченний інтервал спостереження. Одержані при такому підході результати будуть наближеними. Оцінка ступеня такого наближення - одна з важливих задач, що вирішуються при моделюванні СДС.

Розглянемо СДС (рис. 7.1, а), вихід якого при вхідному сигналі $x(t)$ визначається наступним виразом (інтегралом згортки):

$$y(t) = \int_{-\infty}^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (7.1)$$

де $k(t)$ – імпульсна характеристика СДС, одержувана зворотним перетворенням Лапласа з передаточної функції (рис. 7.1, б), тобто

$$k(t) = L^{-1}\{k(p)\}. \quad (7.2)$$

Приймаючи обмеження $x(t) = 0$ для всіх $t < 0$, отримуємо з (7.1)

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t k(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (7.3)$$

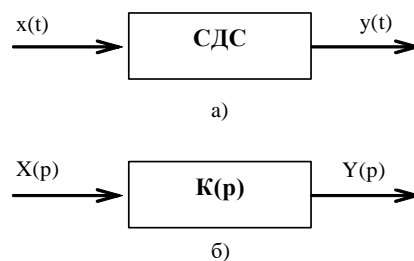


Рис 7.1

Розглянемо фізичний сенс рівнянь (7.1) і (7.3). Нехай на вхід СДС подаються імпульси шириною $\theta \rightarrow 0$ і амплітудою $x(t)$ в моменти часу $t = 0, \theta, 2\theta, \dots$ з енергією $\theta x(t)$ (рис. 7.2). Введемо позначення: $y_i(t)$ – реакція

СДС в момент часу t на один i - імпульс, прикладений в момент часу $t = (i - 1)\theta$. На основі викладеного можна записати

$$y_i(t_1) = k[t_1 - (i - 1)\theta] \cdot \theta \cdot x[(i - 1)\theta]. \quad (7.4)$$

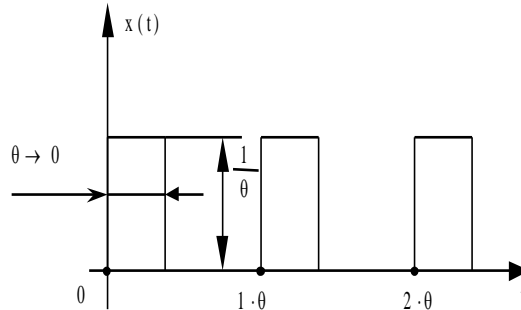


Рис. 7.2

Оскільки послідовність імпульсів додається з моменту часу з $t = 0$ до $t = t_1$, то $y(t_1)$ можна розглядати як суму n виходів $y_1(t_1), y_2(t_1), \dots, y_n(t_1)$:

$$y(t_1) = \sum_{i=1}^N y_i(t_1) = k \sum_{i=1}^N [t_1 - (i - 1)\theta] \cdot \theta \cdot x[(i - 1)\theta] \quad (7.5)$$

За умови $\theta \rightarrow d\tau \rightarrow 0$ і $\theta \rightarrow \tau$ одержуємо вираз (7.3). Якщо вхідний сигнал СДС $x(t)$ – випадковий, то, маючи (7.1) або (7.5), можна обчислити взаємну кореляційну функцію $R_{xy}(\tau)$, що відбиває взаємозв'язок між виходом СДС $y(t)$ в будь-який момент часу t і входом СДС $x(t - \tau)$, наступним чином:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) y_T(t - \tau) dt, \quad (7.6)$$

де T – тривалість спостереження, тобто $x(t)$ і $y(t)$.

Підставляючи в (7.6) вираз (7.1) і вводячи поняття АКФ, одержуємо:

$$R_{xy}(t) = \int_0^{\infty} k(\tau) R_{xx}(t - \tau) d\tau, \quad (7.7)$$

де $R_{xx}(\tau)$ – АКФ,

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t - \tau) d\tau. \quad (7.8)$$

Розглянемо випадок, коли на вхід СДС подається вхідний сигнал $x(t)$ типу “білого” шуму. Як відомо, АКФ “білого” шуму являє собою дельта-функцію. Отже, для АКФ “білого” шуму формула матиме наступний вигляд (7.8):

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\tau) = \sigma^2 \delta(\tau). \quad (7.9)$$

Підставляючи значення (7.9) в (7.7), одержуємо

$$R_{xy}(t) = \sigma^2 \int_0^{\infty} k(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \sigma^2 k(t), \quad (7.10)$$

де $k(t)$ – імпульсна характеристика СДС,

σ^2 – дисперсія шуму.

Отже, для визначення динамічних характеристик по методу ВКФ необхідно на вхід подати "білий" шум і по вихідній реакції СДС визначити ВКФ, тотожно рівну (з точністю до постійних коефіцієнтів) в даному випадку імпульсній характеристиці СДС. В результаті даної процедури ідентифікації і одержується імпульсна характеристика СДС.

На практиці неможливо отримати сигнал у вигляді "білого" шуму. Для визначення динамічних характеристик в реальному масштабі часу застосовуються сигнали, АКФ яких з деяким наближенням апроксимується дельта - функцією. Докладно властивості таких сигналів і засоби їхнього отримання за допомогою цифрових генераторів шуму досліджувались в лабораторній роботі № 6.

Визначення динамічних характеристик в реальному масштабі часу здійснюється шляхом накладання вхідного сигналу $x(t)$ (одержаного від генератора шуму) на робочий сигнал $r(t)$ СДС (рис. 7.3).

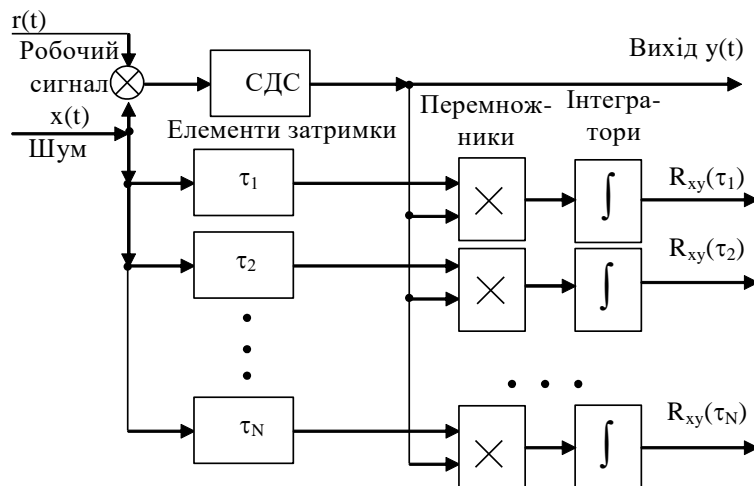


Рис. 7.3

В цьому випадку ВКФ між $x(t)$ і $y(t)$ дасть імпульсну характеристику $k(t)$ з деякою малою похибкою. Додатковою умовою є нерівність $x(t) \ll r(t)$, так як процес ідентифікації не повинен впливати на нормальну роботу СДС.

При виконанні ідентифікації за допомогою ЕОМ в наведених виразах всі інтеграли повинні бути замінені відповідними сумами.

7.2. Метод взаємної кореляційної функції та алгоритм визначення динамічних характеристик систем

Алгоритм програми визначення динамічних характеристик СДС по методу ВКФ зображений на рис. 7.4.

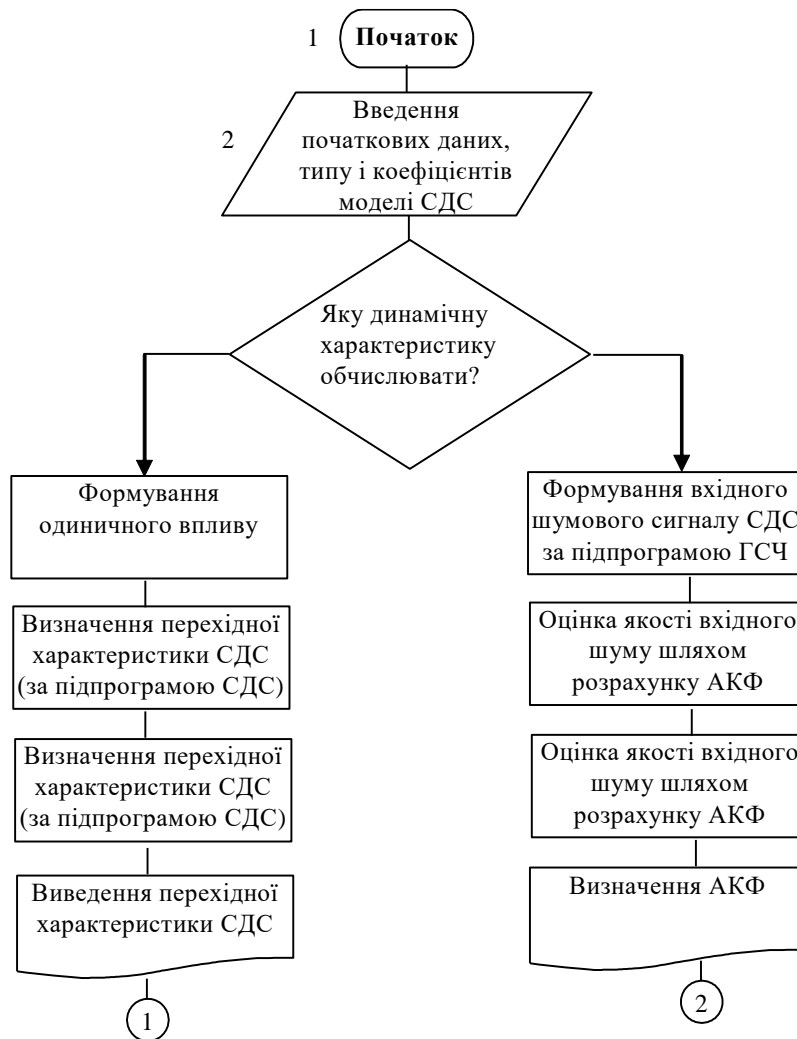


Рис. 7.4

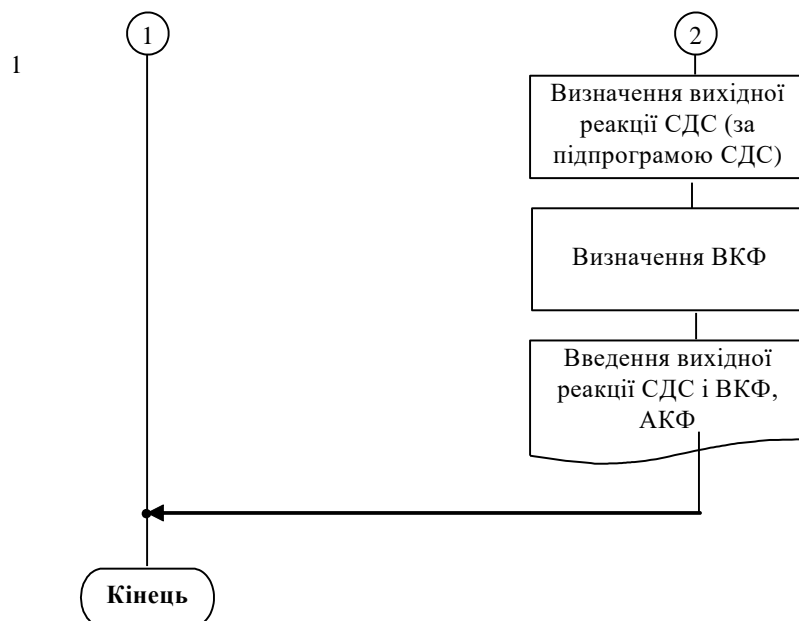


Рис. 7.4 (продовження)

У програмі використовуються дві СДС:

– аперіодична СДС першого порядку

$$K_0(z) = \alpha / [1 - (1 - \alpha)z^{-1}]; \quad (7.10)$$

– СДС другого порядку з двома інтеграторами

$$K_0(z) = \frac{[\alpha - (\alpha - \beta)z^{-1}]}{[1 - (2 - \alpha - \beta)z^{-1} + (1 - \alpha)z^{-2}]}. \quad (7.10)$$

Для кожного об'єкта необхідно одержати перехідну характеристику (вихідну реакцію СДС на прикладений до його входу одиничний стрибок) і імпульсну характеристику (вихідну реакцію СДС на прикладену до входу дельта-функцію в нульовий момент часу).

Одержимо різницеве рівняння для СДС першого порядку:

$$K_0(z) = \alpha / [1 - (1 - \alpha)z^{-1}] = Y(z) / X(z), \quad (7.13)$$

де $X(z)$, $Y(z)$ – z -перетворення відповідно входу і виходу СДС.

Тоді на основі формули (7.13) можна записати:

$$(1 - (1 - \alpha)z^{-1})Y(z) = \alpha X(z). \quad (7.14)$$

Далі виконуємо зворотнє z -перетворення і отримуємо різницеве рівняння:

$$y(n) = (1 - \alpha) \cdot y(n - 1) + \alpha x(n), \quad (7.15)$$

де $0 \leq \alpha \leq 2$ – одномірна область стійкості СДС.

Для СДС другого порядку:

$$K_0(z) = [\alpha - (\alpha - \beta)z^{-1}] / [1 - (2 - \alpha - \beta)z^{-1} + (1 - \alpha)z^{-2}] = Y(z) / X(z); \quad (7.16)$$

$$(1 - (2 - \alpha - \beta)z^{-1} + (1 - \alpha)z^{-2})Y(z) = (\alpha - (\alpha - \beta)z^{-1})X(z); \quad (7.17)$$

$$Y(z) = (2 - \alpha - \beta)z^{-1}Y(z) + (1 - \alpha)z^{-2}Y(z) + \alpha X(z) + (\beta - \alpha)z^{-1}X(z). \quad (7.18)$$

Виконуючи зворотнє z -перетворення над (7.19), одержуємо різницеве рівняння для СДС другого порядку:

$$y(n) = (2 - \alpha - \beta) \cdot y(n-1) + (\alpha - 1) \cdot y(n-2) + \alpha x(n) + (\beta - \alpha) \cdot x(n-1), \quad (7.19)$$

де $0 \leq \alpha \leq 2$, $0 \leq \beta \leq 4$ – двомірна область стійкості СДС.

Для одержання перехідної характеристики на вхід СДС необхідно подати одиничний східчастий вплив

$$x(n) = 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.20)$$

де N – довжина досліджуємої вибірки відліків входу і виходу СДС.

Імпульсну характеристику одержимо, якщо на вхід СДС подано випадкові числа (псевдовипадкова бінарна послідовність) від цифрового генератора шуму і визначимо ВКФ входу і виходу.

Виходячи з (7.6) і з огляду на дискретність відліків, отримаємо

$$R_{xy}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/(2N+1) \sum y_N(i)x_N(i-n), \quad (7.21)$$

де $n = 0, 1, \dots, N-1$; $n\Delta t = \tau$; $N\Delta t = T$.

Враховуючи, що $y(t) = 0$ для $t \leq 0$, і обмежуючись кінцевими вибірками процесів $x(i)$ і $y(i)$, маємо

$$R_{xy}(n) = 1/(N-n) \sum_{i=1}^{N-n} y(i+n)x(i+n), \quad (7.22)$$

де $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Для оцінки якості цифрового генератора шуму обчислюється його АКФ.

Виходячи з (7.7) і виконав перетворення аналогічно формулам (7.21) і (7.22), одержуємо вираз для визначення АКФ:

$$R_{xy}(n) = 1/(N-n) \sum_{i=1}^{N-n} x(i)x(i+n), \quad (7.23)$$

де $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Більш докладні відомості про властивості цифрового генератора шуму і його АКФ наведені в лабораторній роботі № 2.

Початкові дані для програми:

– тип і коефіцієнти рівняння СДС;

– кількість відліків вхідного сигналу.

Вихідні дані програми:

- перехідна характеристика;
- АКФ цифрового генератора шуму;
- ВКФ входу і виходу СДС.

7.3. Приклад програми моделювання

7.3.1. Програмна реалізація методу ідентифікації динамічних характеристик систем

```
% Математичні та програмні засоби моделювання ІВС
% Лабораторна робота № 7
% Ідентифікація динамічних характеристик систем за методом взаємної
кореляційної функції
% Математична модель системи у формі різницевого рівняння: 1) аперіо-
дична ланка;
% 2) система 2-го порядку з інтеграторами
% Використовуються вхідні сигнали: 1) ступеневий вплив;
% 2) випадкові числа від генератора МАТЛАБ rand з рівномірним розподі-
лом;
% 3) випадкові числа від генератора МАТЛАБ randn з нормальним розподі-
лом;
% 4) псевдовипадкова бінарна послідовність (нуль-послідовність макси-
мальної довжини)
% 5) псевдовипадкова бінарна послідовність (квадратична залишкова пос-
лідовність)

% --- Початкові дані ---
clear variables;
% Система: аперіодична ланка/система 2-го порядку з інтеграторами =1/2
Type_system=1;
% Коефіцієнти різницевого рівняння системи
alfa=0.6; beta=2.6;
% Динамічна характеристика, що обчислюється
%   1 - перехідна характеристика
%   2 - імпульсна характеристика
Type_din=1;
% Кількість відліків у реалізації вхідного сигналу системи
N=32;
% Амплітуда вхідного сигналу системи
A_random=1;
% Середньоквадратичне значення амплітуди випадкових впливів (для нор-
мального розподілу)
STD_random=1;
% Рівномірний розподіл/цілі числа з рівномірним розподілом/нормальний
розподіл =uniform/int/normal
Type_distributed='uniform';
% Тип генератора випадкових чисел в Матлаб
%   'twister' - MATLAB: rand, randi, randn - Mersenne Twister
%   'simdTwister' - MATLAB: rand, randi, randn - SIMD-oriented Fast
Mersenne Twister
```

```

% 'combRecursive' - MATLAB: rand, randi, randn - Combined Multiple
Recursive
% 'multFibonacci' - MATLAB: rand, randi, randn - Multiplicative
Lagged Fibonacci
% 'pvbpl' - псевдовипадкова бінарна послідовність (нуль-
послідовність максимальної довжини)
% 'pvbp2' - псевдовипадкова бінарна послідовність (квадратична за-
лишкова послідовність)
Type_generator='pvbpl';
% Період псевдовипадкової бінарної послідовності 3, 7, 15, 31, 63,
127, 255, 511, 1023, 2047
Type_PSBP=31;
% Кількість інтервалів на гістограмі
N_bins=10;

% --- Моделювання ---
% --- Формування вхідного сигналу системи ---
if Type_din==1 % ступеневий вплив
    X_random=A_random*ones(N,1);
else % генератор випадкових чисел в Матлаб
    switch lower(Type_generator)
        case {'twister','simdtwister','combrecursive','multifibonacci'}
            rng(0,Type_generator);
            if strcmp(Type_distributed,'uniform')==1
                X_random=A_random*rand(N,1);
            elseif strcmp(Type_distributed,'int')==1
                X_random=randi(A_random,N,1);
            else % 'normal' при інших значеннях Type_distributed
                X_random=STD_random*randn(N,1);
            end;
        case 'modn'
            X_random=zeros(N,1); A_mod=7^9; X_random(1)=1;
N_mod=10^10;
            for i=2:N
                X_random(i)=mod(A_mod*X_random(i-1),N_mod);
            end;
            if strcmp(Type_distributed,'uniform')==1
                X_random=A_random.*(X_random./N_mod);
            elseif strcmp(Type_distributed,'int')==1
                X_random=round(A_random.*(X_random./N_mod));
            else % 'normal' при інших значеннях Type_distributed
                X_random3=zeros(3*N,1); X_random3(1)=1;
                for i=2:(3*N)
                    X_random3(i)=mod(A_mod*X_random3(i-1),N_mod);
                end;
                for i=1:N
                    X_random(i)=(X_random3(i)./N_mod-
0.5).*(X_random3(i+N)./N_mod-0.5).*(X_random3(i+2*N)./N_mod-0.5);
                end;
                X_random=3*2^3*STD_random*X_random;
            end;
        case 'pvbpl'
            X_random=zeros(N,1); x101=ones(1,13);
            for i=1:N
                if Type_PSBP==3
                    rx101=xor(x101(2), x101(1)); x101max=2;

```

```

elseif Type_PSBP==7
    rx101=xor(x101(3), x101(1)); x101max=3;
elseif Type_PSBP==15
    rx101=xor(x101(4), x101(3)); x101max=4;
elseif Type_PSBP==31
    rx101=xor(x101(5), x101(3)); x101max=5;
elseif Type_PSBP==63
    rx101=xor(x101(6), x101(5)); x101max=6;
elseif Type_PSBP==127
    rx101=xor(x101(7), x101(4)); x101max=7;
elseif Type_PSBP==255
    rx101=xor(xor(x101(8), x101(4)),xor(x101(3),
x101(2))); x101max=8;
elseif Type_PSBP==511
    rx101=xor(x101(9), x101(5)); x101max=9;
elseif Type_PSBP==1023
    rx101=xor(x101(10), x101(7)); x101max=10;
elseif Type_PSBP==2047
    rx101=xor(x101(11), x101(9)); x101max=11;
else % 127 при інших значеннях Type_PSBP
    rx101=xor(x101(7), x101(4)); x101max=7;
end;
for j=x101max:(-1):2
    x101(j)=x101(j-1);
end;
x101(1)=rx101;
if rx101==1
    X_random(i)=1;
else
    X_random(i)=-1;
end;
end;
case 'pvbp2'
    X_random=zeros(N,1); xqN=-ones(1,Type_PSBP);
    for i=1:round((Type_PSBP-1)/2)
        xqN(mod(i^2-1,Type_PSBP)+1)=1;
    end;
    for i=1:N
        X_random(i)=xqN(mod((i-1),Type_PSBP)+1);
    end;
end; % switch
end; % if

% --- Графік ступеневого впливу або гістограма випадкових впливів ---
if Type_din==1 % ступеневий вплив
    figure; plot(0:(N-1),X_random,'k-', 'LineWidth',2); grid on;
    xlabel('Час, c'); ylabel('Амплітуда ступеневого впливу,
дискр.рівнів');
    title('Графік вхідного ступеневого впливу');
else % генератор випадкових чисел в Матлаб
    figure; [N_hist, Bin_hist]=hist(X_random,N_bins);
hist(X_random,N_bins); grid on;
    xlabel('Амплітуда випадкових впливів, дискр.рівнів');
ylabel('Кільк. відліків в інтервалі значень ампл. ');
    title('Гістограма розподілу значень випадкових чисел');
    figure; histogram(X_random,'Normalization','pdf'); grid on;

```

```

    xlabel('Амплітуда випадкових впливів, дискр.рівнів');
ylabel('Відносна кільк. відліків в інтервалі');
title('Нормалізована гістограма випадкових чисел');
if strcmp(Type_distributed,'normal')==1
    PDF_Arg=-3*STD_random:0.01:3*STD_random;
    PDF_Theory = pdf('normal',PDF_Arg,0,STD_random);
    hold on; plot(PDF_Arg,PDF_Theory,'r-','LineWidth',2); hold
off;
else
    PDF_Arg=0:0.1:A_random;
    PDF_Theory = pdf('uniform',PDF_Arg,0,A_random);
    hold on; plot(PDF_Arg,PDF_Theory,'r-','LineWidth',2); hold
off;
end;
end;

% --- Обчислення вихідної реакції системи ---
Y=zeros(N,1);
if Type_system==1 % 1) аперіодична ланка;
    Y(1)=(1-alfa)*0+alfa*X_random(1);
    for i=2:N
        Y(i)=(1-alfa)*Y(i-1)+alfa*X_random(i);
    end;
else % 2) система 2-го порядку з інтеграторами
    Y(1)=(2-alfa-beta)*0+(alfa-1)*0+alfa*X_random(1)+(beta-alfa)*0;
    Y(2)=(2-alfa-beta)*Y(1)+(alfa-1)*0+alfa*X_random(2)+(beta-
alfa)*X_random(1);
    for i=3:N
        Y(i)=(2-alfa-beta)*Y(i-1)+(alfa-1)*Y(i-
2)+alfa*X_random(i)+(beta-alfa)*X_random(i-1);
    end;
end;

% --- Графік вихідної реакції системи ---
figure; plot(0:(N-1),X_random,'k-',0:(N-1),Y,'r-','LineWidth',2); grid
on;
xlabel('Час, с'); ylabel('Амплітуда входу та виходу системи,
дискр.рівнів');
legend('вхід', 'вихід');
if Type_din==1 % ступеневий вплив
    title('Перехідна характеристика системи');
else
    title('Вхід та вихід системи');
end;

if Type_din==2
    % Автокореляційна функція випадкових впливів
    % Розрахунок на основі функції MATLAB xcorr
    Autocorr1 = xcorr(X_random)./N;
    figure; plot(0:(N-1),Autocorr1(N:end),'LineWidth',2); grid on;
    xlabel('Номер відліку випадкових чисел'); ylabel('Автокореляційна
функція, дискр.рівнів^2');
    title('Автокор. функція вип. посл. чисел - функція MATLAB xcorr');
    % Взаємна кореляційна функція виходу і входу системи
    % Розрахунок на основі функції MATLAB xcorr
    YXcorr1 = xcorr(Y,X_random)./N./var(X_random);

```



```

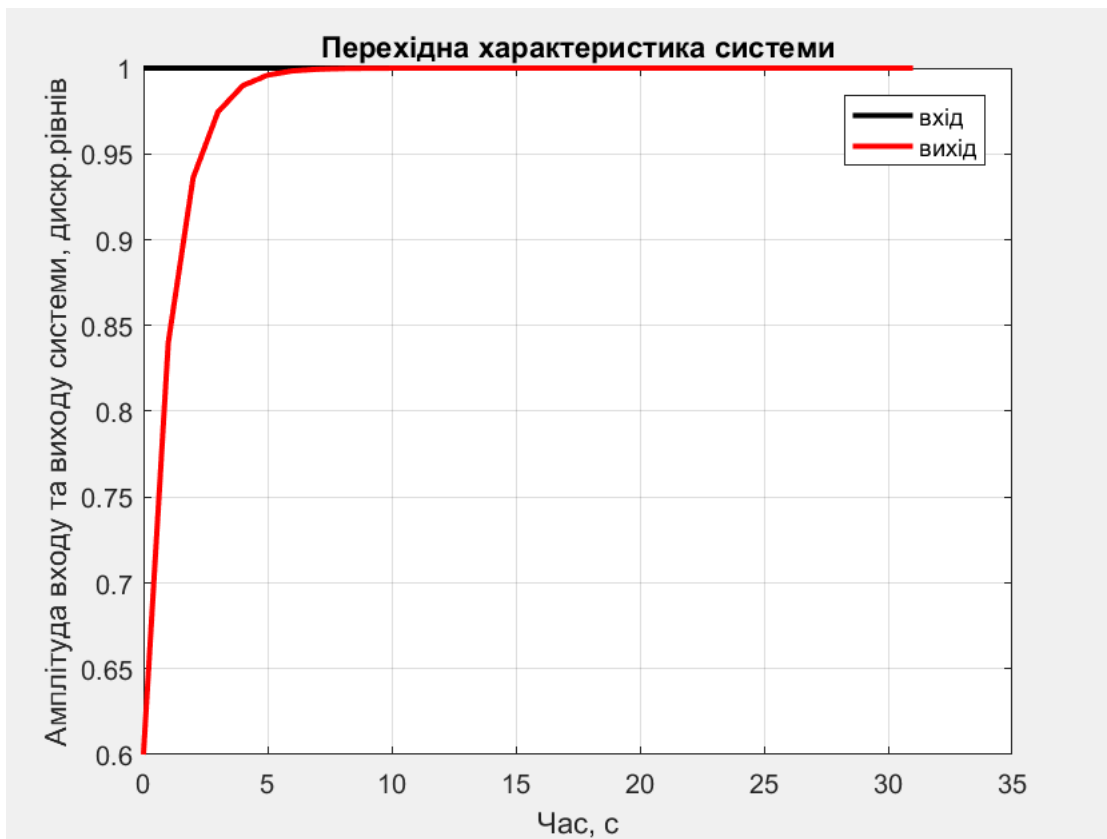
figure; plot(0:(N-1),YXcorr1(N:end),'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Час, с'); ylabel('Імпульсна характеристика системи');
title('Імпульсна характеристика системи за методом ВКФ');
end;

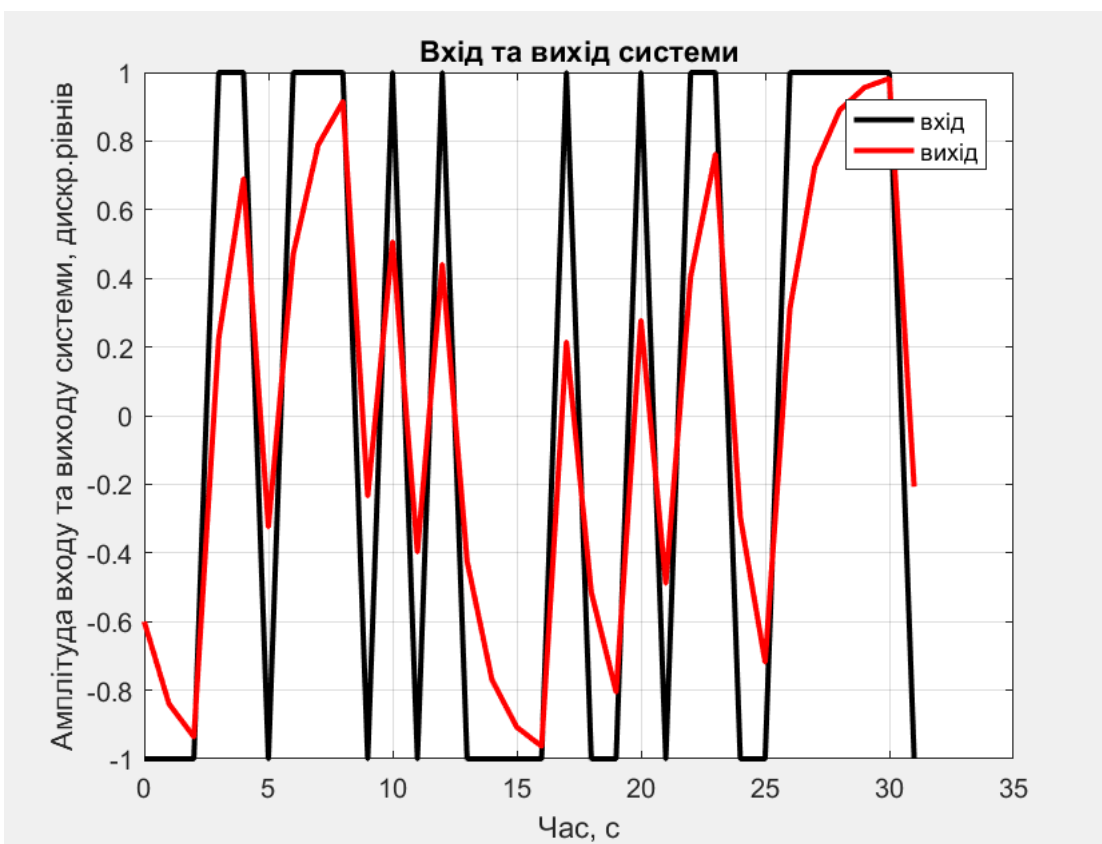
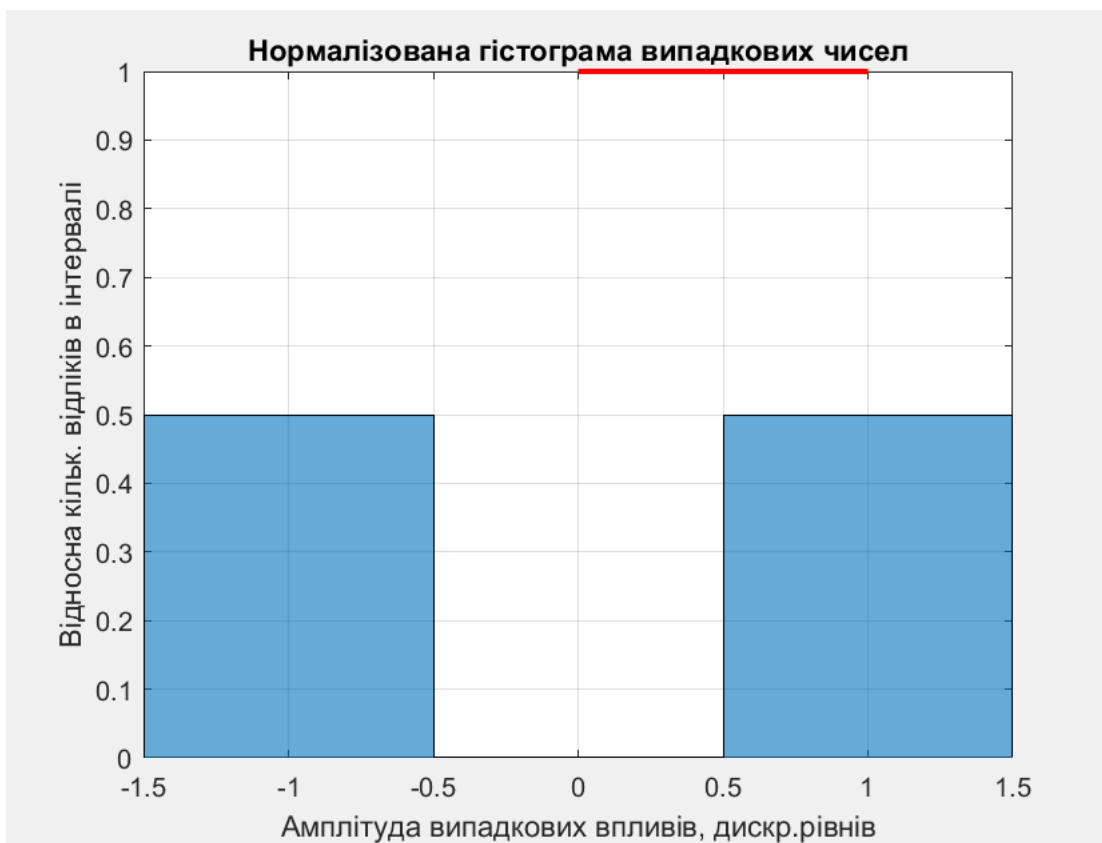
% --- Виведення результатів моделювання ---
fprintf(1,'Лабораторна робота № 3\n');
fprintf(1,'Ідентифікація динамічних характеристик систем за методом
взаємної кореляційної функції\n');
fprintf(1,'Математична модель системи у формі різницевого рівнян-
ня\n');
fprintf(1,'Система: аперіодична ланка/система 2-го порядку з інтегра-
торами =1/2 %d\n', Type_system);
fprintf(1,'Коефіцієнти різницевого рівняння системи alfa та beta %7.3f
%7.3f\n', alfa, beta);
fprintf(1,'Динамічна характеристика: 1 - перехідна; 2 - імпульсна
%d\n', Type_din);
fprintf(1,'Кількість відліків у реалізації вхідного сигналу %d\n', N);
fprintf(1,'Діапазон значень ампл. вип. впливів (для рівн. розподілу)
%7.3f\n', A_random);
fprintf(1,'Середньокв. значення ампл. вип. впливів (для норм. розподі-
лу) %7.3f\n', STD_random);
fprintf(1,'Рівн. розподіл/цілі числа з рівн. розподілом/норм. розподіл
%s\n', Type_distributed);
fprintf(1,'Тип генератора випадкових чисел %s\n', Type_generator);
fprintf(1,'Період псевдовипадкової бінарної послідовності %d\n',
Type_PSBP);
fprintf(1,'Кількість інтервалів на гістограмі %d\n\n', N_bins);

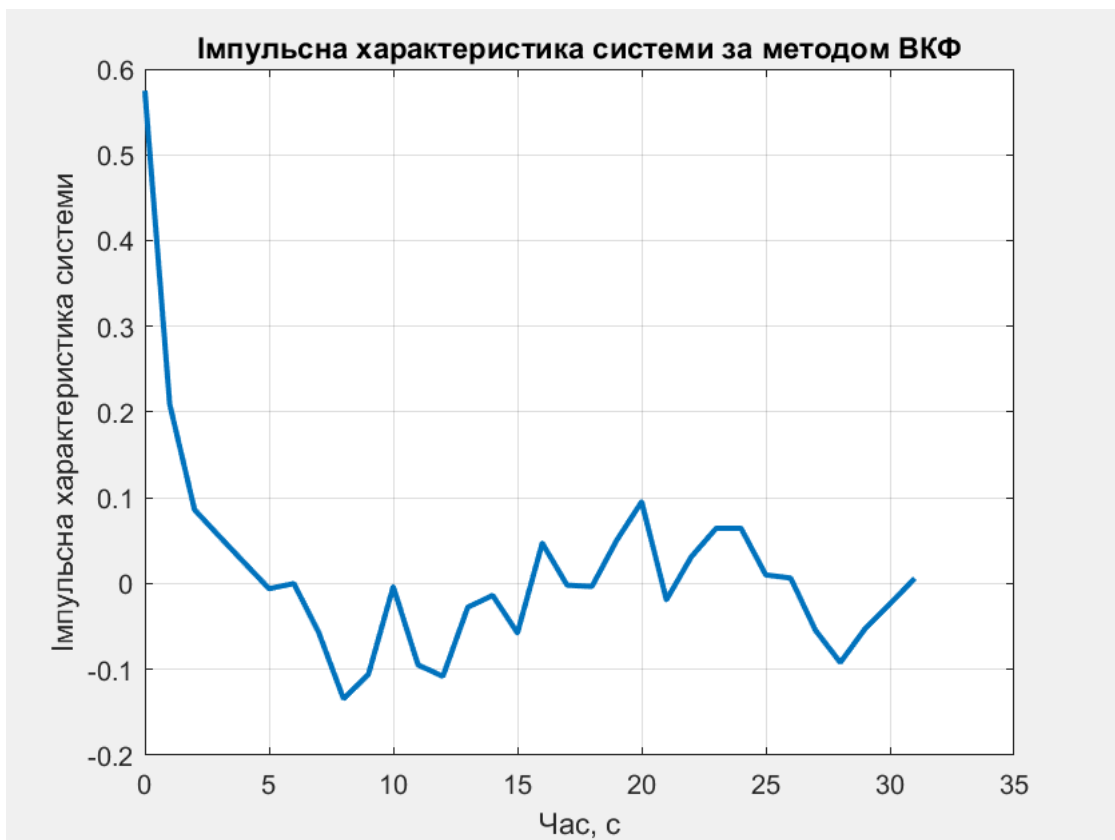
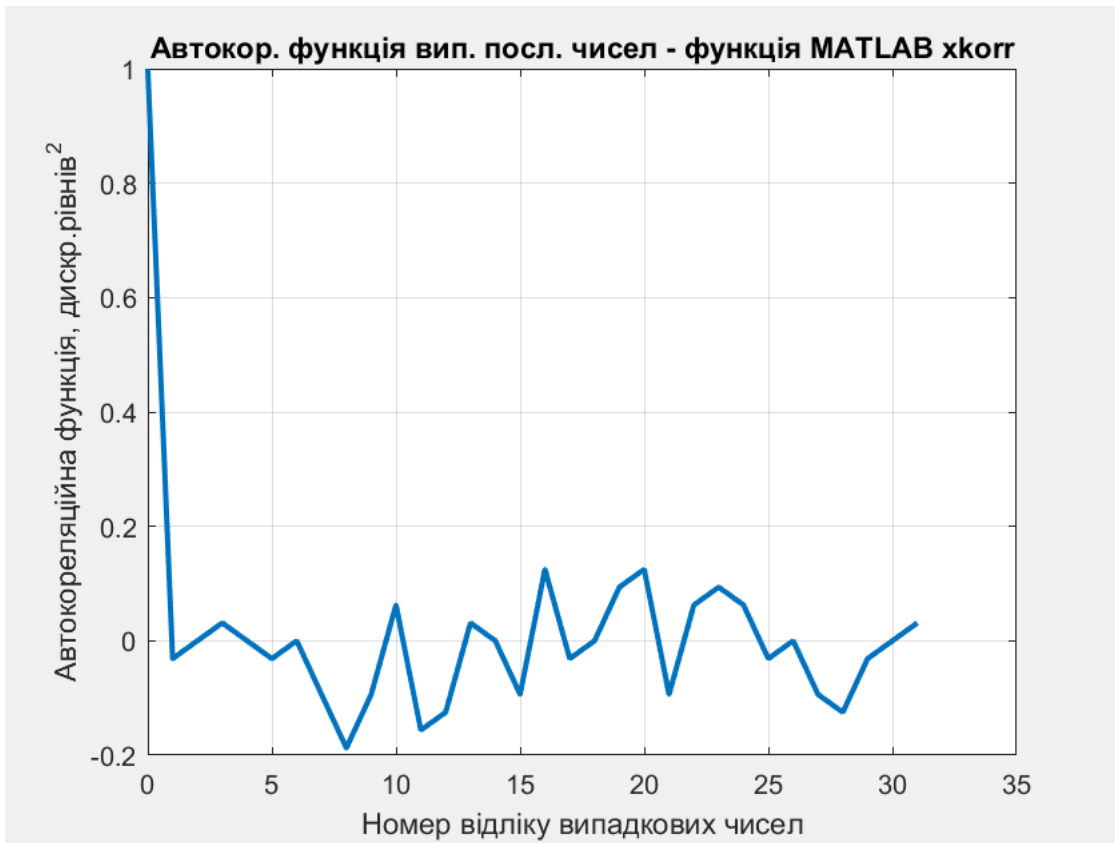
```

7.3.2. Ідентифікація динамічних характеристик аперіодичної системи 1-го порядку

Лабораторна робота № 3
Ідентифікація динамічних характеристик систем за методом взаємної кореляційної функції
Математична модель системи у формі різницевого рівняння
Система: аперіодична ланка/система 2-го порядку з інтеграторами
=1/2 1
Коефіцієнти різницевого рівняння системи alfa та beta 0.600
2.600
Динамічна характеристика: 1 - перехідна; 2 - імпульсна 1
Кількість відліків у реалізації вхідного сигналу 32
Діапазон значень ампл. вип. впливів (для рівн. розподілу) 1.000
Середньокв. значення ампл. вип. впливів (для норм. розподілу)
1.000
Рівн. розподіл/цілі числа з рівн. розподілом/норм. розподіл
uniform
Тип генератора випадкових чисел rvbr1
Період псевдовипадкової бінарної послідовності 31
Кількість інтервалів на гістограмі 10

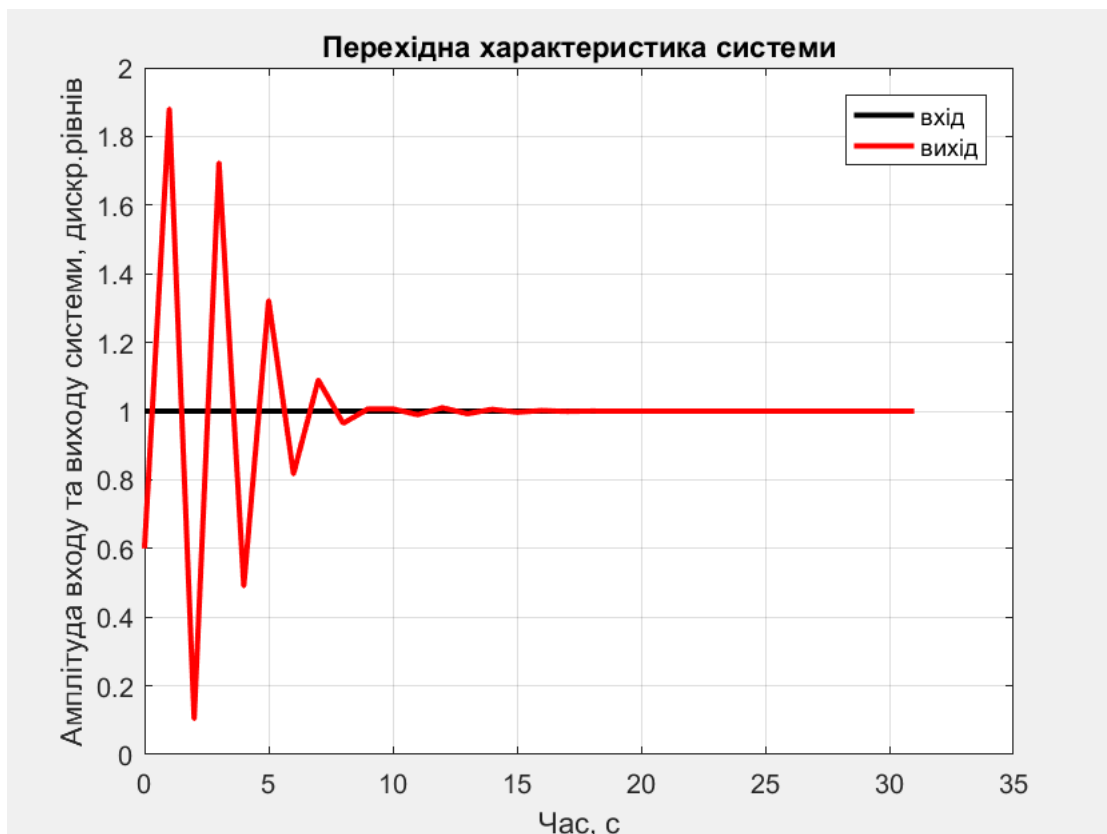


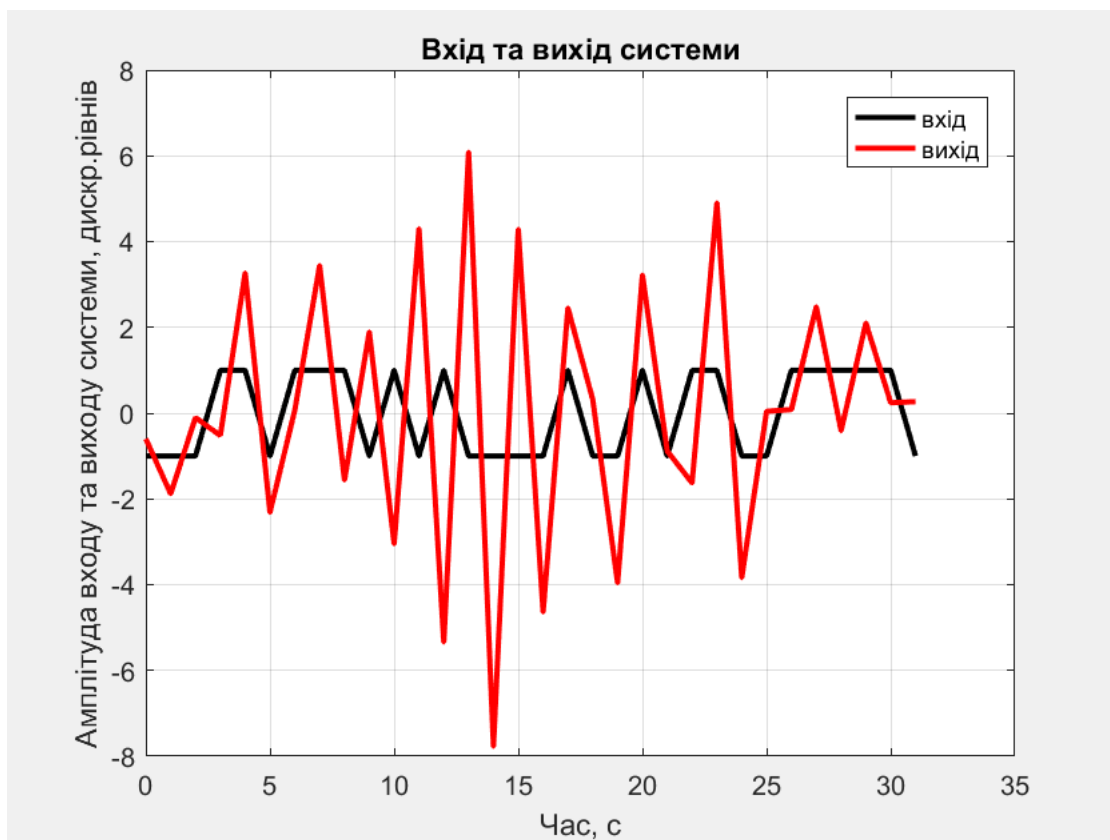
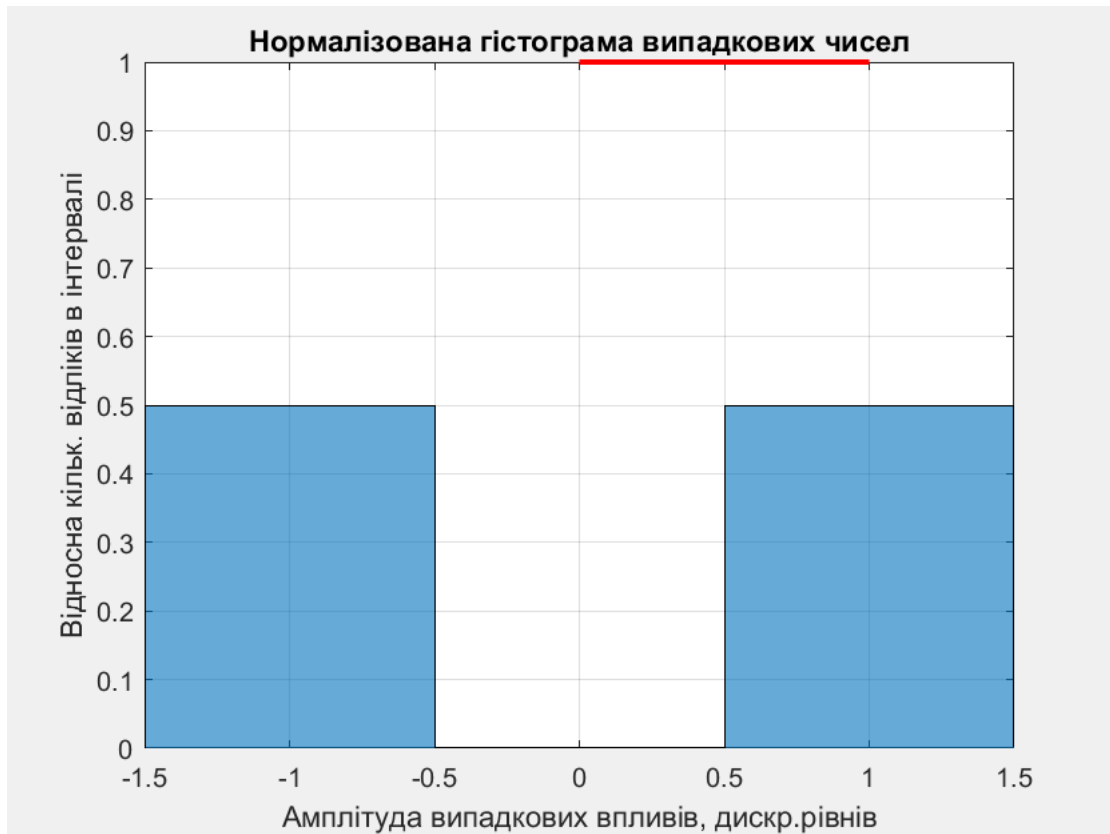


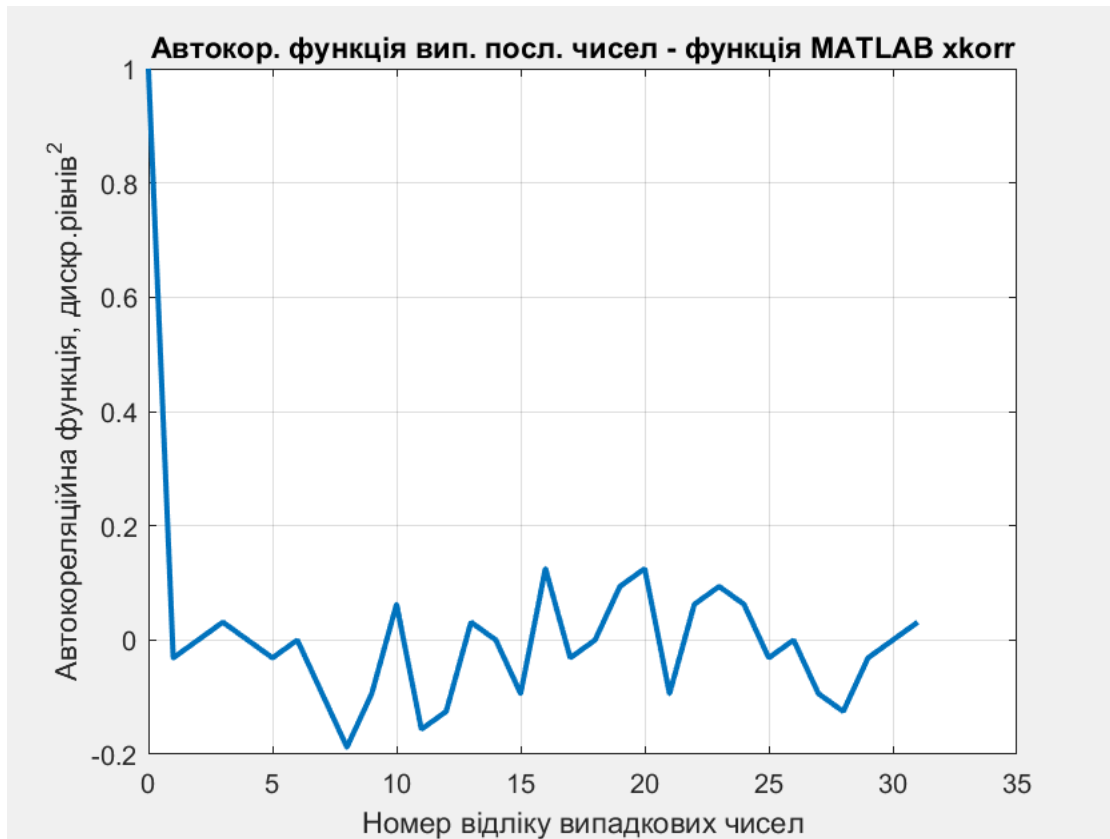


7.3.3. Ідентифікація динамічних характеристик системи 2-го порядку з інтеграторами

Лабораторна робота № 7
Ідентифікація динамічних характеристик систем за методом взаємної кореляційної функції
Математична модель системи у формі різницевого рівняння
Система: аперіодична ланка/система 2-го порядку з інтеграторами
=1/2 2
Коефіцієнти різницевого рівняння системи alfa та beta 0.600
2.600
Динамічна характеристика: 1 - перехідна; 2 - імпульсна 1
Кількість відліків у реалізації вхідного сигналу 32
Діапазон значень ампл. вип. впливів (для рівн. розподілу) 1.000
Середньокв. значення ампл. вип. впливів (для норм. розподілу)
1.000
Рівн. розподіл/цілі числа з рівн. розподілом/норм. розподіл
uniform
Тип генератора випадкових чисел rvbr1
Період псевдовипадкової бінарної послідовності 31
Кількість інтервалів на гістограмі 10







8. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ АДАПТИВНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

8.1. Теоретичні основи адаптивної ідентифікації

Однією із складових частин процесу моделювання складної динамічної системи (СДС) є її ідентифікація. У загальному випадку ідентифікація динамічних об'єктів полягає у визначенні їхньої структури і параметрів по даним, що спостерігаються, тобто по вхідному впливу і вихідній величині СДС. Ця задача виникає при створенні адаптивних систем, тобто таких, у яких на основі ідентифікації СДС виробляються оптимальні управляючі дії. До різноманітних варіантів задачі ідентифікації приводять статистичні методи опрацювання інформації в різноманітних областях науки і техніки.

Адаптивна ідентифікація здійснюється за допомогою моделі відповідної структури, параметри якої в процесі ідентифікації змінюються таким чином, щоб із найменшою похибкою відобразити параметри СДС. Функціональна схема процесу адаптивної ідентифікації наведена на рис. 8.1.

Різниця вихідних величин СДС і моделі утворює нев'язку

$$\varepsilon(z(n), c) = y(n) - \tilde{y}(n), \quad (8.1)$$

де $z(n)$ – значення входу і виходу СДС, отримані в результаті спостережень; c – вектор параметрів моделі, що настраюється.

Будемо вважати, що СДС є стаціонарною, тобто її параметри не залежать від часу.

Якість адаптивної ідентифікації (ступінь наближення моделі до СДС в процесі її налаштування) оцінюється по середніх втратах

$$J(c) = M\{F[\varepsilon(z(n), c)]\}, \quad (8.2)$$

де $M\{\cdot\}$ – математичне очікування;

$F[\cdot]$ – функція втрат (ступінь небажаності нев'язки).

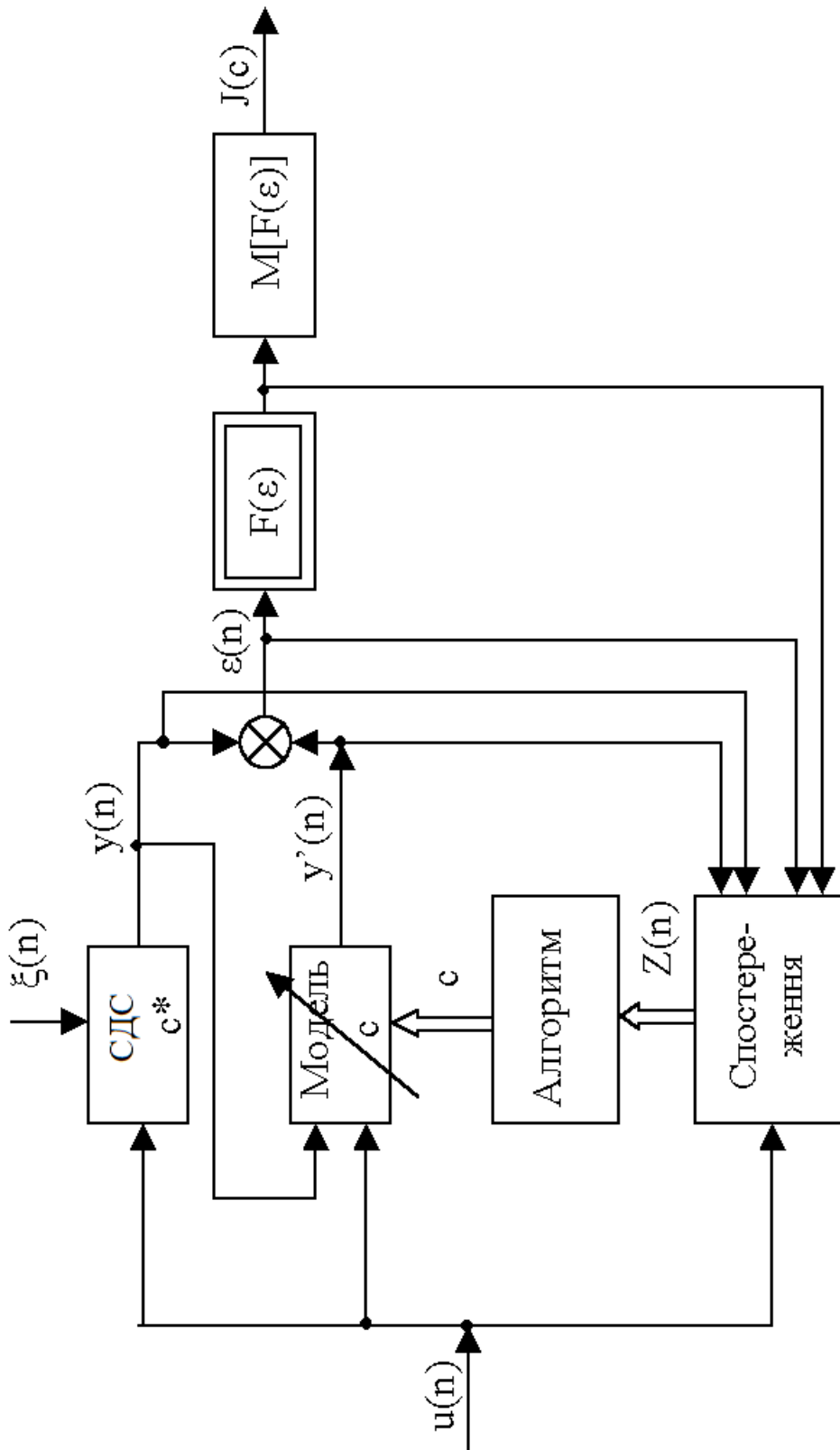


Рис. 8.1

Функція втрат може обчислюватися по різним формулам.

Найчастіше використовують:

– порогову функцію втрат (рис. 8.2, а)

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & |\varepsilon| \geq \varepsilon_0, \\ 0 & |\varepsilon| < \varepsilon_0, \end{cases}$$

– лінійну функцію втрат (рис. 8.2, б)

$$F(\varepsilon) = |\varepsilon|,$$

– квадратичну функцію втрат (рис. 8.2, в)

$$F(\varepsilon) = \varepsilon^2.$$

В лабораторній роботі використовується квадратична функція втрат, тобто втрати пропорційні квадрату нев'язки:

$$F[\varepsilon] = \varepsilon^2(z(n), c). \quad (8.3)$$

Алгоритм ідентифікації полягає в тому, що на основі доступних для спостереження значень вхідних і вихідних величин змінюють параметри моделі, що настроюється, так, щоб із ростом числа кроків настроювання моделі середні втрати $J(c)$ досягали мінімального значення.

Таким чином, для рішення задач ідентифікації необхідно:

- визначити клас СДС, що досліджуються;
- на основі відомостей про СДС сформулювати модель, що настроюється (визначити її структуру);
- вибрати критерій якості ідентифікації (по середньому квадрату втрат);
- побудувати алгоритм ідентифікації.

Рівняння лінійної динамічної СДС з двома входами (рис. 8.3) представляється у вигляді лінійного різницевого рівняння

$$y(n) + \sum_{m=1}^N a_m^* y(n-m) = \sum_{m=0}^N b_m^* u(n-m) + \sum_{m=1}^N d_m^* [\xi(n-m) - (n-m)], \quad (8.4)$$

де $y(n)$ – вихід СДС;

$n = 0, 1, 2, \dots$ – дискретний час;

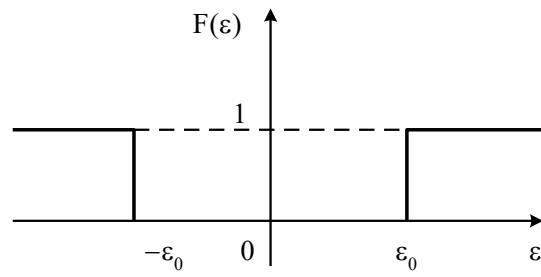
$u(n)$ – вхідний вплив;

$\xi(n)$ – збурююча дія (завада).

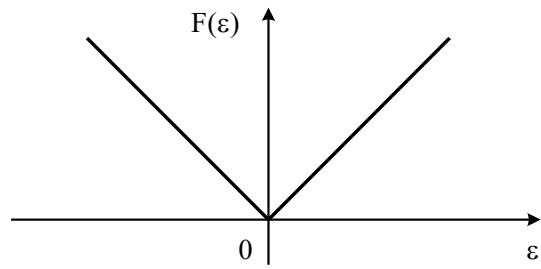
Оптимальною моделлю, що настроюється, будемо вважати таку модель, для якої $M\{\varepsilon^2(n)\}$ досягає мінімально можливого значення при певних значеннях її параметрів.

Для СДС з рівнянням (8.4) рівняння оптимальної моделі має вигляд

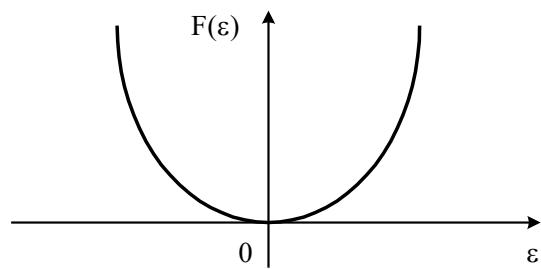
$$\tilde{y}(n) = - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m) + \sum_{m=1}^N d_m [y(n-m) - \tilde{y}(n-m)]. \quad (8.5)$$



а)



б)



в)

Рис. 8.2

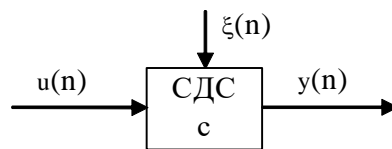


Рис. 8.3

Введемо позначення вектора параметрів моделі

$$c = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_n) \quad (8.6)$$

Оптимальне рішення задачі ідентифікації для даної моделі, що настроюється, позначимо

$$c^* = (a_1^*, \dots, a_n^*, b_1^*, \dots, b_n^*, d_1^*, \dots, d_n^*). \quad (8.7)$$

У відповідності з обраним критерієм якості ідентифікації (формула (8.2)) можна записати

$$J^*(c^*) = M\{\varepsilon^2(z(n), c^*)\} = \min_c . \quad (8.8)$$

Оптимальне рішення c^* можна знайти з критерію якості (8.8) за допомогою методу найменших квадратів, що призводить до рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Умова, що визначає оптимальне рішення задачі ідентифікації $c = c^*$, має вигляд

$$\nabla J(c) = M\{\nabla_c F[\varepsilon(z(n), c)]\} = 0, \quad (8.9)$$

де ∇J – градієнт середніх втрат;

$\nabla_c F$ – градієнт функції втрат,

$$\nabla_c F = (\partial / \partial c_1, \dots, \partial / \partial c_N).$$

Векторне рівняння (8.9) еквівалентно системі нелінійних алгебраїчних рівнянь щодо компонент вектора c . У зв'язку з труднощами, що виникають при аналітичному рішенні рівняння (8.9), переходять до наближених методів. Це значить, що рівняння (8.9) замінюється різницеvim рівнянням, рішення якого $c(n)$ з плином часу прагне до оптимального рішення c^* .

Якщо градієнт середніх втрат $\nabla J(n)$ відомий (на основі попередніх спостережень за СДС і моделлю, що настроюється), то алгоритм адаптації (ітеративний алгоритм) має вигляд

$$C(n) = c(n-1) - \Gamma(n) \nabla J(c(n-1)), \quad (8.10)$$

де $\Gamma(n)$ - матриця підсилення;

c_0 – початкова умова (звичайно вибирається довільно).

Блок-схема ітеративного алгоритму показана на рис. 8.4, де ЕЗ - елемент затримки.

Якщо градієнт середніх втрат невідомий (цілком невідома щільність розподілу завад і спостережень), то алгоритм ідентифікації (рекурентний алгоритм) має вигляд

$$C(n) = C(n-1) - \Gamma(n) \nabla_c F[E(\varepsilon(n), c(n-1))] \quad (8.11)$$

Блок-схема рекурентного алгоритму показана на рис. 8.5.

Практичну реалізацію алгоритмів, що відповідають формулам (8.10) і (8.11), доцільно здійснити на ЕОМ.

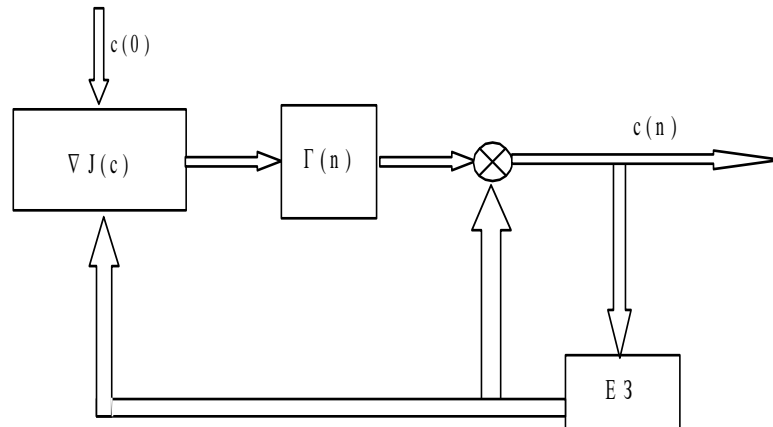


Рис. 8.4

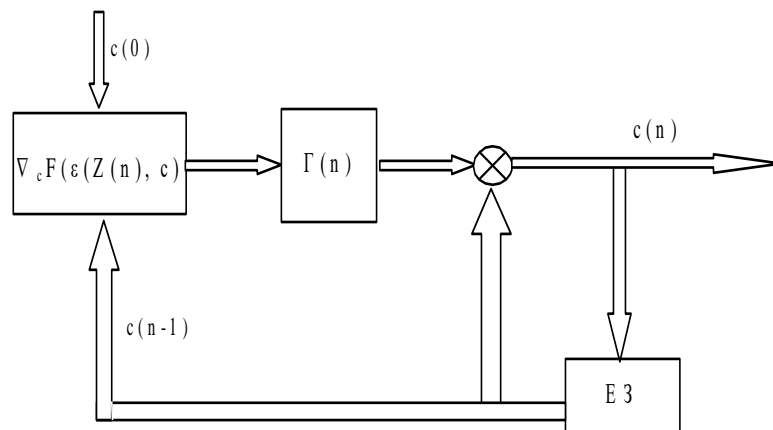


Рис. 8.5

8.2. Метод та алгоритми адаптивної ідентифікації систем

Алгоритм програми дослідження методів адаптивної ідентифікації наведений на рис. 8.6.

У роботі досліджуються два методи адаптивної ідентифікації:

- по ітеративному алгоритму, що описується формулою (8.10);
- по рекурентному алгоритму, що описується формулою (8.11).

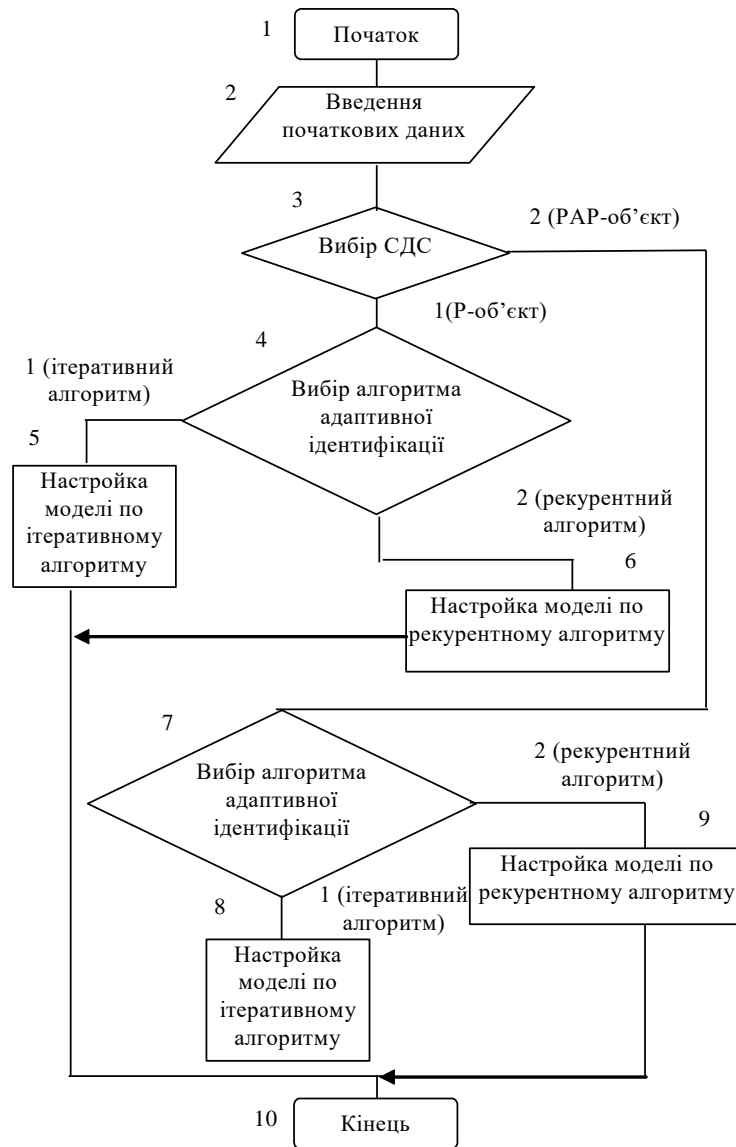


Рис. 8.6

При дослідженні цих методів використовуються такі СДС:
 – регресивна (Р - об'єкт)

$$y(n) = bu(n) + \xi(n); \quad (8.12)$$

– регресивно-авторегресивна (РАР - об'єкт)

$$y(n) = -ay(n-1) + bu(n) + \xi(n). \quad (8.13)$$

Відповідно до (8.5), тобто виходячи із загального рівняння оптимальної моделі, рівняння оптимальних моделей будуть мати такий вигляд:

– для Р - об'єкта

$$\tilde{y}(n) = \tilde{b}u(n); \quad (8.14)$$

– для РАР - об'єкта

$$\tilde{y}(n) = -\tilde{a}(n-1) + \tilde{b}u(n). \quad (8.15)$$

Функція втрат

$$F[\varepsilon(n)] = \varepsilon^2(n) = (y(n) - \tilde{y}(n))^2 \quad (8.16)$$

У даній лабораторній роботі використовуються такі вхідні впливи для СДС і моделі:

– одиничний стрибок

$$u(n) = 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad (8.11)$$

– цифровий шум, одержаний від генератора випадкових чисел;

– гармонічний сигнал

$$u(n) = A \sin(2\pi fn / N + \varphi_0), \quad (8.18)$$

де A – амплітуда сигналу;

f – частота сигналу;

φ_0 – початкова фаза;

$n = 0, 1, \dots, N-1$;

N – число дискретних відліків сигналу.

Розглянемо одержання виразу для обчислення коефіцієнтів оптимальної моделі Р - об'єкта для рекурентного методу.

Функція втрат буде мати вигляд (див. формули (8.12), (8.14), (8.16)):

$$\varepsilon(n) = y(n) - \tilde{y}(n) = bu(n) - \tilde{b}u(n) + \xi(n); \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} F[\varepsilon(n)] &= [\varepsilon^2(n)] = (bu(n) - \tilde{b}u(n) + \xi(n))^2 = \\ &= b^2u^2(n) - 2\tilde{b}bu^2(n) - 2\tilde{b}u(n) \cdot \xi(n) + \\ &+ b^2u^2(n) + 2bu(n) \cdot \xi(n) + \xi^2(n). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Градiєнт функції втрат

$$\begin{aligned}
\nabla_c F[\varepsilon(n)] &= \partial F[\varepsilon(n)] / \partial \hat{b} = 2\hat{b}u^2(n) - 2bu^2(n) - \\
&- 2u(n) \cdot \xi(n) = 2u(n) \cdot (\tilde{b}u(n) - bu(n) - \xi(n)) = \\
&= -2u(n) \cdot (y(n) - \tilde{b}u(n)).
\end{aligned}
\tag{8.21}$$

Підставляючи результат із (8.21) у (8.11) і враховуючи, що вектор коефіцієнта моделі $c = (b)$, одержуємо вираз для визначення коефіцієнта b оптимальної моделі Р - об'єкта:

$$\tilde{b}(n) = \tilde{b}(n-1) + 2\gamma u(n) \cdot [y(n) - \tilde{b}(n-1) \cdot u(n)],
\tag{8.22}$$

де γ - коефіцієнт підсилення.

Розглянемо РАР - об'єкт і його оптимальну модель. Вектор коефіцієнтів моделі $c = (\hat{a}, b)$.

Вираз для визначення коефіцієнтів оптимальної моделі має вигляд (для рекурентного методу):

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(n) &= \tilde{a}(n-1) - 2\gamma_a y(n-1) \cdot [y(n) - (-\tilde{a}(n-1) \times \\
&\times y(n-1) + \tilde{b}(n-1) \cdot u(n))]
\end{aligned}
\tag{8.23}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(n) &= \tilde{b}(n-1) - 2\gamma_b y(n-1) \cdot [y(n) - (-\tilde{a}(n-1) \times \\
&\times y(n-1) + \tilde{b}(n-1) \cdot u(n))]
\end{aligned}
\tag{8.24}$$

де γ_a, γ_b - коефіцієнти підсилення.

Для ітеративного методу обчислення проводяться по тим же формулам (8.22) – (8.24), що і для рекурентного методу, але для одержання градієнту середніх втрат (формула (8.10)) проводиться обчислення функції втрат при фіксованих коефіцієнтах моделі для усього вхідного впливу (N дискретних відліків) із наступним визначенням середнього арифметичного значення функції втрат.

Початкові дані програми:

- СДС, що досліджується;
- метод адаптивної ідентифікації, що досліджується;
- тип вхідного впливу;
- кількість відліків.

Вихідні дані програми:

- вихід СДС;
- вихід оптимальної моделі;
- коефіцієнти оптимальної моделі в процесі настроювання.

8.3. Приклад програми моделювання

8.3.1. Програмна реалізація методів адаптивної ідентифікації

```
% Математичні та програмні засоби моделювання ІВС
% Лабораторна робота № 8
% Дослідження методів адаптивної ідентифікації
% Регресійна та регресійно-авторегресійна математичні моделі системи
% Рекурентний та ітераційний алгоритми адаптивної ідентифікації
% Функція втрат (функція від похибки адаптивної моделі) - порогова, лінійна,
квадратична
% Використовуються вхідні сигнали: 1) ступеневий вплив; 2) синусоїда; 3) ви-
падковий сигнал

% --- Початкові дані ---
clear variables;
% Система: регресійна/регресійно-авторегресійна = 1/2
Type_system=1;
% Алгоритм адаптивної ідентифікації: рекурентний/ітераційний = 1/2
Type_ident=1;
% Функція втрат: порогова/лінійна/квадратична = 1/2/3
Type_fdelta=3;
% Порог функції втрат, В
E0=0.1;
% Похибка вимірювань виходу системи, В
Delta_y=0.05;
% Тип вхідного сигналу: ступеневий/синусоїда/випадковий = 1/2/3
Type_x=1;
% Амплітуда вхідного сигналу системи, В
A_x=1;
% Частота вхідного сигналу системи, Гц
f_x=0.5;
% Час спостереження за системою, с
T_ident=10;
% Кількість відліків та кроків рекурентного алгоритму на інтервалі спостере-
ження
N_rec=100;
% Кількість кроків ітераційного алгоритму
N_it=50;
% Коефіцієнти різницевого рівняння системи
as=0.7; bs=1.8;
% Початкові значення коефіцієнтів різницевого рівняння моделі
am0=0.6; bm0=0.8;
% Коефіцієнт підсилення алгоритму адаптивної ідентифікації
gamma_a=0.05; gamma_b=0.05;

% --- Формування вхідного сигналу системи ---
T=(linspace(0, T_ident, N_rec))'; % відліки часу в дискретних точках на інте-
рвалі спостереження
if Type_x==1 % ступеневий вплив
    Xs=A_x*ones(N_rec,1);
else if Type_x==2 % синусоїда
    Xs=A_x*sin(2*pi*f_x*T);
    else % випадковий сигнал
        Xs=A_x*rand(N_rec,1);
    end;
end; % if

% --- Адаптивна ідентифікація ---
% Вихід системи
Ys=bs*Xs+Delta_y/3*randn(N_rec,1); % Система регресійна
if Type_system==2 % Система регресійно-авторегресійна
```

```

Ys(1)=bs*Xs(1);
for i=2:N_rec
    Ys(i)=-as*Ys(i-1)+bs*Xs(i)+Delta_y/3*randn;
end;
end;
if Type_ident==1 % рекурентний алгоритм адаптивної ідентифікації
    % Вихід адаптивної моделі
    Ym=zeros(N_rec,1);
    am=zeros(N_rec,1);
    bm=zeros(N_rec,1);
    am(1)=am0; bm(1)=bm0;
    Ym(1)=bm(1)*Xs(1);
    for i=2:N_rec
        if Type_system==1 % Система регресійна
            bm(i)=bm(i-1)+2*gamma_b*Xs(i)*(Ys(i)-bm(i-1)*Xs(i));
            Ym(i)=bm(i)*Xs(i);
        else % Система регресійно-авторегресійна
            am(i)=am(i-1)-2*gamma_a*Ys(i-1)*(Ys(i)+am(i-1)*Ys(i-1)-bm(i-1)*Xs(i));
            bm(i)=bm(i-1)+2*gamma_b*Xs(i)*(Ys(i)+am(i-1)*Ys(i-1)-bm(i-1)*Xs(i));
            Ym(i)=-am(i)*Ym(i-1)+bm(i)*Xs(i);
        end;
    end;
    figure; plot(T,Xs,'k-',T,Ys,'r-',T,Ym,'g-','LineWidth',2); grid on;
    xlabel('Час, c'); ylabel('Вхід та вихід системи та моделі, B');
    title('Вхід та вихід системи та моделі');
    legend('вхід', 'вихід системи', 'вихід моделі');
    figure; plot(T,(Ys-Ym).^2,'k-','LineWidth',2); grid on;
    xlabel('Час, c'); ylabel('Функція втрат, B^2');
    title('Функція втрат (від похибки моделі) - квадратична');
    as1=as*ones(N_rec,1); bs1=bs*ones(N_rec,1);
    figure;
    if Type_system==1
        plot(T,bs1,'r--',T,bm,'r-','LineWidth',1); grid on;
        legend('b системи', 'b моделі');
    else
        plot(T,as1,'k--',T,bs1,'r--',T,am,'k-',T,bm,'r-','LineWidth',1); grid
on;
        legend('a системи', 'b системи', 'a моделі', 'b моделі');
    end;
    xlabel('Час, c'); ylabel('Коефіцієнти адаптивної моделі');
    title('Рекурентний алгоритм адаптивної ідентифікації');
else % ітераційний алгоритм адаптивної ідентифікації
    Ym=zeros(N_rec,1);
    am=zeros(N_it,1);
    bm=zeros(N_it,1);
    am(1)=am0; bm(1)=bm0;
    Func_D=zeros(N_it,1);
    for j=1:N_it % кроки ітераційного алгоритму
        % Вихід адаптивної моделі
        Ym(1)=bm(j)*Xs(1);
        for i=2:N_rec
            if Type_system==1 % Система регресійна
                Ym(i)=bm(j)*Xs(i);
            else % Система регресійно-авторегресійна
                Ym(i)=-am(j)*Ym(i-1)+bm(j)*Xs(i);
            end;
        end;
        Func_D(j)=sum((Ys-Ym).^2)/N_rec;
    end;
    if j==N_it

```

```

        break;
    end;
    if Type_system==1 % Система регресійна
        bm(j+1)=bm(j)+2*gamma_b*sum(Xs)/N_rec*sqrt(Func_D(j));
    else % Система регресійно-авторегресійна
        am(j+1)=am(j)-2*gamma_a*sum(Ys)/N_rec*sqrt(Func_D(j));
        bm(j+1)=bm(j)+2*gamma_b*sum(Xs)/N_rec*sqrt(Func_D(j));
    end;
end;
figure; plot(T,Xs,'k-',T,Ys,'r-',T,Ym,'g-','LineWidth',2); grid on;
xlabel('Час, c'); ylabel('Вхід та вихід системи та моделі, B');
title('Вхід та вихід системи та моделі');
legend('вхід', 'вихід системи', 'вихід моделі');
figure; plot((1:N_it)',Func_D,'k-','LineWidth',2); grid on;
xlabel('Крок ітераційного алгоритму'); ylabel('Середня функція втрат,
B^2');
title('Середня функція втрат (від похибки моделі) - квадратична');
as1=as*ones(N_it,1); bs1=bs*ones(N_it,1);
figure;
if Type_system==1
    plot((1:N_it)',bs1,'r--',(1:N_it)',bm,'r-','LineWidth',1); grid on;
    legend('b системи', 'b моделі');
else
    plot((1:N_it)',as1,'k--',(1:N_it)',bs1,'r--',(1:N_it)',am,'k-
',(1:N_it)',bm,'r-','LineWidth',1); grid on;
    legend('a системи', 'b системи', 'a моделі', 'b моделі');
end;
xlabel('Крок ітераційного алгоритму'); ylabel('Коефіцієнти адаптивної
моделі');
title('Рекурентний алгоритм адаптивної ідентифікації');
end;

```

8.3.2. Результати адаптивної ідентифікації за рекурентним алгоритмом

```

% Математичні та програмні засоби моделювання ІВС
% Лабораторна робота № 8
% Дослідження методів адаптивної ідентифікації
% Регресійна та регресійно-авторегресійна математичні моделі системи
% Рекурентний та ітераційний алгоритми адаптивної ідентифікації
% Функція втрат (функція від похибки адаптивної моделі) - порогова,
лінійна, квадратична
% Використовуються вхідні сигнали: 1) ступеневий вплив; 2) синусоїда;
3) випадковий сигнал

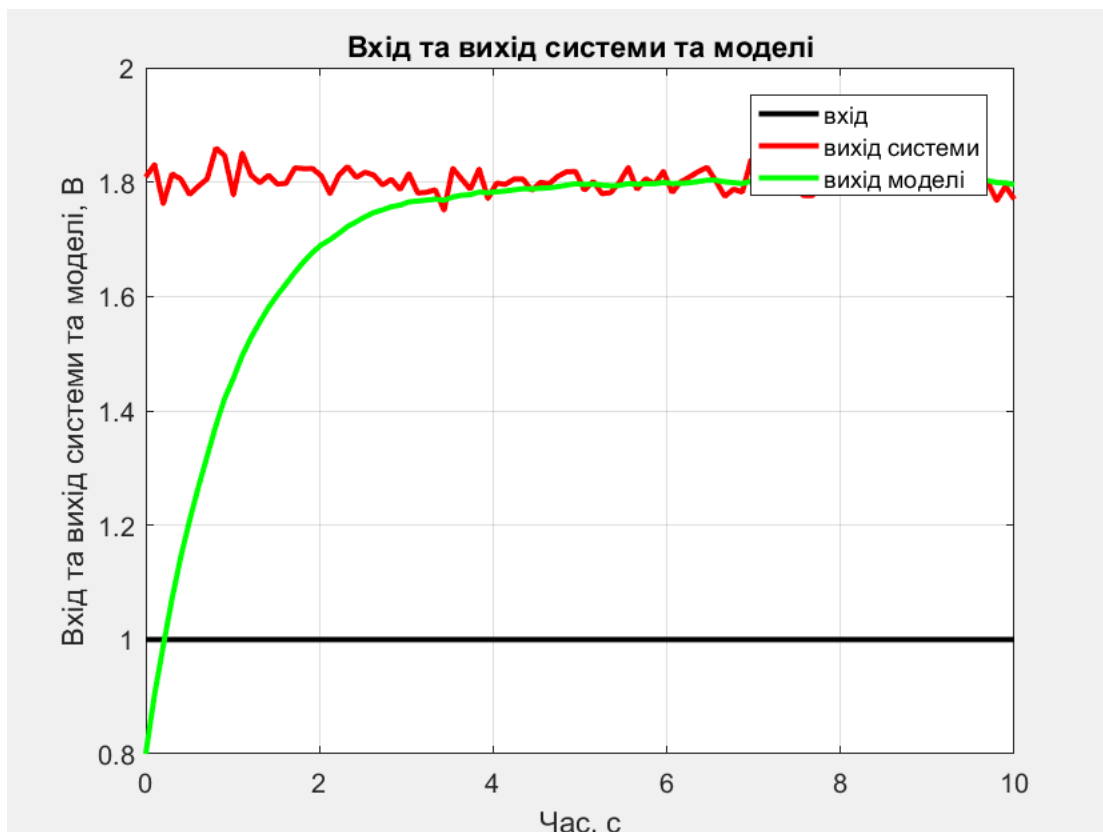
% --- Початкові дані ---
clear variables;
% Система: регресійна/регресійно-авторегресійна = 1/2
Type_system=1;
% Алгоритм адаптивної ідентифікації: рекурентний/ітераційний = 1/2
Type_ident=1;
% Функція втрат: порогова/лінійна/квадратична = 1/2/3
Type_fdelta=3;
% Порог функції втрат, B
E0=0.1;
% Похибка вимірювань виходу системи, B
Delta_y=0.05;
% Тип вхідного сигналу: ступеневий/синусоїда/випадковий = 1/2/3

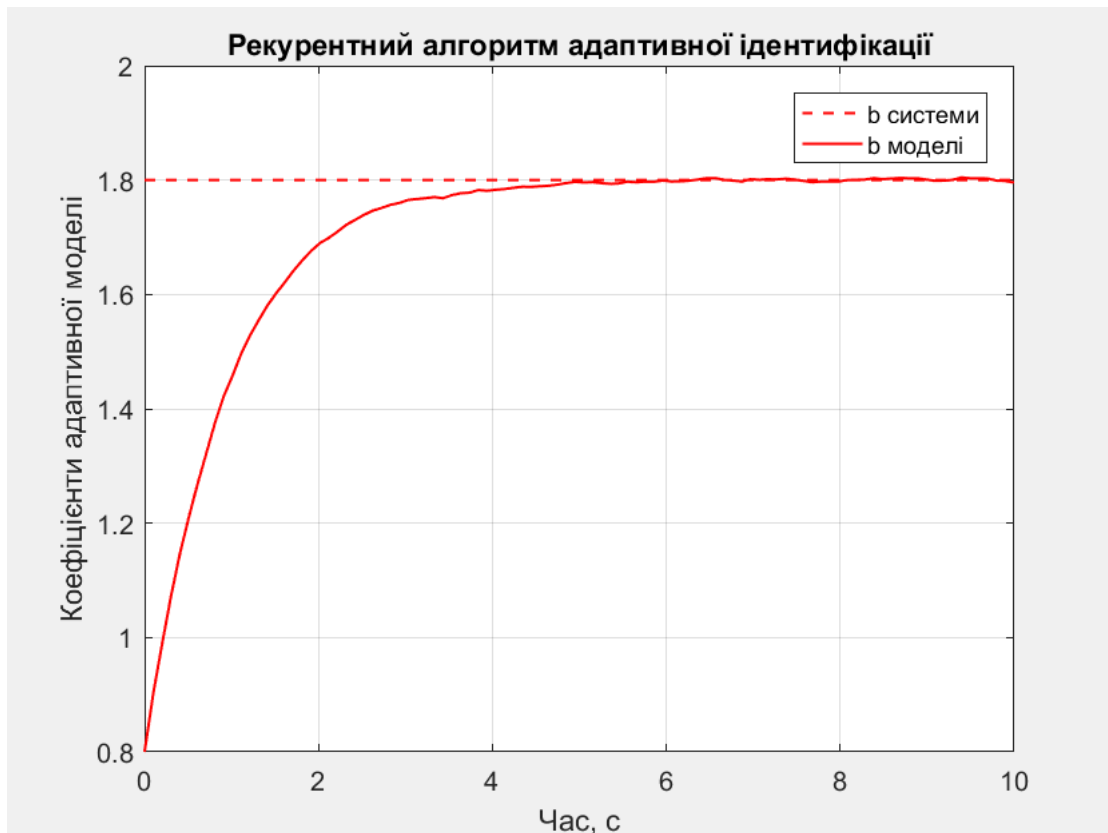
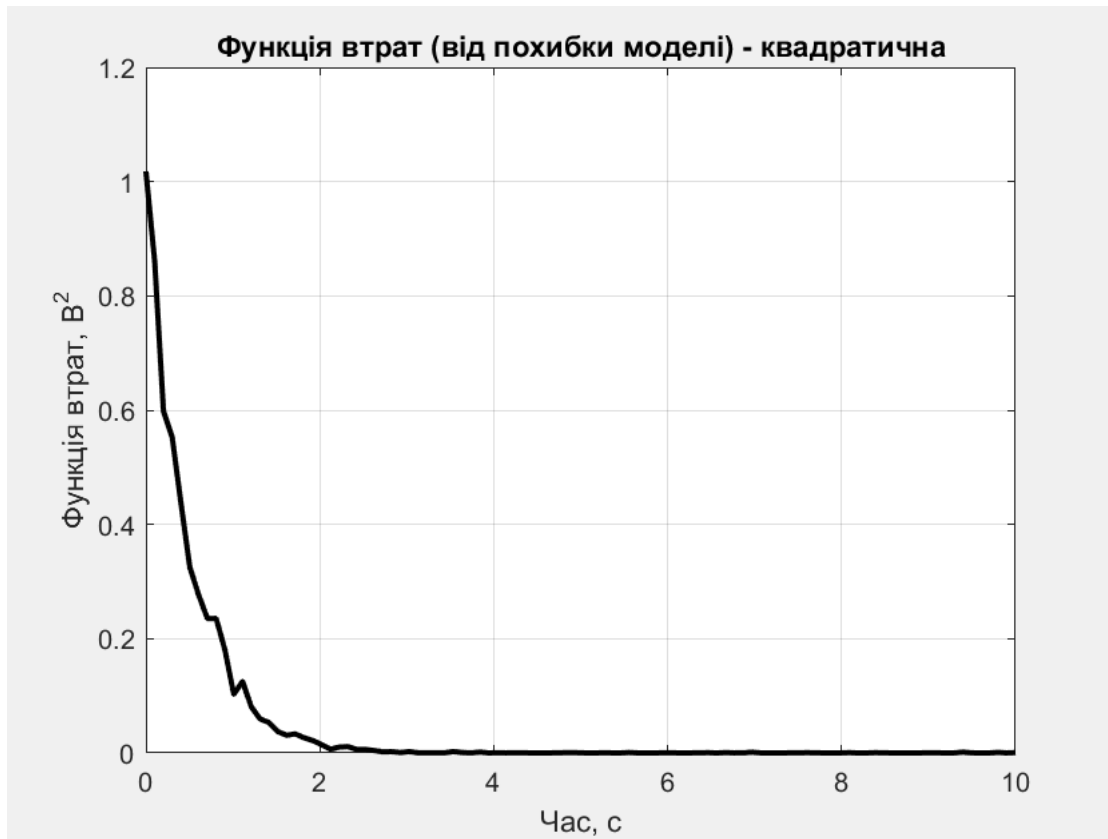
```

```

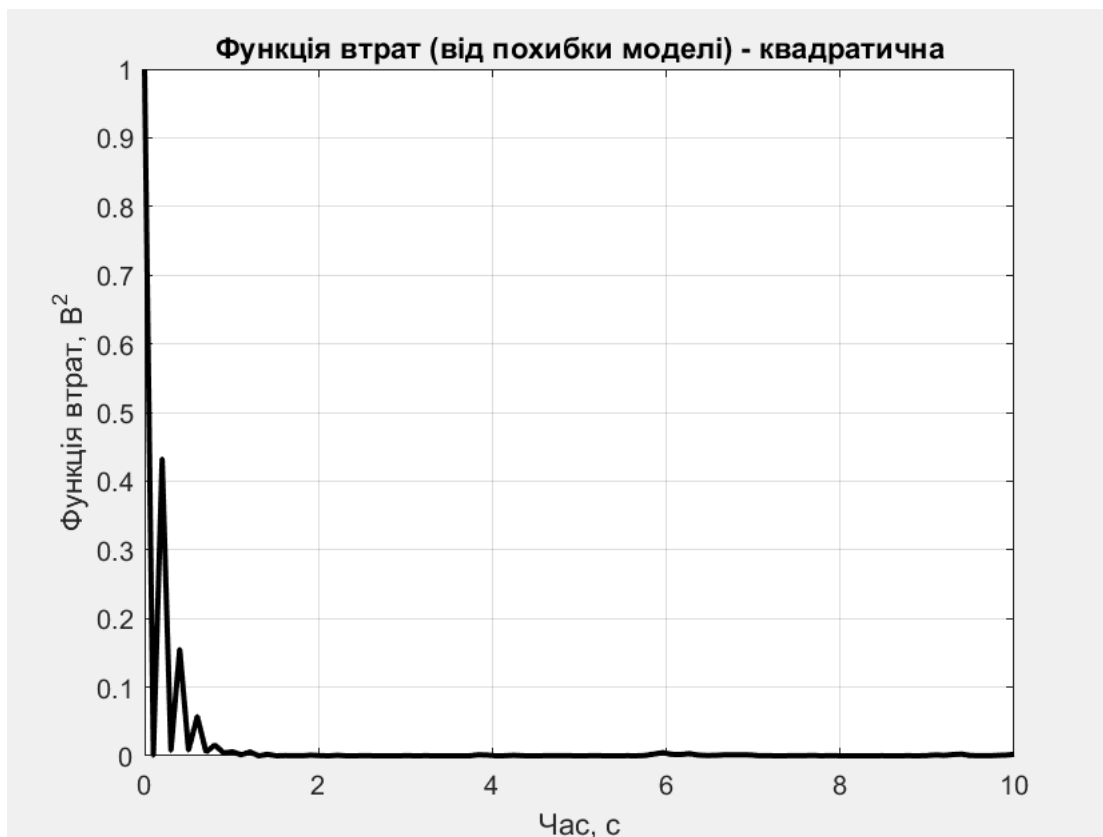
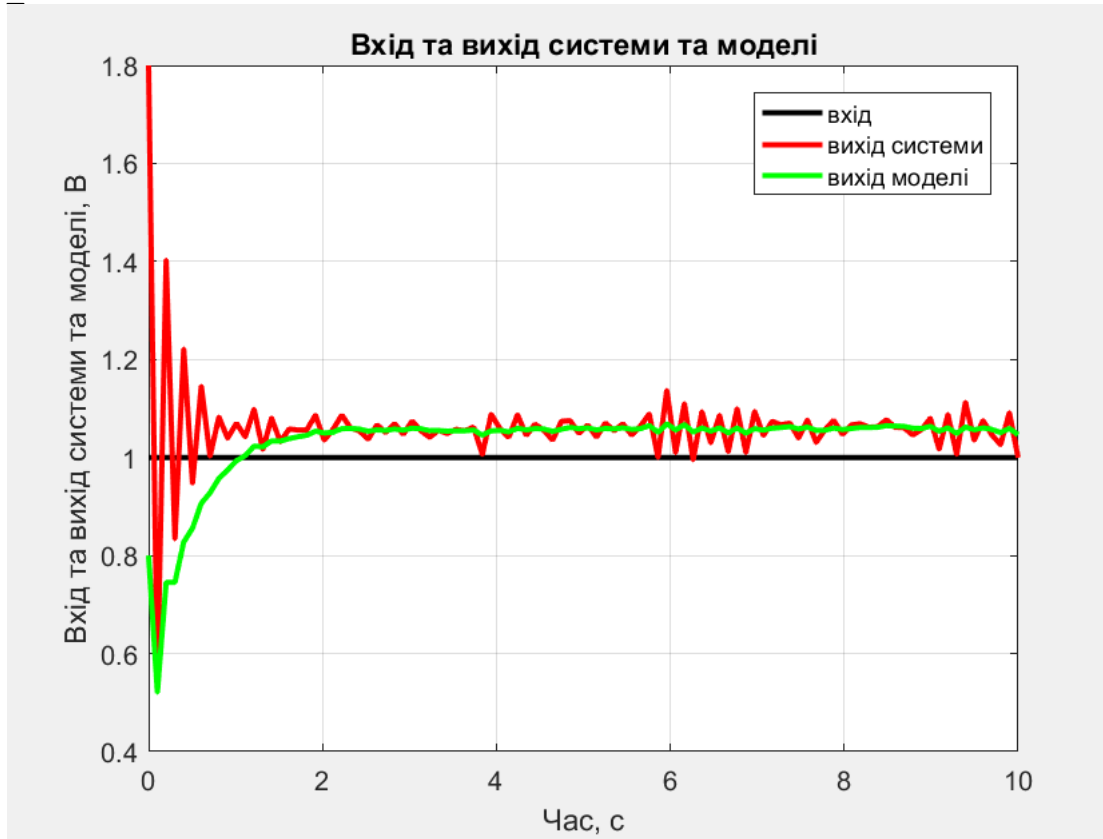
Type_x=1;
% Амплітуда вхідного сигналу системи, В
A_x=1;
% Частота вхідного сигналу системи, Гц
f_x=0.5;
% Час спостереження за системою, с
T_ident=10;
% Кількість відліків та кроків рекурентного алгоритму на інтервалі
спостереження
N_rec=100;
% Кількість кроків ітераційного алгоритму
N_it=50;
% Коефіцієнти різницевого рівняння системи
as=0.7; bs=1.8;
% Початкові значення коефіцієнтів різницевого рівняння моделі
am0=0.6; bm0=0.8;
% Коефіцієнт підсилення алгоритму адаптивної ідентифікації
gamma_a=0.05; gamma_b=0.05;

```

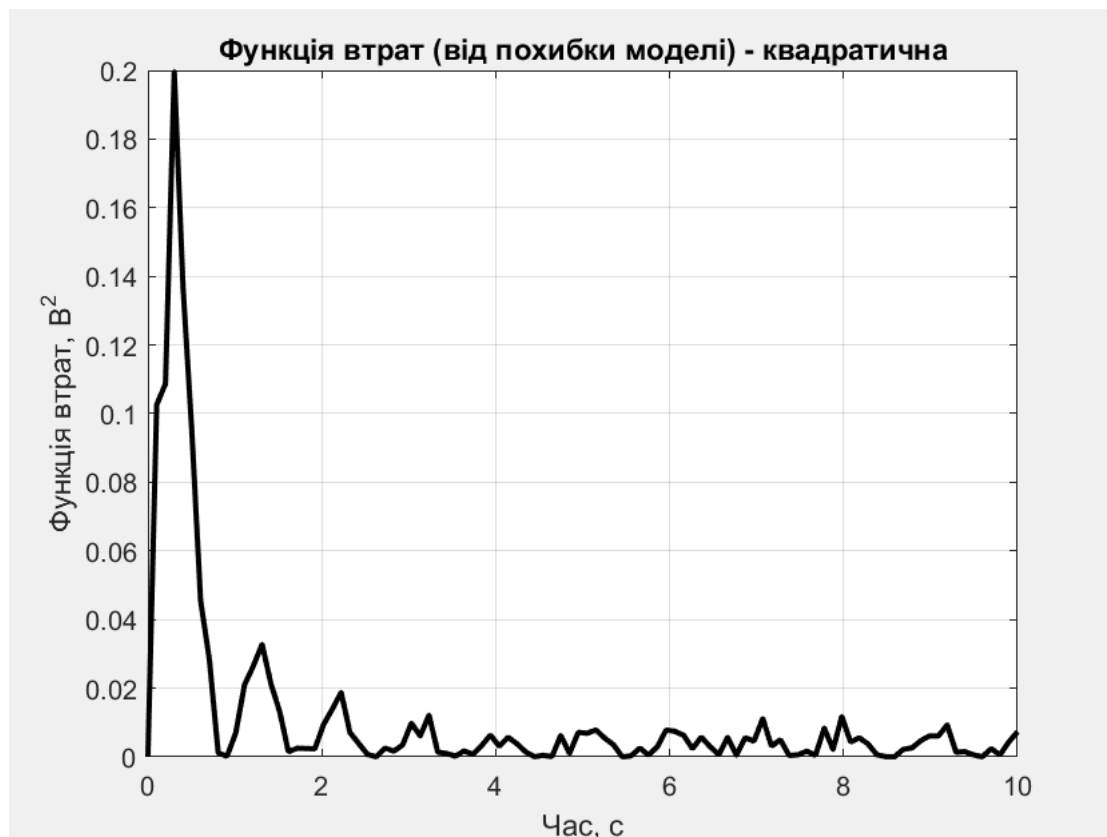
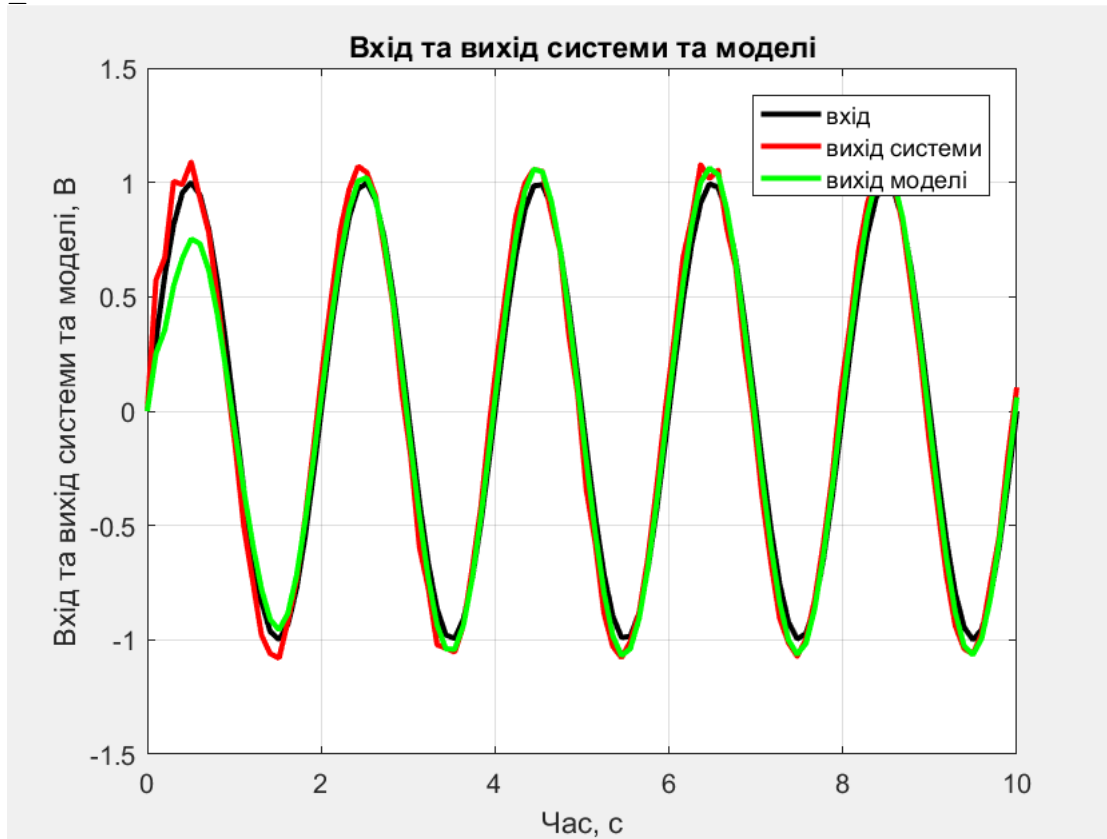




```
% Система: регресійна/регресійно-авторегресійна = 1/2
Type_system=2;
% Тип вхідного сигналу: степеневий/синусоїда/випадковий = 1/2/3
Type_x=1;
```



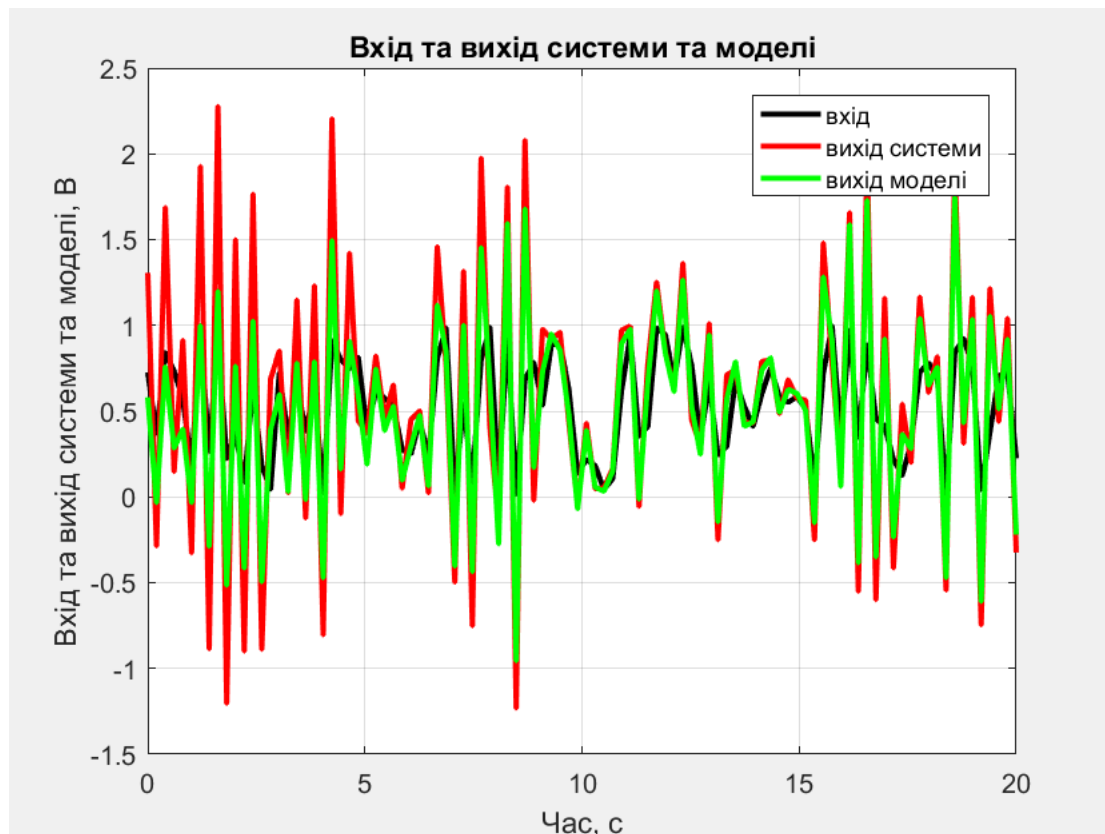
```
% Система: регресійна/регресійно-авторегресійна = 1/2
Type_system=2;
% Тип вхідного сигналу: степеневий/синусоїда/випадковий = 1/2/3
Type_x=2;
```

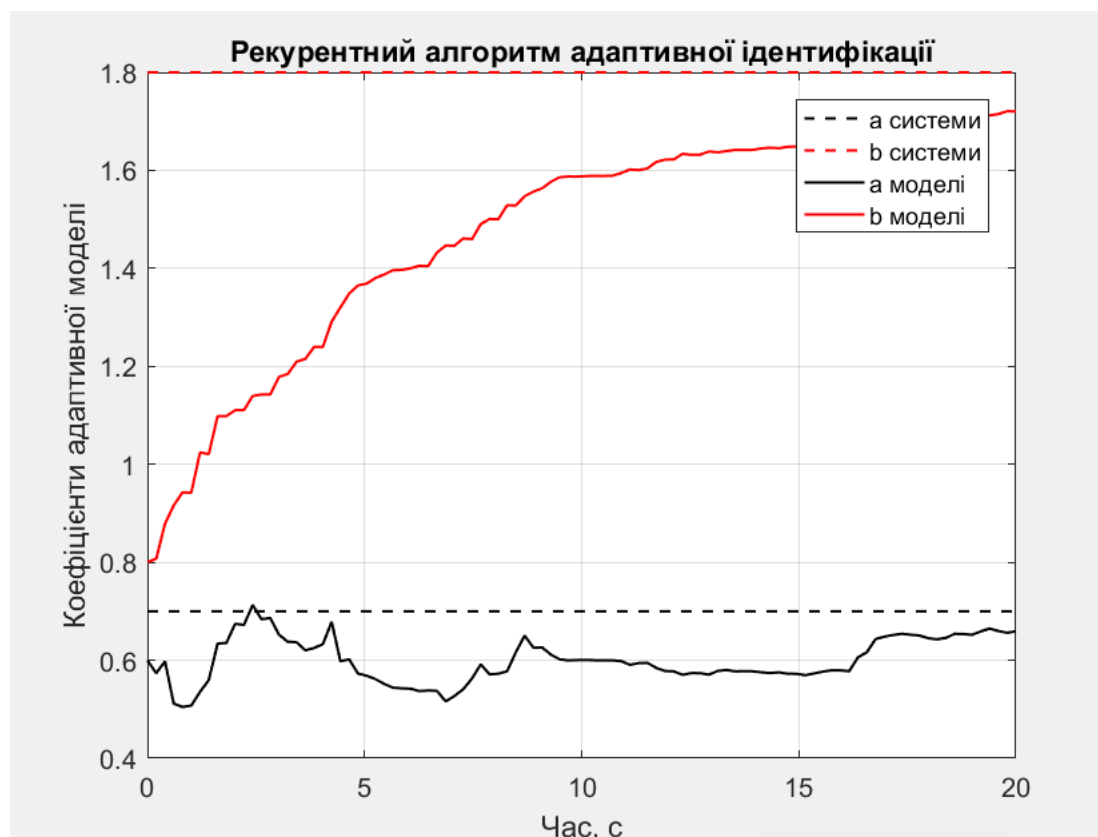
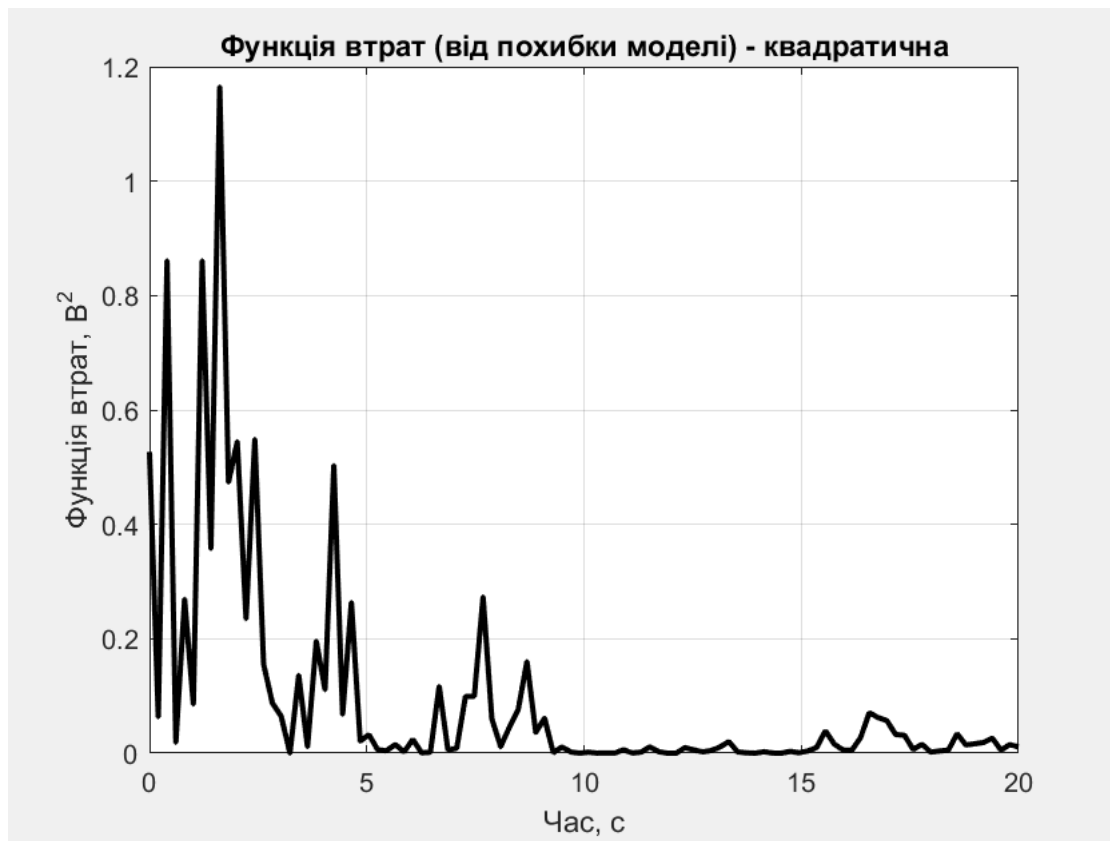


```

% --- Початкові дані ---
clear variables;
% Система: регресійна/регресійно-авторегресійна = 1/2
Type_system=2;
% Алгоритм адаптивної ідентифікації: рекурентний/ітераційний = 1/2
Type_ident=1;
% Функція втрат: порогова/лінійна/квадратична = 1/2/3
Type_fdelta=3;
% Порог функції втрат, В
E0=0.1;
% Похибка вимірювань виходу системи, В
Delta_y=0.05;
% Тип вхідного сигналу: степеневий/синусоїда/випадковий = 1/2/3
Type_x=3;
% Амплітуда вхідного сигналу системи, В
A_x=1;
% Частота вхідного сигналу системи, Гц
f_x=0.5;
% Час спостереження за системою, с
T_ident=20;
% Кількість відліків та кроків рекурентного алгоритму на інтервалі спостереження
N_rec=100;
% Кількість кроків ітераційного алгоритму
N_it=50;
% Коефіцієнти різницевого рівняння системи
as=0.7; bs=1.8;
% Початкові значення коефіцієнтів різницевого рівняння моделі
am0=0.6; bm0=0.8;
% Коефіцієнт підсилення алгоритму адаптивної ідентифікації
gamma_a=0.05; gamma_b=0.05;

```

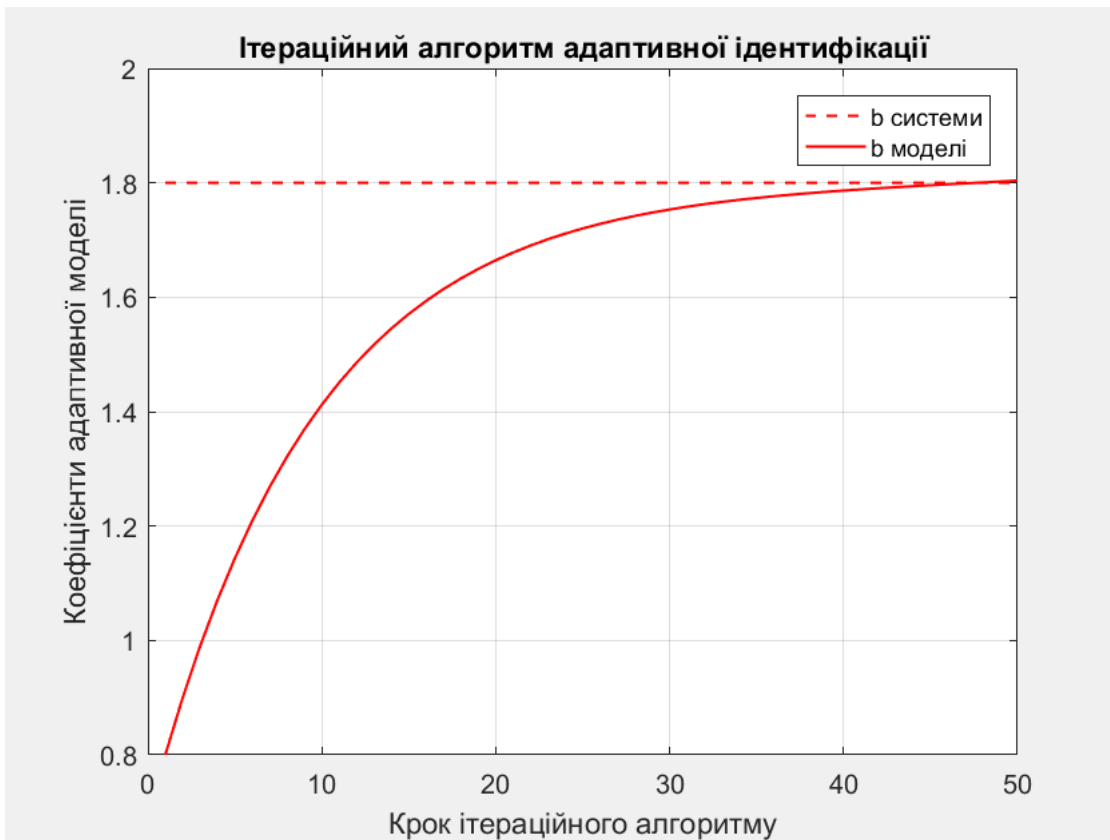
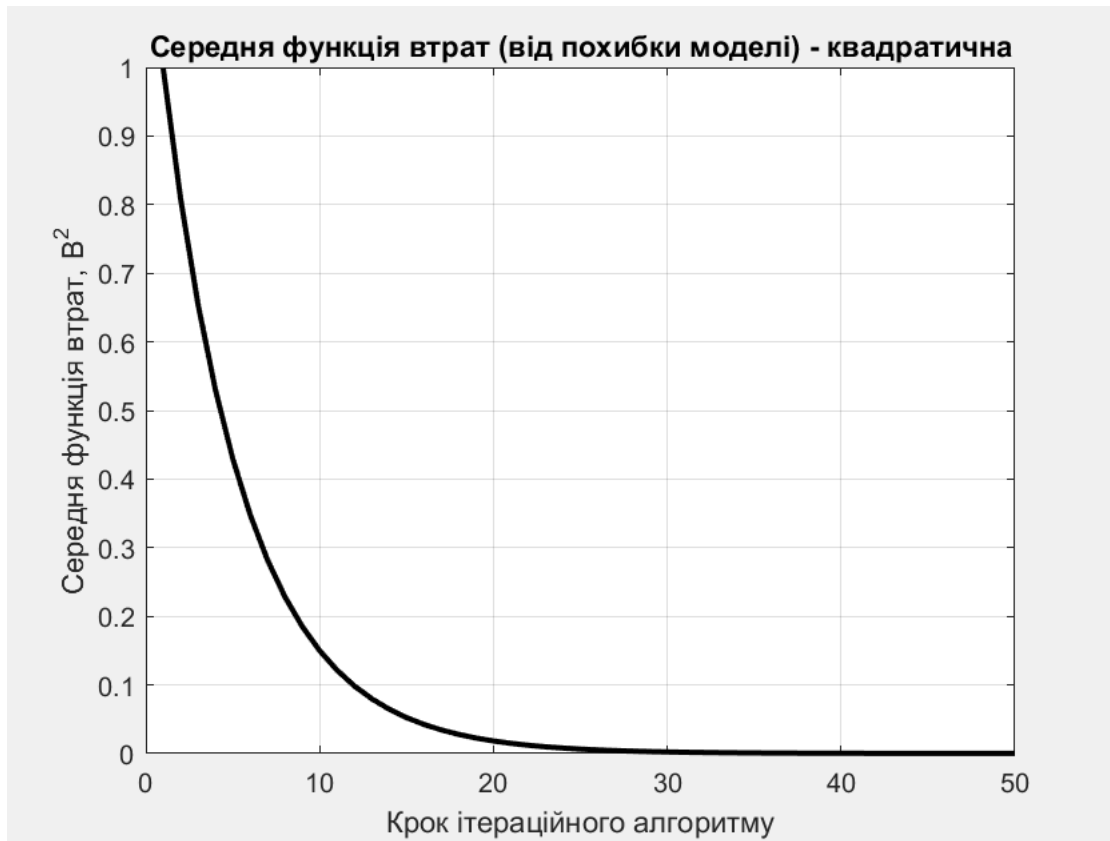




8.3.3. Результати адаптивної ідентифікації за ітераційним алгоритмом

```
% --- Початкові дані ---
clear variables;
% Система: регресійна/регресійно-авторегресійна = 1/2
Type_system=1;
% Алгоритм адаптивної ідентифікації: рекурентний/ітераційний = 1/2
Type_ident=2;
% Функція втрат: порогова/лінійна/квадратична = 1/2/3
Type_fdelta=3;
% Порог функції втрат, В
E0=0.1;
% Похибка вимірювань виходу системи, В
Delta_y=0.05;
% Тип вхідного сигналу: степеневий/синусоїда/випадковий = 1/2/3
Type_x=1;
% Амплітуда вхідного сигналу системи, В
A_x=1;
% Частота вхідного сигналу системи, Гц
f_x=0.5;
% Час спостереження за системою, с
T_ident=20;
% Кількість відліків та кроків рекурентного алгоритму на інтервалі спостереження
N_rec=100;
% Кількість кроків ітераційного алгоритму
N_it=50;
% Коефіцієнти різницевого рівняння системи
as=0.7; bs=1.8;
% Початкові значення коефіцієнтів різницевого рівняння моделі
am0=0.6; bm0=0.8;
% Коефіцієнт підсилення алгоритму адаптивної ідентифікації
gamma_a=0.05; gamma_b=0.05;
```

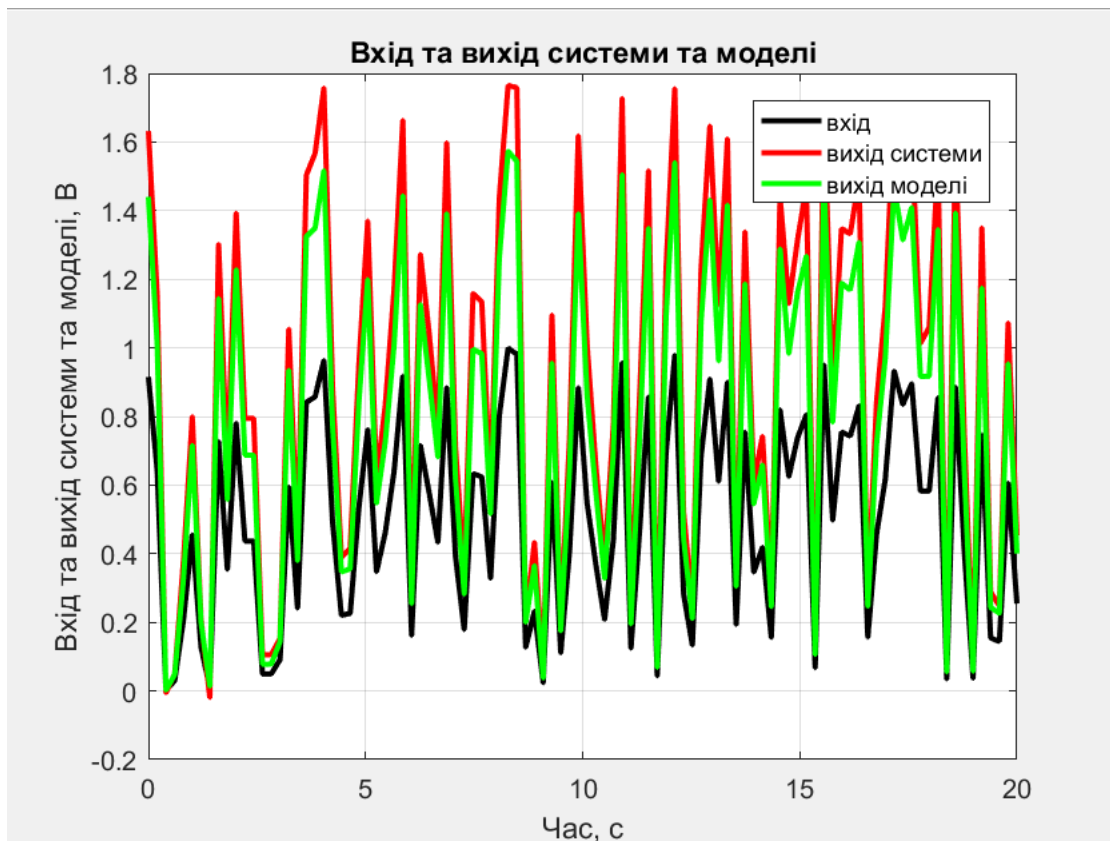


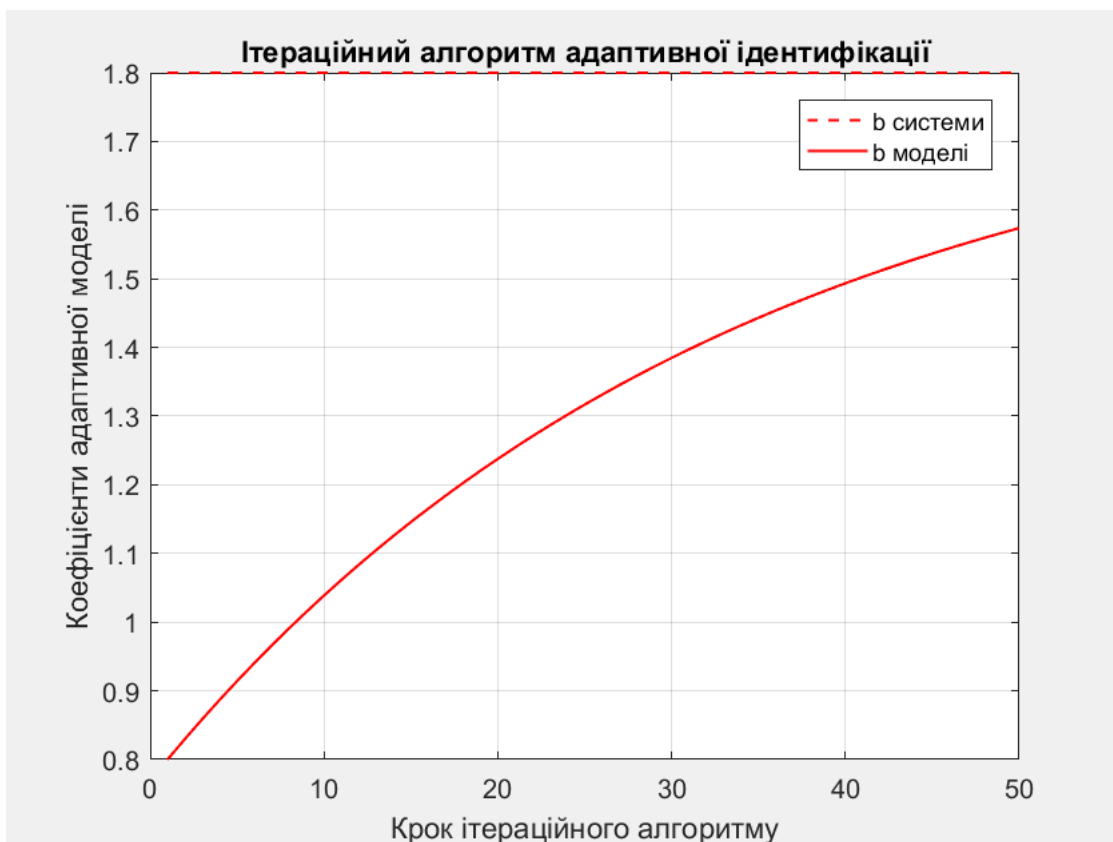
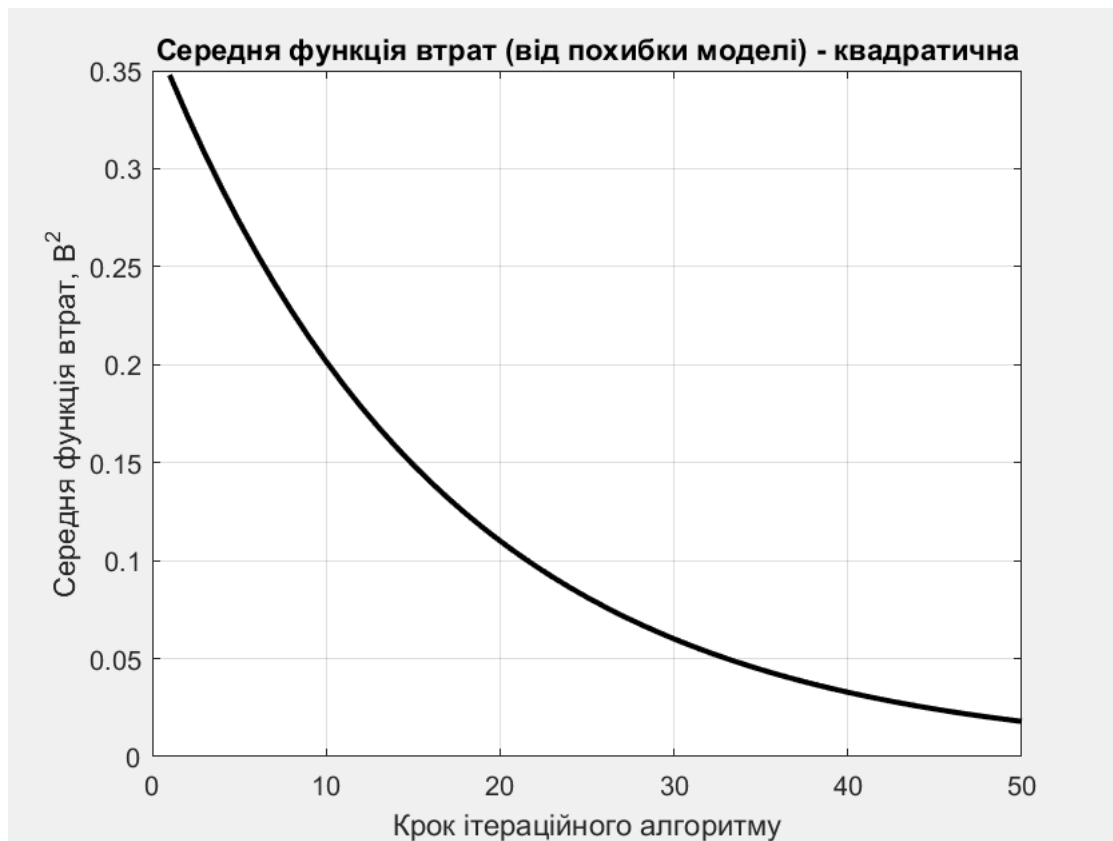


```

% --- Початкові дані ---
clear variables;
% Система: регресійна/регресійно-авторегресійна = 1/2
Type_system=1;
% Алгоритм адаптивної ідентифікації: рекурентний/ітераційний = 1/2
Type_ident=2;
% Функція втрат: порогова/лінійна/квадратична = 1/2/3
Type_fdelta=3;
% Порог функції втрат, В
E0=0.1;
% Похибка вимірювань виходу системи, В
Delta_y=0.05;
% Тип вхідного сигналу: степеневий/синусоїда/випадковий = 1/2/3
Type_x=3;
% Амплітуда вхідного сигналу системи, В
A_x=1;
% Частота вхідного сигналу системи, Гц
f_x=0.5;
% Час спостереження за системою, с
T_ident=20;
% Кількість відліків та кроків рекурентного алгоритму на інтервалі спостереження
N_rec=100;
% Кількість кроків ітераційного алгоритму
N_it=50;
% Коефіцієнти різницевого рівняння системи
as=0.7; bs=1.8;
% Початкові значення коефіцієнтів різницевого рівняння моделі
am0=0.6; bm0=0.8;
% Коефіцієнт підсилення алгоритму адаптивної ідентифікації
gamma_a=0.05; gamma_b=0.05;

```





9. ЗАСТОСУВАННЯ ФІЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПОТОЧНИХ КООРДИНАТ ТА ПАРАМЕТРІВ РУХУ ОБ'ЄКТІВ ВИМІРЮВАНЬ

9.1. Основні відомості з теорії Калмановської оптимальної фільтрації

Проблема оптимальної фільтрації виникла на початку 40-х років у зв'язку з підвищенням вимог до точності сигналів керування.

Спочатку вона розв'язувалась шляхом побудови фільтрів А.Н. Колмогорова для дискретних випадкових сигналів і Н.Вінера – для неперервних стаціонарних випадкових процесів. При цьому структура фільтра визначалась в результаті розв'язання інтегрального рівняння Вінера-Хопфа для стаціонарних режимів роботи об'єкта, що значно обмежувало можливості застосування.

Теорія лінійної оптимальної фільтрації, розроблена Калманом і Бьюсі в 1960 році, дозволяє визначити структуру фільтра в часовому просторі, використовуючи концепцію “простору стану”.

Успіхи цієї теорії у порівнянні з ідеями вінеровської фільтрації пояснюються тим, що структуру оптимального фільтра одержуємо в результаті розв'язання звичайних диференційних рівнянь, що спростило інженерні розробки, а також тим, що з'явилась можливість одержання рекурентної системи алгоритмів оптимізації структури фільтра, зручних для реалізації на ЦОМ.

Методи фільтра Калмана легко поширюються на задачі визначення недоступних безпосередньому вимірюванню координат об'єкта, що дозволяє одержати їх оптимальну оцінку в умовах дії перешкод.

Розглянемо структурну схему (рис. 9.1), де

ОУ – об'єкт управління;

ФК – фільтр Калмана.

Задача полягає в побудові такого фільтра Калмана, який відновлював би вектор стану об'єкта x з максимальною точністю. Фізично задача фільтрації полягає, по можливості, в найбільш повному подоланні перешкод вимірювання $v(t)$.

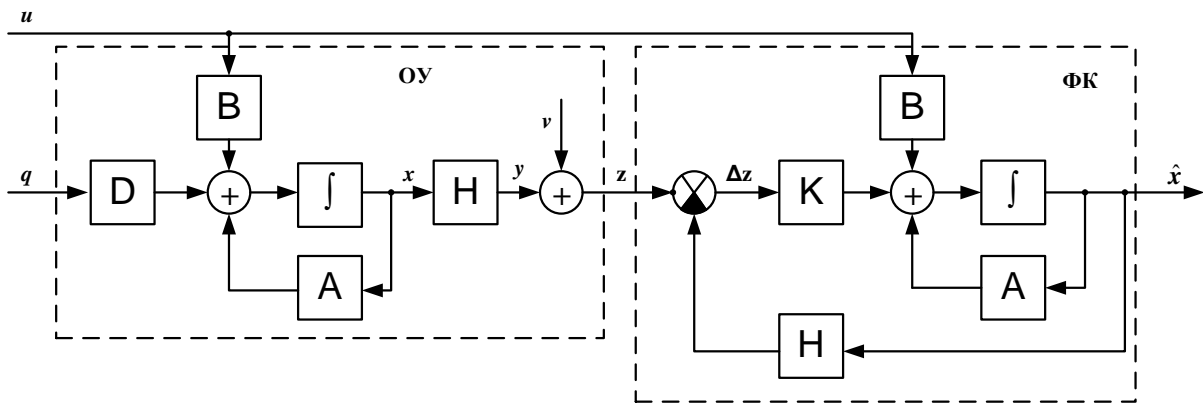


Рис.9.1. Структурна схема отримання оцінок координат ОУ

9.2. Оптимальне послідовне оцінювання параметрів незбурюваної детермінованої траєкторії руху об'єктів вимірювань

Нехай вимірюється послідовність значень параметрів, що має вигляд

$$U_i = H v_i + \Delta U_i, \quad (9.1)$$

де U_i - l -мірний вектор координат об'єкта управління, що спостерігаються; v_i - $(s \times l)$ -мірний вектор параметрів траєкторії руху, що оцінюється; H - матриця розмірності $(l \times s)$, що встановлює однозначну відповідність між оцінюваними параметрами та координатами вимірювання; ΔU_i - l -мірний вектор помилок вимірювання координат; послідовність цих векторів вважається некорельованою випадковою послідовністю з математичним очікуванням, що дорівнює нулю, та з відомою кореляційною матрицею.

Вважається також, що між попередніми і наступними значеннями параметрів є однозначний зв'язок, так що значення параметрів в двох сусідніх процедурах вимірювання пов'язані співвідношенням

$$v_{i+1} = F v_i, \quad (9.2)$$

де F – матриця, розмірності $s \times s$.

Задача оцінювання полягає в отриманні рекурентних виразів для оцінки значень параметрів руху ОУ за результатами вимірювань з похибками.

9.3. Формульна схема оптимального алгоритму послідовного оцінювання векторного параметру руху об'єктів вимірювань

Як відомо із загальної теорії фільтрації, найкращий шлях рішення задачі послідовного оцінювання та згладжування параметрів складається в визначенні апостеріорної ймовірності фільтруємих параметрів, так як вона містить всю інформацію, що отримана з апріорних джерел та результатів вимірювань. Знаючи апостеріорну щільність ймовірності, можна отримати

різні оцінки цікавлячих нас параметрів, в тому числі оцінки, що відповідає максимуму функції апостеріорної щільності. Останні, як відомо, називається оцінками, оптимальними по критерію максимуму апостеріорної ймовірності. Саме в цьому сенсі і розуміється оптимальна фільтрація в подальшому. Розглянемо в загальному вигляді задачу послідовного оцінювання та згладжування вектора параметрів траєкторії руху ОУ. При поліноміальному представленні траєкторії складовими цього вектору ϵ : координати, швидкість зміни координат, прискорення по координатам тощо.

Вектор згладжених параметрів будемо позначати через \hat{v}_n з індексом n , що вказує його прив'язку до часу t_n . Порядок розташування складових вектору: координата, швидкість, прискорення ОУ. Одночасно з послідовним уточненням вектору оцінюваних параметрів будемо формувати також послідовну кореляційну матрицю помилок оцінки цих параметрів. Матриця Ψ_n визначає точнісні характеристики згадуваних параметрів на момент часу t_n та має розмірність $s \times s$.

Отже, нехай отримано згладжене значення \hat{v}_{n-1} вектора параметрів \hat{v}_{n-1} траєкторії цілі за результатами $n-1$ попередніх вимірювань її координат. Розподіл вектора \hat{v}_{n-1} приймається нормальним з математичним очікуванням v_{n-1} та кореляційною матрицею Ψ_{n-1} .

Вектор параметрів v_{n-1} екстраполюється на момент наступного (n -го) вимірювання. Екстрапольоване значення вектору параметрів обчислюється у відповідності із співвідношенням

$$\hat{v}_{ne} = F_e \hat{v}_{n-1}, \quad (9.3)$$

де F_e – відомий оператор екстраполяції параметрів. Конкретний вид оператора F_e визначається моделлю траєкторії руху ОУ.

Нехай, наприклад, вектор оцінюваних параметрів траєкторії в момент часу t_{n-1} має вигляд

$$\hat{v}_{n-1} = \left\| \hat{r}_{n-1}, \hat{\dot{r}}_{n-1}, \hat{\ddot{r}}_{n-1} \right\|^T, \quad (9.4)$$

що відповідає представленню окремо взятої координати ОУ у вигляді поліному другого ступеня.

В цьому випадку оператор екстраполяції параметрів на час $\tau_{\hat{a}} = (t_n - t_{n-1})$ має вигляд

$$F_e = \begin{vmatrix} 1 & \tau_{\dot{a}} & \frac{\tau_{\dot{a}}^2}{2} \\ 0 & 1 & \tau_{\dot{a}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (9.5)$$

Тоді вираз (9.3) записується у вигляді

$$\hat{v}_{ne} = \begin{vmatrix} \hat{r}_{ne} \\ \hat{r}_{ne} \\ \hat{r}_{ne} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \tau_e & \frac{\tau_e^2}{2} \\ 0 & 1 & \tau_e \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{r}_{n-1} \\ \hat{r}_{n-1} \\ \hat{r}_{n-1} \end{vmatrix} \quad (9.6)$$

Кореляційна матриця Ψ_{n-1} помилок оцінки параметрів руху по результатам $(n-1)$ попередніх вимірювань також перераховується (екстраполюється) на момент наступного вимірювання, тобто на час τ_e .

Матричний оператор перерахунку кореляційної матриці помилок оцінки параметрів до моменту часу чергового вимірювання координат зазвичай співпадає з оператором F_e . Однак у деяких, практично важливих випадках, цей оператор може відрізнитись від F_e , тому для нього вводиться позначення Φ .

Матриця помилок оцінки екстрапольованих параметрів обчислюється наступним чином. Відповідно до формули (9.3) для вектору помилок екстраполяції параметрів в n -м огляді можна записати

$$\Delta v_{ne} = \hat{O} \Delta \hat{v}_{n-1}. \quad (9.7)$$

За визначенням,

$$\Psi_{ne} = M [\Delta \hat{v}_{ne} \Delta \hat{v}_{ne}^T], \quad (9.8)$$

де M – знак математичного очікування.

Маючи на увазі, що

$$\Delta \hat{v}_{ne}^T = \Delta \hat{v}_{n-1}^T \Phi^T, \quad (9.9)$$

отримуємо

$$\Psi_{ne} = \hat{O} \cdot M [\Delta \hat{v}_{n-1} \Delta \hat{v}_{n-1}^{\dot{O}}] \hat{O}^{\dot{O}}. \quad (9.10)$$

Замінюючи

$$M [\Delta \hat{v}_{n-1} \Delta \hat{v}_{n-1}^{\dot{O}}] = \Psi_{n-1} \quad (9.11)$$

отримуємо остаточно

$$\Psi_{ne} = \hat{O} \Psi_{n-1} \hat{O}^{\dot{O}}. \quad (9.12)$$

З урахуванням припущення про лінійність оператора екстраполяції, закон розподілу вектору екстрапольованих параметрів буде нормальним. У векторно-матричній формі відповідна щільність ймовірності записується наступним чином:

$$\omega(\hat{v}_{ne}) = C_1 \exp \left[-\frac{1}{2} (\hat{v}_{ne} - v_n)^\Delta \Psi_{ne}^{-1} (\hat{v}_{ne} - v_n) \right], \quad (9.13)$$

де \hat{v}_n – вектор істинних значень параметрів у момент t_n . Щільність ймовірності (9.13) є апіорної щільністю ймовірності для вектору оцінюваних параметрів перед черговим (n -м) вимірюванням.

У момент часу t_n проводиться черговий вимір поточних координат ОУ. Вектор вимірюваних значень координат позначається через U_n . У загальному випадку $U_n = \|r_n, \beta_n, \varepsilon_n\|^\Delta$.

Передбачається, що помилки вимірювання координат підпорядковані нормальному закону розподілу і некорельовані в суміжних вимірюваннях. Тому умовна щільність ймовірності вибірки вимірюваних значень координат має вигляд

$$\omega(U_n | v_n) = C_2 \exp \left[-\frac{1}{2} (U_n - H v_n)^\Delta \Xi^{-1} (U_n - H v_n) \right], \quad (9.14)$$

де Ξ^{-1} – зворотна кореляційна матриця помилок вимірювання, яка внаслідок незалежності вимірюваних координат має вигляд

$$\Xi^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} 1/\sigma_{r_n}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{\beta_n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_{\varepsilon_n}^2 \end{array} \right\|; \quad (9.15)$$

H – лінійний оператор відповідності оцінюваних параметрів і вимірюваних координат.

Наприклад, якщо вимірюються координати r_n, β_n і ε_n , а оцінюються параметри $\hat{r}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\varepsilon}_n$, то оператор H має вигляд прямокутної матриці порядку 3×6 :

$$H = \begin{array}{c} \hat{r}_n \quad \hat{\beta}_n \quad \hat{\varepsilon}_n \\ \left\| \begin{array}{cccccc} r_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_n & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|. \end{array} \quad (9.16)$$

Добуток Hv_n у формулі (9.14) представляє собою вектор істинних значень вимірюваних координат у момент часу t_n .

Внаслідок відсутності кореляції помилок вимірювання апостеріорний розподіл для вектора оцінок параметрів після n -го вимірювання координат визначається по формулі Байеса

$$\omega(\hat{v}_n | U_n) = C_3 \omega(\hat{v}_{ne}) \omega(U_n | v_n), \quad (9.17)$$

де C_3 - нормуючий множник, визначаючий масштаб ламаної $\omega(\hat{v}_n | U_n)$ таким чином, щоб площа під цією ламаною була рівна одиниці.

Внаслідок нормальності складових розподілів апостеріорний розподіл (9.17) є нормальним. Відповідна щільність ймовірності записується у вигляді

$$\omega(\hat{v}_n | U_n) = C_4 \exp \left[-\frac{1}{2} (\hat{v}_n - v_n)^\Delta \Psi_n^{-1} (\hat{v}_n - v_n) \right] \quad (9.18)$$

де \hat{v}_n - вектор згладжених параметрів за результатами n вимірювань координат; Ψ_n - матриця помилок оцінки згладжених параметрів.

Для нормального розподілу $\max \omega(\hat{v}_n | U_n)$ співпадає з математичним очікуванням вектору оцінюваних параметрів. З цього випливає, що задача оцінки параметрів по максимуму апостеріорної ймовірності зводиться у нашому випадку до знаходження параметрів \hat{v}_n і Ψ_n , у виразі (79.15).

Використовуючи вирази (9.13), (9.14) та (9.18) для щільності ймовірності, що входить в формулу (5.17), після логарифмування отримуємо:

$$\begin{aligned} (\hat{v}_n - v_n)^\Delta \Psi_n^{-1} (\hat{v}_n - v_n) &= (\hat{v}_{ne} - v_n)^\Delta \Psi_{ne}^{-1} (\hat{v}_{ne} - v_n) + \\ &+ (U_n - H v_n)^\Delta \Xi^{-1} (U_n - H v_n) + const \end{aligned} \quad (9.19)$$

Останнє рівняння є вихідним для знаходження вектору \hat{v}_n та матриці Ψ_n . Так, виділення доданків, що представляють собою квадратичні форми для вектора \hat{v}_n , дає

$$v_n^\Delta \Psi_n^{-1} v_n = v_n^\Delta \Psi_{ne}^{-1} v_n + v_n^\Delta H_n^\Delta \Xi^{-1} \hat{v}_n \quad (9.20)$$

З цього рівняння отримуємо

$$\Psi_n^{-1} = \Psi_{ne}^{-1} H^\Delta \Xi^{-1} H \quad (9.21)$$

Операції обчислення матриць у виразі (9.21) призводять до наступного остаточного результату:

$$\Psi_n = \Psi_{ne} - \Psi_{ne} H^\Delta (H \Psi_{ne} H^\Delta + \Xi)^{-1} \hat{v}_n \quad (9.22)$$

Порівнюючи в рівнянні (9.19) квадратичні форми, що містяться ліворуч, отримуємо:

$$v_n^\Delta \Psi_n^{-1} \hat{v}_n = v_n^\Delta \Psi_{ne}^{-1} \hat{v}_{ne} + v_n^\Delta H^\Delta \Xi^{-1} U_n. \quad (9.23)$$

З цього рівняння знаходимо

$$\hat{v}_n = \Psi_n [\Psi_{ne}^{-1} \hat{v}_{ne} + H^{\dot{\circ}} \Xi^{-1} U_n], \quad (9.24)$$

Після елементарних перетворень з урахуванням виразів (9.3) і (9.21) отримуємо остаточно:

$$\hat{v}_n = \hat{v}_{ne} + \Psi_n H^{\dot{\circ}} \Xi^{-1} (U_n - H \hat{v}_{ne}). \quad (9.25)$$

У відповідність з виразом (9.25) вектор згладжених значень параметрів за результатами n вимірювань координат отримуємо як суму вектора екстрапольованого на момент n -го вимірювання параметрів і зваженої з деяким коефіцієнтом згладжування неузгодженості між виміряними і екстрапольованими значеннями координат.

Нижче наведено основні співвідношення оптимального алгоритму послідовного оцінювання та згладжування параметрів траєкторії руху ОУ, що записані в порядку виконання обчислювальних операцій:

$$1) \hat{v}_{ne} = F_e \hat{v}_{n-1} \quad (9.26)$$

$$2) \Psi_{ne} = \Phi \Psi_{n-1} \Phi^{\dot{\circ}}$$

$$3) \Psi_n = \Psi_{ne} - \Psi_{ne} H^{\dot{\circ}} (H \Psi_{ne} H^{\dot{\circ}} + \Xi)^{-1} \dot{\circ} \Psi_{ne}$$

$$4) \hat{v}_n = \hat{v}_{ne} + \Psi_n H^{\dot{\circ}} \Xi^{-1} (U_n - H \hat{v}_{ne})$$

де U_{ne} - вектор екстрапольованих значень координат. Система рівнянь (9.26) фактично є рівнянням фільтра Калмана.

9.4. Програмна реалізація фільтра Калмана та приклад виконання лабораторної роботи

Для синтезу фільтра Калмана в програмі Matlab призначені наступні функції інструментального пакету Control System Toolbox:

- для неперервних систем:

$$[KEST, L, P] = KALMAN(SYS, QN, RN, NN)$$

$$[KEST, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn, sensors, known)$$

- для дискретних моделей:

$$[KEST, L, P, M, Z] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)$$

- для синтезу дискретного фільтра Калмана для безперервних систем:

$$[KEST, L, P, M, Z] = kalmz(sys, Qn, Rn, Nn)$$

Матриця оцінки параметрів фільтра Кальмана $KEST$ для безперервного або дискретного часу моделюється в просторі стану за моделлю SYS .

Наведемо приклад розрахунку фільтра Калмана для системи з передаточною функцією

$$W(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100},$$

та параметрами $Q = 0.1, R = 0.05$.

1. Розрахунок параметрів фільтра Калмана

```

>> Sys1=ss(tf(100,[1 1 100]))
a =
      x1      x2
x1      -1  -12.5
x2       8     0
b =
      u1  u2
x1     4   4
x2     0   0

c =
      x1      x2
y1       0  3.125
d =
      u1  u2
y1     0   0
Continuous-time model.
>> [A,B,C,D]=ssdata(Sys1)
A =
-1.0000  -12.5000
 8.0000     0
B =
 4
 0
C =
 0  3.1250
D =
 0
>> [A,B,C,D]=ssdata(Sys1)
A =
-1.0000  -12.5000
 8.0000     0
B =
 4
 0
C =
 0  3.1250
D =
 0
>> P=ss(A, [B B], C, [D D])%модельовання системи управління зі
спостерігачем
a =
      x1      x2
x1      -1  -12.5
x2       8     0
b =
      u1  u2
x1     4   4
x2     0   0
c =
      x1      x2

```

```

    y1      0  3.125
d =
      u1  u2
    y1  0  0
Continuous-time model.Continuous-time model.
>> Kest=kalman(P,1,0.01) %модельовання фільтра Калмана
a =
      x1_e  x2_e
    x1_e  -1 -20.26
    x2_e   8 -11.14
b =
      u1  y1
    x1_e  4  2.483
    x2_e  0  3.56
c =
      x1_e  x2_e
    y1_e   0  3.125
    x1_e   1   0
    x2_e   0   1
d =
      u1  y1
    y1_e  0  0
    x1_e  0  0
    x2_e  0  0
I/O groups:
Group name      I/O Channel(s)
KnownInput      I      1
Measurement     I      2
OutputEstimate  0      1
StateEstimate   0      2,3
Continuous-time model.

```

2. Входом системи управління є вектор U , точним виходом системи – Y , YN – вихід з шумом, оцінка виходу системи у фільтрі Калмана – YK . Нижче наведено фрагмент програми моделювання та отримані результати (рис. 9.2 – 9.3).

```

U=ones(1000,1); % входной сигнал единичное ступенчатое
воздействие 1000 отсчетов
T=linspace(0,10,1000)'; % вектор времени от 0 до 10 с
1000 отсчетов
Y=lsim(Sys1,U,T); % моделирование точного выхода
системы
YN=Y+0.05*randn(1000,1); % выход с шумом СКО 0.05
figure; plot(T,U,'-g',T,Y,'-b',T,YN,'-r'); grid on; %
график вх и вых сигнала системы

```

```

xlabel('Час, с'); ylabel('Амплітуда вихідного сигналу, Вт');
[A,B,C,D]=ssdata(Sys1); % добываем значения матриц
системы
P=ss(A, [B B], C, [D D]) % строим систему с
наблюдателем
Kest=kalman(P,0.1,0.05); % строим фильтр Калмана
YK=lsim(Kest,[U YN],T); % рассчитываем оценку выхода
системы в фильтре Калмана
figure; plot(T,U,'-g',T,Y,'-b',T,YN,'-r',T,YK(:,1),'-
c'); grid on; % график вх и вых сигнала системы
xlabel('Час, с');ylabel('Амплітуда вихідного сигналу,
Вт');

```

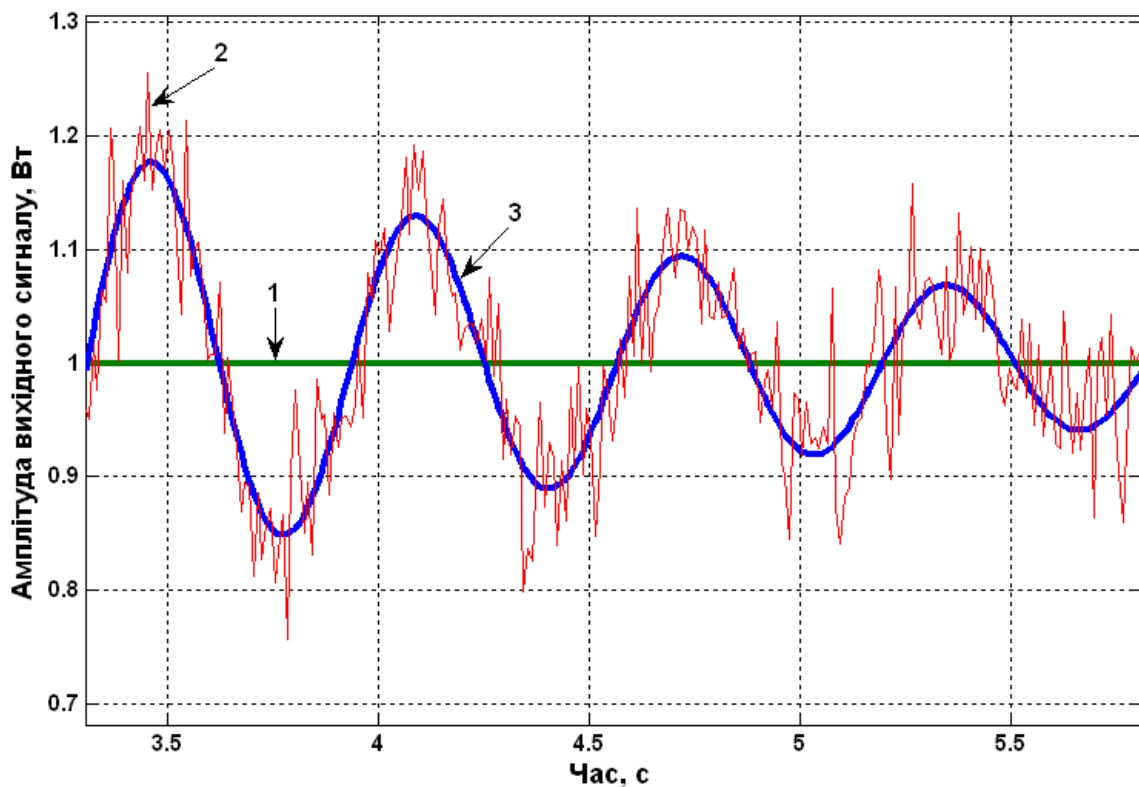


Рис. 9.2. Порівняння виміряного і точного значення вихідної координати системи управління: 1- вхідний сигнал (одиничний ступеневий вплив, 1000 відліків), 2- вихід з шумом, 3 - точний вихід системи.

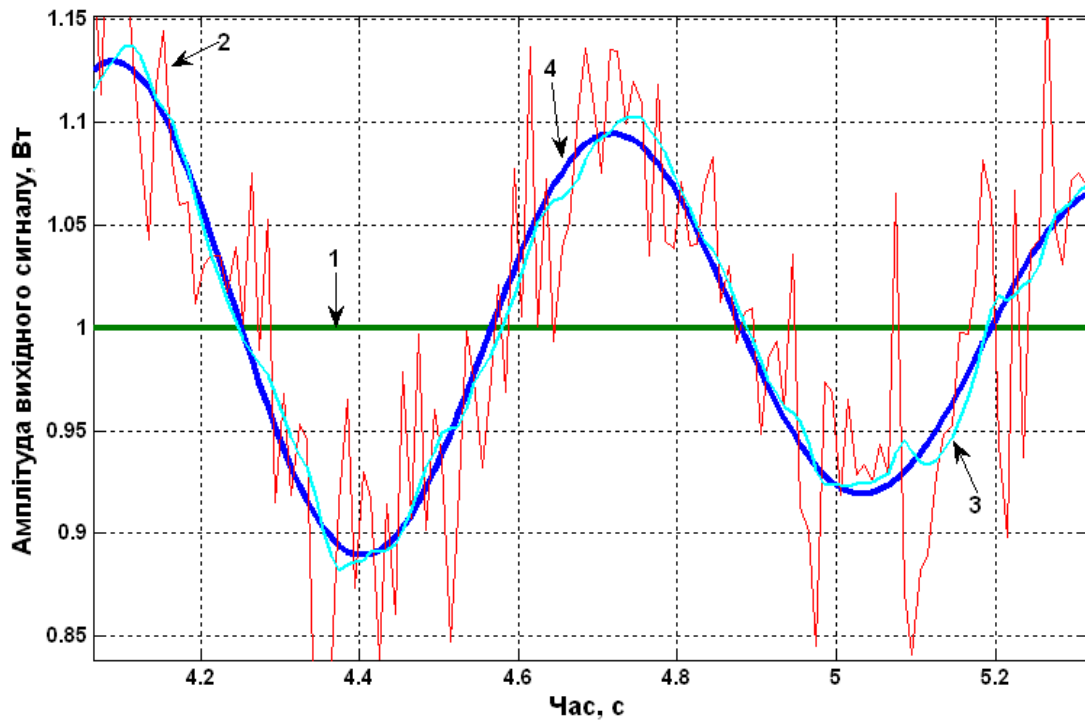


Рис. 9.3. Порівняння зашумленого і точного значення виходу системи, виміряного значення і результату оцінювання фільтром Калмана вихідної координати об'єкта системи управління: 1- вхідний сигнал (одичний ступеневий вплив, 1000 відліків), 2- вихід з шумом, 3 - оцінка виходу системи у фільтрі Калмана, 4 - точний вихід системи.

10. ЗАСТОСУВАННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПОТОЧНИХ КООРДИНАТ ОБ'ЄКТІВ УПРАВЛІННЯ

10.1. Основні відомості з теорії експоненційного згладжування

Метод експоненційного згладжування – це метод послідовного згладжування параметрів траєкторії руху ОУ за допомогою фільтра с постійною пам'яттю. Принцип роботи цього методу полягає в наступному: попередні значення параметрів враховуються зі спадаючим по експоненційному закону вагами.

Для довільного скалярного параметра θ формула експоненційного згладжування має вид:

$$\hat{\theta}_n = (1 - \xi)\theta_n + \xi f[\hat{\theta}_{n-1}, \hat{\theta}_{n-2}, \dots, \hat{\theta}_{n-s}] \quad (10.1)$$

де θ_n – вимірне значення параметра на n -кроці; $\hat{\theta}_n$ - згладжене значення параметра в n -м огляді; $f[\dots]$ - деяка функція попередніх згладжених значень параметрів; ξ – стала величина, що має сенс коефіцієнта згладжування.

У найпростішому вигляді для знаходження наступного загладжуваного значення параметру використовується тільки поточне вимірне значення та попереднє згладжене значення. Тоді, формула (10.1) приймає наступний вид:

$$\hat{\theta}_n = (1 - \xi)\theta_n + \xi\hat{\theta}_{n-1}. \quad (10.2)$$

Формулу (10.2) можна записати у вигляді:

$$\hat{\theta}_n = (1 - \xi)\theta_n + \xi(1 - \xi)\theta_{n-1} + \xi^2(1 - \xi)\theta_{n-2} + \dots + \xi^n(1 - \xi)\theta_0 = \sum_{i=0}^n \eta_i \theta_{n-i}, \quad (10.3)$$

де $\eta_i = \xi^i(1 - \xi)$ - вагова функція, що враховує поточне та попередні виміряні значення параметрів руху ОУ.

На рис. 10.1 зображені графіки вагової функції η_i при різних значеннях $\xi = 0,9; 0,5; 0,1$. З рисунку бачимо: чим менше ξ , тим в менший ступені враховуються результати попередніх вимірювань (менше згладжування), та навпаки, чим більше ξ , тим більше згладжування, тобто більше результати попередніх вимірювань параметра враховуються в більшій мірі при обчисленні згладженого поточного значення. Тому коефіцієнт ξ отримав назву експоненційного коефіцієнта згладжування.

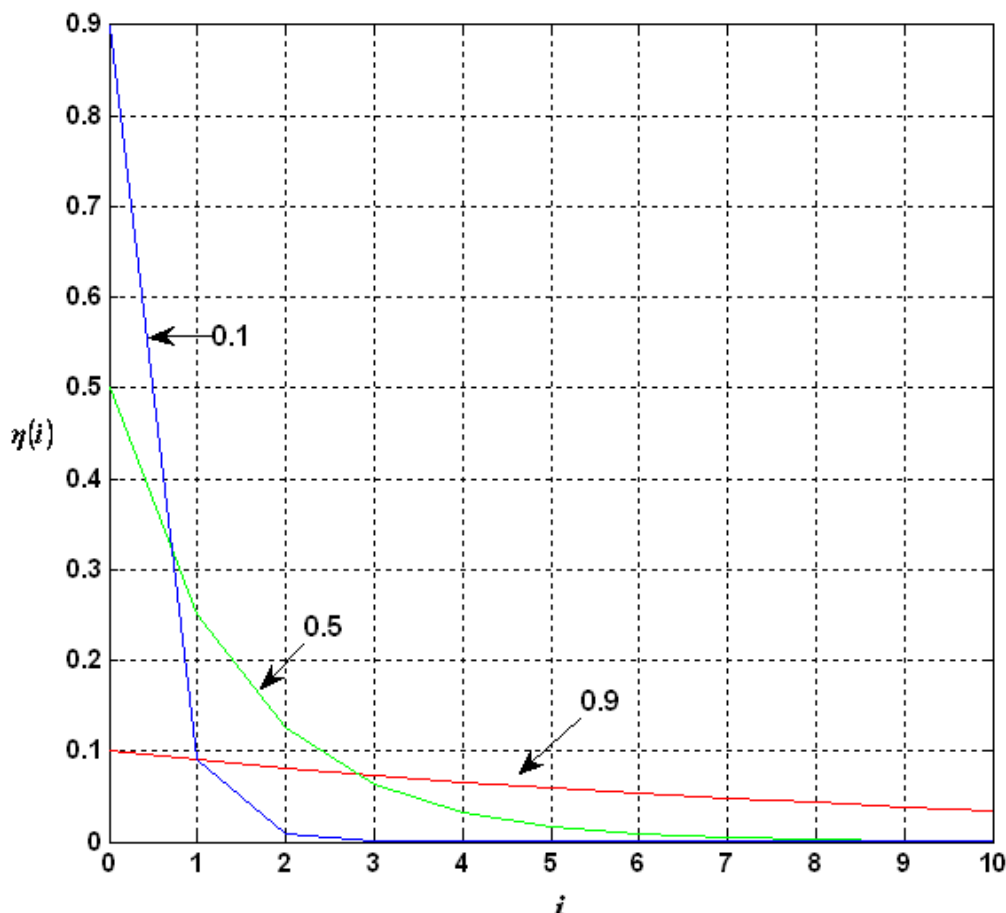


Рис. 10.1. Графіки вагової функції η_i при різних значеннях ξ

При згладжування параметру, що змінюється за лінійним законом формула експоненційного згладжування набуває вигляду:

$$\hat{\theta}_n = (1 - \xi)\theta_n + \xi f[\hat{\theta}_{n-1}, \hat{\theta}_{n-2}]. \quad (10.4)$$

Операція $f[\dots]$ над попередніми згладженими значеннями параметру повинна в цьому випадку забезпечити знаходження екстрапольованого значення параметра на момент t_n останнього вимірювання.

10.2. Помилки експоненційного згладжування параметрів руху об'єктів вимірювань. Вибір оптимального значення ξ

Якість експоненційного згладжування оцінюється за величиною випадкових та динамічних помилок згладжування. Миттєве значення сумарної помилки згладжування параметра запишемо у вигляді

$$\Delta \hat{\theta}_{\Sigma_n} = \hat{\theta}_n - \theta_n^{(0)}, \quad (10.5)$$

де $\theta_n^{(0)}$ – істинне значення параметра у момент часу t_n ;

$$\hat{\theta}_n = \sum_{i=0}^n \eta_i \theta_{n-i}, \quad (10.6)$$

де θ_{n-i} – результати вимірювання (розрахунку) параметрів, які представляють собою адитивну суміш дійсних значень $\theta_{n-i}^{(0)}$ і помилок вимірювання θ_{n-i} , тобто

$$\theta_{n-i} = \theta_{n-i}^{(0)} + \Delta\theta_{n-i}. \quad (10.7)$$

Використовуючи вирази (6) і (7), сумарну помилку згладжування параметра можна представити в наступному вигляді:

$$\Delta\theta_{n\Sigma} = \sum_{i=0}^n \eta_i (\theta_{n-i}^{(0)} + \Delta\theta_{n-i}) - \theta_n^{(0)} = \left(\sum_{i=0}^n \eta_i \theta_{n-i}^{(0)} + \Delta\theta_{n-i} \right) + \sum_{i=0}^n \eta_i \theta_{n-i}^{(0)}. \quad (10.8)$$

Перший доданок у виразі (10.8), що розміщений в дужках, являє собою динамічну складову $\Delta_{\hat{\theta}_n}$ сумарної помилки згладжування, а другий – випадкову складову $\Delta_{\hat{\theta}_{an}}$ цієї помилки.

Так як випадкова і динамічна складові не корельовані між собою, дисперсія сумарної помилки буде дорівнювати

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_{\hat{\theta}_n}^2 + (\Delta_{\hat{\theta}_n})^2. \quad (10.9)$$

Обчислимо дисперсію випадкової і квадрат динамічної складових похибки визначення параметрів руху об'єктів вимірювань.

Так як математичне сподівання випадкової помилки дорівнює нулю, то дисперсію цієї помилки можна записати у вигляді

$$\sigma_{\hat{\theta}_n}^2 = M \left[\left(\sum_{i=0}^n \eta_i \Delta\theta_{n-1} \right)^2 \right]. \quad (10.10)$$

Після елементарних перетворень одержимо

$$\sigma_{\hat{\theta}_n}^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \eta_i \eta_j R_{\theta}(i-j), \quad (10.11)$$

де $R_{\theta}(i-j)$ – кореляційний момент випадкових помилок вимірювання параметра.

Припустимо, що згладжуванний параметр обчислюється за двома виміряними значеннями координат, причому кожне вимірне значення бере участь у розрахунку параметра двічі. Тоді, за умови відсутності кореляції між похибками вимірювання, обчислені значення параметра будуть корельовані на двох сусідніх кроках. Безпосереднім підрахунком можна показати, що коефіцієнт кореляції в цьому випадку від'ємний та дорівнює 0,5.

Отже

$$R_{\theta}(i-j) = \begin{cases} \sigma_{\theta}^2 & \text{їдє } i-j=0, \\ -0,5\sigma_{\theta}^2 & \text{їдє } |i-j|=1, \\ 0 & \text{їдє } |i-j|>0, \end{cases} \quad (10.12)$$

де σ_{θ}^2 – дисперсія розрахунку параметра по двом вимірним значенням координат.

З урахуванням (10.12) вираз для дисперсії випадкової помилки можна записати у вигляді

$$\sigma_{\hat{\theta}_n}^2 = \sigma_{\theta}^2 \left[\sum_{i=0}^n \eta_i^2 - \sum_{i=0}^n \eta_i \eta_{i+1} \right]. \quad (10.13)$$

Маючи на увазі, що при $n \rightarrow \infty$ (сталій режим роботи)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty} [(1-\xi) \xi^i]^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\xi)^2 \xi^{2i} = (1-\xi)^2 (1 + \xi^2 + \xi^4 + \dots), \quad (10.14)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i \eta_{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\xi)^2 \xi^{2i+1} = (1-\xi)^2 (\xi + \xi^3 + \xi^5 \dots), \quad (10.15)$$

остаточно отримаємо

$$\sigma_{\hat{\theta}_n}^2 = \sigma_{\theta}^2 \frac{(1-\xi)^2}{1+\xi}. \quad (10.16)$$

Формула (10.16) показує, що дисперсія випадкової помилки експоненціального згладжування параметра тим менше, чим більше коефіцієнт згладжування ξ .

Обчислимо тепер квадрат динамічної помилки згладжування параметра для випадку усталеного руху об'єктів вимірювань за цим параметром.

Коефіцієнти динамічної помилки визначаються з виразу

$$\tilde{N}_i = \frac{(-1)^i}{i!} \mu_i - a_i, \quad (10.17)$$

де

$$\mu_i = \sum_{j=0}^{\infty} j^j \eta_j \quad (i = 0, 1, 2, \dots, l), \quad (10.18)$$

l – ступінь полінома, що описує функцію $\theta^{(0)}(t)$.

Коефіцієнти a_i приймають значення $a_0 = 1, a_1 = p, \dots, a_i = p^i / i!$.

де p – число періодів екстраполяції вхідного сигналу; при згладжуванні $p = 0$, тому $a_0 = 1$.

Для випадку лінійної зміни параметра руху ($j = 1$), обчислення коефіцієнтів динамічної помилки дають

$$\mu_0 = \sum_{j=0}^{\infty} j^0 \eta_j = (1-\xi) \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j = 1, \quad (10.19)$$

тому $C_0 = 0$;

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{\infty} j \eta_j = (1-\xi) \sum_{j=0}^{\infty} j \xi^j = \frac{\xi}{1-\xi} \quad (10.20)$$

тому $\tilde{N}_1 = \frac{\xi}{1-\xi}$.

Таким чином,

$$\Delta_{\theta} \hat{\theta}_n = \frac{\xi}{1-\xi} \Delta^{(1)} \theta_n, \quad (10.21)$$

а квадрат цієї помилки визначається за формулою

$$(\Delta_{\theta} \hat{\theta}_n)^2 = \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} (\Delta^{(1)} \theta_n)^2. \quad (10.22)$$

З урахуванням виразів (10.16) і (10.22) дисперсія відносної сумарної помилки згладжувань дорівнює

$$\frac{\sigma_{\Sigma}^2}{\sigma_{\theta}^2} = \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)^2} + \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2} s^2, \quad (10.23)$$

де $s^2 = \frac{(\Delta^{(1)} \theta_n)^2}{\sigma_{\theta}^2}$ - відносна інтенсивність можливих змін параметрів руху.

На рис. 10.2 побудовані графіки залежності дисперсії відносної сумарної помилки згладжування параметра від коефіцієнта згладжування ξ при різних інтенсивностях змін цього параметра.

Графіки мають екстремуми типу мінімуму, які зміщуються вліво при збільшенні інтенсивності змін. Звідси можна зробити висновок про доцільність зміни коефіцієнта згладжування ξ з метою підтримки похибки на мінімальному або близькому до мінімального рівня для кожного конкретного значення інтенсивності змін параметра руху об'єктів вимірювань. З графіків похибки також випливає, що вибір коефіцієнтів ξ для кожного значення інтенсивності змін не критичний, так як екстремуми графіків пологі.

Для знаходження оптимального значення $\xi_{\text{н\ddot{o}}}$ за критерієм мінімуму дисперсії сумарної помилки продиференціюємо вираз (10.23) по ξ і прирівняємо результат до нуля. Остаточне рівняння для $\xi_{\text{н\ddot{o}}}$ має вигляд

$$(1 - \xi_{\text{н\ddot{o}}}^2) (1 - \xi_{\text{н\ddot{o}}})^3 + 2(1 - \xi_{\text{н\ddot{o}}})^4 - 2 \xi_{\text{н\ddot{o}}} (1 + \xi_{\text{н\ddot{o}}})^2 s^2 = 0. \quad (10.24)$$

Використовуючи це рівняння, можна вибирати оптимальне значення коефіцієнта згладжування $\xi_{\text{н\ddot{o}}}$, якщо відома інтенсивність змін параметра руху об'єктів вимірювань.

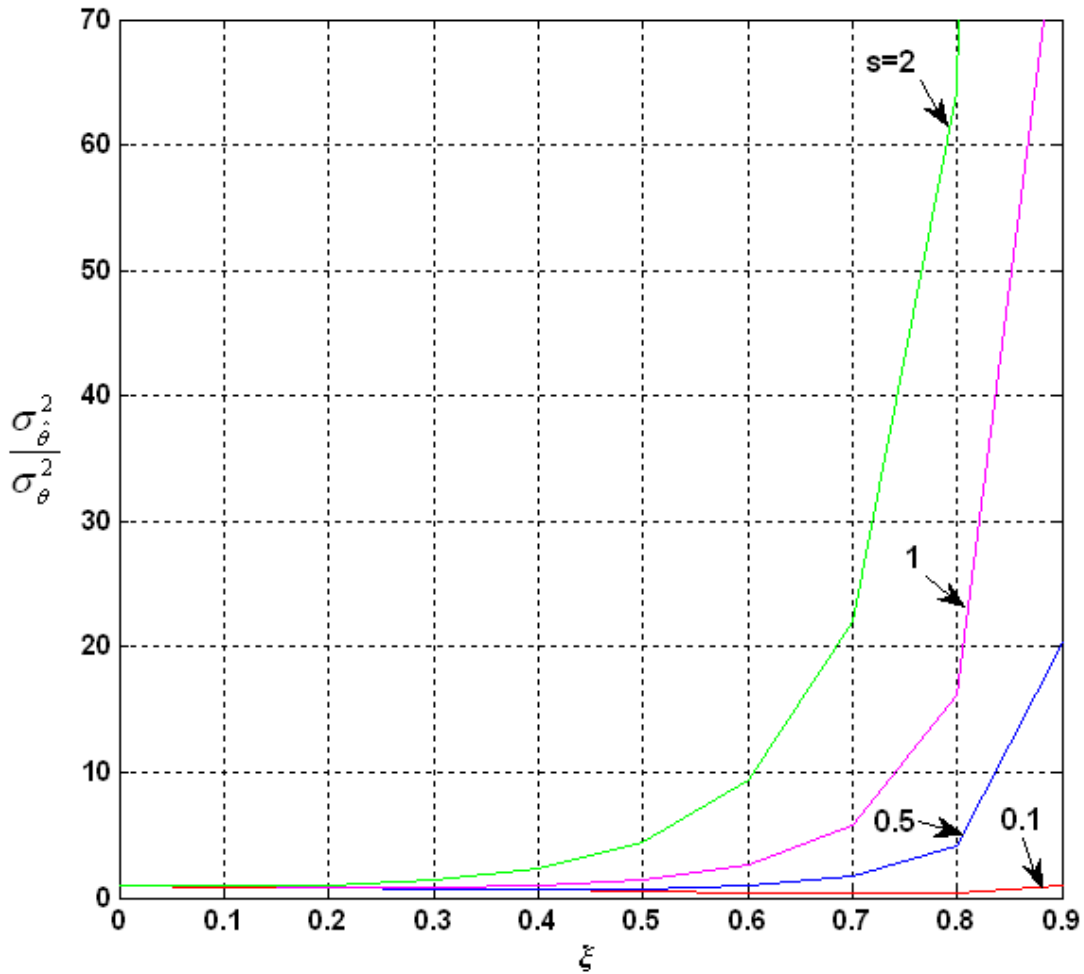


Рис. 10.2. Графіки залежності дисперсії відносної сумарної помилки згладжування параметра від коефіцієнта згладжування ξ при різних інтенсивностях маневру

10.3. Рівняння згладжування в дискретній формі

Призначення цифрового обчислювального пристрою, що використовується як елемент системи регулювання або управління, полягає в обчисленні згладжених значень дискретних даних, які містять завади.

Позначимо через θ_n значення дискретної величини, виміряної в рівновіддалені один від одного інтервали часу, а через $\hat{\theta}_n$ – згладжені значення тієї же величини. Процедура згладжування буде полягати в екстраполяції або передбаченні дискретної величини θ_n в даний момент часу n по значенню незгладженої величини θ_n в цей момент часу та по попередніх згладжених значеннях $\hat{\theta}_{n-v}$, тобто

$$\hat{\theta}_n = (1 - \xi) \theta_n + \xi f(\theta_{n-1}, \theta_{n-1}, \dots, \theta_{n-s-1}) \quad (10.24)$$

де $\xi \leq 1$ – стала величина, коефіцієнт згладжування. Початкові значення $\hat{\theta}_n$ при $n=0, 1, \dots, s$ можуть бути обрані довільно та, зокрема, вони можуть дорівнювати незгладженим значенням $\hat{\theta}_n$. З (10.24) випливає, що процес згладжування описується різницеvim рівнянням.

Для лінійного передбачення функція $f[\dots]$ являє собою лінійну функцію своїх аргументів. Щоб визначити конкретний вид цієї функції, припустимо, що передбачення базується на апроксимації $\hat{\theta}_n$ поліномом s -го ступеня. Позначимо цей поліном через $\varphi(\bar{t})$. Для дискретних значень

$$\varphi_m = \hat{\theta}_m, \quad m = n-1, n-2, \dots, n-s-1. \quad (10.25)$$

Функція $f[\dots]$ повинна співпадати з дискретними значеннями цього полінома при $\bar{t} = n$, тобто

$$f(\theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots, \theta_{n-s-1}) = \varphi_n. \quad (10.26)$$

Але для будь-якого полінома ступені s різниця $s+1$ -го порядку тотожно дорівнює нулю при будь-якому m , тобто

$$\Delta^{s+1} \varphi_m = 0. \quad (8.27)$$

Значення решітчастої функції отримуємо з (10.27) через значення її ординат, при $m=n-s-1$:

$$\Delta^{s+1} \varphi_{n-s-1} = \sum_{v=0}^{s+1} (-1)^v \binom{s+1}{v} \varphi_{n-v} = 0 \quad (10.28)$$

Запишемо тотожність:

$$\varphi_n = \varphi_n - \Delta^{s+1} \varphi_{n-s-1} = - \sum_{v=0}^{s+1} (-1)^v \binom{s+1}{v} \varphi_{n-v}. \quad (10.29)$$

Підставляючи значення φ_n з (10.29) в (10.26) та враховуєчи (10.25), отримуємо вираз для $f[\dots]$:

$$f(\theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots, \theta_{n-s-1}) = \sum_{v=0}^{s+1} (-1)^v \binom{s+1}{v} \hat{\theta}_{n-v}. \quad (10.30)$$

Після визначення функції $f[\dots]$ рівняння (10.24) можна представити у вигляді

$$\hat{\theta}_n = (1-\xi) \theta_n - \xi \sum_{v=0}^{s+1} (-1)^v \binom{s+1}{v} \hat{\theta}_{n-v}. \quad (10.31)$$

10.4. Еквівалентна цифрова система для оцінки параметрів руху об'єктів вимірювань

Використовуючи теорему зсуву для рівняння (10.31), знайдемо рівняння згладжування відносно зображень параметра руху об'єктів вимірювань:

$$Z^*(q) = (1-\xi)F^*(q) - \xi \left(\sum_{v=0}^{s+1} (-1)^v \binom{s+1}{v} e^{-qv} \right) Z^*(q). \quad (10.32)$$

де $Z^*(q)$ та $F^*(q)$ – зображення решітчастих функцій $\hat{\theta}_n$ та θ_n . Припустимо, що $\theta_{-n} = 0$. Введемо позначення

$$K^*(q,0) = \xi \sum_{\nu=0}^{s+1} (-1)^\nu \binom{s+1}{\nu} e^{-q\nu} = \xi \left\{ (1 - e^{-q})^{s+1} - 1 \right\}. \quad (10.33)$$

Тоді рівняння (10.32) можна остаточно привести до вигляду:

$$Z^*(q) = \frac{1 - \xi}{1 + K^*(q,0)} F^*(q). \quad (10.34)$$

Це рівняння відповідає деякій амплітудній імпульсній системі, що еквівалентна цифровому обчислювальному пристрою або цифровому фільтру, що здійснює вказаний процес згладжування (рис. 10.3). $K^*(q,0)$ можна розглядати як передаточну функцію розімкненої амплітудної імпульсної системи.

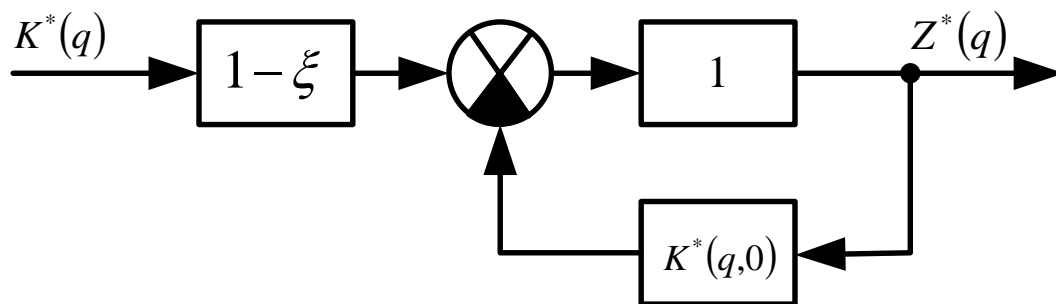


Рис. 10.3. Схема згладжування з використанням цифрового обчислювального пристрою

Передаточна функція замкнутої цифрової системи, згідно (10.34), дорівнює:

$$K_a^*(q,0) = K_o^*(q,0) = \frac{1 - \xi}{1 + K^*(q,0)} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi \left[(1 - a^{-q})^{s+1} - 1 \right]}, \quad (10.35)$$

що відповідає виконанню програми у цифровому обчислювальному пристрої, який виконує процес згладжування, описаний вище.

10.5. Оцінка ефективності згладжування

Важливою оцінкою якості згладжування може слугувати відношення середніх значень квадратів згладженої та незгладженої величини в тому випадку, коли незгладжені дані представляють дискретний випадковий процес з постійною спектральною щільністю. Чим менше це відношення в порівнянні з одиницею, тим ефективніший процес згладжування; якщо це відношення більше одиниці, то згладжування не відбувається.

Якщо незгладжені величини θ_n представляють собою дискретний випадковий процес з постійною спектральною щільністю $S_{ff}^*(\bar{\omega}) = \sigma^2$ та з

середнім значенням, що дорівнює нулю, то середнє значення квадрата цієї помилки дорівнює $\overline{\theta_n^2} = \sigma^2$.

Середнє значення квадрата відхилення згладженої величини може бути знайдено по формулі

$$\overline{\hat{\theta}_n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| K_{\hat{\theta}}^*(j\bar{\omega}, 0) \right|^2 S_{ff}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (10.36)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\overline{\hat{\theta}_n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1 - \xi}{1 + \xi [(1 - e^{-j\bar{\omega}})^{s+1} - 1]} \right|^2 \sigma^2 d\bar{\omega} \quad (10.37)$$

Для розрахунку цього значення скористаємося формулою:

$$\begin{aligned} P^*(q) = K_{\hat{\theta}}^*(q, 0) \sigma &= \frac{1 - \xi}{1 + \xi \sum_{\nu=1}^{s+1} (-1)^\nu \binom{s+1}{\nu} e^{-q\nu}} \sigma = \\ &= \frac{(1 - \xi) e^{(s+1)q}}{e^{(s+1)q} + \xi \sum_{\nu=1}^{s+1} (-1)^\nu \binom{s+1}{\nu} e^{(s+1-\nu)q}} \end{aligned} \quad (10.38)$$

Використовуючи формулу для сумарної оцінки та вважаючи, що в ній $l = s + 1$, отримуємо:

$$b_k = 1 - \xi \quad \text{їдє} \quad k = s + 1,$$

$$b_k \equiv 0 \quad \text{їдє} \quad k < s + 1$$

та $a_{s+1} = 1$, $a_{s+1-\nu} = (-1)^\nu \binom{s+1}{\nu}$, де $(\nu = 1, 2, \dots, s + 1)$. В результаті, отримуємо

після обчислення для різних s :

$$\left. \begin{aligned} s = 0: \quad \frac{\overline{\hat{\theta}_n^2}}{\sigma^2} &= \frac{1 - \xi}{1 + \xi}; \\ s = 1: \quad \frac{\overline{\hat{\theta}_n^2}}{\sigma^2} &= \frac{1 + \xi}{1 + 3\xi}; \\ s = 2: \quad \frac{\overline{\hat{\theta}_n^2}}{\sigma^2} &= \frac{(1 - \xi)(1 + 4\xi)}{(1 - 2\xi)(1 + 7\xi)}; \\ s = 3: \quad \frac{\overline{\hat{\theta}_n^2}}{\sigma^2} &= \frac{1 + 8\xi - 25\xi^2}{(1 - 5\xi)(1 + 15\xi)} \end{aligned} \right\}. \quad (10.39)$$

В цих формулах ζ не повинно перевищувати граничного значення. Залежності $\frac{\overline{\hat{\theta}_n^2}}{\sigma^2}$ від ζ приведені на (рис. 10.4).

Ці залежності дозволяють при заданому s обрати те значення ζ , яке забезпечує задану точність визначення поточної координати та параметрів руху об'єктів вимірювань .

З рис. 10.4 випливає, враховуючи умови стійкості, що $\frac{\overline{\hat{\theta}_n^2}}{\sigma^2}$ може бути менше одиниці тільки при $s=0, 1, 2$ та, означає, що тільки при цих значеннях s буде здійснювати згладжування.

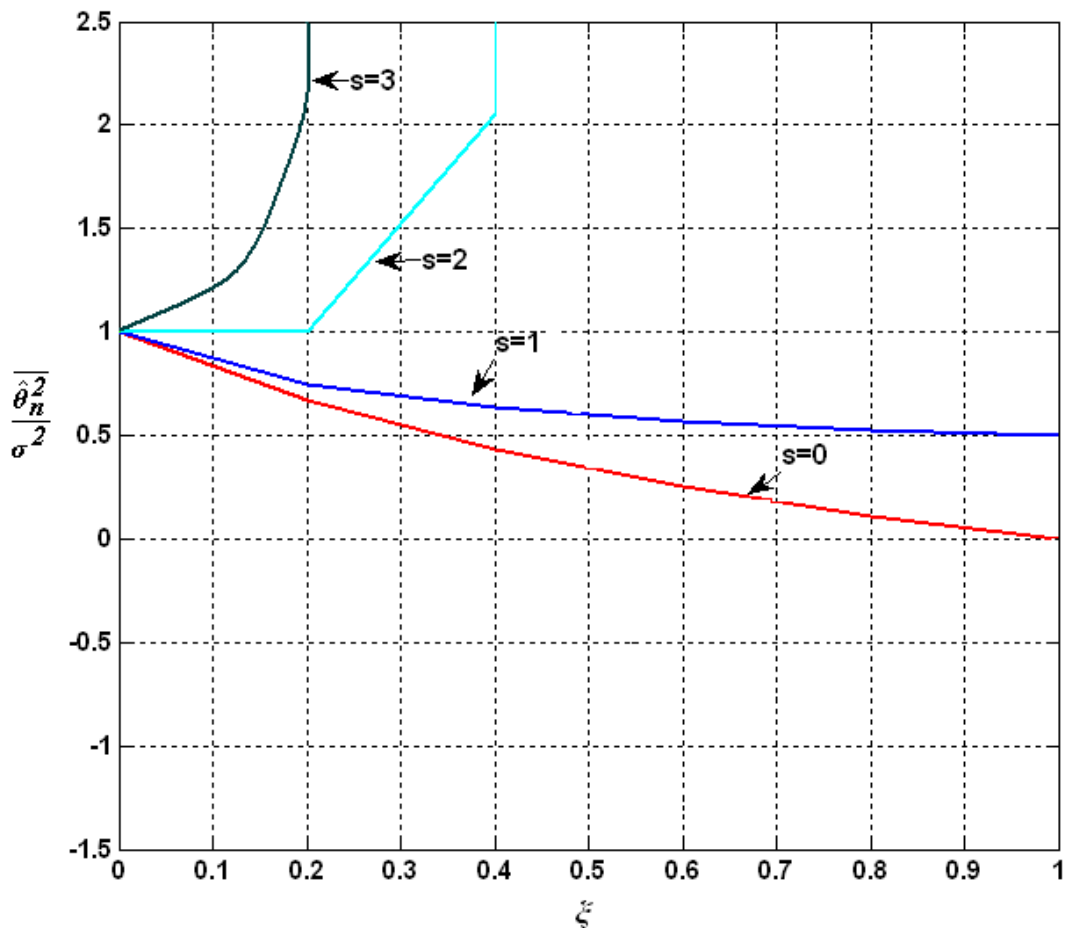


Рис. 10.4. Залежність відношень середніх значень квадратів нормованої похибки при різних значеннях s

При $s \geq 3$ описаний спосіб не може забезпечити згладжування, так як незалежно від величини ζ завжди $\frac{\overline{\hat{\theta}_n^2}}{\sigma^2}$ більше одиниці. Цей недолік може бути усунений, якщо проводити передбачення або екстраполяцію не по

одному значенню незгладженої величини θ_n , а по декільком $\theta_n, \theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots$, тобто, якщо замінити закон згладжування (10.31) на (10.40)

$$\hat{\theta}_n = (1 - \xi) \sum_{v=0}^{s_1} \zeta_v \theta_{n-v} - \xi \sum_{v=1}^{s+1} (-1)^v \binom{s+1}{v} \hat{\theta}_{n-v}, \quad (10.40)$$

де стійкість процесу згладжування не залежить від коефіцієнтів ζ_v .

10.6. Програмна реалізація експоненціального згладжування

Для реалізація експоненційного згладжування в програмі Matlab не має спеціальних функцій, тому це необхідно здійснювати за допомогою програми, що розроблена на основі формул експоненційного згладжування.

Програмна реалізація експоненціального згладжування значень поточних координат та оцінювання параметрів руху об'єктів вимірювань

```
% Початкові дані
Noc=[9 25 51 101 151 201 301 401 501]';
Type_V=3; % рух ОБ 1 - з постійною швидкістю 2 -
стрибокподібна зміна швидкості від 0 до макс значення
% 3 - переміщення на задану відстань (для 3
час спостереження 200 с)
FK_P=4; % порядок матриць для фільтра Калмана min 3
EKS_P=2; % кількість попередніх значення для
експоненціального згладжування
ksi=0.7; % коефіцієнт згладжування
jjj=4; % виведення графіків параметрів руху для Noc=jjj
FKMean=100; % усереднення відліків для оцінки точності ФК
v=20; % максимальна швидкість, мм/с
a_max=1; % максимальна швидкість, мм/с^2
x0=0; % початкова координата ОБ ФК
v0=v; % початкова швидкість ОБ ФК
a0=a_max; % початкове прискорення ОБ ФК
PARAM=[x0 v0 a0 0 0 0];
dt1=0.04; % крок дискретності
t1=(0:dt1:100)'; % час спостереження
SigmaNoise=0.6/sqrt(3); % СКЗ шуму вимірювань координати
Sigma_Dist_x=0%3.33; % СКЗ збурень координати 5%
Sigma_Dist_v=0%1.67; % СКЗ збурень швидкості 5%
Sigma_Dist_a=0; % СКЗ збурень прискорення
Sigma_Dist_x0=0%0.1; % СКЗ початкових умов координати ФК
Sigma_Dist_v0=0%0.1; % СКЗ початкових умов швидкості ФК
Sigma_Dist_a0=0%0.0001; % СКЗ початкових умов прискорення ФК
TWx=0.12; TWv=0.12; % постійні часу (секунд) аперіодичної
ланки для фільтрації збурень - корельвані збурення
Tu=1; % постійні часу (секунд) аперіодичної ланки 2-го
порядку для фільтрації упр сигналу - врахування інерційності ОБ
randn('state',0);
```

```

% Математична модель руху неперервного ОВ 2-го порядку -
неперервна система 2-го порядку
% в просторі стану. Вхід - швидкість і прискорення. Збурення по
входу - для швидкості і прискорення
% Моделюються рівноприскорений рух (U1=0 U2=a(t)) і рівномірний
рух (U1=v(t) U2=0)
% dX/dt=AX+BU+GW
% Y=      CX+DU+HW+V
% U (відсутній) - вхід      Y (позначення в розділі 4 xi*) -
вихід=поточній координаті ОВ
% X (Z) - внутрішній стан системи координата швидкість
% W (Lamnda Greek) - збурення в системі швидкості прискорення -
це ще 2 входи
% V (Delta Greek x) - шум вимірювань виходу тобто поточної
координати ОВ
Z0=[x0; 0];      % початковий стан системи координата швидкість
A=[0 1          % матриці системи в просторі стану
  0 0];
  B=[1 0          % 1 0 - задання швидкості ОВ
    0 0];      % 0 0
  G=[1 0 % G (P Greek) - вхідні збурення в системі -швидкість
    0 0];
C=[1 0];      % H - матриця вимірювань формує вихід з першого
елементу вектора стану тобто поточної кординати
D=[0 0];      % вхід не впливає на вихід
H=[0 0];      % збурення на вихід не діють
[t1M,t1N] = size(t1);
U=zeros(t1M,2);      % вхід=0
W=zeros(t1M,2);      % Lamnda Greek=0 - збурення в системі
швидкість і прискорення
V=zeros(t1M,1);      % Delta Greek xi шум вимірювань координати
OV_CTime=ss(A,[B G],C,[D H]);      % ОВ в просторі стану

% Моделювання неперервної системи 2-го порядку
if Type_V==1      % вхідна швидкість
  U(:,1)=v; U(:,2)=0; % швидкість та прискорення
end;
if Type_V==2      % вхідна швидкість
  U(:,1)=v; U(1:1000,1)=0; U(:,1)=lsim(tf([1],[Tu^2 2*Tu
1]),U(:,1),t1);
end;
if Type_V==3      % вхідна швидкість
  U(:,1)=v; U(1:500,1)=0; U(2000:2500,1)=0;
  for iii=1:500 U(iii,1)=v*iii/500; end;
  for iii=1:500 U(iii+2000,1)=v*(500-iii)/500; end;
  U(:,1)=lsim(tf([1],[Tu^2 2*Tu 1]),U(:,1),t1);
end;
for i=2:t1M-1
  U(i,2)=(U(i+1,1)-U(i-1,1))/2/dt1; % прискорення

```

```

end;
U(t1M,2)=U(t1M-1,2);
W(:,1)=randn(t1M,1).*(Sigma_Dist_v); % Lamnda Greek=0 - збурення
в системі швидкість
SysWx=tf([1],[TWx 1]);
Wx=lsim(SysWx,randn(t1M,1).*(Sigma_Dist_x),t1);
SysWv=tf([1],[TWv 1]); W(:,1)=lsim(SysWv,W(:,1),t1);
V=randn(t1M,1).*(SigmaNoise)+Wx; % шум вимірювань координати і
збурення координати
[Y,t2,X]=lsim(OV_CTime,[U W],t1,Z0); % моделювання - вихід
(координата) і вектор стану (координата і швидкість)
% figure; plot(t1,W(:,1),'g', t1,V,'m');
% title('Noise CTime System: W1=v g, V m');
% figure; plot(t2,Y,'k', t2,Y+V,'g', t2,U(:,1),'k',
t2,U(:,1)+W(:,1),'g'); % для рівномірного руху
% title('Output and State Vector CTime System: Y=x, k Y+V=x+v g,
U1=v k, U1+W1=v+w g');

% Математична модель для вимірювань за відеозображеннями
% дискретна система в просторі стану
%  $x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] + Gw[n]$ 
%  $y[n] = Cx[n] + Du[n] + Hw[n] + v[n]$ 
% U (відсутній) - вхід=0 Y (позначення в розділі 4 xi*) -
вихід=поточній координаті ОВ
% X (Z) - внутрішній стан системи координати швидкість
прискорення
% W (Lamnda Greek) - збурення в системі координати швидкості
прискорення - це ще 3 входи додатково до U
% V (Delta Greek x) - шум вимірювань виходу тобто поточної
координати ОВ
% початковий стан системи координата швидкість прискорення
ZD0=zeros(1,FK_P);
for i=1:FK_P
    ZD0(i)=PARAM(i);
end;
% матриці системи в просторі стану
% A (F Greek) - неперевна модель рівноприскореного руху ОВ
A_=zeros(FK_P, FK_P);
for i=1:FK_P
    for j=i:FK_P
        A_(i,j)=dt1^(j-i)/factorial(j-i);
    end;
end;
BD=zeros(FK_P,1); % вхід відсутній
GD=A_; % G (P Greek) - передача збурень в системі
CD=zeros(1,FK_P); CD(1)=1; % H - матриця вимірювань формує
вихід з першого елемента вектора стану тобто поточної координати
DD=[0]; % вхід відсутній
HD=zeros(1,FK_P); % збурення на вихід не діють
[t1M,t1N] = size(t1);

```

```

% Дискретний фільтр Калмана для відеозображень
ZD=zeros(FK_P,t1M); GI=zeros(FK_P,t1M); P=zeros(FK_P,FK_P,t1M);
I3_3=zeros(FK_P,FK_P);
for i=1:FK_P
    I3_3(i,i)=1;
end;
ZD(:,1)=ZD0;
QN=zeros(FK_P,FK_P);
if FK_P>=1 QN(1,1)=Sigma_Dist_x^2; end;
if FK_P>=2 QN(2,2)=Sigma_Dist_v^2; end;
if FK_P>=3 QN(3,3)=Sigma_Dist_a^2; end;
P=zeros(FK_P,FK_P);
for i=1:FK_P
    for j=1:FK_P
        P(i,j)=ZD(i)*ZD(j);
    end;
end;
if FK_P>=1 P(1,1)=P(1,1)+Sigma_Dist_x0^2; end;
if FK_P>=2 P(2,2)=P(2,2)+Sigma_Dist_v0^2; end;
if FK_P>=3 P(3,3)=P(3,3)+Sigma_Dist_a0^2; end;
for i=2:t1M
    Pil=A_*P(:,:(i-1))*A_'+GD*QN*GD';
    GI(:,i)=Pil*CD'*(CD*Pil*CD'+SigmaNoise^2)^(-1);
    ZD(:,i)=A_*ZD(:,i-1)+GI(:,i)*(Y(i)+V(i)-CD*(A_*ZD(:,i-1)));
    P(:,i)=Pil*(I3_3-GI(:,i)*CD);
end;

% експоненційне згладжування
ZDEKS=zeros(3,t1M);
for i=EKS_P+1:t1M
    ZDEKS(1,i)=(1-ksi)*(Y(i)+V(i));% згладжування по координаті
    %ZDEKS(2,i)=(1-ksi)*ZDDIFRV(2,i,jjj);%згладжування по швидкості
    %ZDEKS(3,i)=(1-ksi)*ZDDIFRV(3,i,jjj);%згладжування по
    прискоренню

for j=1:EKS_P
    ZDEKS(:,i)=ZDEKS(:,i)-ksi.*(-1).^j.*EKS_P./j.*ZDEKS(:,i-
j);
end;
end;

% Оцінка похибок
DZDFull=zeros(3,t1M,size(Noc,1));
DZDEKS=zeros(3,t1M);

for j=1:size(Noc,1)
    DZDFull(1,:,j)=ZD(1,:)-Y'; DZDFull(2,:,j)=ZD(2,:)-U(:,1)';
    DZDFull(3,:,j)=ZD(3,:)-U(:,2)';
end;
DZDEKS(1,:)=ZDEKS(1,:)-Y'; DZDEKS(2,:)=ZDEKS(2,:)-U(:,1)';
DZDEKS(3,:)=ZDEKS(3,:)-U(:,2)';

```

```

if Type_V==1
    DZD=zeros(3,FKMean+1,size(Noc,1));
    for j=1:size(Noc,1)
        DZD(:,j)=DZDFull(:,Noc(j):Noc(j)+FKMean,j);
    end;
else
    DZD=zeros(3,size(U,1)-510,size(Noc,1));
    for j=1:size(Noc,1)
        DZD(:,j)=DZDFull(:,Noc(j):size(U,1)-510+Noc(j)-1,j);
    end;
    DZD=DZDFull(:,510:size(U,1)-510,:);
end;

DZDEKS=DZDEKS(:,510:size(U,1)-510);
DZD_Max1=zeros(size(Noc,1),1); DZD_Max2=zeros(size(Noc,1),1);
DZD_Max3=zeros(size(Noc,1),1);
DZD_Std1=zeros(size(Noc,1),1); DZD_Std2=zeros(size(Noc,1),1);
DZD_Std3=zeros(size(Noc,1),1);
for j=1:size(Noc,1)
    DZD_Max1(j)=max(abs(DZD(1,:,j)));
    DZD_Max2(j)=max(abs(DZD(2,:,j)));
    DZD_Max3(j)=max(abs(DZD(3,:,j)));
    DZD_Std1(j)=std(DZD(1,:,j)); DZD_Std2(j)=std(DZD(2,:,j));
    DZD_Std3(j)=std(DZD(3,:,j));
end;

DZDEKS_Max1=zeros(size(Noc,1),1);
DZDEKS_Max2=zeros(size(Noc,1),1);
DZDEKS_Max3=zeros(size(Noc,1),1);
DZDEKS_Std1=zeros(size(Noc,1),1);
DZDEKS_Std2=zeros(size(Noc,1),1);
DZDEKS_Std3=zeros(size(Noc,1),1);
DZDEKS_Max1(:)=max(DZDEKS(1,:));
DZDEKS_Max2(:)=max(DZDEKS(2,:));
DZDEKS_Max3(:)=max(DZDEKS(3,:));
DZDEKS_Std1(:)=std(DZDEKS(1,:));
DZDEKS_Std2(:)=std(DZDEKS(2,:));
DZDEKS_Std3(:)=std(DZDEKS(3,:));

% Теретичний розрахунок похибок
% Фільтр Калмана
DZD_StdTx=zeros(size(Noc,1),1); DZD_StdTv=zeros(size(Noc,1),1);
DZD_StdTx(:)=sqrt(SigmaNoise*dt1*sqrt(2*Sigma_Dist_a*SigmaNoise+Sigma_Dist_v^2));
DZD_StdTv(:)=sqrt(Sigma_Dist_a*dt1*sqrt(2*Sigma_Dist_a*SigmaNoise+Sigma_Dist_v^2));
%DZD_StdTa(:)=0;
figure; % графіки параметрів руху для Noc=jjj
plot(t1,Y,'b',t1,Y+V,'g',t1,ZD(1,:), 'r',t1,ZDEKS(1,:), 'c');
xlabel('Час, c'); ylabel('Координата, мм');

```

```

grid on;

% графіки похибок параметрів руху
figure;
plot(Noc*dt1,DZDEKS_Std1,'m-',Noc*dt1,DZD_Std1,'b-
.', 'LineWidth',3);
xlabel('Кількість відліків координати'); ylabel('СКЗ похибки,
мм');
grid on;

```

Графіки функцій, що отримані після моделювання експоненціального згладжування, представлені на рис.10.5-10.7 .

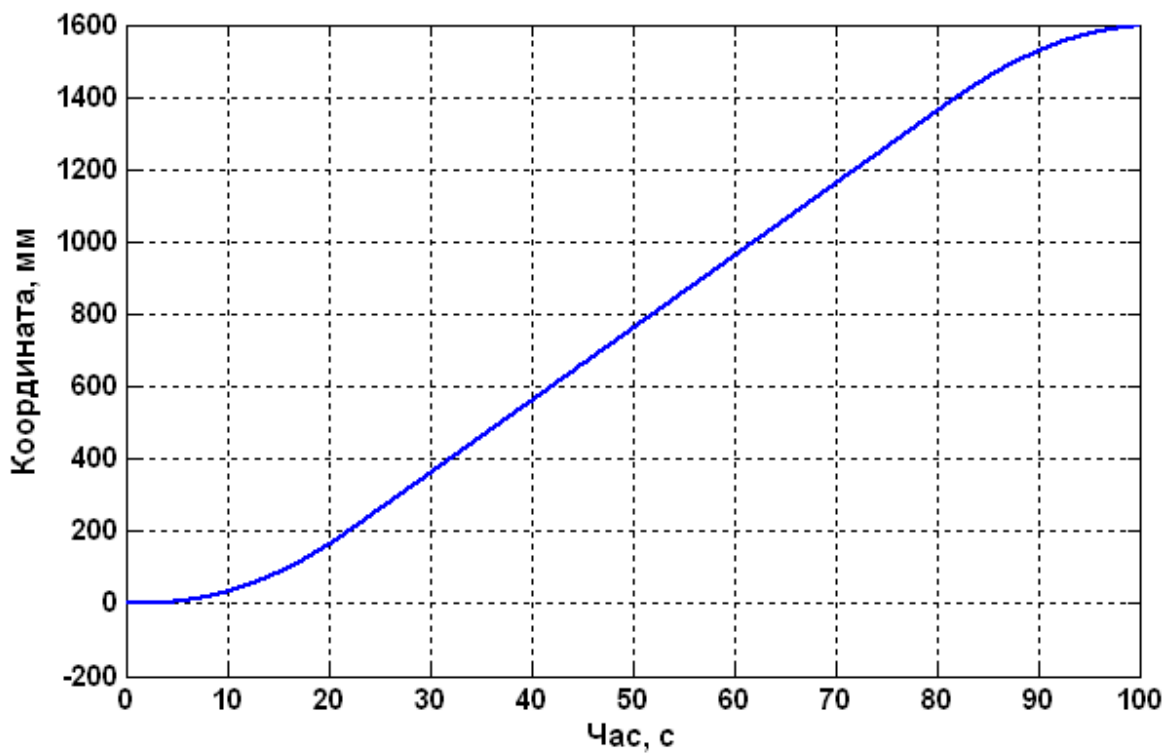


Рис. 10.5. Графік зміни координати ОУ в часі

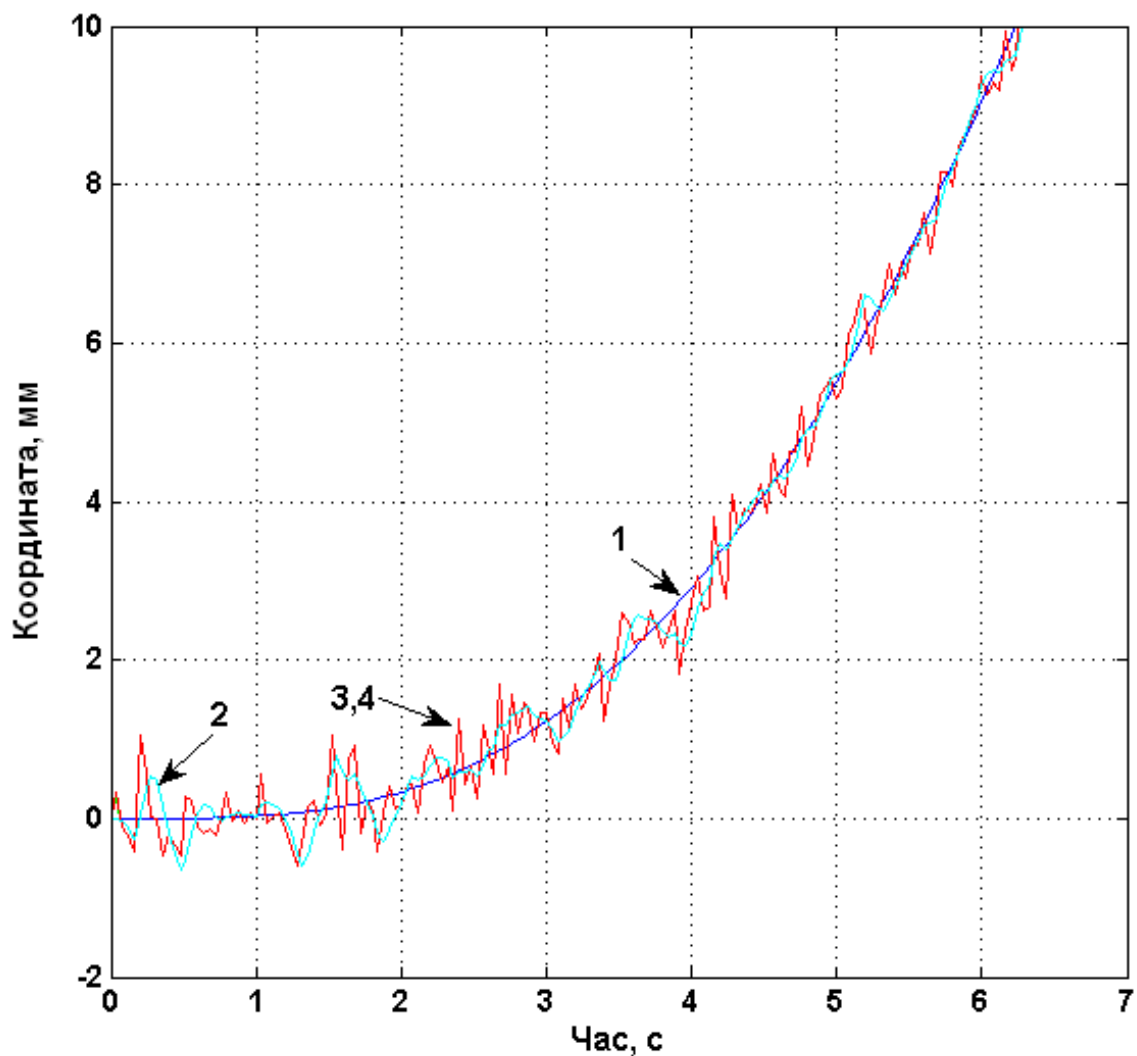


Рис. 10.6. Графіки: 1- точного значення координати ОУ, 2- оцінка на основі експоненціального згладжування, 3 – оцінка поточних значень координат фільтром Калмана, 4 - результат вимірювань координат.

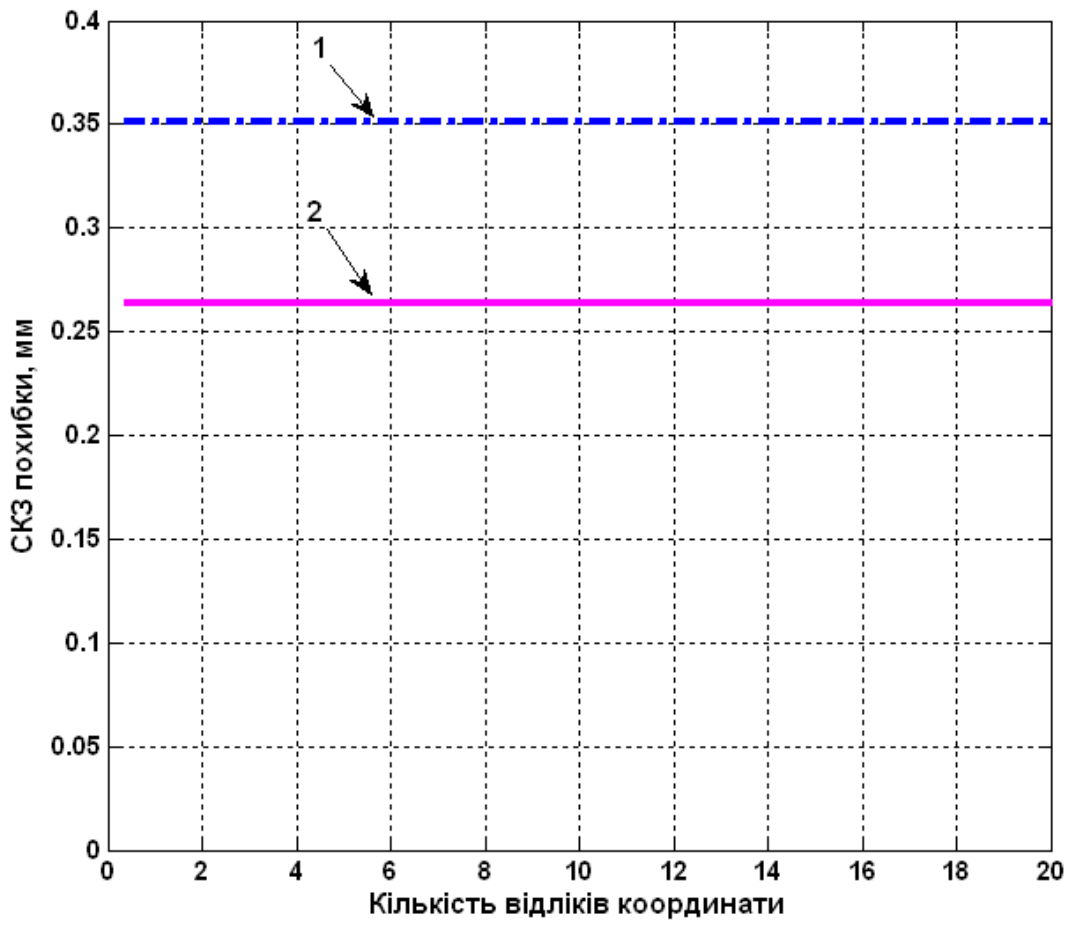


Рис. 10.7. СКЗ похибки оцінки: 1 – оцінка фільтра Калмана, 2 – оцінка експоненціального згладжування

11. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З МАТЕМАТИЧНИХ ТА ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

11.1. Лабораторна робота №1. БЕЗПЕРЕРВНІ, ДИСКРЕТНІ ТА ЦИФРОВІ СИГНАЛИ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Мета: Практичне дослідження етапів аналого-цифрового перетворення сигналів з використанням сучасних засобів імітаційного моделювання. Порівняльний аналіз аналогового, дискретного та цифрового сигналів. Набуття практичних навичок застосування програмних засобів імітаційного моделювання цифрових сигналів.

11.1.1. Завдання та порядок виконання роботи

Для успішного виконання роботи необхідно:

1. Виконати імітаційне моделювання аналогового гармонійного сигналу однієї частоти, що описується функцією

$$x(t) = A_0 + A \cos(2\pi f t + \varphi),$$

на часовому інтервалі $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$ з використанням символічних змінних;

2. Побудувати графік функції, що описує аналоговий сигнал;
3. Виконати моделювання аналого-цифрового перетворення із частотою дискретизації f_d та розрядністю b . Кодування сигналу реалізувати за допомогою прямого, зворотного і додаткового коду;
4. Побудувати графіки відповідних функцій для дискретного, квантованого та цифрового сигналів;
5. Оцінити параметри шуму квантування сигналу, побудувати гістограму статистичного розподілу абсолютної похибки квантування та зіставити отримані результати з теоретичними значеннями.

Після виконання експериментальної частини необхідно відповісти на запропоновані контрольні питання для закріплення пройденого матеріалу та встановлення взаємозв'язку між отриманими результатами практичних робіт та теоретичними знаннями.

11.1.2. Вимоги до звіту

Результати роботи рекомендується оформити у вигляді звіту, в якому має бути така інформація: мета роботи; розв'язані у процесі її досягнення завдання; основні математичні висловлювання, використані під час

вирішення завдань; текст програми чи схема моделювання, результати моделювання у вигляді графіків і висновок, що дозволяє зробити висновок про сумісність результатів практичної роботи з теоретичними відомостями.

Звіт повинен містити наступні розділи:

1. Титульний аркуш;
2. Цілі роботи;
3. Опис сигналів, коди програм, візуальне представлення сигналу.

11.1.3. Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Таблиця 11.1

№	$t_{\min}, \text{с}$	$t_{\max}, \text{с}$	$A, \text{В}$	$A_0, \text{В}$	$f, \text{Гц}$	$\varphi, \text{рад.}$
1	8	18	5	7	3	$\pi/2$
2	15	22	5	3	1	$\pi/5$
3	15	22	9	1	9	$\pi/3$
4	17	32	5	9	2	$\pi/3$
5	17	48	3	6	3	$\pi/3$
6	10	32	8	8	5	$\pi/5$
7	10	30	1	10	5	$\pi/5$
8	13	39	4	5	5	$\pi/4$
9	10	30	8	6	8	$\pi/5$
10	8	30	8	7	8	$\pi/3$
11	10	18	10	2	9	$\pi/2$
12	7	16	1	5	1	$\pi/4$
13	3	19	9	6	3	$\pi/4$
14	12	21	8	8	6	$\pi/5$
15	10	30	7	6	7	$\pi/4$
16	15	36	9	5	3	$\pi/3$
17	18	41	7	1	8	$\pi/4$
18	6	18	8	10	4	$\pi/4$
19	6	15	2	2	3	$\pi/4$
20	18	28	9	8	1	$\pi/2$
21	4	15	3	6	8	$\pi/2$
22	9	27	6	4	5	$\pi/4$
23	11	19	1	5	4	$\pi/5$
24	11	22	7	3	2	$\pi/2$
25	19	42	5	9	1	$\pi/5$
26	14	30	10	10	6	$\pi/4$
27	17	32	1	9	2	$\pi/3$
28	4	28	6	4	5	$\pi/5$
29	10	19	9	5	6	$\pi/4$
30	10	21	3	6	6	$\pi/4$

11.1.4. Контрольні питання

1. З якою метою виконується дискретизація та квантування сигналу за рівнем?
2. У чому відмінність квантованого дискретного сигналу від цифрового?
3. Як визначити обсяг пам'яті, необхідної для зберігання цифрового сигналу на заданому інтервалі?
4. Як зменшити нелінійні спотворення сигналу, зумовлені квантуванням за рівнем?
5. Назвіть основні параметри, що характеризують аналого-цифрові перетворювачі.
6. Чи співпадатимуть результати операцій над одним і тим самим сигналом, представленим у дискретному та цифровому вигляді?

11.2. Лабораторна робота №2.

ДЕТЕРМІНОВАНІ СИГНАЛИ ТА ЇХ ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Мета: Набуття практичних навичок імітаційного моделювання різних видів детермінованих сигналів. Експериментальне вивчення основних характеристик дискретних сигналів, зокрема: енергія та середня потужність сигналу на інтервалі, амплітудний та енергетичний спектри, спектр потужності та функція спектральної густини потужності.

11.2.1. Завдання та порядок виконання роботи

Для успішного виконання роботи необхідно:

1. Провести імітаційне моделювання детермінованого сигналу у вигляді одиночного імпульсу заданого типу тривалістю τ і періодичної послідовності з N подібних імпульсів з періодом T .

2. Провести імітаційне моделювання гармонійного сигналу із заданим типом модуляції тривалістю τ з девіацією частоти в діапазоні $f \in [f_{\min}; f_{\max}]$ на часовому інтервалі $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$. Модуляція має здійснюватися за одним із законів:

(а) ЛЧМ – лінійна частотна модуляція формується за законом

$$f(t) = f_{\min} + \frac{f_{\max} - f_{\min}}{\tau} \cdot t;$$

(б) ПЧМ – параболічна частотна модуляція формується за законом

$$f(t) = f_{\min} + \frac{f_{\max} - f_{\min}}{\tau^2} \cdot t^2;$$

(в) ГЧМ – гіперболічна частотна модуляція формується за законом

$$f(t) = \frac{\tau f_{\max} f_{\min}}{(f_{\max} - f_{\min})t + \tau f_{\min}};$$

(г) КЧМ — кубічна частотна модуляція формується за законом

$$f(t) = f_{\min} + \frac{f_{\max} - f_{\min}}{\tau^3} \cdot t.$$

Частота дискретизації має бути обрана відповідно до вимог теореми Найквіста-Котельникова, а саме $f_d > 2f_{\max}$, де f_{\max} — максимальна частота в спектрі модельованого сигналу.

3. Експериментально розрахувати енергію модельованого гармонійного сигналу в часовій і частотній областях і підтвердити виконання теореми Парсеваля.

4. Оцінити середню потужність модельованого гармонійного сигналу на заданому інтервалі.

5. Побудувати амплітудний та енергетичний спектри, спектр потужності та функцію спектральної густини потужності гармонійного сигналу. Оскільки спектральні характеристики дійсного сигналу симетричні відносно нульової частоти, то рекомендується при виконанні роботи на графіках зображати тільки позитивні частоти, подвоюючи значення характеристики в ділянці позитивних частот за рахунок прихованих на графіку відповідних від'ємних частот. Такий вид зображення є більш інтуїтивно зрозумілим, оскільки у фізичних процесах від'ємні частоти відсутні.

Після виконання експериментальної частини необхідно відповісти на запропоновані контрольні запитання для закріплення пройденого матеріалу і встановлення взаємозв'язку між отриманими результатами практичних робіт і теоретичними знаннями.

11.2.2. Вимоги до звіту

Результати роботи рекомендується оформити у вигляді звіту, в якому має бути така інформація: мета роботи; розв'язані у процесі її досягнення завдання; основні математичні вирази, використані під час вирішення завдань; текст програми чи схема моделювання, результати моделювання у вигляді графіків і висновок, що дозволяє зробити висновок про сумісність результатів практичної роботи з теоретичними відомостями.

Звіт повинен містити наступні розділи:

1. Титульний аркуш;
2. Цілі роботи;
3. Опис сигналів, коди програм, візуальне представлення сигналу.

11.2.3. Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Таблиця 11.2. Тип функції та імпульсу

№	Функція	Імпульс
1	Гаусса	ГЧМ
2	Дирихле	ПЧМ
3	Гаусса	ПЧМ
4	Дирихле	ЛЧМ
5	Кардіальний синус	ЛЧМ
6	Прямокутний імпульс	ЛЧМ
7	Дирихле	КЧМ
8	Кардіальний синус	ГЧМ
9	Дирихле	КЧМ
10	Трикутний імпульс	ПЧМ
11	Гаусса	ЛЧМ
12	Трикутний імпульс	ПЧМ
13	Дирихле	ПЧМ
14	Прямокутний імпульс	ЛЧМ
15	Трикутний імпульс	ПЧМ
16	Кардіальний синус	ГЧМ
17	Кардіальний синус	ПЧМ
18	Гаусса	ГЧМ
19	Прямокутний імпульс	ГЧМ
20	Гаусса	КЧМ
21	Дирихле	ЛЧМ
22	Дирихле	КЧМ
23	Трикутний імпульс	ЛЧМ
24	Трикутний імпульс	ПЧМ
25	Гаусса	КЧМ
26	Прямокутний імпульс	ЛЧМ
27	Кардіальний синус	ПЧМ
28	Дирихле	ПЧМ
29	Трикутний імпульс	ГЧМ
30	Дирихле	ЛЧМ

Таблиця 11.3. Параметри функції та імпульсу

№	Функція			Імпульс			
	τ, c	T, c	N	t_{min}, c	t_{max}, c	$f_{min}, Гц$	$f_{max}, Гц$
1	0,5	10	500	4	5	65	390
2	0,4	26,7	200	-2	5	95	665

№	Функція			Імпульс			
	τ, c	T, c	N	t_{\min}, c	t_{\max}, c	$f_{\min}, Гц$	$f_{\max}, Гц$
3	0,2	29,3	300	-2	8	68	204
4	0,7	13,3	800	0	10	98	882
5	0,8	10,1	700	3	13	27	243
6	0,7	27,4	100	5	13	49	392
7	0,2	27,7	700	-4	2	36	252
8	0,4	21,7	600	-3	3	80	160
9	0,7	10,7	200	-3	2	10	70
10	0,1	14,7	600	-2	4	95	475
11	0,4	8,4	900	0	3	85	170
12	0,3	22,9	100	4	11	32	64
13	0,8	21,6	500	3	8	58	580
14	0,3	21	300	-3	3	30	120
15	0,1	26,9	700	0	3	48	288
16	0,6	24,8	700	-4	3	39	156
17	0,2	5,2	500	-2	-1	31	217
18	0,8	28,1	400	2	12	95	475
19	0,5	18	500	-1	7	34	136
20	0,4	26	600	-4	-1	55	275
21	0,2	23,1	700	-4	3	10	70
22	0,2	15,1	300	-5	2	14	98
23	0,8	14,6	1000	-4	-1	21	210
24	0,7	10	600	3	8	59	295
25	0,1	9,5	700	-5	2	37	148
26	0,5	28,4	300	-4	-3	79	553
27	0,5	26,2	500	-5	-3	52	416
28	0,4	8,6	500	0	6	7	14
29	0,6	17	500	2	12	29	261
30	0,3	20,3	700	5	6	70	140

11.2.4. Контрольні питання

1. Яким чином можна отримати частотний спектр сигналу, знаючи його часову реалізацію?
2. Чи зміниться спектр аналогового сигналу після його оцифрування?
3. У чому фізичний сенс теореми Парсеваля?
4. Чому дорівнює енергія періодичного сигналу?
5. Як визначити середню потужність періодичного сигналу?
6. Яким чином можна порівняти енергії різних частотних гармонік одного сигналу?

11.3. Лабораторна робота № 3. ВИПАДКОВІ СИГНАЛИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПСЕВДОВИПАДКОВІ СИГНАЛИ

Мета: Набуття практичних навичок імітаційного моделювання різних видів випадкових і псевдовипадкових сигналів. Практичне вивчення основних характеристик випадкових сигналів, у тому числі: густина ймовірності та функція спектральної густини потужності.

11.3.1. Завдання та порядок виконання роботи

Для успішного виконання роботи необхідно:

1. Провести імітаційне моделювання і побудувати графік псевдовипадкового сигналу, що визначається законом

$$x(nT_D) = A_0 \sin(2\pi f n T_D + \varphi)$$

на часовому інтервалі $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$, причому деякі з параметрів сигналу: частота f , амплітуда A , рівень постійної складової A_0 або початкова фаза φ мають бути випадковими величинами із заданими ймовірнісними характеристиками. Частота дискретизації має бути обраною відповідно до вимог теореми Найквіста - Котельникова, а саме $f_D > 2f_{\max}$.

2. Побудувати графіки часової реалізації випадкових величин.

3. Експериментально побудувати гістограми статистичного розподілу та порівняти з функцією щільності ймовірності заданого ймовірнісного розподілу відповідної величини.

4. Побудувати функцію спектральної щільності потужності псевдовипадкового сигналу. Оскільки спектральні характеристики дійсного сигналу симетричні відносно нульової частоти, то рекомендується при виконанні роботи на графіках зображати тільки позитивні частоти, подвоюючи значення характеристики в області позитивних частот за рахунок прихованих на графіку відповідних від'ємних частот. Такий вигляд зображення є більш інтуїтивно зрозумілим, оскільки у фізичних процесах негативні частоти відсутні.

Після виконання експериментальної частини необхідно відповісти на запропоновані контрольні запитання для закріплення пройденого матеріалу і встановлення взаємозв'язку між отриманими результатами практичних робіт і теоретичними знаннями.

11.3.2. Вимоги до звіту

Результати роботи рекомендується оформити у вигляді звіту, в якому має бути така інформація: мета роботи; розв'язані у процесі її досягнення завдання; основні математичні вирази, використані під час вирішення

завдань; текст програми чи схема моделювання, результати моделювання у вигляді графіків і висновок, що дозволяє зробити висновок про сумісність результатів практичної роботи з теоретичними відомостями.

Звіт повинен містити наступні розділи:

1. Титульний аркуш;
2. Цілі роботи;
3. Опис сигналів, коди програм, візуальне представлення сигналу.

11.3.3. Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Таблиця 11.4. Параметри сигналу: НР – нормальний розподіл, РР – рівномірний розподіл, ТР – трикутний розподіл.

№	$t_{\min}, \text{с}$	$t_{\max}, \text{с}$	
1	16	30	$A = 3 \text{ В}; A_0 = 6 \text{ В};$ Тип: НР; $m(f) = 3 \text{ Гц}; \sigma(f) = 13 \text{ Гц};$ Тип: ТР; $\varphi: a = \frac{\pi}{20}; b = \frac{\pi}{2}; c = \frac{\pi}{2}$
2	20	27	Тип: РР; $A = 5 \pm 25 \text{ В};$ $A_0 = 15 \text{ В}; f = 5 \text{ Гц};$ Тип: ТР; $\varphi: a = \frac{\pi}{16}; b = \frac{\pi}{12}; c = \frac{\pi}{3}$
3	11	21	Тип: НР; $m(A) = 5 \text{ В}; \sigma(A) = 26 \text{ В};$ $A_0 = 20 \text{ В};$ Тип: ТР; $f: a = 10 \text{ Гц}; b = 12 \text{ Гц}; c = 13 \text{ Гц};$ $\varphi = \frac{\pi}{14}$
4	3	18	Тип: РР; $A = 9 \pm 24 \text{ В};$ Тип: РР; $A_0 = 7 \pm 30 \text{ В};$ $f = 8 \text{ Гц}; \varphi = \frac{\pi}{15}$
5	7	22	Тип: РР; $A = 4 \pm 28 \text{ В};$ Тип: РР; $A_0 = 10 \pm 21 \text{ В};$ $f = 4 \text{ Гц}; \varphi = \frac{\pi}{6}$
6	19	32	$A = 3 \text{ В};$ Тип: РР; $A_0 = 7 \pm 29 \text{ В};$ $f = 6 \text{ Гц};$ Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{27}; \sigma(\varphi) = \frac{\pi}{2}$

7	6	27	$A = 6 \text{ В};$ Тип: НР; $m(A_0) = 9 \text{ В}; \sigma(A_0) = 26 \text{ В};$ $f = 3 \text{ Гц};$ Тип: ТР; $\varphi: a = \frac{\pi}{21}; b = \frac{\pi}{16}; c = \frac{\pi}{5}$
8	7	22	Тип: НР; $m(A) = 5 \text{ В}; \sigma(A) = 18 \text{ В};$ $A_0 = 14 \text{ В};$ Тип: ТР; $f: a = 8 \text{ Гц}; b = 8 \text{ Гц}; c = 10 \text{ Гц};$ $\varphi = \frac{\pi}{22}$
9	19	43	$A = 10 \text{ В};$ Тип: НР; $m(A_0) = 7 \text{ В}; \sigma(A_0) = 14 \text{ В};$ $f = 11 \text{ Гц};$ Тип: РР; $\varphi = \frac{\pi}{27} \pm \frac{\pi}{4}$
10	16	39	Тип: НР; $m(A) = 10 \text{ В}; \sigma(A) = 14 \text{ В};$ Тип: НР; $m(A_0) = 6 \text{ В}; \sigma(A_0) = 19 \text{ В};$ $f = 11 \text{ Гц}; \varphi = \frac{\pi}{17}$
11	12	20	$A = 22 \text{ В}; A_0 = 24 \text{ В};$ Тип: ТР; $f: a = 7 \text{ Гц}; b = 12 \text{ Гц}; c = 18 \text{ Гц};$ Тип: РР; $\varphi = \frac{\pi}{25} \pm \frac{\pi}{3}$
12	8	32	Тип: НР; $m(A) = 10 \text{ В}; \sigma(A) = 17 \text{ В};$ $A_0 = 5 \text{ В}; f = 7 \text{ Гц};$ Тип: РР; $\varphi = \frac{\pi}{14} \pm \frac{\pi}{4}$
13	11	20	$A = 23 \text{ В};$ Тип: РР; $A_0 = 5 \pm 19 \text{ В};$ $f = 24 \text{ Гц};$ Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{26}; \sigma(\varphi) = \frac{\pi}{4}$
14	10	40	$A = 5 \text{ В}; A_0 = 6 \text{ В};$ Тип: НР; $m(f) = 9 \text{ Гц}; \sigma(f) = 10 \text{ Гц};$ Тип: ТР; $\varphi: a = \frac{\pi}{14}; b = \frac{\pi}{9}; c = \frac{\pi}{5}$

15	11	28	$A = 3 \text{ В};$ Тип: НР; $m(A_0) = 10 \text{ В}; \sigma(A_0) = 10 \text{ В};$ $f = 21 \text{ Гц};$ Тип: РР; $\varphi = \frac{\pi}{25} \pm \frac{\pi}{3}$
16	19	37	$A = 3 \text{ В};$ Тип: ТР; $A_0: a = 8 \text{ В}; b = 16 \text{ В}; c = 25 \text{ В};$ $f = 13 \text{ Гц};$ Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{22}; \sigma(\varphi) = \frac{\pi}{3}$
17	18	37	Тип: НР; $m(A) = 4 \text{ В}; \sigma(A) = 14 \text{ В};$ $A_0 = 10 \text{ В}; f = 23 \text{ Гц};$ Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{26}; \sigma(\varphi) = \frac{\pi}{2}$
18	20	27	Тип: НР; $m(A) = 4 \text{ В}; \sigma(A) = 30 \text{ В};$ $A_0 = 17 \text{ В}; f = 15 \text{ Гц};$ Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{25}; \sigma(\varphi) = \frac{\pi}{5}$
19	20	47	Тип: НР; $m(A) = 6 \text{ В}; \sigma(A) = 20 \text{ В};$ Тип: НР; $m(A_0) = 4 \text{ В}; \sigma(A_0) = 19 \text{ В};$ $f = 7 \text{ Гц}; \varphi = \frac{\pi}{23}$
20	14	31	Тип: НР; $m(A) = 8 \text{ В}; \sigma(A) = 22 \text{ В};$ $A_0 = 25 \text{ В}; f = 14 \text{ Гц};$ Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{22}; \sigma(\varphi) = \frac{\pi}{5}$
21	18	44	$A = 19 \text{ В};$ Тип: НР; $m(A_0) = 8 \text{ В}; \sigma(A_0) = 18 \text{ В};$ $f = 18 \text{ Гц};$ Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{25}; \sigma(\varphi) = \frac{\pi}{3}$
22	13	22	$A = 8 \text{ В};$ Тип: НР; $m(A_0) = 10 \text{ В}; \sigma(A_0) = 20 \text{ В};$ $f = 17 \text{ Гц};$ Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{19}; \sigma(\varphi) = \frac{\pi}{2}$

23	13	32	Тип: РР; $A = 10 \pm 15$ В; $A_0 = 4$ В; Тип: ТР; $f : a = 4$ Гц; $b = 6$ Гц; $c = 15$ Гц; $\varphi = \frac{\pi}{19}$
24	6	26	$A = 7$ В; $A_0 = 14$ В; Тип: НР; $m(f) = 3$ Гц; $\sigma(f) = 11$ Гц; Тип: РР; $\varphi = \frac{\pi}{23} \pm \frac{\pi}{3}$
25	14	30	$A = 7$ В; $A_0 = 14$ В; Тип: ТР; $f : a = 10$ Гц; $b = 13$ Гц; $c = 20$ Гц; Тип: РР; $\varphi = \frac{\pi}{28} \pm \frac{\pi}{2}$
26	20	49	$A = 4$ В; $A_0 = 13$ В; Тип: НР; $m(f) = 10$ Гц; $\sigma(f) = 15$ Гц; Тип: ТР; $\varphi : a = \frac{\pi}{19}$; $b = \frac{\pi}{10}$; $c = \frac{\pi}{5}$
27	14	35	$A = 10$ В; $A_0 = 4$ В; Тип: ТР; $f : a = 6$ Гц; $b = 10$ Гц; $c = 13$ Гц; Тип: РР; $\varphi = \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{3}$
28	13	39	Тип: ТР; $A : a = 9$ В; $b = 10$ В; $c = 10$ В; $A_0 = 13$ В; Тип: НР; $m(f) = 8$ Гц; $\sigma(f) = 12$ Гц; $\varphi = \frac{\pi}{20}$
29	17	29	$A = 19$ В; Тип: ТР; $A_0 : a = 9$ В; $b = 13$ В; $c = 13$ В; $f = 10$ Гц; Тип: РР; $\varphi = \frac{\pi}{21} \pm \frac{\pi}{3}$
30	10	32	Тип: РР; $A = 4 \pm 18$ В; $A_0 = 16$ В; $f = 15$ Гц; Тип: НР; $m(\varphi) = \frac{\pi}{23}$; $\sigma(\varphi) = \frac{\pi}{4}$

11.3.4. Контрольні питання

1. На інтервал якої довжини припадає понад 99% значень випадкової величини, розподіленої за нормальним законом?
2. Поясніть, у яких випадках який розподіл (рівномірний, нормальний, трикутний) випадкової величини слід застосовувати.
3. Чим відрізняється псевдовипадковий сигнал від детермінованого і випадкового?
4. У якій ділянці (часовій чи частотній) простіше відрізнити псевдовипадковий сигнал, отриманий у цій роботі, від шуму? Чому?
5. Які сигнали частіше зустрічаються на практиці: детерміновані чи псевдовипадкові?

11.4. Лабораторна робота № 4.

ПРОСТІ ТА СКЛАДНІ СИГНАЛИ В ЛОКАЦІЇ. БАЗА СИГНАЛУ. ФУНКЦІЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мета: Набуття практичних навичок, освоєння програмних засобів імітаційного моделювання простих і складних сигналів з різними характеристиками, що застосовуються в радіолокації, гідролокації та інших галузях науки і техніки. Практичне вивчення способів збільшення роздільної здатності вимірювання зміщення сигналів за часом і частотою.

11.4.1. Завдання та порядок виконання роботи

Для успішного виконання роботи необхідно:

1. Розрахувати та навести графіки двовимірної функції автокореляції та функції невизначеності для сигналу у вигляді імпульсу заданого типу та тривалості T .

2. Побудувати проекції функцій автокореляції та невизначеності на осі частоти та часу.

3. Оцінити роздільну здатність сигналу за дальністю і частотою. Під час розрахунків використовувати частоту дискретизації, що дорівнює $f_d = 3 \cdot 10^6$ Гц, а швидкість поширення сигналу прийняти рівною $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Після виконання експериментальної частини необхідно відповісти на запропоновані контрольні запитання для закріплення пройденого матеріалу і встановлення взаємозв'язку між отриманими результатами практичних робіт і теоретичними знаннями.

11.4.2. Вимоги до звіту

Результати роботи рекомендується оформити у вигляді звіту, в якому має бути така інформація: мета роботи; розв'язані у процесі її досягнення завдання; основні математичні вирази, використані під час вирішення завдань; текст програми чи схема моделювання, результати моделювання у вигляді графіків і висновок, що дозволяє зробити висновок про сумісність результатів практичної роботи з теоретичними відомостями.

Звіт повинен містити наступні розділи:

1. Титульний аркуш;
2. Цілі роботи;
3. Опис сигналів, коди програм, візуальне представлення сигналу.

11.4.3. Варіанти завдань для індивідуальної роботи

Таблиця 11.5. Параметри сигналу: ТІ - тональний імпульс, ЛЧМ - імпульс з лінійною частотною модуляцією.

№	ТІ				ЛЧМ	
	$t_{\min}, \text{с}$	$t_{\max}, \text{с}$	$f_{\min}, \text{Гц}$	$f_{\max}, \text{Гц}$	$T, \text{мкс}$	$\Delta f, \text{МГц}$
1	8	18	5	7	5	0,5
2	15	22	5	3	3	0,1
3	15	22	9	1	2	0,3
4	17	32	5	9	3	0,3
5	17	48	3	6	4	0,3
6	10	32	8	8	3	0,5
7	10	30	1	10	8	0,5
8	13	39	4	5	8	0,4
9	10	30	8	6	4	0,5
10	8	30	8	7	6	0,3
11	10	18	10	2	10	0,5
12	7	16	1	5	7	0,4
13	3	19	9	6	8	0,2
14	12	21	8	8	3	0,2
15	10	30	7	6	7	0,2
16	15	36	9	5	2	0,5
17	18	41	7	1	10	0,4
18	6	18	8	10	9	0,3
19	6	15	2	2	5	0,1
20	18	28	9	8	4	0,5
21	4	15	3	6	6	0,2
22	9	27	6	4	5	0,3
23	11	19	1	5	7	0,4

№	ТІ				ЛЧМ	
	$t_{\min}, \text{с}$	$t_{\max}, \text{с}$	$f_{\min}, \text{Гц}$	$f_{\max}, \text{Гц}$	$T, \text{мкс}$	$\Delta f, \text{МГц}$
24	11	22	7	3	8	0,3
25	19	42	5	9	2	0,2
26	14	30	10	10	10	0,4
27	17	32	1	9	6	0,1
28	4	28	6	4	5	0,2
29	10	19	9	5	4	0,3
30	10	21	3	6	10	0,2

11.4.4. Контрольні питання

1. Чим відрізняються прості сигнали від складних? Що таке база сигналу?
2. У чому полягає принцип невизначеності радіолокації?
3. Яка функція дає змогу вибрати сигнал, що відповідає вимогам роздільної здатності за часом і частотою для зондування простору?
4. Як пов'язані між собою функції автокореляції та невизначеності?
5. Що являє собою ідеальна з погляду роздільної здатності зондувального сигналу функція невизначеності?

11.5. Лабораторна робота № 5.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ НА ЕОМ

Мета роботи:

- 1) набуття навиків в моделюванні складних динамічних систем (СДС) на ЕОМ;
- 2) дослідження точнісних характеристик і швидкодії методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, які використовуються для моделювання СДС на ЕОМ.

11.5.1. Порядок виконання роботи

1. Вивчити теоретичні відомості, необхідні для виконання роботи.
2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (табл. 11.6).
 3. Виконайте моделювання СДС, заданого диференціальним рівнянням $y + ay = bx$ ($a = 1, b = 1$), час моделювання 10 с.
Замалуйте графік вхідного сигналу (ступеневий вплив, синусоїда та синусоїда, що згасає) і вихідної реакції об'єкта.
4. Виконайте моделювання СДС, використовуючи коефіцієнти рівняння a_1 , b_1 з індивідуального варіанту завдання, час моделювання 10 с.
Замалуйте графік вхідного сигналу (ступеневий вплив, синусоїда та синусоїда, що згасає) вихідної реакції моделі СДС.

5. Визначте похибку моделі СДС для кожного з 10 методів чисельного інтегрування у відповідності з формулою (5.43). Заповніть таблицю 11.7.

6. Визначте швидкодію моделі СДС для кожного з 10 методів чисельного інтегрування у відповідності з формулою (5.44). Заповніть таблицю 11.7.

Таблиця 11.6

Варі-ант	Кількість періодів сигналу $x(t) = A \cdot \sin(t)$ на інтервалі спостереження	Кількість кроків N інтегрування на інтервалі спостереження	a_1	b_1
1.	1	1000	0,9	1,3
2.	2	1000	0,95	1,26
3.	3	1500	0,9	1,3
4.	2	1500	0,95	1,26
5.	5	2000	0,9	1,3
6.	2	2000	0,95	1,26
7.	1	1000	1,06	0,9
8.	2	1000	1,18	0,87
9.	1	1500	1,06	0,9
10.	2	1500	1,18	0,87
11.	1	2000	1,06	0,9
12.	2	2000	1,18	0,87
13.	1	1000	0,9	1,3
14.	2	1000	0,95	1,26
15.	4	1500	0,9	1,3
16.	2	1500	0,95	1,26
17.	6	2000	0,9	1,3
18.	2	2000	0,95	1,26
19.	1	1000	1,06	0,9
20.	2	1000	1,18	0,87
21.	6	1500	1,06	0,9
22.	2	1500	1,18	0,87
23.	4	2000	1,06	0,9
24.	2	2000	1,18	0,87
25.	1	1000	0,9	1,3
26.	2	1000	0,95	1,26
27.	3	1500	0,9	1,3
28.	2	1500	0,95	1,26
29.	2	2000	0,9	1,3
30.	5	2000	0,95	1,26

Таблиця 11.7

Метод чисельного інтегрування	Диференціальне рівняння $y + ay = bx$ ($a = 1, b = 1$) фіксований крок кількість кроків N		Диференціальне рівняння $y + a_1y = b_1x$ фіксований крок кількість кроків N		Диференціальне рівняння $y + ay = bx$ ($a = 1, b = 1$) автоматичний вибір кроку інтегрування для ode45, ode23, ode113	
	Похибка методу, умовних одиниць	Швидкодія методу чисельного інтегрування, с	Похибка методу, умовних одиниць	Швидкодія методу чисельного інтегрування, с	Похибка методу, умовних одиниць	Швидкодія методу чисельного інтегрування, с
1. ode45						
2. ode23						
3. ode113						
4. Ейлера						
5. Трапецій						
6. Симпсона						
7. Модифікований Ейлера						
8. Мілна						
9. Адамса-Мултона						
10. Рунге-Кутта 4-го порядку						

11.5.2. Зміст звіту

1. Найменування і мета роботи.
2. Початкові дані індивідуального варіанту.
3. Графік вхідного сигналу і вихідної реакції моделі СДС.
4. Заповнена таблиця 11.7.
5. Висновки по роботі.

11.5.3. Контрольні питання

1. Наведіть основні етапи моделювання СДС за допомогою ЕОМ.
2. Виконайте порівняльний аналіз різних методів апроксимації вхідних сигналів (кусочно-постійна і кусочно-лінійна апроксимація).
3. Порівняйте (графічно) помилки при одержанні вихідного сигналу СДС при чисельному інтегруванні по формулі прямокутників і формулі трапецій.

4. Чому при дворазовому застосуванні операції чисельного інтегрування виникає необхідність застосування формули трапецій?
5. Як отримати з диференційного рівняння n -го порядку систему з n диференціальних рівнянь першого порядку?
6. Обґрунтуйте (графічно) алгоритм передбачення і виправлення (модифікований метод Ейлера).
7. Проведіть порівняльний аналіз методів чисельного інтегрування з точки зору початкових умов, що вимагаються для початку обчислень.
8. Як отримати початкові умови для багатокрокових методів чисельного інтегрування?
9. Як оцінити похибку чисельного інтегрування для модифікованого методу Ейлера?
10. Поясніть, як оцінити похибку чисельного інтегрування для методу Рунге-Кутта?
11. Що таке процедура автоматичного регулювання кроку інтегрування?
12. Проведіть порівняльний аналіз методів чисельного інтегрування з точки зору точності і часу обчислень на ЕОМ.

11.6. Лабораторна робота № 6

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОГРАМНО-АЛГОРИТМІЧНИХ ГЕНЕРАТОРІВ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Мета роботи: дослідження залежності статистичних характеристик “білого” шуму від методів реалізації алгоритмів генерації.

11.6.1. Порядок виконання роботи

1. Вивчити теоретичні відомості, необхідні для виконання роботи.
2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (табл. 11.8).
Для всіх варіантів використовуються генератори шуму “ГВЧ” і “ГВЧ1” і методи обчислення АКФ “АКФ1” і “АКФ2”.
3. Для генератора шуму “ГВЧ1” отримати математичне очікування значення випадкового числа і гістограму розподілу випадкових чисел в інтервалі $0 \dots 1$. Розрахунки провести для трьох значень кількості випадкових чисел N_1 , N_2 і N_3 . Заповнити таблицю 11.9.
4. Повторити пункт 3 для генератора шуму “ГВЧ2”. Заповнити табл. 11.10.
5. Обчислити АКФ для генератора шуму “ГВЧ1” двома способами “АКФ1” і “АКФ2”. Кількість відліків чисел $N = N_3$. Замалювати графіки АКФ.
6. Повторити пункт 5 для генератора шуму “ГВЧ2”. Замалювати графіки АКФ.

7. Отримати вибірку випадкових чисел із законом розподілу, вказаним у таблиці 11.8. Довжина вибірки $N = N3$. Побудувати гістограму розподілу значень випадкових чисел і автокореляційну функцію.

Таблиця 11.8

Варіант	Кількість відліків шуму			Закон розподілу випадкових величин
	N1	N2	N3	
1	16	128	512	Нормальний
2	16	64	256	Рівномірний
3	32	256	1024	Нормальний
4	32	128	256	Рівномірний
5	64	256	512	Нормальний
6	64	512	1024	Рівномірний
7	16	128	512	Нормальний
8	16	64	256	Рівномірний
9	32	256	1024	Нормальний
10	32	128	256	Рівномірний
11	64	256	512	Нормальний
12	64	512	1024	Рівномірний
13	16	128	512	Нормальний
14	16	64	256	Рівномірний
15	32	256	1024	Нормальний
16	32	128	256	Рівномірний
17	64	256	512	Нормальний
18	64	512	1024	Рівномірний
19	16	128	512	Нормальний
20	16	64	256	Рівномірний
21	32	256	1024	Нормальний
22	32	128	256	Рівномірний
23	64	256	512	Нормальний
24	64	512	1024	Рівномірний
25	16	128	512	Нормальний
26	16	64	256	Рівномірний
27	32	256	1024	Нормальний
28	32	128	256	Рівномірний
29	64	256	512	Нормальний
30	64	512	1024	Рівномірний

Таблиця 11.9

Характеристика генератора	Кількість відліків шуму		
	N1	N2	N3
Математичне очікування амплітуди шуму			
Кількість відліків шуму на інтервалі:			
0,0 ...0,1			
0,1 ...0,2			
0,2 ...0,3			
0,3 ...0,4			
0,4 ...0,5			
0,5 ...0,6			
0,6 ...0,7			
0,7 ...0,8			
0,8 ...0,9			
0,9 ...1,0			

Таблиця 11.10

Характеристика генератора	Кількість відліків шуму		
	N1	N2	N3
Математичне очікування амплітуди шуму			
Кількість відліків шуму із значенням:			
+1			
-1			

8. Повторити п. 7, додатково пропустивши випадковий процес (послідовність випадкових чисел) через фільтр нижніх частот з прямокутною смугою перепускання.

9. Повторити п. 8 для фільтрів з АЧХ в формі кривої Гаусса і експоненціальною АЧХ.

11.6.2. Зміст звіту

1. Найменування і мета роботи.
2. Початкові дані індивідуального варіанту.
3. Гістограми та кореляційні функції випадкових сигналів.
4. Заповнені таблиці 11.9 та 11.10.
5. Висновки по роботі.

11.6.3. Контрольні питання

1. Назвіть засоби отримання випадкових чисел.
2. Які умови необхідно виконати для отримання випадкових чисел з рівномірним розподілом?
3. Назвіть основні засоби формування розрядів випадкових двійкових чисел в ГВЧ.
4. Проведіть порівняльний аналіз паралельних і послідовних ГВЧ.
5. Назвіть основні алгоритми отримання випадкових чисел на ЕОМ.
6. Чим викликана необхідність переходу від випадкових чисел до псевдовипадкових послідовностей? Які умови при цьому необхідно виконати?
7. Намалюйте структурну схему і пояснити принцип роботи генератора нуль – послідовності максимальної довжини (НПМД). Характеристичний поліном $Q = D^3 \oplus D$; число розрядів регістру зсуву $N = 3$.
8. Визначить період повторення, кількість нулів і одиниць, що виробляються за період, для генератора НПМД, побудованого на регістрі зсуву, що містить 7 розрядів.
9. Визначить імовірності появи нулів і одиниць для генератора НПМД з числом розрядів регістру зсуву $N = 4$.
10. Який вигляд має АКФ для генератора НПМД?
11. Перетворіть формулу для визначення АКФ таким чином, щоб число випадкових чисел, що складуться було постійним, використовуючи при цьому властивість періодичності псевдовипадкової послідовності. Обґрунтуйте це перетворення.
12. Як отримати АКФ, використовуючи пряме і зворотне перетворення Фур'є?

11.7. Лабораторна робота № 7

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ ВЗАЄМНОЇ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

Мета роботи: дослідження методів ідентифікації, що базуються на взаємній кореляційній функції входу і виходу складної динамічної системи.

11.7.1. Порядок виконання роботи

1. Вивчити теоретичної відомості, необхідні для виконання роботи.
2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (табл. 11.11).
3. Одержати перехідну характеристику СДС 1-го порядку (коефіцієнт $\alpha = \alpha_1$, кількість відліків $N = 32$).
4. Повторити п.3 при коефіцієнті $\alpha = \alpha_2$.

5. Одержати перехідну характеристику СДС 2-го порядку (кількість відліків $N = 32$).

6. Одержати імпульсну характеристику СДС 1-го порядку (коефіцієнт $\alpha = \alpha_1$, кількість відліків $N = 32$).

7. Одержати імпульсну характеристику СДС 2-го порядку (кількість відліків $N = 32$).

Таблиця 11.11

Варіант	Коефіцієнт α СДС 1-го порядку (2 значення α_1 та α_2)	Коефіцієнти α_1 і β_1 СДС 2-го порядку
1	0,4; 1,1	0,5; 2,0
2	0,5; 1,3	0,4; 2,2
3	0,6; 1,4	0,8; 2,5
4	0,7; 1,5	1,2; 2,7
5	0,8; 1,8	1,5; 3,2
6	0,9; 1,9	0,5; 2,0
7	0,4; 1,1	0,4; 2,2
8	0,5; 1,3	0,8; 2,5
9	0,6; 1,4	1,2; 2,7
10	0,7; 1,5	1,5; 3,2
11	0,8; 1,8	0,5; 2,0
12	0,9; 1,9	0,4; 2,2
13	0,4; 1,1	0,8; 2,5
14	0,5; 1,3	1,2; 2,7
15	0,6; 1,4	1,5; 3,2
16	0,7; 1,5	0,5; 2,0
17	0,8; 1,8	0,4; 2,2
18	0,9; 1,9	0,8; 2,5
19	0,4; 1,1	1,2; 2,7
20	0,5; 1,3	1,5; 3,2
21	0,6; 1,4	0,5; 2,0
22	0,7; 1,5	0,4; 2,2
23	0,8; 1,8	0,8; 2,5
24	0,9; 1,9	1,2; 2,7
25	0,4; 1,1	1,5; 3,2
26	0,5; 1,3	0,5; 2,0
27	0,6; 1,4	0,4; 2,2
28	0,7; 1,5	0,8; 2,5
29	0,8; 1,8	1,2; 2,7
30	0,9; 1,9	1,5; 3,2

11.7.2. Зміст звіту

1. Найменування і мета роботи.
2. Початкові дані індивідуального варіанту.
3. Графіки перехідних характеристик.
4. Графіки імпульсних характеристик.
5. Висновки по роботі.

11.7.3. Контрольні питання

1. Дайте визначення перехідної й імпульсної характеристик СДС.
2. Дайте пояснення фізичного змісту методу обчислення вихідної реакції СДС шляхом згортки вхідного впливу і імпульсної характеристики СДС.
3. Що таке взаємна кореляційна функція СДС?
4. Чим відрізняється імпульсна характеристика СДС від ВКФ у випадку подачі на вхід “білого” шуму?
5. Які властивості повинні мати сигнали, що використовуються для ідентифікації СДС по методу взаємної кореляційної функції?
6. Намалюйте структурну схему для визначення динамічних характеристик СДС в реальному масштабі часу. Поясніть її роботу.
7. Як одержати рівняння, що описує СДС, по його передаточній функції?
8. Визначить вигляд перехідної характеристики аперіодичного СДС першого порядку при таких значеннях коефіцієнта α в передатній функції: 0,5; 1; 1,5; 2,0; 2,5.

11.Лабораторна робота № 8. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ АДАПТИВНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Мета роботи: розробка алгоритмів адаптивної ідентифікації та дослідження умов їх збіжності.

11.8.1. Порядок виконання роботи

1. Вивчити теоретичні відомості, необхідні для виконання роботи.
2. Одержати рівняння оптимальної моделі для Р - об'єкта і РАР - об'єкта, переконатися в їхній відповідності формулам (8.14), (8.15).
3. Одержати вираз для визначення коефіцієнтів моделі РАР - об'єктів для рекурентного методу адаптивної ідентифікації, переконатися в їхній відповідності формулам (8.22) - (8.24)

Таблиця 11.12

№ ва- ріанту	Коефіцієнт СДС			Початкове значення коефіцієнту моделі СДС			Кількість відліків вхідного сигналу	Крок зміни коефіцієнтів моделі СДС
	b_1	a_2	b_2	\tilde{b}_1	\tilde{a}_2	\tilde{b}_2		
1	2	0,9	0,70	1,0	0,7	0,55	100	0,05
1	2	0,9	0,70	1,0	0,7	0,55	100	0,05
2	3	1,0	0,75	1,5	0,8	0,50	150	0,10
3	4	1,1	0,80	2,0	0,7	0,55	200	0,15
4	5	0,9	0,85	2,5	0,8	0,60	100	0,20
5	6	1,0	0,90	3,0	0,7	0,65	150	0,05
6	7	1,1	0,95	1,0	0,8	0,55	200	0,10
7	8	0,9	1,00	1,5	0,7	0,50	100	0,15
8	2	1,0	1,05	2,0	0,8	0,55	150	0,20
9	3	1,1	1,10	2,5	0,7	0,60	200	0,05
10	4	0,9	1,15	3,0	0,8	0,65	100	0,10
11	5	1,0	1,20	1,0	0,7	0,55	150	0,15
12	6	1,1	1,25	1,5	0,8	0,50	200	0,20
13	7	0,9	0,70	2,0	0,7	0,55	100	0,05
14	8	1,0	0,75	2,5	0,8	0,60	150	0,10
15	2	1,1	0,80	3,0	0,7	0,65	200	0,15
16	3	0,9	0,85	1,0	0,8	0,55	100	0,20
17	4	1,0	0,90	1,5	0,7	0,50	150	0,05
18	5	1,1	0,95	2,0	0,8	0,55	200	0,10
19	6	0,9	1,00	2,5	0,7	0,60	100	0,15
20	7	1,0	1,05	3,0	0,8	0,65	150	0,20
21	8	1,1	1,10	1,0	0,7	0,55	200	0,05
22	2	0,9	1,15	1,5	0,8	0,50	100	0,10
23	3	1,0	1,20	2,0	0,7	0,55	150	0,15
24	4	1,1	1,25	2,5	0,8	0,60	200	0,20
25	5	0,9	1,00	3,0	0,7	0,65	100	0,05
26	6	1,0	1,05	1,0	0,8	0,55	150	0,10
27	7	1,1	1,10	1,5	0,7	0,50	200	0,15
28	8	0,9	1,15	2,0	0,8	0,55	100	0,20
29	2	1,0	1,20	2,5	0,7	0,60	150	0,15
30	3	1,1	1,25	3,0	0,8	0,65	200	0,20

4. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (табл. 11.12).

5. Для Р - об'єкта одержати залежність зміни функції втрат $F(\varepsilon)$ (див. (8.16)) від зміни коефіцієнта моделі $b'(n)$ у заданому діапазоні значень $(\tilde{b}(0) - \tilde{b}(N))$ для трьох типів вхідних впливів $u(n)$. Результати занести в табл. 11.13.

Таблиця 11.13

n	Коефіцієнт СДС b	Коефіцієнт моделі $b'(n)$	Функція втрат $F(\varepsilon)$ при вхідному впливі:		
			одиничний стрибок	цифровий шум	гармонічний сигнал
1					
2					
...					
N					

6. Для Р – об'єкта одержати залежність зміни коефіцієнта оптимальної моделі \tilde{b} від часу в процесі настроювання моделі по ітеративному методу адаптивної ідентифікації для трьох типів вхідного впливу $u(n)$. Коефіцієнт підсилення γ підібрати так, щоб на заданому інтервалі в N відліків забезпечити точність настроювання моделі до 5%. Результати спостережень занести в табл. 11.14.

Таблиця 11.14

n	Коефіцієнт СДС \tilde{b}	Коефіцієнт моделі $b(n)$	Коефіцієнт оптимальної моделі при вхідному впливі:		
			одиничний стрибок	цифровий шум	гармонічний сигнал
1					
2					
...					
N					

7. Дослідити зміну функції втрат для РАР - об'єкта в залежності від зміни коефіцієнта моделі $\tilde{b}(n)$ при фіксованому коефіцієнті моделі $a' = a$. Заповнити таблицю, аналогічну табл. 8.2.

8. Виконати дослідження адаптивної ідентифікації для РАР - об'єкта (аналогічно п.п. 5 і 6). Заповнити дві таблиці, враховуючи наявність двох коефіцієнтів для СДС і моделі $(a, b$ і $\tilde{a}, \tilde{b})$.

11.8.2. Зміст звіту

1. Найменування і мета роботи.
2. Початкові дані індивідуального варіанту.
3. Графік вхідного та вихідного сигналів, функції втрат і зміни коефіцієнтів адаптивної моделі об'єктів.
4. Заповнені таблиці 11.13 та 11.14.
5. Висновки по роботі.

11.8.3. Контрольні питання

1. По якому критерію оцінюється якість адаптивної ідентифікації параметрів СДС?
2. Перерахуйте основні етапи рішення задачі ідентифікації.
3. Наведіть рівняння лінійного динамічного СДС і рівняння оптимальної моделі, порівняйте їх.
4. Сформулюйте умову оптимального рішення задачі адаптивної ідентифікації.
5. Який вигляд має ітеративний алгоритм адаптивної ідентифікації?
6. Намалюйте блок-схему ітеративного алгоритму, роз'ясніть її роботу.
7. Який вигляд має рекурентний алгоритм адаптивної ідентифікації?
8. Намалюйте блок-схему рекурентного алгоритму, роз'ясніть її роботу.
9. Виконайте порівняльний аналіз ітеративного і рекурентного алгоритму адаптивної ідентифікації.
10. Отримайте рівняння оптимальної моделі і вираз для функції втрат P -об'єкта.
11. Отримайте рівняння оптимальної моделі і вираз для функції втрат PAP -об'єкта.
12. Як впливає значення коефіцієнтів у матриці підсилення на точність і час настроювання оптимальної моделі?

11.9. Лабораторна робота 9.

ЗАСТОСУВАННЯ ФІЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПОТОЧНИХ КООРДИНАТ ТА ПАРАМЕТРІВ РУХУ ОБ'ЄКТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи: ознайомитися з можливостями підвищення точності визначення координат та параметрів руху об'єктів в системах управління.

11.9.1. Завдання для лабораторної роботи

1. Згідно свого варіанту обрати структурну схему системи (табл. 11.15) та параметри цієї схеми (табл. 11.16).

2. Зробити розрахунок фільтра Калмана.
3. Виконати моделювання системи управління зі спостерігачем.
4. Побудувати графіки виміряного і точного вихідних сигналів координат об'єкту вимірювань та зашумленого і оціненого значення виходу системи.
5. Порівняти графіки та зробити висновки.

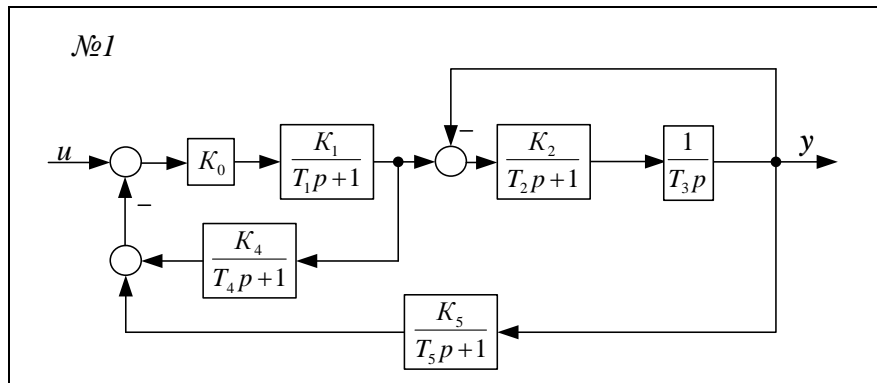
11.9.2. Зміст звіту

1. Назва та мета роботи.
2. Структурна схема системи автоматичного управління згідно свого завдання.
3. Текст програми моделювання.
4. Графіки виміряного і точного вихідних сигналів та зашумленого і точного значення виходу системи координат об'єкту вимірювань.
5. Висновки.

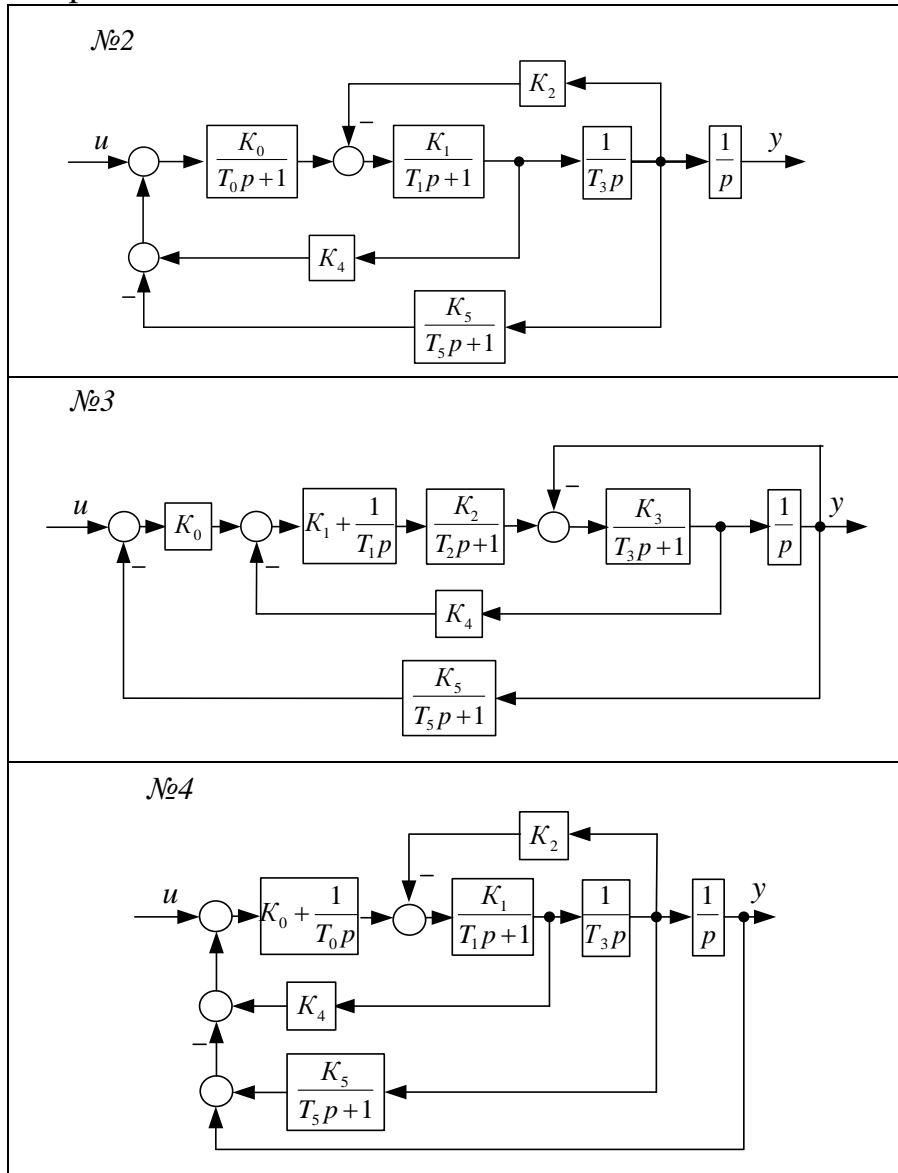
11.9.3. Контрольні питання

1. Що являє собою фільтр Калмана?
2. Які функції є в пакеті Matlab для синтезу фільтра Калмана?
3. Які основні блоки входять в структурну схему отримання оцінок координат об'єкту вимірювань?
4. Що таке матриця вимірювання H ?
5. Назвіть матриці об'єкта керування.

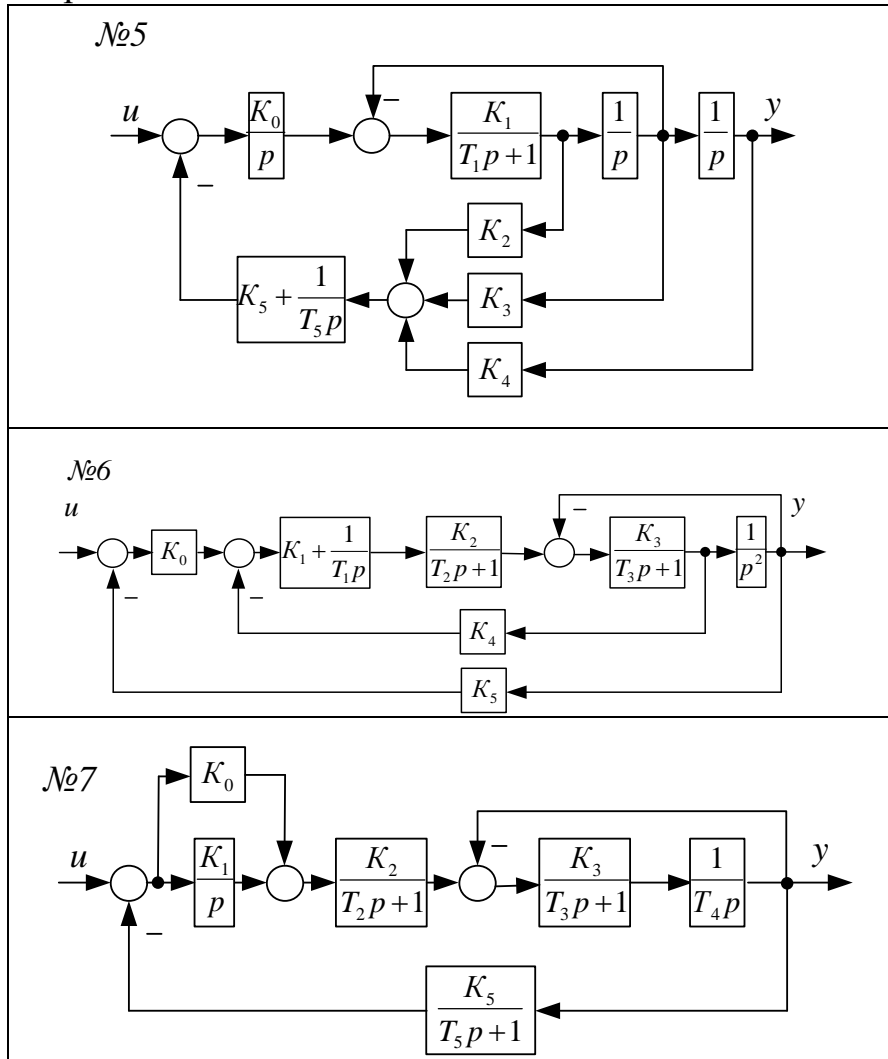
Табл.11.15



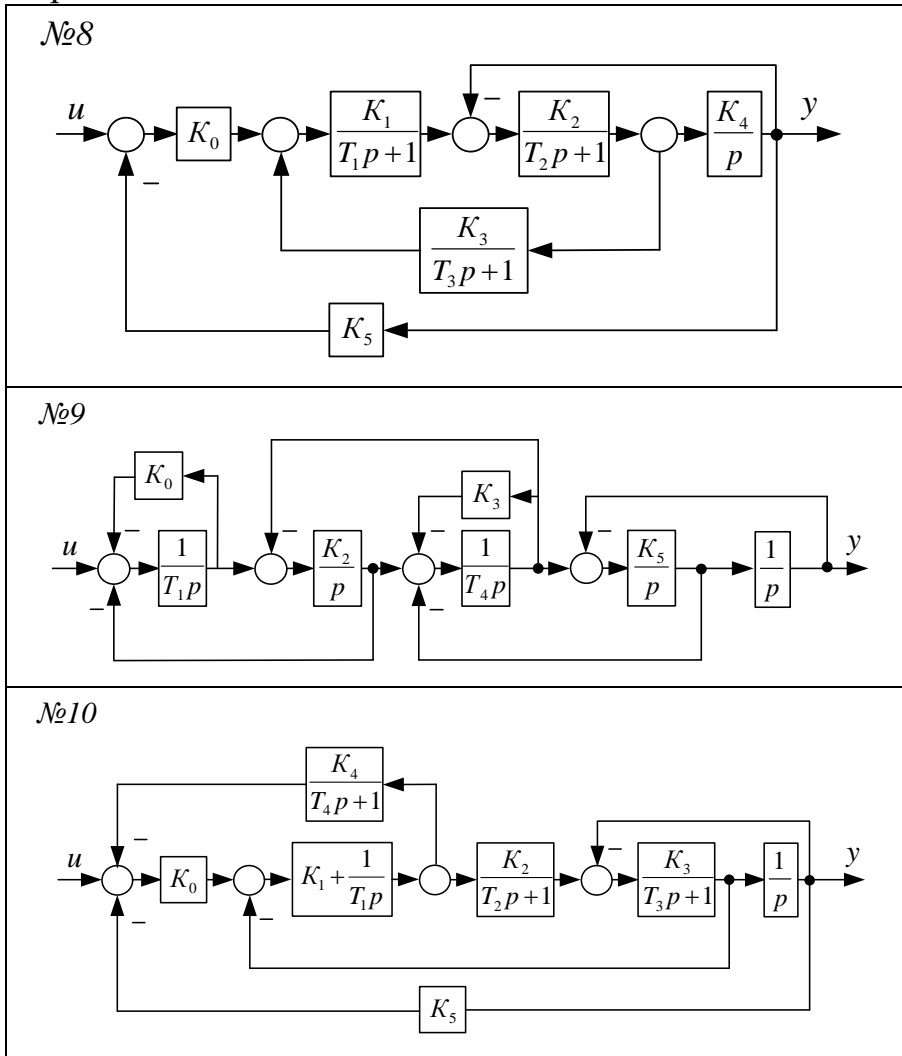
Продовження табл. 11.15



Продовження табл. 11.15

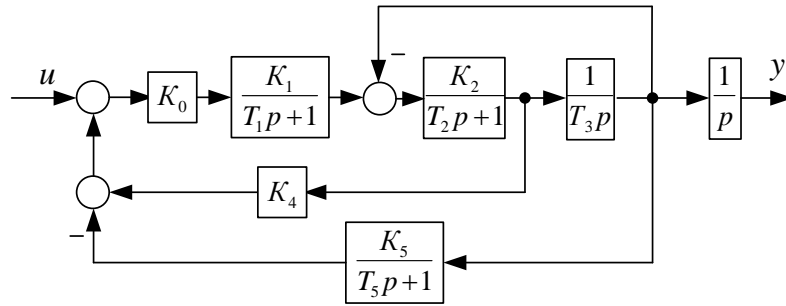


Продовження табл. 11.15

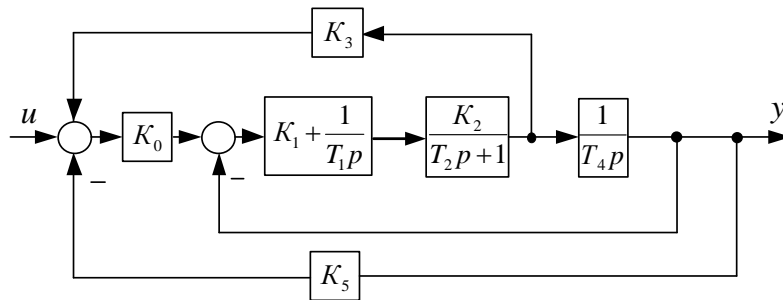


Продовження табл. 11.15

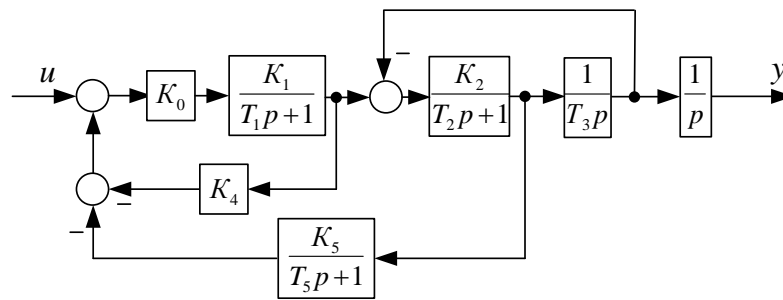
№11



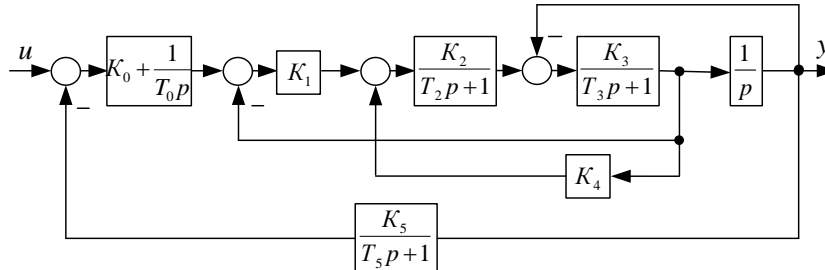
№12



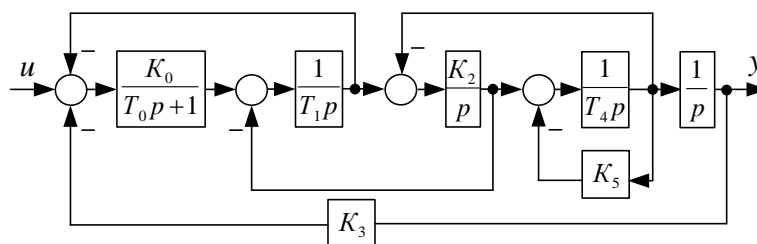
№13



№14



№15



Таблиця 11.16

Варі- ант	№ схе- ми	Параметри ланок структурної схеми											
		K ₀	T ₀	K ₁	T ₁	K ₂	T ₂	K ₃	T ₃	K ₄	T ₄	K ₅	T ₅
1	15	7.3	0.2	-	0.2	4.0	-	0.5	-	-	0.2	0.7	-
2	13	5.0	-	1.0	0.2	4.1	0.8	-	0.3	0.2	-	0.1	0.2
3	11	0.4	-	0.4	1.0	2.2	0.6	-	2.3	0.1	-	2.0	0.1
4	9	0.5	-	-	0.4	2.5	-	1.5	-	-	0.5	5.7	-
5	7	1.4	-	1.0	-	8.7	0.1	0.7	0.2	-	2.5	0.5	0.1
6	5	0.3	-	7.7	0.3	3.6	-	1.5	-	8.1	-	9.0	0.8
7	3	4.8	-	2.5	0.1	0.5	0.2	0.6	0.1	1.5	-	1.5	0.2
8	1	10	-	7.1	0.5	5.0	0.1	-	2.0	0.5	0.2	0.3	0.1
9	2	2.1	0.5	1.5	0.3	0.8	-	1.0	1.0	0.1	-	0.5	0.1
10	4	3.8	0.2	7.7	1.3	70	-	-	0.4	1.2	-	2.0	0.3
11	6	0.1	-	9.5	0.2	2.5	0.5	0.8	0.3	0.1	-	0.3	-
12	8	1.2	0.1	9.5	0.5	1.0	0.1	0.5	0.1	2	-	0.1	-
13	10	2.7	-	3.5	1.0	2.7	1.3	4.8	0.7	0.3	1.5	0.5	-
14	12	5.2	-	0.7	1.0	5.3	0.7	0.1	-	-	2.5	0.1	-
15	14	1.1	3.0	0.9	-	3.5	0.2	1.2	0.7	0.1	-	3.6	0.1
16	15	2.1	0.3	-	0.6	8.5	-	1.7	-	-	0.4	0.1	-
17	13	2.7	-	1.5	1.7	8.3	2.9	-	0.7	0.5	-	0.2	0.1
18	11	0.7	-	0.3	0.4	1.6	1.2	-	0.4	0.2	-	2.6	0.1
19	9	0.2	-	-	0.6	7.5	-	0.6	-	-	0.8	0.9	-
20	7	7.5	-	1.0	-	3.2	0.2	9.5	0.1	-	0.5	8.2	0.2
21	5	0.1	-	2.1	0.5	5.1	-	7.5	-	3.9	-	5.0	0.6
22	3	1.8	-	8.5	0.5	1.5	0.3	0.5	0.5	5.0	-	9.5	0.1
23	1	2.1	-	5.0	0.2	10	0.3	-	0.5	3.0	0.8	0.1	0.5
24	2	0.5	0.8	0.7	0.1	1.5	-	1.0	0.2	0.5	-	8.5	0.1
25	4	12	0.1	0.1	0.5	100	-	-	0.5	0.1	-	4.6	0.1
26	6	0.2	-	7.5	0.1	2.5	0.1	5.0	0.7	0.2	-	0.2	-
27	8	6.9	0.3	4.1	0.7	7.3	0.2	3.8	0.5	3.3	-	0.2	-
28	10	2.5	-	2.9	1.0	9.5	1.4	9.5	0.4	0.1	0.2	1.0	-
29	12	0.2	-	0.2	1.0	5.3	0.2	0.2	-	-	1.1	0.1	-
30	14	2.8	2.0	1.8	-	7.5	0.6	7.2	0.2	0.2	-	3.6	0.1

11.10. Лабораторна робота 10.
ЗАСТОСУВАННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ ДЛЯ
ВИМІРЮВАННЯ ПОТОЧНИХ КООРДИНАТ ОБ'ЄКТІВ
УПРАВЛІННЯ

Мета роботи: ознайомитися з можливостями підвищення точності визначення поточних координат та параметрів руху об'єктів управління

11.10.1. Завдання для лабораторної роботи

1. Згідно свого варіанту початкових даних системи автоматичного управління (таблиця 11.17) виконати моделювання системи управління з точним входом, з шумом, з експоненційним згладжуванням та з фільтром Калмана.
2. Побудувати графіки точного вихідного сигналу координат об'єктів вимірювань та з шумом, оціненого значення фільтром Калмана та експоненціальним згладжуванням, а також графіки СКЗ похибки оцінок для фільтра Калмана та для експоненційного згладжування.
3. Порівняти графіки та зробити висновки.

Таблиця 11.17

№ варіанту	Початкова координата x_0, мм	Швидкість руху об'єктів вимірювань v_0, мм/с	Кількість попередніх відліків в ф-лі експ. згладжування
1	0	10	1
2	35	11	2
3	70	12	1
4	105	14	2
5	140	15	1
6	175	16	2
7	210	17	1
8	245	18	2
9	280	19	1
10	315	20	2
11	350	21	1
12	385	22	2
13	420	23	1
14	455	24	2
15	490	25	1
16	525	26	2

17	560	27	1
18	595	28	2
19	630	29	1
20	665	30	2
21	700	31	1
22	735	32	2
23	770	33	1
24	805	34	2
25	840	35	1
26	875	36	2
27	910	37	1
28	945	38	2
29	980	39	1
30	1000	40	2

11.10.2. Зміст звіту

1. Назва та мета роботи.
2. Початкові дані параметрів руху об'єктів вимірювань згідно свого завдання.
3. Текст програми моделювання.
4. Графіки точного вихідного сигналу координат об'єктів вимірювань та сигналу з шумом, оціненого значення фільтром Калмана та експоненціальним згладжуванням. Графіки СКЗ похибки оцінок у фільтру Калмана та у експоненціальному згладжуванні.
5. Висновки.

11.10.3. Контрольні питання

1. Що являє собою експоненційне згладжування?
2. Які реалізувати моделювання експоненційного згладжування в програмі Matlab?
3. Які значення може приймати коефіцієнт згладжування?
4. Як змінюються графіки експоненційного згладжування при різних значеннях інтенсивності змін параметрів руху об'єктів вимірювань?
5. Які значення може приймати інтенсивність змін параметрів руху?

12. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З МАТЕМАТИЧНИХ ТА ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Практичне заняття 1. МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНОЇ СИСТЕМИ, ЩО ЗАДАНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ

12.1.1. План проведення практичного заняття

1. Стисло нагадати теоретичні відомості, необхідні для виконання індивідуального завдання практичного заняття.
2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального завдання (табл. 12.1).
3. Отримати різницеве рівняння для моделювання об'єкта управління.
4. Розробити програму моделювання об'єкта управління.
5. Отримати результати моделювання об'єкта управління.

Табл. 12.1

№ варіанту	Диференційне рівняння	Метод чисельного інтегрування
1	$\ddot{y} + 3y = 5x$	прямокутників
2	$\ddot{y} + 3y = 5x$	трапецій
3	$2\ddot{y} - \dot{y} + y = 5\dot{x} - 2x$	прямокутників
4	$2\ddot{y} - \dot{y} + y = 5\dot{x} - 2x$	трапецій
5	$\dot{y} + 3y = 2\dot{x} + x$	прямокутників
6	$\dot{y} + 3y = 2\dot{x} + x$	трапецій
7	$\ddot{y} - \dot{y} + y = 3x$	прямокутників
8	$\ddot{y} - \dot{y} + y = 3x$	трапецій
9	$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 4x$	прямокутників
10	$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 4x$	трапецій
11	$\ddot{y} + \dot{y} - 5y = x$	прямокутників
12	$\ddot{y} + \dot{y} - 5y = x$	трапецій
13	$\ddot{y} - 5\dot{y} + y = 2x$	прямокутників
14	$\ddot{y} - 5\dot{y} + y = 2x$	трапецій
15	$\ddot{y} - 3\dot{y} + y = \dot{x} - 2x$	прямокутників
16	$\ddot{y} - 3\dot{y} + y = \dot{x} - 2x$	трапецій
17	$\dot{y} - 3y = \dot{x} + x$	прямокутників
18	$\dot{y} - 3y = \dot{x} + x$	трапецій

№ варіанту	Диференційне рівняння	Метод чисельного інтегрування
19	$\ddot{y} + \dot{y} + y = 5x$	прямокутників
20	$\ddot{y} + \dot{y} + y = 5x$	трапецій
21	$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	прямокутників
22	$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	трапецій
23	$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x$	прямокутників
24	$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x$	трапецій
25	$\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = \dot{x}$	прямокутників
26	$\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = \dot{x}$	трапецій
27	$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{x} - x$	прямокутників
28	$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{x} - x$	трапецій
29	$\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\dot{x} + 2x$	прямокутників
30	$\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	трапецій

2. Приклад виконання завдання практичного заняття

1. Задано диференційне рівняння

$$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x, c$$

де x – вхідний сигнал ОУ; y – вихідний сигнал ОУ.

2. Вводимо оператор диференціювання та підставляємо його в диференційне рівняння:

$$D = \frac{d}{dt}; \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2};$$

$$2D^2y + Dy + y = x + 7Dx; \quad y + \frac{y}{D} + \frac{y}{D^2} = \frac{x}{D^2} - \frac{7x}{D}.$$

3. Замінюємо оператор диференціювання на оператор інтегрування, для цього ліву і праву частину рівняння ділимо на старшу ступінь D :

$$I = \frac{1}{D} = \int \dots dx; \quad I^2 = \frac{1}{D^2};$$

$$2y + yI + yI^2 = xI + 7xI^2.$$

4. Виконуємо пряме z -перетворення з використанням таблиці підстановки (табл. 12.2) для оператора інтегрування з урахуванням методу чисельного інтегрування:

$$y(t) \rightarrow Y(z); \quad x(t) \rightarrow X(z).$$

Таблиця 12.2

Кількість інтегрувань	Оператор для кусочно-постійної функції		Оператор для кусочно-лінійної функції	
	Позначення	Вираз	Позначення	Вираз
1	$I_{П1}$	$\frac{\tau}{z-1}$	$I_{Л1}$	$\frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$
2	$I_{П2}$	$\frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$	$I_{Л2}$	$\frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{(z^2+4z+1)}{(z-1)^2}$

Застосовуємо метод трапецій для чисельного інтегрування:

$$I = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}; \quad I^2 = \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2};$$

$$2Y(z) + Y(z) \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + Y(z) \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} =$$

$$= X(z) \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} + X(z) \frac{7\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}.$$

5. Виносимо за дужки $Y(z)$, $X(z)$ та приводимо рівняння до спільного знаменника у лівій та правій частині. В результаті отримуємо:

$$Y(z) \left[2 + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} \right] = X(z) \left[\frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} + \frac{7\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right];$$

$$Y(z) \left[\frac{12(z-1)^2 + 3\tau(z+1)(z-1) + \tau^2(z^2+4z+1)}{6(z-1)^2} \right] =$$

$$= X(z) \left[\frac{21\tau(z+1)(z-1) + \tau^2(z^2+4z+1)}{6(z-1)^2} \right].$$

6. Відкидаємо однакові значення знаменника лівої та правої частини рівняння, в чисельнику приводимо подібні доданки щодо ступенів z :

$$Y(z) \left[(\tau^2 + 3\tau + 12)z^2 + (4\tau^2 - 24)z + (\tau^2 - 3\tau + 12) \right] =$$

$$= X(z) \left[(\tau^2 + 21\tau)z^2 + 4\tau^2z + (\tau^2 - 21\tau) \right]$$

7. Переходимо до від'ємних ступенів змінної z шляхом ділення лівої і правої частини рівняння на старшу ступінь z :

$$Y(z) \left[(\tau^2 + 3\tau + 12) + (4\tau^2 - 24)z^{-1} + (\tau^2 - 3\tau + 12)z^{-2} \right] =$$

$$= X(z) \left[(\tau^2 + 21\tau) + 4\tau^2z^{-1} + (\tau^2 - 21\tau)z^{-2} \right]$$

8. Виконуємо зворотнє z -перетворення. Отримуємо різницеве рівняння та приводимо його до виду, зручному для моделювання:

$$y_n = \frac{24 - 4\tau^2}{\tau^2 + 3\tau + 12} y_{n-1} - \frac{\tau^2 - 3\tau + 12}{\tau^2 + 3\tau + 12} y_{n-2} + \frac{\tau^2 + 21\tau}{\tau^2 + 3\tau + 12} x_n + 4\tau^2 x_{n-1} + \frac{\tau^2 - 21\tau}{\tau^2 + 3\tau + 12} x_{n-2}.$$

9. Складаємо програму, яка буде обчислювати значення відліків, використовуючи різницеве рівняння. Вхідний сигнал ОУ є одиничним ступеневим впливом.

Лістинг програми моделювання

```

program pr1;
uses crt;
var y: array[-2..100] of real;
    x: array[-2..100] of real;
    f1: text;
    n: integer;
    i: integer;
    t: real;
begin
  clrscr;
  assign(f1, 'praktik1.txt'); rewrite(f1);
  write('N='); readln(n);
  write('t='); readln(t);
  y[-1]:=0; y[0]:=0; y[1]:=0;
  x[-1]:=0; x[0]:=0;
  for i:=1 to n do begin
    x[i]:=1;
    y[i]:=((12+3*sqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
    yn[i-1]-((12+aqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
    yn[i-1]-((4*sqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
    yn[i-1]-((sqr(t)*sqr(t)-21*sqr(t))/(sqr(t)*
    sqr(t)+21*sqr(t)))*yn[i-2];
  end;
  writeln(f1, ' ');
  writeln(f1, 'N=', n);
  writeln(f1, 't=', t:2:2);
  writeln(f1, ' ');
  writeln(f1, ' ');
  writeln(f1, '


|   |      |      |
|---|------|------|
| i | x[i] | y[i] |
|---|------|------|


');
  writeln(f1, '


|   |      |      |
|---|------|------|
| i | x[i] | y[i] |
|---|------|------|


');
  for i:=0 to n do begin
    writeln(f1, '|| ', i:3, ' || ', x[i]:1:0, ' ||
    ', y[i]:3:6, ' || ');
  end;
end;

```

```

end;
writeln(f1, ' _____ ');
close(f1);
end.

```

Результати моделювання

Початкові умови: $y[-1]:=0$; $y[0]:=0$; $x[-1]:=0$; $x[0]:=0$
Кількість відліків та крок інтегрування:
 $N=100$; $t=0.10$

Табл. 12.3

i	x[i]	y[i]
1	1	0.000000
2	1	0.008292
3	1	0.024628
4	1	0.048521
5	1	0.079257
6	1	0.115920
7	1	0.157414
8	1	0.202501
9	1	0.249835
10	1	0.298003
11	1	0.345567
12	1	0.391108
13	1	0.433266
14	1	0.470782
15	1	0.502537
16	1	0.527583
17	1	0.545172
18	1	0.554779
19	1	0.556117
20	1	0.549147
.....		
96	1	0.469515
97	1	0.431810
98	1	0.389507
99	1	0.343868
100	1	0.296257

Вихідний сигнал ОУ, В

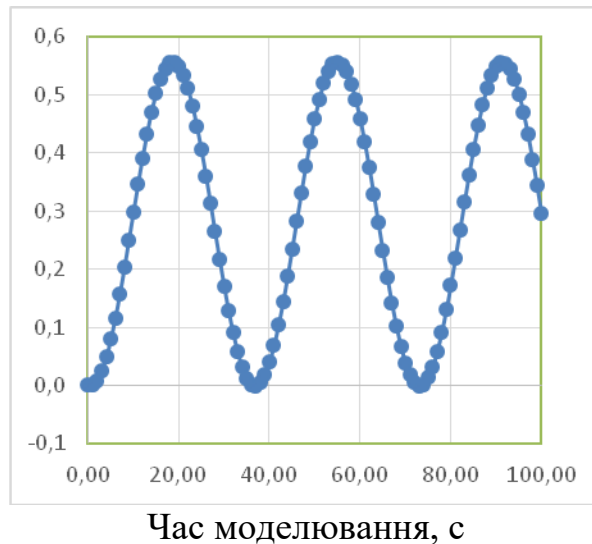


Рис. 12.1. Результат чисельного рішення диференційного рівняння, що є результатом моделювання ОУ

12.1.3. Контрольні питання

1. Наведіть основні етапи моделювання САУ за допомогою ЕОМ.
2. Виконайте порівняльний аналіз різних методів апроксимації вхідних сигналів (кусочно-постійна і кусочно-лінійна апроксимація).
3. Порівняйте (графічно) помилки при одержанні вихідного сигналу ОУ при чисельному інтегруванні по формулі прямокутників і формулі трапецій.
4. Чому при дворазовому застосуванні операції чисельного інтегрування виникає необхідність застосування формули трапецій?
5. Як отримати з диференційного рівняння n -го порядку систему з n диференціальних рівнянь першого порядку?
6. Обґрунтуйте (графічно) алгоритм передбачення і виправлення (модифікований метод Ейлера).
7. Проведіть порівняльний аналіз методів чисельного інтегрування з точки зору початкових умов, що вимагаються для початку обчислень.
8. Як отримати початкові умови для багатокрокових методів чисельного інтегрування?
9. Як оцінити похибку чисельного інтегрування для модифікованого методу Ейлера?
10. Поясніть, як оцінити похибку чисельного інтегрування для методу Рунге-Кутта?
11. Що таке процедура автоматичного регулювання кроку інтегрування?
12. Проведіть порівняльний аналіз методів чисельного інтегрування з точки зору точності і часу обчислень на ЕОМ.

Приклад виконання завдання практичного заняття

Початкові дані для генерації випадкових чисел:

Приклад розрахунку випадкових чисел на виході генератора наведено в табл.12.5.

Табл. 12.5

	x_i	$a \cdot x_i$	x_{i+1}

Розробимо програму, яка буде генерувати випадкові числа за заданими початковими даними і алгоритмами.

Лістинг програми моделювання

```
program pr2;
uses crt;
var x: array[0..1000] of integer;
i,n,a,c: integer;
f1: text;
begin
clrscr;
assign(f1,'pr2-1.txt'); rewrite(f1);
write('x[0]='); read(x[0]);
write('a='); read(a);
write('n='); read(n);
write('Кількість циклів: '); read(c);
writeln(f1,'X[0]=' ,x[0],'; A=' ,a,'; N=' ,n);
writeln(f1,' ');
writeln(f1,'Алгоритм: X[i+1]:=(A*X[i]) mod N');
writeln(f1,'| i | x[i] | ax[i] | x[i+1] |');
writeln(f1,' ');
for i:=0 to c do begin
x[i+1]:=(a*x[i]) mod n;
writeln(f1,'| ',i:5,' | ',x[i]:5,' |
',a*x[i]:5,' | ',x[i+1]:5,' |');
end;
writeln(f1,' -----');
writeln(f1,' ');
```

```

writeln(f1, 'Алгоритм: X[i+1]:= (A*X[i]+1) mod N');
writeln(f1, '| i | x[i] | ax[i]+1 | x[i+1] |');
writeln(f1, ' ');
for i:=0 to c do begin
    x[i+1]:= (a*x[i]+1) mod n;
    writeln(f1, '| i:5, ' | ', x[i]:5, ' |
', a*x[i]+1:5, ' | ', x[i+1]:5, ' |');
end;
writeln(f1, ' -----');
writeln(f1, ' ');
writeln(f1, 'Алгоритм: X[i+1]:= (A*X[i]+N-1) mod N');
writeln(f1, '| i | x[i] | ax[i]+N-1 | x[i+1] |');
for i:=0 to c do begin
    x[i+1]:= (a*x[i]+N-1) mod n;
    writeln(f1, '| i:5, ' | ', x[i]:5, ' |
', a*x[i]+n-1:5, ' | ', x[i+1]:5, ' |');
end;
writeln(f1, ' -----');
writeln(f1, ' ');
close(f1);
end.

```

Результати моделювання

Початкові дані: X[0]=3; A=59; N=7

Алгоритм: X[i+1]:= (A*X[i]) mod N

i	x[i]	ax[i]	x[i+1]
0	3	177	2
1	2	118	6
2	6	354	4
3	4	236	5
4	5	295	1
5	1	59	3
6	3	177	2
7	2	118	6
8	6	354	4
9	4	236	5
10	5	295	1
11	1	59	3
12	3	177	2
13	2	118	6
14	6	354	4
15	4	236	5
16	5	295	1
17	1	59	3

18	3	177	2
19	2	118	6
20	6	354	4

 Алгоритм: $X[i+1] := (A \cdot X[i] + 1) \bmod N$

i	x[i]	ax[i]+1	x[i+1]
0	3	178	3
1	3	178	3
2	3	178	3
3	3	178	3
4	3	178	3
5	3	178	3
6	3	178	3
7	3	178	3
8	3	178	3
9	3	178	3
10	3	178	3
11	3	178	3
12	3	178	3
13	3	178	3
14	3	178	3
15	3	178	3
16	3	178	3
17	3	178	3
18	3	178	3
19	3	178	3
20	3	178	3

 Алгоритм: $X[i+1] := (A \cdot X[i] + N - 1) \bmod N$

i	x[i]	ax[i]+N-1	x[i+1]
0	3	183	1
1	1	65	2
2	2	124	5
3	5	301	0
4	0	6	6
5	6	360	3
6	3	183	1
7	1	65	2
8	2	124	5
9	5	301	0
10	0	6	6
11	6	360	3
12	3	183	1
13	1	65	2

	14		2		124		5	
	15		5		301		0	
	16		0		6		6	
	17		6		360		3	
	18		3		183		1	
	19		1		65		2	
	20		2		124		5	

12.2.3. Контрольні питання

1. Назвіть технічні та програмні засоби отримання випадкових чисел.
2. Назвіть основні засоби формування розрядів випадкових двійкових чисел в генераторі випадкових чисел.
3. Проведіть порівняльний аналіз паралельних і послідовних генераторів випадкових чисел.
4. Назвіть основні алгоритми отримання випадкових чисел у ЕОМ.
5. Як визначити період повторення випадкових чисел, отриманих від генератора?
6. Який вигляд має АКФ для генератора випадкових чисел?
7. Як отримати АКФ генератора випадкових чисел, використовуючи пряме і зворотне перетворення Фур'є?

Практичне заняття 3.

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ТА ПРОГРАМИ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРА ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ НА ОСНОВІ ПСЕВДОВИПАДКОВОЇ БІНАРНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Для управління різним виробничим обладнанням будується система автоматичного управління (САУ). При її розробці треба знати передаточну функцію цього обладнання (тобто об'єкта управління – ОУ). Передаточна функція визначається шляхом ідентифікації ОУ. Ідентифікація полягає в подачі на вхід ОУ тестового сигналу з фіксацією виходу ОУ.

В якості тестових сигналів використовуються:

- одиничний сигнал («сходінка»);
- синусоїда;
- «білий» шум.

«Білий» шум - випадкова функція з некорельованими значеннями відліків (не залежними один від одного). «Білий» шум генерується генератором «білого» шуму, який може бути апаратним або програмним.

12.3.1. План проведення практичного заняття

1. Стисло нагадати теоретичні відомості, необхідні для виконання індивідуального завдання практичного заняття.

2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (табл. 13.1).

3. В результаті практичного заняття треба створити апаратну і програмну реалізацію генератора на виході якого випадковим чином з'являються 0 і 1, або +1 і -1 (псевдовипадкова бінарна послідовність).

4. Викладачем задається утворюючий поліном D псевдовипадкової бінарної послідовності (табл. 13.1). Старша ступінь полінома N визначає період повторення відліків вихідного сигналу генератора (2^N-1), а також кількість елементів затримки (елементів пам'яті) в апаратній реалізації генератора.

5. Після цього потрібно розробити і програмно реалізувати алгоритми генерації випадкових чисел. Початкові дані обрати згідно табл. 13.1.

6. Розробити програму, яка буде генерувати випадкові числа за заданими алгоритмами.

Правила обчислення результату операції додавання за модулем 2:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

3.2. Приклад виконання завдання практичного заняття

Утворюючий поліном псевдовипадкової бінарної послідовності: $D^7 \oplus D^5 \oplus D^2$. Початковий стан елементів затримки Y_i в апаратній реалізації генератора наведено в табл. 12.6.

Табл.12.6

Варіант	Утворюючий поліном	Варіант	Утворюючий поліном
1	$D^8 \oplus D^6$	16	$D^7 \oplus D^1$
2	$D^7 \oplus D^5$	17	$D^6 \oplus D^4$
3	$D^8 \oplus D^5$	18	$D^6 \oplus D^3$
4	$D^6 \oplus D^5$	19	$D^6 \oplus D^2$
5	$D^8 \oplus D^7$	20	$D^6 \oplus D^1$
6	$D^8 \oplus D^5$	21	$D^9 \oplus D^8$
7	$D^8 \oplus D^4$	22	$D^9 \oplus D^7$
8	$D^8 \oplus D^3$	23	$D^9 \oplus D^1$
9	$D^8 \oplus D^2$	24	$D^9 \oplus D^2$
10	$D^8 \oplus D^1$	25	$D^7 \oplus D^5 \oplus D^4$
11	$D^7 \oplus D^6$	26	$D^7 \oplus D^6 \oplus D^3$
12	$D^7 \oplus D^5$	27	$D^7 \oplus D^5 \oplus D^1$
13	$D^7 \oplus D^4$	28	$D^7 \oplus D^4 \oplus D^1$
14	$D^7 \oplus D^3$	29	$D^7 \oplus D^6 \oplus D^2$
15	$D^7 \oplus D^2$	30	$D^7 \oplus D^5 \oplus D^1$

Табл. 13.2

Елемент затримки	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
Початковий стан	1	0	0	1	0	0	1

Структурна схема генератора зображена на рис. 12.2.

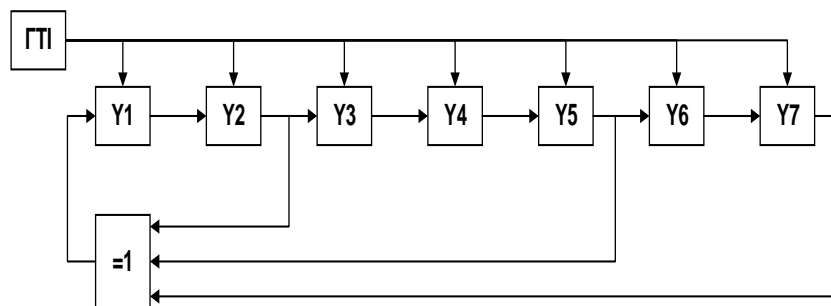


Рис. 12.2. Генератор псевдовипадкової бінарної послідовності:

Y_i – елементи затримки; ГПІ – генератор тактових імпульсів;
 $=1$ – суматор за модулем 2

Розробимо програму, яка буде генерувати псевдовипадкову бінарну послідовність.

Лістинг програми моделювання

```
program pr3;
uses crt;
var
  y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7: boolean;
  x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7: boolean;
  res: boolean;
  d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7: byte;
  sum: byte;
  i: integer;
  n: integer;
  f1: text;

begin clrscr;
assign(f1,'pr3.doc'); rewrite(f1);

res:=false; i:=0;
writeln('Поліном: [D7+D5+D2]');
write('y1='); readln(d1);
write('y2='); readln(d2);
write('y3='); readln(d3);
write('y4='); readln(d4);
write('y5='); readln(d5);
write('y6='); readln(d6);
write('y7='); readln(d7);
writeln(' ');
write('i='); readln(n);

y7:= d7=1; x7:=y7;
y6:= d6=1; x6:=y6;
y5:= d5=1; x5:=y5;
y4:= d4=1; x4:=y4;
y3:= d3=1; x3:=y3;
y2:= d2=1; x2:=y2;
y1:= d1=1; x1:=y1;
res:=y2 xor y5 xor y7;

writeln(f1,'Поліном: [D7+D5+D2]');
writeln(f1,'Початкові умови:');
writeln(f1,'y1=',d1:2,' ;y2=',d2:2,' ;y3=',d3:2,'
;y4=',d4:2,
          ' ;y5=',d5:2,' ;y6=',d6:2,' ;y7=',d7:2);
writeln(f1,' ');
```

```

writeln(f1,' i| S| y1 y2 y3 y4 y5 y6 y7');
writeln(f1,i:3,'| ',sum,'| ',d1:2,' ',d2:2,' ',d3:2,' ',d4:2,' ',d5:2,' ',d6:2,' ',d7:2);

for i:=1 to n do begin
  res:=y2 xor y5 xor y7;
  y7:=y6;
  y6:=y5;
  y5:=y4;
  y4:=y3;
  y3:=y2;
  y2:=y1;
  y1:=res;
  if (res=true) then sum:=1 else sum:=0;
  if (y1=true) then d1:=1 else d1:=0;
  if (y2=true) then d2:=1 else d2:=0;
  if (y3=true) then d3:=1 else d3:=0;
  if (y4=true) then d4:=1 else d4:=0;
  if (y5=true) then d5:=1 else d5:=0;
  if (y6=true) then d6:=1 else d6:=0;
  if (y7=true) then d7:=1 else d7:=0;

  writeln(f1,i:3,'| ',sum,'| ',d1:2,' ',d2:2,' ',d3:2,' ',d4:2,' ',d5:2,' ',d6:2,' ',d7:2);
  if (x1=y1) and
    (x2=y2) and
    (x3=y3) and
    (x4=y4) and
    (x5=y5) and
    (x6=y6) and
    (x7=y7) then
begin writeln(f1,' ---=====--'); end;
end;
close(f1)
end.

```

Результати моделювання

Поліном: [D7+D5+D2]

Початкові умови:

y1= 1; y2= 0; y3= 0; y4= 1; y5= 0; y6= 0; y7= 1

i	S	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7
0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0	1	0

3		1		1	0	1	1	0	0	1
4		1		1	1	0	1	1	0	0
5		0		0	1	1	0	1	1	0
6		0		0	0	1	1	0	1	1
7		1		1	0	0	1	1	0	1
8		0		0	1	0	0	1	1	0
9		0		0	0	1	0	0	1	1
10		1		1	0	0	1	0	0	1

11		1		1	1	0	0	1	0	0
12		0		0	1	1	0	0	1	0
13		1		1	0	1	1	0	0	1
14		1		1	1	0	1	1	0	0
15		0		0	1	1	0	1	1	0
16		0		0	0	1	1	0	1	1
17		1		1	0	0	1	1	0	1
18		0		0	1	0	0	1	1	0
19		0		0	0	1	0	0	1	1
20		1		1	0	0	1	0	0	1

12.3.3. Контрольні питання

1. Назвіть технічні та програмні засоби отримання випадкових чисел.
2. Назвіть основні засоби формування розрядів випадкових двійкових чисел в генераторі випадкових чисел.
3. Проведіть порівняльний аналіз паралельних і послідовних генераторів випадкових чисел.
4. Назвіть основні алгоритми отримання випадкових чисел у ЕОМ.
5. Чим викликана необхідність переходу від випадкових чисел до псевдовипадкових послідовностей? Які умови при цьому необхідно виконати?
6. Намалюйте структурну схему і пояснити принцип роботи генератора нуль - послідовності максимальної довжини (НПМД). Характеристичний поліном $Q=D^3\oplus D$; число розрядів регістру зсуву $N=3$.
7. Визначить період повторення, кількість нулів і одиниць, що виробляються за період, для генератора НПМД, побудованого на регістрі зсуву, що містить 7 розрядів.
8. Визначить імовірності появи нулів і одиниць для генератора НПМД з числом розрядів регістру зсуву $N=4$.
9. Який вигляд має АКФ для генератора НПМД?

12.4. Практичне заняття 4. РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

12.4.1. План проведення практичного заняття

1. Стисло нагадати теоретичні відомості, необхідні для виконання індивідуального завдання практичного заняття.

2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (табл. 12.7).

3. Отримати різницеве рівняння для ОУ 1-го порядку та 2-го порядку. Початкові дані обрати згідно табл. 12.7 для ОУ 1-го порядку (коефіцієнт α_1)

4. Розробити програму, яка буде обчислювати перехідну характеристику ОУ.

4.2. Приклад виконання завдання практичного заняття

Початкові дані для виконання завдання:

$$\alpha_1 = 1,9; \alpha_2 = 0,4; \beta_2 = 2,2.$$

Аперіодичний ОУ першого порядку має передаточну функцію:

$$K_0(z) = \frac{\alpha_1}{1 - (1 - \alpha_1)z^{-1}}.$$

Аперіодичний ОУ другого порядку має передаточну функцію:

$$K_0(z) = \frac{\alpha_2 - (\alpha_2 - \beta_2)z^{-1}}{1 - (2 - \alpha_2 - \beta_2)z^{-1} + (1 - \alpha_2)z^{-2}}.$$

Табл. 12.7

Варіант	Для ОУ 1-го порядку	Для ОУ 2-го порядку		Варіант	Для ОУ 1-го порядку	Для ОУ 2-го порядку	
	α_1	α_2	β_2		α_1	α_2	β_2
1	0,4	0,5	2,0	16	0,7	0,5	2,0
2	0,5	0,4	2,2	17	0,8	0,4	2,2
3	0,6	0,8	2,5	18	0,9	0,8	2,5
4	0,7	1,2	2,7	19	1,1	1,2	2,7
5	0,8	1,5	3,2	20	1,2	1,5	3,2
6	0,9	0,5	2,0	21	1,3	0,5	2,0
7	1,1	0,4	2,2	22	1,4	0,4	2,2
8	1,3	0,8	2,5	23	1,5	0,8	2,5
9	1,4	1,2	2,7	24	1,6	1,2	2,7
10	1,5	1,5	3,2	25	1,7	1,5	3,2
11	1,8	0,5	2,0	26	1,8	0,5	2,0
12	1,9	0,4	2,2	27	1,9	0,4	2,2
13	0,4	0,8	2,5	28	0,4	0,8	2,5
14	0,5	1,2	2,7	29	0,5	1,2	2,7

15	0,6	1,5	3,2	30	0,6	1,5	3,2
----	-----	-----	-----	----	-----	-----	-----

Знайдемо різницеве рівняння для ОУ першого порядку:

$$K_0(z) = \frac{\alpha_1}{1 - (1 - \alpha_1)z^{-1}} = \frac{1.9}{1 - (1 - 1.9)z^{-1}} = \frac{1.9}{1 + 0.9z^{-1}},$$

$$\frac{1.9}{1 + 0.9z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)},$$

$$(1 + 0.9z^{-1}) \cdot Y(z) = 1.9 \cdot X(z),$$

$$Y(z) = 1.9 \cdot X(z) - 0.9z^{-1} \cdot Y(z).$$

Знайдемо різницеве рівняння для ОУ другого порядку:

$$K_0(z) = \frac{\alpha_2 - (\alpha_2 - \beta_2)z^{-1}}{1 - (2 - \alpha_2 - \beta_2)z^{-1} + (1 - \alpha_2)z^{-2}} =$$

$$= \frac{0.4 - (0.4 - 2.2)z^{-1}}{1 - (2 - 0.4 - 2.2)z^{-1} + (1 - 0.4)z^{-2}} = \frac{0.4 + 1.8z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} + 0.6z^{-2}},$$

$$\frac{0.4 + 1.8z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} + 0.6z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)},$$

$$Y(z) + 0.2Y(z) \cdot z^{-1} + 0.6Y(z) \cdot z^{-2} = 0.4X(z) + 1.8X(z) \cdot z^{-1},$$

$$Y(z) = 0.4X(z) + 1.8X(z) \cdot z^{-1} - 0.2Y(z) \cdot z^{-1} - 0.6Y(z) \cdot z^{-2}.$$

Виконуємо обернене Z-перетворення і отримуємо різницеве рівняння для ОУ першого порядку:

$$Y(z) = 1.9 \cdot X(z) - 0.9z^{-1} \cdot Y(z),$$

$$y(n) = 1.9x_n - 0.9y_{n-1}.$$

Виконуємо обернене Z-перетворення і отримуємо різницеве рівняння для ОУ другого порядку:

$$Y(z) = 0.4X(z) + 1.8X(z) \cdot z^{-1} - 0.2Y(z) \cdot z^{-1} - 0.6Y(z) \cdot z^{-2},$$

$$y(n) = 0.4x_n + 1.8x_{n-1} - 0.2y_{n-1} - 0.6y_{n-2}.$$

Лістинг програми моделювання

```

program pr4;
uses crt;
var y1,y2: array[-2..100] of real;
    x: array[-2..100] of real;
    f1: text;
    n,i: integer;
    a1,a2,b1,b2,b3,b4: real;

begin clrscr;
assign(f1, 'PR4.doc'); rewrite(f1);
writeln('ОУ1 Введіть коефіцієнти');
write('x(n)='); readln(a1);
write('y(n-1)='); readln(a2);

```

```

writeln('OY2 Введіть коефіцієнти');
write('x(n)='); readln(b1);
write('x(n-1)='); readln(b2);
write('y(n-1)='); readln(b3);
write('y(n-2)='); readln(b4);
writeln(' ');
write('N='); readln(n);
writeln('Натисніть Enter...'); readkey;
y1[-2]:=0; y1[-1]:=0; y1[0]:=0;
y2[-2]:=0; y2[-1]:=0; y2[0]:=0;
x[-2]:=0; x[-1]:=0; x[0]:=0;

for i:=1 to n do begin
  x[i]:=1;
  y1[i]:=a1*x[i]+a2*y1[i-1]; end;

for i:=1 to n do begin
  x[i]:=1;
  y2[i]:=b1*x[i]+b2*x[i-1]+b3*y2[i-1]+b4*y2[i-2];
end;
writeln(f1,'y1[i]=(',a1:2:2,')*x[i]+(',a2:2:2,')*y[i-1]');
writeln(f1,'y2[i]=(',b1:2:2,')*x[i]+(',b2:2:2,')*x[i-1]+(',b3:2:2,')*y[i-1]+(',b4:2:2,')*y[i-2]');
writeln(f1,' ');
writeln(f1,'N=',n);
writeln(f1,' ');
writeln(f1,' | OY1 | OY2 |');
writeln(f1,'-----');
writeln(f1,' N| x[n] | y[n] | x[n] | y[n] |');
for i:=0 to n do begin
  writeln(f1,i:2,' | ',x[i]:1:1,' | ', y1[i]:3:6,' | ',x[i]:1:1,' | ', y2[i]:3:6,' |');
end;
writeln(f1,' ');
for i:=0 to n do begin writeln(f1, y1[i]:3:6);
end;
writeln(f1,' ');
for i:=0 to n do begin writeln(f1, y2[i]:3:6);
end;
close(f1); end.

```

Результати моделювання

$y1[i] = (1.90) * x[i] + (-0.90) * y[i-1]$

$$y2[i] = (0.40) * x[i] + (1.80) * x[i-1] + (-0.60) * y[i-1] + (-6.0E-01) * y[i-2]$$

N=50

		OY1		OY2	
N	x[n]	y[n]	x[n]	y[n]	
0	0.0	0.000000	0.0	0.000000	
1	1.0	1.900000	1.0	0.400000	
2	1.0	0.190000	1.0	1.960000	
3	1.0	1.729000	1.0	0.784000	
4	1.0	0.343900	1.0	0.553600	
5	1.0	1.590490	1.0	1.397440	
6	1.0	0.468559	1.0	1.029376	
7	1.0	1.478297	1.0	0.743910	
8	1.0	0.569533	1.0	1.136028	
9	1.0	1.387420	1.0	1.072037	
10	1.0	0.651322	1.0	0.875161	
.....					
45	1.0	1.008728	1.0	0.999984	
46	1.0	0.992145	1.0	1.000001	
47	1.0	1.007070	1.0	1.000009	
48	1.0	0.993637	1.0	0.999994	
49	1.0	1.005726	1.0	0.999998	
50	1.0	0.994846	1.0	1.000005	

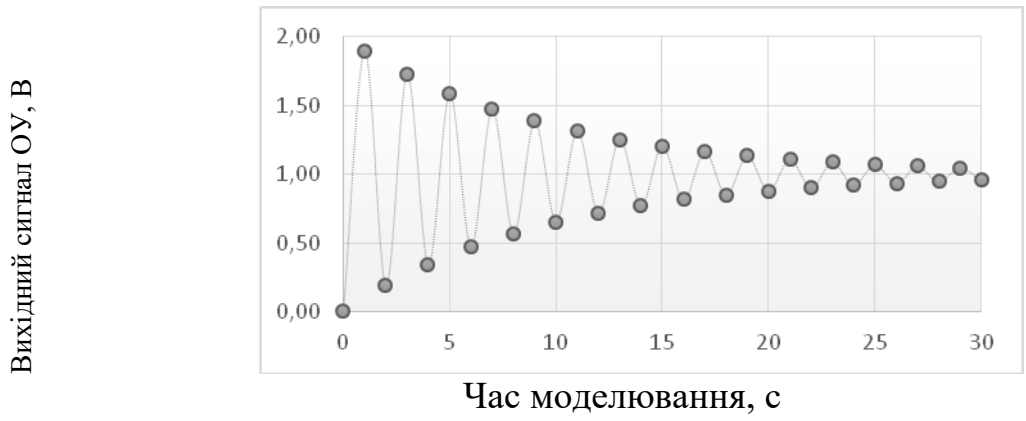


Рис. 12.3. Графік вихідного сигналу аперіодичного ОУ першого порядку

Вихідний сигнал ОУ, В

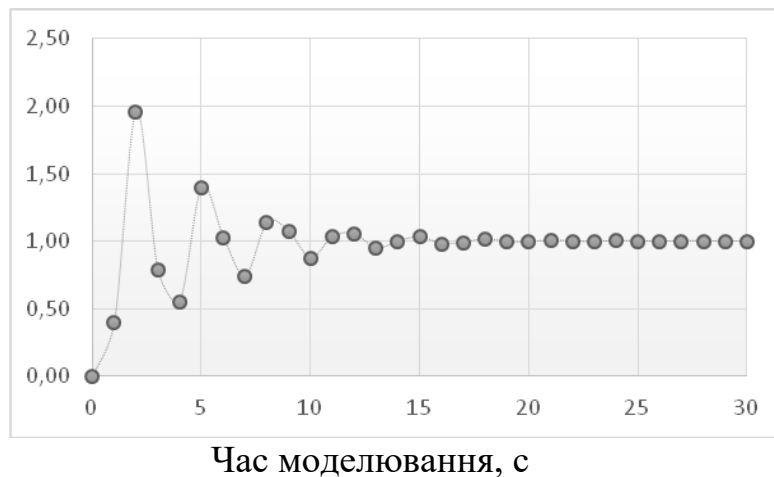


Рис. 12.4. Графік вихідного сигналу аперіодичного ОУ другого порядку

12.4.3. Контрольні питання

1. Дайте визначення перехідної та імпульсної характеристик ОУ.
2. Дайте пояснення фізичного змісту методу обчислення вихідної реакції ОУ шляхом згортки вхідного впливу і імпульсної характеристики ОУ.
3. Які властивості повинні мати сигнали, що використовуються для ідентифікації ОУ?
4. Намалюйте структурну схему для визначення динамічних характеристик ОУ в реальному масштабі часу. Поясніть її роботу.
5. Як одержати рівняння, що описує ОУ, по його передаточній функції?
6. Визначить вигляд перехідної характеристики аперіодичного ОУ першого порядку при таких значеннях коефіцієнта α в передатній функції: 0,5; 1; 1,5; 2,0; 2,5.

12.5. Практичне заняття 5. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ ВЗАЄМНОЇ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

При моделюванні ОУ одним із завдань є визначення (ідентифікація) його динамічних характеристик. Ця задача може бути вирішена за методом взаємної кореляційної функції (ВКФ) вхідного і вихідного сигналів.

При дослідженні даного методу будемо припускати, що процеси, що протікають в ОУ, стаціонарні і ергодичні.

Точне рішення задачі ідентифікації вимагає спостереження за процесами, які досліджуються, на достатньо великому (теоретично нескінченному) відрізку часу. Але в реальній системі потрібно обмежувати час спостереження, поширюючи отримані дані на нескінченний інтервал спостереження. Отримані при такому підході результати будуть наближеними.

Оцінка ступеня такого наближення – одне з важливих завдань, що вирішуються при моделюванні ОУ.

12.5.1. План проведення практичного заняття

1. Стисло нагадати теоретичні відомості, необхідні для виконання індивідуального завдання практичного заняття.

2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (див. табл. 12.8).

3. Імпульсну характеристику отримуємо, якщо на вхід ОУ подані випадкові числа (псевдовипадкова бінарна послідовність) від цифрового генератора шуму і визначимо ВКФ входу і виходу:

$$R_{xy}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/(2N + 1) \sum_i y(i)x(i - n), \quad (15.1)$$

де $n = 0, 1, \dots, N-1$, N – кількість дискретних відліків вхідного $x(i)$ та вихідного $y(i)$ сигналів.

Обмежуючись кінцевими вибірками сигналів $x(i)$ та $y(i)$, маємо:

$$R_{xy}(n) = 1/(N - n) \sum_{i=1}^{N-n} y(i)x(i + n). \quad (15.2)$$

4. Для оцінки якості цифрового генератора шуму обчислюється його автокореляційна функція (АКФ):

$$R_{xy}(n) = 1/(N - n) \sum_{i=1}^{N-n} x(i)x(i + n). \quad (15.3)$$

5. Розробити програму, яка буде генерувати псевдовипадкову бінарну послідовність, обчислювати її АКФ, подавати цю послідовність на вхід ОУ, обчислювати ВКФ та імпульсну характеристику ОУ.

5.2. Приклад виконання завдання на практичне заняття

Порахуємо АКФ для генератора випадкових чисел на основі псевдовипадкової бінарної послідовності, яку отримали на практичному занятті № 3 (рис. 12.5).

Подамо ці числа на вхід ОУ, заданого різницевим рівнянням (табл. 12.9).

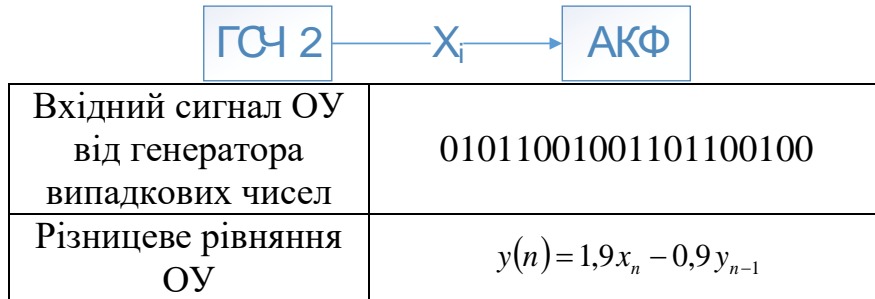


Рис. 12.5

Імпульсну характеристику отримуємо, якщо на вхід ОУ подані випадкові числа (псевдовипадкова бінарна послідовність) від цифрового генератора шуму і визначимо ВКФ входу і виходу.

Розробимо програму, яка буде генерувати псевдовипадкову бінарну послідовність, обчислювати її АКФ, подавати цю послідовність на вхід ОУ, обчислювати ВКФ та імпульсну характеристику ОУ.

Табл. 12.8

к	N-k	$X_1 X_{k+1}$	$X_2 X_{k+2}$	$X_3 X_{k+3}$	$X_4 X_{k+4}$	$X_5 X_{k+5}$	$X_6 X_{k+6}$	$X_7 X_{k+7}$	$X_8 X_{k+8}$	$X_9 X_{k+9}$	$X_{10} X_{k+10}$	$X_{11} X_{k+11}$	$X_{12} X_{k+12}$	$X_{13} X_{k+13}$	$X_{14} X_{k+14}$	$X_{15} X_{k+15}$	$X_{16} X_{k+16}$	$X_{17} X_{k+17}$	$X_{18} X_{k+18}$	$X_{19} X_{k+19}$	$X_{20} X_{k+20}$	АКФ
0	20	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0,45
1	19	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,1579
2	18	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1111
3	17	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0,3529
4	16	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0,3125
5	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000
6	14	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0,3571
7	13	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0,4615
8	12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,1667
9	11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0,2727
10	10	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0,8000
11	9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,3333
12	8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25
13	7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0,8571
14	6	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0,8333
15	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000
16	4	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1,2500
17	3	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	2,000
18	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1,000
19	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3,000

Таблиця 12.9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Xi	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
Yi	0,00	0,00	1,90	-1,71	3,44	-1,20	1,08	-0,97	2,77	-2,49	2,24
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Xi	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	
Yi	-0,12	2,01	1,81	3,53	-1,27	1,15	-1,03	2,83	-2,55	2,29	

Лістинг програми моделювання

```

program praktik5;
uses crt;
label l1;
var x: array[0..40] of real;
    y: array[0..19,-1..22] of real; {AKF}
    y1: array[-2..100] of real; {for BKF}
    y2: array[0..19,-1..22] of real; {BKF}
    i,i2,j,n,n1,n2,k: integer;
    num: integer;
    a,b: real;
    f1: text;

begin clrscr;
assign(f1,'pr5.doc'); rewrite(f1);
n:=20;
k:=0;
writeln('Введіть X[1] - X[20]; {0;1}');
writeln;
l1: writeln('1-Варіант для прикладу; 2-Введіть свої
параметри;'); readln(num);

case num of
1: begin
    x[0]:=0;
    x[1]:=0; x[2]:=0; x[3]:=0; x[4]:=0; x[5]:=0;
    x[6]:=1; x[7]:=1; x[8]:=0; x[9]:=0; x[10]:=0;
    x[11]:=1; x[12]:=1; x[13]:=1; x[14]:=1; x[15]:=0;
    x[16]:=1; x[17]:=1; x[18]:=0; x[19]:=0; x[20]:=1;

    for i:=1 to 20 do begin
        i2:=i+20;
        x[i2]:=x[i];
    end;
end;
end;

```

```

2: begin
  x[0]:=0;
  for i:=1 to 20 do begin
    write('x[' , i, ']='); read(x[i]);
    i2:=i+20;
    x[i2]:=x[i];
  end;
end;
else writeln('Повтор'); goto l1;
end;

writeln('X:=');
writeln(' 1| 2| 3| 4| 5| 6| 7| 8|
9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20|');
for i:=1 to 20 do begin
write(X[i]:2:0, 'i');
end;
writeln;
writeln('21|22|23|24|25|26|27|28|29|30|31|32|33|34|35|3
6|37|38|39|40|');
for i:=21 to 40 do begin
write(X[i]:2:0, 'i');
end;

writeln(f1, 'X:=');
writeln(f1, ' 1| 2| 3| 4| 5| 6| 7| 8|
9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20|');
for i:=1 to 20 do begin
write(f1, X[i]:2:0, 'i');
end;
writeln(f1);
writeln(f1, '21|22|23|24|25|26|27|28|29|30|31|32|33|34|3
5|36|37|38|39|40|');
for i:=21 to 40 do begin
write(f1, X[i]:2:0, 'i');
end;
writeln;writeln(f1);

writeln(f1, 'AKΦ'); writeln('AKΦ');

for i:=0 to 19 do begin
  y[i, -1]:=i;
  y[i, 0]:=n-i;

```

```

for j:=1 to 20 do begin
    y[i,j]:=x[j]*x[i+j]
end;

y[i,21]:=0;

for j:=1 to 20 do begin
    if (y[i,j]=1) then y[i,21]:=y[i,21]+1
end;

y[i,22]:=y[i,21]/y[i,0];
end;
write(f1,' k|n1| 1| 2| 3| 4| 5| 6| 7| 8| 9|10');
write(f1,' |11|12|13|14|15|16|17|18|19|20| S| AKΦ');
writeln(f1);

for i:=0 to 19 do begin
    n1:=n-i;
    write(f1,i:2,'i');
    write(f1,n1:2,'i');

    for j:=1 to 21 do begin
        write(f1,y[i,j]:2:0,'i');
    end;

    write(f1,y[i,22]:2:4);
    writeln(f1);

end;
writeln(f1);writeln(f1);
writeln('OY1');
writeln;
writeln('OU-1: y[n]=A*x[n]+B*y[n-1]');
write(' Параметр A='); readln(a);
write(' Параметр B='); readln(b);

writeln(f1,'OY1');
writeln(f1);
writeln(f1,'OU-1: y[n]=A*x[n]+B*y[n-1]');
writeln(f1,' Параметр A=',a:3:3);
writeln(f1,' Параметр B=',b:3:3);

y1[-1]:=0;

```

```

for i:=0 to 20 do begin
    y1[i]:=A*x[i]+B*y1[i-1];
end;

write(f1,' N'); for i:=0 to 10 do begin write(f1,'i
',i:4); end;
writeln(f1);
write(f1,'Xi'); for i:=0 to 10 do begin write(f1,'i
',x[i]:4:0); end;
writeln(f1);
write(f1,'Yi'); for i:=0 to 10 do begin write(f1,'i
',y1[i]:4:2); end;
writeln(f1);writeln(f1);

write(f1,' N'); for i:=11 to 20 do begin write(f1,'i
',i:4); end;
writeln(f1);
write(f1,'Xi'); for i:=11 to 20 do begin write(f1,'i
',x[i]:4:0); end;
writeln(f1);
write(f1,'Yi'); for i:=11 to 20 do begin write(f1,'i
',y1[i]:4:2); end;

writeln(f1);
writeln(f1,'BKΦ'); writeln('BKΦ');

for i:=0 to 19 do begin

    y2[i,-1]:=i;
    y2[i,0]:=2*n+1;

    for j:=1 to 20 do begin
        y2[i,j]:=y1[j]*x[i+j]
    end;
    y2[i,21]:=0;
    for j:=1 to 20 do begin
        y2[i,21]:=y2[i,21]+y2[i,j]
    end;
    y2[i,22]:=y2[i,21]/y2[i,0];
end;
write(f1,' k|    1|    2|    3|    4|    5|    6|    7|    8|
9|   10');
write(f1,'|   11|   12|   13|   14|   15|   16|   17|   18|
19|   20|    S|   BKF');

```

```
writeln(f1);

for i:=0 to 19 do begin
  n2:=2*n+1;
  write(f1,i:2,'i');

  for j:=1 to 21 do begin
    write(f1,y2[i,j]:3:2,'i');
  end;

  write(f1,y2[i,22]:2:4);
  writeln(f1);
end;
close(f1);
readkey
end.
```

Результати моделювання

Вхідний сигнал

i=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x(i)=	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1

i=	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
x(i)=	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0

i=	34	35	36	37	38	39	40
x(i)=	1	1	0	0	1	0	0

Автокореляційна функція

k	n1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	S	AKФ	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	S	
0	20	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	9	0.4500
1	19	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0.1579
2	18	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0.1111
3	17	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	6	0.3529
4	16	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	5	0.3125
5	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0000
6	14	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	5	0.3571
7	13	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	6	0.4615
8	12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0.1667
9	11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0.2727
10	10	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	8	0.8000
11	9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0.3333
12	8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0.2500

13	7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	6	0.8571
14	6	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	5	0.8333
15	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0000
16	4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	5	1.2500	
17	3	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	6	2.0000
18	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1.0000
19	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3	3.0000

Взаємна кореляційна функція

ОУ1: $y[n]=A*x[n]+B*y[n-1]$

Параметр $A=1.900$

Параметр $B=-0.900$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	9	10							
x_i	0	0	1	0	1	1	0	0	1
	0	0							
y_i	0.00	0.00	1.90	-1.71	3.44	-1.20	1.08	-0.97	2.77
	2.49	2.24							

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20									
x_i	1	1	0	1	1	0	0	1	0
	0								
y_i	-0.12	2.01	-1.81	3.53	-1.27	1.15	-1.03	2.83	-
	2.55	2.29							

12.5.3. Контрольні питання

1. Дайте визначення перехідної та імпульсної характеристик ОУ.
2. Дайте пояснення фізичного змісту методу обчислення вихідної реакції ОУ шляхом згортки вхідного впливу і імпульсної характеристики ОУ.
3. Що таке взаємна кореляційна функція ОУ?
4. Чим відрізняється імпульсна характеристика ОУ від ВКФ у випадку подачі на вхід "білого" шуму?
5. Які властивості повинні мати сигнали, що використовуються для ідентифікації ОУ за методом взаємної кореляційної функції?
6. Намалюйте структурну схему для визначення динамічних характеристик ОУ в реальному масштабі часу. Поясніть її роботу.
7. Як одержати рівняння, що описує ОУ, по його передаточній функції?
8. Визначить вигляд перехідної характеристики аперіодичного ОУ першого порядку при таких значеннях коефіцієнта α в передаточній функції: 0,5; 1; 1,5; 2,0; 2,5.

12.6. Практичне заняття 6. АДАПТИВНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ІНФОРМАЦІЙНО- ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

12.6.1. План проведення практичного заняття

1. Стисло нагадати теоретичні відомості, необхідні для виконання індивідуального завдання практичного заняття.

2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (див. табл. 11.12).

3. Дослідити ОУ за його адаптивною регресійною моделлю. Структурна схема дослідження ОУ зображена на рис. 12.6, а структурна схема дослідження його регресійної моделі – на рис. 12.7.

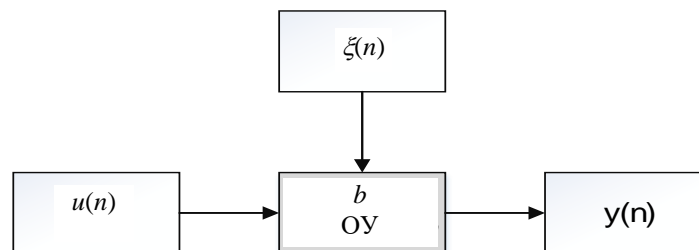


Рис. 12.6

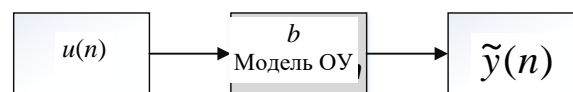


Рис. 12.7

Рівняння ОУ та його адаптивної регресійної моделі мають вигляд:

$$y(n) = bu(n) + \xi(n); \quad N \in \overline{1, n},$$

$$\tilde{y}(n) = \tilde{b}u(n); \quad \tilde{b} \rightarrow b,$$

де $y(n)$ – вихід ОУ; $\tilde{y}(n)$ – вихід адаптивної моделі ОУ;

$n = 0, 1, 2, \dots$ – дискретний час;

$u(n)$ – вхідний вплив;

$\xi(n)$ – збурююча дія (завада);

b – коефіцієнт різницевого рівняння ОУ;

\tilde{b} – коефіцієнт різницевого рівняння адаптивної моделі ОУ.

4. Вивести рівняння для розрахунку функції втрат ОУ.

5. Розрахувати градієнт функції втрат.

6. Розрахувати коефіцієнти адаптивної регресійної моделі ОУ:

7. Для розрахунків потрібно скласти таблицю за формою табл. 12.10.

Таблиця 12.10

n	$b(n)$	$\tilde{b}(n)$	$u(n)$	$Y(n)$	$\tilde{y}(n)$	$\xi(n)$	$\varepsilon(n)$	$F[\varepsilon(n)]$	∇F
1	7	...	1	0.1
2	7	...	1	-0.1
3	7	...	1	0.1
...	7	...	1	-0.1
20	7	...	1	0.1

8. Розробити програму, яка буде виконувати адаптивну ідентифікацію ОУ за розробленими рівняннями.

6.2. Приклад виконання завдання на практичне заняття

Отримаємо рівняння для розрахунку функції втрат ОУ:

- нев'язка: $\varepsilon(n) = y(n) - \tilde{y}(n)$,

- функція втрат:

$$F[\varepsilon(n)] = \varepsilon^2(n) = (y(n) - \tilde{y}(n))^2 = \\ = b^2 u^2(n) + 2bu(n)\xi(n) + \xi^2(n) - 2b\tilde{b}u^2(n) - 2\tilde{b}u(n)\xi(n) + \tilde{b}^2 u^2(n).$$

Розрахуємо градієнт функції втрат:

$$\nabla F[\varepsilon(n)] = \frac{dF}{db} = 2U(n)[y(n) - \tilde{y}(n)],$$

$$\xi(n) = \begin{cases} -0,1 & \text{якщо } \hat{A} \times = 0, \\ +0,1 & \text{якщо } \hat{A} \times = 1, \end{cases}$$

де ГВЧ – вихід генератора випадкових чисел на основі псевдовипадкової бінарної послідовності.

Розраховуємо коефіцієнти адаптивної регресійної моделі ОУ:

$$\tilde{b}(n) = \tilde{b}(n-1) + 2\gamma u(n) \cdot [y(n) - \tilde{b}(n-1) \cdot u(n)],$$

де γ - коефіцієнт підсилення.

Розробимо програму, яка буде виконувати адаптивну ідентифікацію ОУ за розробленими рівняннями.

Таблиця 12.11

Вхідна комбінація від генератора	01011001001101100100
Коефіцієнт ОУ "b"	7
Початкове значення коефіцієнта "b" моделі ОУ	1,5
Кількість відліків	20

Лістинг програми моделювання

```
program praktik6;
uses crt;
label l1;
```

```

var b,U: integer;
    x: array [1..20] of integer;
    b1,y,y1,Ex,E,FE,dF: array [1..30] of real;
    n,i: integer;
    num: integer;

begin clrscr;

writeln('Введіть X[1] - X[20]; {0;1}');
writeln;
l1: writeln('1-Варіант для прикладу; 2-Введіть свої
параметри;'); readln(num);

case num of
1: begin
    x[1]:=0; x[2]:=0; x[3]:=0; x[4]:=0; x[5]:=0;
    x[6]:=1; x[7]:=1; x[8]:=0; x[9]:=0; x[10]:=0;
    x[11]:=1; x[12]:=1; x[13]:=1; x[14]:=1; x[15]:=0;
    x[16]:=1; x[17]:=1; x[18]:=0; x[19]:=0; x[20]:=1;

    U:=1;
    b:=3;
    b1[1]:=1.5;
    n:=20;
    end;

2: begin
    for i:=1 to 20 do begin
        write('x[' ,i, ']='); read(x[i]);
        end;
        write('b(n)='); readln(b);
        write('b1(n)='); readln(b1[1]);
        n:=20;
    end;
else writeln('Повтор'); goto l1;
end;
for i:=1 to 20 do begin
    if (x[i]=0) then Ex[i]:=-0.1
    else Ex[i]:=0.1;
end;
writeln;
writeln('X:=');
writeln('    1|    2|    3|    4|    5|    6|    7|    8|
9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20|');

```

```

for i:=1 to 20 do begin
write(X[i]:2,'i');
end;
writeln;
writeln('b(n)=' ,b);           writeln('b1(n)=' ,b1[1]:5:3);
writeln('N=' ,n);
writeln;writeln('Натисніть Enter для почитку');
readkey; clrscr;
writeln; writeln('Будь ласка, почекайте....');
delay(6000); clrscr;
writeln(' n|b(n) | b1(n)|U(n) | y(n) | y1(n) |Ex(n) | E(n)
| FE | dF |');
y[1]:=b*U+Ex[1];
y1[1]:=b1[1]*U;
E[1]:=y[1]-y1[1];
FE[1]:=sqr(E[1]);
dF[1]:=2*U*E[1];
for i:=2 to n do begin
y[i]:=b*U+Ex[i];
b1[i]:=b1[i-1]-0.4*U*E[i-1];
y1[i]:=b1[i]*U;
E[i]:=y[i]-y1[i];
FE[i]:=E[i]*E[i];
dF[i]:=2*U*E[i];
end;
for i:=1 to n do begin
write(i:2,'|',b:4,'|',b1[i]:6:1,'|',U:4,'|',y[i]:2:3,'|
',y1[i]:7:2,'|');
write(Ex[i]:5:1,'|',E[i]:6:2,'|',FE[i]:10:2,'|',dF[i]:7
:2,'|');
writeln;
end;
readkey
end.

```

Результати моделювання

```

C:\DOCUME-1\Admin\0016-1\PR6\PR6\PRACTIK6.EXE
x[8]=1
x[9]=0
x[10]=0
x[11]=1
x[12]=1
x[13]=0
x[14]=1
x[15]=1
x[16]=0
x[17]=0
x[18]=1
x[19]=0
x[20]=0
b(n)=7
b1(n)=1.5
X:=
  1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
  0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
b(n)=7
b1(n)=1.500
N=20
Press Enter to START
  
```

Рис. 12.8

n	b(n)	b1(n)	U(n)	y(n)	y1(n)	Ex(n)	E(n)	FE	dF
1	7	1.5	1	6.900	1.50	-0.1	5.40	29.16	10.80
2	7	-0.7	1	7.100	-0.66	0.1	7.76	60.22	15.52
3	7	-3.8	1	6.900	-3.76	-0.1	10.66	113.72	21.33
4	7	-8.0	1	7.100	-8.03	0.1	15.13	228.90	30.26
5	7	-14.1	1	7.100	-14.08	0.1	21.18	448.65	42.36
6	7	-22.6	1	6.900	-22.55	-0.1	29.45	867.54	58.91
7	7	-34.3	1	6.900	-34.34	-0.1	41.24	1700.38	82.47
8	7	-50.8	1	7.100	-50.83	0.1	57.93	3355.87	115.86
9	7	-74.0	1	6.900	-74.00	-0.1	80.90	6545.10	161.80
10	7	-106.4	1	6.900	-106.36	-0.1	113.26	12828.40	226.53
11	7	-151.7	1	7.100	-151.67	0.1	158.77	25207.14	317.54
12	7	-215.2	1	7.100	-215.17	0.1	222.27	49406.00	444.55
13	7	-304.1	1	6.900	-304.08	-0.1	310.98	96711.32	621.97
14	7	-428.5	1	7.100	-428.48	0.1	435.58	189728.37	871.16
15	7	-602.7	1	7.100	-602.71	0.1	609.81	371867.61	1219.62
16	7	-846.6	1	6.900	-846.63	-0.1	853.53	728519.06	1707.07
17	7	-1188.0	1	6.900	-1188.05	-0.1	1194.95	1427897.36	2389.89
18	7	-1666.0	1	7.100	-1666.03	0.1	1673.13	2799348.03	3346.25
19	7	-2335.3	1	6.900	-2335.28	-0.1	2342.18	5485785.23	4684.35
20	7	-3272.1	1	6.900	-3272.15	-0.1	3279.05	10752139.04	6558.09

Рис. 12.9

12.6.3. Контрольні запитання

1. По якому критерію оцінюється якість адаптивної ідентифікації параметрів ОУ?
2. Перерахуйте основні етапи рішення задачі ідентифікації.
3. Наведіть рівняння лінійного динамічного ОУ і рівняння оптимальної моделі, порівняйте їх.
4. Сформулюйте умову оптимального рішення задачі адаптивної ідентифікації.
5. Намалюйте блок-схему ітеративного алгоритму, роз'ясніть її роботу.
6. Намалюйте блок-схему рекурентного алгоритму, роз'ясніть її роботу.
7. Виконайте порівняльний аналіз ітеративного і рекурентного алгоритму адаптивної ідентифікації.
8. Отримайте рівняння оптимальної моделі і вираз для функції втрат ОУ.
9. Як впливає значення коефіцієнтів у матриці підсилення на точність і час настроювання оптимальної моделі?

Практичне заняття 7.
АДАПТИВНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ІНФОРМАЦІЙНО-
ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ РЕГРЕСІЙНО-
АВТОРЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

12.7.1. План проведення практичного заняття

1. Стисло нагадати теоретичні відомості, необхідні для виконання індивідуального завдання практичного заняття.

2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального варіанту (див. табл. 11.12).

3. Дослідити ОУ за його адаптивною регресійно-авторегресійною моделлю. Структурна схема дослідження ОУ зображена на рис. 12.10, а структурна схема дослідження його регресійно-авторегресійної моделі – на рис. 12.11.

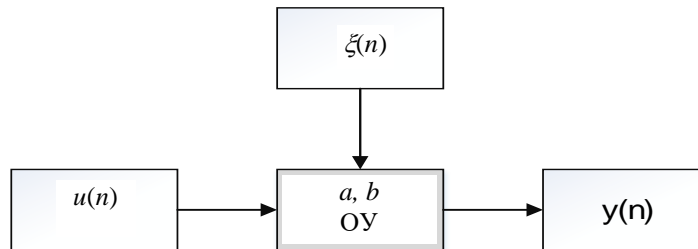


Рис. 12.10

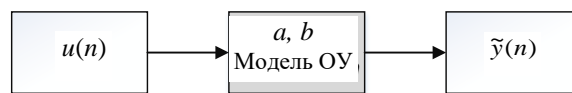


Рис. 12.11

Рівняння ОУ та його адаптивної регресійно-авторегресійної моделі мають вигляд:

$$y(n) = -ay(n-1) + bu(n) + \xi(n); \quad N \in \overline{1, n},$$

$$\tilde{y}(n) = -\tilde{a}y(n-1) + \tilde{b}u(n); \quad \tilde{a} \rightarrow a, \tilde{b} \rightarrow b,$$

де $y(n)$ – вихід ОУ; $\tilde{y}(n)$ – вихід адаптивної моделі ОУ;

$n = 0, 1, 2, \dots$ – дискретний час;

$u(n)$ – вхідний вплив;

$\xi(n)$ – збурююча дія (завада);

a, b – коефіцієнти різницевого рівняння ОУ;

\tilde{a}, \tilde{b} – коефіцієнти різницевого рівняння адаптивної моделі ОУ.

4. Вивести рівняння для розрахунку функції втрат ОУ.

5. Розрахувати градієнт функції втрат.

6. Розрахувати коефіцієнти адаптивної регресійної моделі ОУ:

7. Для розрахунків потрібно скласти таблицю за формою табл. 12.12.

Таблиця 12.12

n	$a(n)$	$b(n)$	$\tilde{a}(n)$	$\tilde{b}(n)$	$u(n)$	$Y(n)$	$\tilde{y}(n)$	$\xi(n)$	$\varepsilon(n)$	$\varepsilon^2(n)$
1	1,1	1,1	0,7	0,5	1	0.1
2	1,1	1,1			1	-0.1
3	1,1	1,1			1	0.1
...	1,1	1,1			1	-0.1
20	1,1	1,1			1	0.1

8. Розробити програму, яка буде виконувати адаптивну ідентифікацію ОУ за розробленими рівняннями.

7.2. Приклад виконання завдання на практичне заняття

Отримаємо рівняння для розрахунку функції втрат ОУ:

- нев'язка: $\varepsilon(n) = y(n) - \tilde{y}(n)$,

- функція втрат:

$$F[\varepsilon(n)] = \varepsilon^2(n) = (y(n) - \tilde{y}(n))^2.$$

Розрахуємо градієнт функції втрат:

$$\nabla F[\varepsilon(n)] = \left(\frac{dF}{da}, \frac{dF}{db} \right),$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_n \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{n-1} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_a & \gamma_{ab} \\ \gamma_{ba} & \gamma_b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{dF}{da} \\ \frac{dF}{db} \end{bmatrix}, \quad \gamma_{ab} = \gamma_{ba} = 0,$$

$$\tilde{a}_n = \tilde{a}_{n-1} - \gamma_a \frac{dF}{da}, \quad \tilde{b}_n = \tilde{b}_{n-1} - \gamma_b \frac{dF}{db}.$$

Розраховуємо коефіцієнти адаптивної регресійної моделі ОУ:

$$\tilde{a}_n(n) = \tilde{a}_n(n-1) - 2\gamma_a y(n-1) [y(n) - (-\tilde{a}_n(n-1)y(n-1) + \tilde{b}_n(n-1)u(n))],$$

$$\tilde{b}_n(n) = \tilde{b}_n(n-1) - 2\gamma_b y(n-1) [y(n) - (-\tilde{a}_n(n-1)y(n-1) + \tilde{b}_n(n-1)u(n))],$$

де γ_a, γ_b - коефіцієнти підсилення.

Розробимо програму, яка буде виконувати адаптивну ідентифікацію ОУ за розробленими рівняннями.

Лістинг програми моделювання

```

program praktik17;
uses crt;
label l1;
const n=20;
      U=1;
      ga=0.1;
      gb=0.2;

var  a1,b1,y,y1,Ex,E: array[0..20] of real;
      x: array[1..20] of byte;

```

```

    a,b: real;
    i,num: integer;

begin clrscr;

writeln('Vvedite X[1] - X[20]; {0;1}');
writeln;
l1:   writeln('1-Варіант для прикладу; 2-Введіть свої
параметри;'); readln(num);

case num of
1: begin
    x[1]:=0; x[2]:=0; x[3]:=0; x[4]:=0; x[5]:=0;
    x[6]:=1; x[7]:=1; x[8]:=0; x[9]:=0; x[10]:=0;
    x[11]:=1; x[12]:=1; x[13]:=1; x[14]:=1; x[15]:=0;
    x[16]:=1; x[17]:=1; x[18]:=0; x[19]:=0; x[20]:=1;
    a:=1.0;
    b:=0.75;
    a1[1]:=0.8;
    b1[1]:=0.5;
    end;

2: begin
    for i:=1 to 20 do begin
        write('x[' ,i, ']='); read(x[i]);
        end;

        write('a='); readln(a);
        write('b='); readln(b);
        write('a1(1)='); readln(a1[1]);
        write('b1(1)='); readln(b1[1]);
    end;
else writeln('Повтор'); goto l1;
end;

for i:=1 to 20 do begin
    if (x[i]=0) then Ex[i]:=-0.1
    else Ex[i]:=0.1;
end;

writeln;

writeln('X:=');
writeln('    1|    2|    3|    4|    5|    6|    7|    8|
9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20|');
for i:=1 to 20 do begin
write(X[i]:2, 'i');
end;

writeln;

```



```

writeln('a=',a);
writeln('b=',b);
writeln('a1(1)=' ,a1[1]:5:3);
writeln('b1(1)=' ,b1[1]:5:3);
writeln('N=',n);

writeln;writeln('Натисніть Enter для почитку'); readkey; clrscr;
writeln; writeln('Будь ласка, почекайте....');
delay(3000); clrscr;

writeln(' n| a(n)| b(n)| a1(n)| b1(n)|U(n)| y(n) | y1(n) |Ex(n)|
E(n) | E^2(n)|');

y[1]:=-a*y[0]+b*U+Ex[1];
y1[1]:=-a1[1]*y[0]+b1[1]*U;
E[1]:=y[1]-y1[1];

for i:=2 to n do begin

    y[i]:=-a*y[i-1]+b*U+Ex[i];
    a1[i]:=a1[i-1]-2*ga*y[i-1]*(y[i]-(-a1[i-1]*y[i-1]+b1[i-1]*U));
    b1[i]:=b1[i-1]-2*gb*y[i-1]*(y[i]-(-a1[i-1]*y[i-1]+b1[i-1]*U));
    y1[i]:=-a1[i]*y[i-1]+b1[i]*U;
    E[i]:=y[i]-y1[i];
end;

for i:=1 to n do begin

write(i:2,'|',a:5:2,'|',b:5:2,'|',a1[i]:6:3,'|',b1[i]:6:3,'|',U:
4,'|',y[i]:6:3,'|',y1[i]:7:4,'|');
write(Ex[i]:5:2,'|',E[i]:8:5,'|',sqr(E[i]):7:5,'|');
writeln;
end;

readkey
end.

```

Результати моделювання

```

C:\DOCUME~1\Admin\0016-1\FD65-1\alinchik\PR7\PRACTIK7.EXE
x[12]=1
x[13]=0
x[14]=1
x[15]=1
x[16]=0
x[17]=0
x[18]=1
x[19]=0
x[20]=0
a=1.1
b=1.1
a1<1>=0.7
b1<1>=0.5

X:=
 1| 2| 3| 4| 5| 6| 7| 8| 9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20|
0| 1| 0| 1| 1| 0| 0| 1| 0| 0| 1| 1| 0| 1| 1| 0| 0| 1| 0| 0|
a= 1.100000000000E+00
b= 1.100000000000E+00
a1<1>=0.700
b1<1>=0.500
N=20
Press Enter to START

```

Рис. 12.12

n	a(n)	b(n)	a1(n)	b1(n)	U(n)	y(n)	y1(n)	Ex(n)	E(n)	E^2(n)
1	1.10	1.10	0.700	0.500	1	1.000	0.5000	-0.10	0.50000	0.25000
2	1.10	1.10	0.640	0.380	1	0.100	-0.2600	0.10	0.36000	0.12960
3	1.10	1.10	0.629	0.357	1	0.890	0.2942	-0.10	0.59581	0.35499
4	1.10	1.10	0.553	0.206	1	0.221	-0.2860	0.10	0.50699	0.25704
5	1.10	1.10	0.515	0.129	1	0.957	0.0154	0.10	0.94145	0.88633
6	1.10	1.10	0.456	0.032	1	-0.053	-0.4252	-0.10	0.37266	0.13887
7	1.10	1.10	0.466	0.032	1	1.058	0.0563	-0.10	1.00154	1.00309
8	1.10	1.10	0.361	-0.179	1	0.036	-0.5602	0.10	0.59657	0.35589
9	1.10	1.10	0.352	-0.195	1	0.960	-0.2082	-0.10	1.16824	1.36478
10	1.10	1.10	0.261	-0.379	1	-0.056	-0.6290	-0.10	0.57300	0.32832
11	1.10	1.10	0.279	-0.342	1	1.262	-0.3268	0.10	1.58840	2.52302
12	1.10	1.10	0.151	-0.598	1	-0.188	-0.7885	0.10	0.60073	0.36088
13	1.10	1.10	0.218	-0.465	1	1.207	-0.4237	-0.10	1.63022	2.65762
14	1.10	1.10	0.073	-0.754	1	-0.127	-0.8421	0.10	0.71496	0.51116
15	1.10	1.10	0.126	-0.648	1	1.340	-0.6321	0.10	1.97199	3.88873
16	1.10	1.10	0.034	-0.832	1	-0.474	-0.8775	-0.10	0.40364	0.16292
17	1.10	1.10	0.256	-0.389	1	1.521	-0.2678	-0.10	1.78909	3.20085
18	1.10	1.10	0.163	-0.574	1	-0.473	-0.8220	0.10	0.34857	0.12150
19	1.10	1.10	0.354	-0.192	1	1.521	-0.0244	-0.10	1.54514	2.38746
20	1.10	1.10	0.337	-0.227	1	-0.673	-0.7387	-0.10	0.06590	0.00434

Рис. 12.13

12.7.3. Контрольні питання

1. По якому критерію оцінюється якість адаптивної ідентифікації параметрів ОУ?
2. Перерахуйте основні етапи рішення задачі ідентифікації.
3. Наведіть рівняння лінійного динамічного ОУ і рівняння оптимальної моделі, порівняйте їх.
4. Сформулюйте умову оптимального рішення задачі адаптивної ідентифікації.
5. Який вигляд має ітеративний алгоритм адаптивної ідентифікації?
6. Який вигляд має рекурентний алгоритм адаптивної ідентифікації?
7. Намалюйте блок-схеми ітеративного та рекурентного алгоритмів, роз'ясніть їх роботу.
8. Виконайте порівняльний аналіз ітеративного і рекурентного алгоритму адаптивної ідентифікації.
9. Отримайте рівняння оптимальної моделі і вираз для функції втрат ОУ.
10. Як впливає значення коефіцієнтів у матриці підсилення на точність і час настроювання оптимальної моделі?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8. ЗАСТОСУВАННЯ ФІЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПОТОЧНИХ КООРДИНАТ ОБ'ЄКТУ ВИМІРЮВАННЯ

12.8.1. План проведення практичного заняття

1. Згідно свого варіанту обрати структурну схему системи автоматичного управління (див. табл. 11.15) та параметри цієї схеми (див. табл. 11.16).
2. Зробити розрахунок фільтра Калмана.
3. Виконати моделювання системи управління зі спостерігачем.
4. Побудувати графіки вимірюного і точного вихідних сигналів координат ОУ та зашумленого і оціненого значення виходу системи.
5. Порівняти графіки та зробити висновки.

8.2. Приклад виконання завдання практичного заняття

Лістинг програми моделювання

```
Sys1=ss(tf(100,[1 1 100]));  
U=ones(1000,1); % вхідний сигнал одиничний ступеневий вплив 1000  
відліків  
T=linspace(0,10,1000)'; % вектор часу від 0 до 10 с 1000  
відліків  
Y=lsim(Sys1,U,T); % моделювання точного виходу системи  
YN=Y+0.05*randn(1000,1); % вихід з шумом СКЗ 0.05  
figure; plot(T,U,'-g',T,Y,'-b',T,YN,'-r'); grid on; % графік  
вхідного та вихідного сигналу системи  
xlabel('Час, с'); ylabel('Амплітуда вихідного сигналу, В');  
[A,B,C,D]=ssdata(Sys1) % виводимо значення матриць системи  
P=ss(A, [B B], C, [D D]) % будуємо систему із спостерігачем  
Kest=kalman(P,0.1,0.05) % будуємо фільтр Калмана  
YK=lsim(Kest,[U YN],T); % розраховуємо оцінку виходу системи в  
фільтрі Калмана  
figure; plot(T,U,'-g',T,Y,'-b',T,YN,'-r',T,YK(:,1),'-c'); grid  
on; % графік вхідного та вихідного сигналу системи  
xlabel('Час, с'); ylabel('Амплітуда вихідного сигналу, В');
```

Результати моделювання

```
A =  
-1.0000   -12.5000  
  8.0000         0  
B =  
  4  
  0  
C =  
  0   3.1250  
D =  
  0
```

```

a =
      x1      x2
x1    -1  -12.5
x2     8     0

```

```

b =
      u1  u2
x1     4   4
x2     0   0

```

```

c =
      x1      x2
y1     0  3.125

```

```

d =
      u1  u2
y1     0   0

```

Continuous-time model.

```

a =
      x1_e      x2_e
x1_e    -1  -20.26
x2_e     8  -11.14

```

```

b =
      u1      y1
x1_e     4  2.483
x2_e     0  3.56

```

```

c =
      x1_e      x2_e
y1_e     0  3.125
x1_e     1     0
x2_e     0     1

```

```

d =
      u1  y1
y1_e   0   0
x1_e   0   0
x2_e   0   0

```

I/O groups:

Group name	I/O	Channel(s)
KnownInput	I	1
Measurement	I	2
OutputEstimate	O	1
StateEstimate	O	2,3

Continuous-time model.

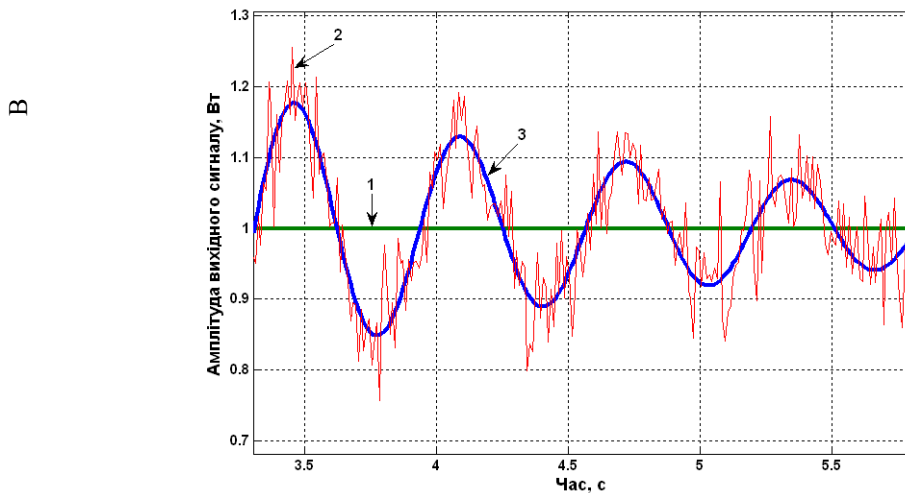


Рис. 12.14. Порівняння виміряного і точного значення вихідної координати системи управління: 1- вхідний сигнал, 2- вихід з шумом, 3 - точний вихід системи

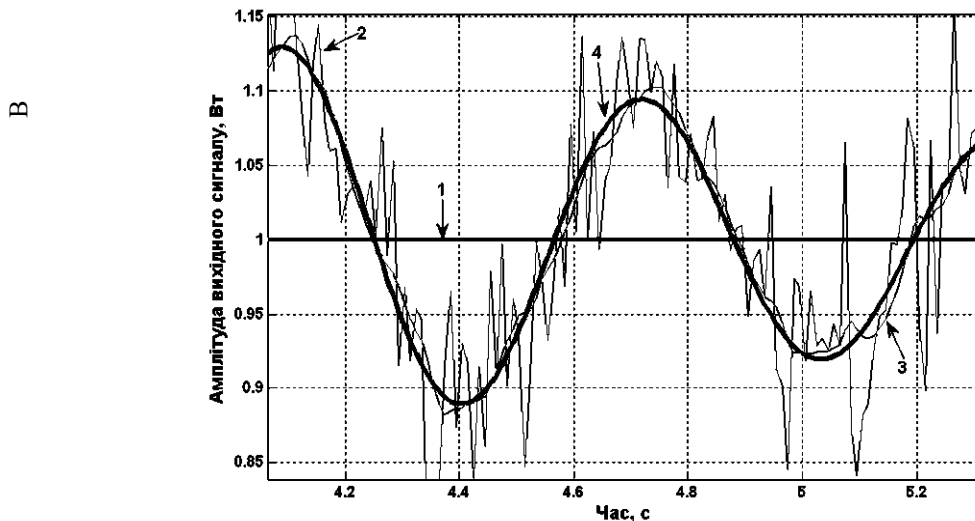


Рис. 12.15. Порівняння точного значення, виміряного значення та результату оцінювання фільтром Калмана вихідної координати системи управління: 1- вхідний сигнал, 2- вихід з шумом, 3 – оцінка виходу системи у фільтрі Калмана, 4– точний вихід системи

12.8.3. Контрольні питання

1. Що являє собою фільтр Калмана?
2. Які функції є в пакеті Matlab для синтезу фільтра Калмана?
3. Які основні блоки входять в структурну схему отримання оцінок координат ОУ?
4. Що таке матриця вимірювання H ?
5. Назвіть матриці об'єкта керування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Павленко П. М. Основи математичного моделювання систем і процесів : навч. посіб. / П. М. Павленко, С. Ф. Філоненко, О. М. Чередников, В. В. Трейтяк. – К. : НАУ, 2017. – 392 с.
2. Моделювання та оптимізація систем : підручник / В. М. Дубовой, Р. Н. Кветний, О. І. Михальов, А. В. Усов. – Вінниця : ПП «ТД«Еднльвейс», 2017. – 804 с.
3. Томашевський В. М. Моделювання систем: підруч. для студ. ВНЗ / за заг. ред. М. З. Згуровського. – К. : Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.
4. Кветний Р. Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень : навч. Посібник / Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та ін. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 193 с.
5. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування : навч. посібник / В. М. Дубовой. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 308 с.
6. Безвесільна О. М. Наукові дослідження в галузі автоматизації та приладобудування. Проектування та моделювання комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем : підручник, затверджений Вченою радою Державного університету "Житомирська політехніка" / О. М. Безвесільна, Ю. О. Подчашинський. – Київ : ДП «Редакція інформаційного бюлетеня «Офіційний вісник Президента України», 2021. – 896 с.
7. Кузьмичов А. І. Ймовірнісне та статистичне моделювання в Excel для прийняття рішень : навч. посібник / А. І. Кузьмичов, Н. Г. Бишовець, Г. В. Куценко та ін. – К. : Ліра К, 2019. – 300 с.
8. Гліненко Л. К. Основи моделювання технічних систем: навч. посіб. для студ. ВНЗ / Л. К. Гліненко, О. Г. Сухоносів. – Львів : Бескид Біт, 2003. – 176 с.
9. Лебідь Р. Д. Математичні методи в моделюванні систем: навч. посіб. для студ. вузів / Р. Д. Лебідь, І. А. Жуков, М. М. Гузій. – К. : КМУЦА, 2000. – 158 с.
10. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці / Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. – К. : Видавнича група ВНУ, 2006. – 480 с.
11. Шматок С. О. Автоматизоване проектування систем керування на основі MATLAB : навч. посібник / С. О. Шматок, Ю. О. Подчашинський. – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 172 с.
12. Пасічник В. В. Моделювання складних систем / В. В. Пасічник, Я. І. Виклюк, Р. М. Камінський. – Львів : Новий світ, 2021. – 404 с.

13. Рябенський В. М. Моделювання пристроїв обробки цифрових сигналів / В. М. Рябенський, Л. В. Солобутко. – К. : Кондор, 2021. – 352 с.
14. Бутко І. М. Системний підхід і моделювання в наукових дослідженнях / І. М. Бутко, М. Ю. Дітковська, М. П. Бутко. – К. : Центр учбової літератури, 2014. – 360 с.
15. Федосов Б. Т. Моделювання електромеханічних систем : навч. посібник / Б. Т. Федосов, С. Г. Чорний, В. П. Щокін. – К. : Кондор, 2018. – 204 с.
16. Програмування і математичне моделювання: підручник для студ. вищих навч. закл. / І. О. Хвищун ; Львівський національний ун-т ім. Івана Франка. — Київ : Ін Юре: Видавничий центр Львівського національного університету ім. Івана Франка, 2007. — 544 с.
17. Математичне моделювання в електроенергетиці: підручник / О. В. Кириленко, М. С. Сегеда, О. Ф. Буткевич, Т. А. Мазур ; за ред. М. С. Сегеди ; М-во освіти і науки, молоді та спорту України, Нац. ун-т «Львів. політехніка». — 2-ге вид. — Л. : Вид-во Львів. політехніки, 2013. — 608 с.
18. Павлиш В. А. Основи біотехнічних систем та їх моделювання / В. А. Павлиш, Л. К. Гліненко. – Львів : Львівська політехніка, 2020. – 380 с.
19. Онисик С. Б. Моделювання об'єктів керування. Поняття. Тлумачення. Моделі. Дослідження / С. Б. Онисик. – Львів : Львівська політехніка, 2019. – 300 с.
20. Заяць В. М. Методи, алгоритми та програмні засоби для моделювання і аналізу динаміки складних об'єктів і систем на основі дискретних моделей / В. М. Заяць. – Львів : Новий світ-2000, 2020. – 400 с.
21. Лупенко С. А. Теоретичні основи моделювання та опрацювання циклічних сигналів в інформаційних систем / С. А. Лупенко. – Львів : Магнолія, 2021. – 344 с.
22. Стоцько З. А. Моделювання технологічних систем / З. А. Стоцько. – Львів : Львівська політехніка, 2013. – 188 с.
23. Моделювання та оптимізація систем : підручник / В. М. Дубовой, Р. Н. Кветний, О. І. Михальов, А. В. Усов. – Вінниця : ПП «ТД«Еднльвейс», 2017. – 804 с.
<https://nmetau.edu.ua/ua/mdiv/i2001/p2455>

Навчальне видання

ПОДЧАШИНСЬКИЙ Юрій Олександрович
ЧЕПЮК Ларіна Олексіївна
ВОРОНОВА Тетяна Станіславівна
ЛУГОВИХ Оксана Олександрівна
ШАВУРСЬКА Людмила Йосипівна

МАТЕМАТИЧНІ ТА ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Підписано до друку 26.06.24. Формат 60x84 ¹/₁₆. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Умов. друк. аркушів 15,35.
Наклад 100 прим. Зам. № .

Редакційно-видавничий сектор бібліотеки
Державного університету «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, м. Житомир, 10005

Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 7177 від 04.11.2020 р.