ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 22 травня 2024 р.
№ 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Частина 2

з навчальної дисципліни

«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності
121 «Інженерія програмного забезпечення»
освітньо-професійні програми «Інженерія програмного забезпечення» та
«Веб-технології»
факультет інформаційно-комп`ютерних технологій
кафедра інженерії програмного забезпечення

Рекомендовано на засіданні кафедри
інженерії програмного забезпечення
30 квітня 2024 р., протокол № 4

Розробник: к.ф.-м.н., доцент кафедри інженерії програмного забезпечення
ПРИЛИПКО Олександр

Житомир
2024

Конспект лекцій (частина 2) з навчальної дисципліни «Математичний аналіз» для студентів освітнього рівня «Бакалавр» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» – Житомир : Державний університет «Житомирська політехніка», 2024. – 112 с.

Розробник: ПРИЛИПКО Олександр

Рецензенти:
к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій у медицині та телекомунікаціях Нікітчук Т.М.;
к.пед.н., доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Сверчевська І.А.

Розглянуто і рекомендовано на засіданні кафедри інженерії програмного забезпечення. Протокол від 30 квітня 2024 р., № 4

І. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Інтеграл — одне з центральних понять математичного аналізу і всієї математики.

Елементи інтегрального числення закладено у працях математиків Стародавньої Греції. Основні поняття і початки теорії інтегрального числення, насамперед зв'язок його з диференціальним численням, а також застосування їх до розв'язування практичних задач, розроблені в кінці 17 ст. Ньютоном і Лейбніцем. Далі історичний розвиток інтегрального числення пов'язаний з іменами Л. Ейлера, О. Коші, Б. Рімана та інших вчених.

§ 1. Невизначений інтеграл.

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Одне з можливих фізичних трактувань цієї задачі — визначення швидкості руху за функцією, яка задає пройдений шлях за час руху. З практичної точки зору природною є обернена задача, а саме, визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Більш формально, остання задача є знаходженням функції $f(x)$ за відомою її похідною $f'(x)$. Розв'язується ця задача за допомогою невизначеного інтеграла.

1.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційовна на $(a;b)$ і $F'(x) = f(x)$, $x \in (a;b)$.

Наприклад, первісною функції $f(x) = x^4$, $x \in R$ є функція $F(x) = \frac{x^5}{5}$ (справді, $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$, $x \in R$; очевидно, що первісними будуть також функції $F(x) = \frac{x^5}{5} + 1$, $F(x) = \frac{x^5}{5} + 2$ і взагалі $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$, де C — довільна стала, оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5} + C\right)' = x^4$, $x \in R$.

Розглянутий приклад показує, що задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно. Інакше кажучи, якщо для функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$, то ця первісна не одна. Виникає запитання: як знайти всі первісні даної функції, якщо відома хоча б одна з них?

Відповідь дає така теорема.

Теорема. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому самому проміжку має вигляд $F(x) + C$.

З цієї теореми випливає, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$, а C — довільна стала, визначає всю сукупність первісних заданої функції.

Означення. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ і C — довільна стала, то вираз $F(x) + C$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)\,dx$. Таким чином, символ $\int f(x)\,dx$ означає множину всіх первісних функції $f(x)$.

Знак $\int$, який ввів Лейбніц, називається інтегралом, $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом, $f(x)$ — підінтегральною функцією, x — змінною інтегрування. Отже, за означенням,

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, якщо $F'(x) = f(x)$, $x \in (a;b)$. (1.1)

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають інтегруванням цієї функції.

З погляду геометрії невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається інтегральною кривою і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі уздовж осі Oy (рис. 1.1). Щоб з цієї множини виділити певну інтегральну криву $F(x)$, достатньо задати її значення $F(x_0)$ в якій-небудь точці $x_0 \in (a;b)$.

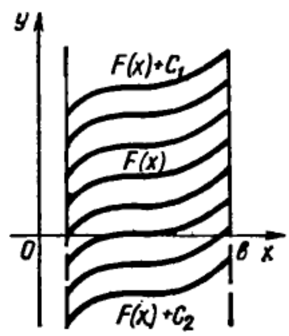


Рис.1.1

З рівностей (1.1) випливають такі властивості невизначеного інтеграла.

1°. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

Інакше кажучи, знаки похідної і невизначеного інтеграла взаємно знищуються. Це природно, бо операції диференціювання та інтегрування — взаємно обернені. Внаслідок цього правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням.

2°. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

3°. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx.$$

4°. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

5°. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

6°. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, то

а) $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$;

б) $\int f(x+b)\,dx = F(x+b)+C$;

с) $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, де $a, b \in R, a \neq 0$.

7°. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)\,du = F(u)+C \qquad (1.2)$$

Ця властивість (її називають інваріантністю формули інтегрування) дуже важлива. Вона означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну. Таким чином, кількість інтегралів, які обчислюються (або, як кажуть, «беруться»), необмежено збільшується. Наприклад, $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5}+C$, оскільки $\left(\frac{x^5}{5}+C\right)' = x^4$.

Користуючись інваріантністю цієї формули, одержимо формулу $\int u^4\,du = \frac{u^5}{5}+C$, де $u=\varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема:

$$\int sin^4x\, d(\sin x) = \frac{sin^5x}{5}+C,$$

тобто $$\int sin^4x\cos x\,dx = \frac{sin^5x}{5}+C;$$

$$\int tg^4x\, d(tg\, x) = \frac{tg^5x}{5}+C,$$

тобто $$\int tg^4x\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{tg^5x}{5}+C;$$

$$\int ln^4 x\, d(ln\, x) = \frac{ln^5 x}{5} + C,$$

тобто
$$\int ln^4 x \frac{dx}{x} = \frac{ln^5 x}{5} + C.$$

1.2. Таблиця основних інтегралів.

Частина формул таблиці основних інтегралів безпосередньо випливає з означення інтегрування як операції, оберненої до операції диференціювання, таблиці похідних і формули (1.2). Справедливість інших формул можна перевірити диференціюванням.

Інтеграли цієї таблиці називаються табличними. їх треба знати напам'ять з двох причин. По-перше, мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести (перетворити) шуканий інтеграл до табличного. Отже, табличний інтеграл треба вміти розпізнавати.

По-друге, як зазначено в кінці попереднього пункту, внаслідок інваріантності кожен табличний інтеграл «породжує» безліч інтегралів, що легко обчислюються на основі табличного.

Нехай $u = u(x)$ — довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$; тоді на цьому проміжку справедливі такі формули:

$$1.\quad \int u^\alpha\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \alpha \neq -1.$$

$$1.a.\quad \int du = u + C\ \ (\alpha = 0),\qquad 1.b.\quad \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C\ \left(\alpha = -\frac{1}{2}\right),$$

$$1.c.\quad \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C\ \ (\alpha = -2).$$

$$2.\quad \int \frac{du}{u} = ln|u| + C.$$

$$3.\quad \int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$4.\quad \int e^u\, du = e^u + C.$$

$$5.\quad \int \sin u\ du = -\cos u + C.$$

$$6.\quad \int \cos u\ du = \sin u + C.$$

$$7.\quad \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$8.\quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$9.\quad \int \operatorname{sh} u\ du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$10.\quad \int \operatorname{ch} u\ du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$11.\quad \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$$

$$12.\quad \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$$

$$13.\quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$$

$$14.\quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm A}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm A}\right| + C.$$

$$15.\ \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

$$16.\ \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$$

Додаткові табличні інтеграли:

$$1.\ \int \operatorname{tg} u\ du = -ln|\cos u| + C.$$

$$2.\ \int \operatorname{ctg} u\ du = ln|\sin u| + C.$$

$$3.\int \frac{du}{\sin u} = ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$$

$$4.\int \frac{du}{\cos u} = ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right| + C.$$

$$5.\ \int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C.$$

$$6.\ \int \sqrt{u^2+A}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+A} + \frac{A}{2}ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C.$$

1.3. Основні методи інтегрування.

Операція інтегрування значно складніша, ніж операція диференціювання. У диференціальному численні таблиця похідних і правила диференціювання функцій дають змогу знайти похідну довільної диференційовної функції. В інтегральному численні таких простих і універсальних правил інтегрування не існує. Відсутнє, наприклад, загальне правило інтегрування добутку двох функцій, навіть якщо первісні кожної з них відомі. Те саме стосується частки двох функцій і складеної функції. Інтегрування вимагає, так би мовити, індивідуального підходу до кожної підінтегральної функції.

Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами.

1°. Метод безпосереднього інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають безпосереднім інтегруванням.

Приклади. Знайти інтеграли:

При обчисленні прикладів 1-5 ми використаємо наступний табличний інтеграл:

$$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \alpha \neq -1\,.$$

$$1.\ \int 3\,dx = 3\int dx = 3x + C.$$

$$2.\ \int x^7 dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + C = \frac{x^8}{8} + C = \frac{1}{8}x^8 + C\,.$$

$$3.\ \int 10x dx = 10\int x^1 dx = 10\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = 10\frac{x^2}{2} + C = 5x^2 + C\,.$$

$$4.\ \int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C\,.$$

5. $$\int\left(8x^3-\sqrt[5]{x}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx=8\int x^3dx-\int x^{\frac{1}{5}}dx+4\int x^{-\frac{3}{4}}\,dx=$$

$$=8\,\frac{x^{3+1}}{3+1}-\frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}+4\,\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1}+C=8\,\frac{x^4}{4}-\frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+4\,\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}+C=$$

$$=2\,x^4-\frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6}+16\,\sqrt[4]{x}+C.$$

Коли ми обчислюємо суму або різницю деякої кількості інтегралів, то ми ставимо лише одну довільну сталу інтегрування коли інтегруємо останній інтеграл при обчисленні.

6. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\ dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)\ dx=$

$$=\int(1+\sin x)\,dx=\int dx+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C\quad\left(\int\sin u\ du=-\cos u+C\right).$$

7. $$\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\mathrm{tg}\,x-x+C\quad\left(\int\frac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}\,u+C\right).$$

При обчисленні прикладів 8 та 9 ми використаємо наступну властивість невизначеного інтеграла: якщо $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то $\int f(ax)\,dx=\frac{1}{a}F(ax)+C)$, де $a\in R, a\neq 0$.

8. $\int cos\,7x\,dx=\frac{1}{7}sin\,7x+C\qquad(\int\cos u\ du=\sin u+C)$.

9. $\int\frac{dx}{\sin^2 5x}=-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}\,5x+C\quad\left(\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}\,u+C\right)$.

При обчисленні прикладів 10 та 11 ми використаємо наступну властивість невизначеного інтеграла: якщо $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, де $a,b\in R, a\neq 0$.

10. $\int e^{-2x+3}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C\quad(\int e^u\,du=e^u+C)$.

11. $\int\frac{dx}{9x-4}=\frac{1}{9}ln\,|9x-4|+C\quad\left(\int\frac{du}{u}=ln|u|+C\right)$.

12. $$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+10}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5(x^2+2)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C$$

$$\left(\text{так як}\quad\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm A}}=ln\left|u+\sqrt{u^2\pm A}\right|+C\right).$$

13. $$\int\frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{25\left(\frac{16}{25}-x^2\right)}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{5}\arcsin\frac{5x}{4}+C.$$

$$\left(\text{так як}\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C\right).$$

$$14.\ \int \frac{dx}{x^2-7} = \int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right| + C\,.$$

$$\left(\text{так як } \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C\right).$$

$$15.\ \int \frac{dx}{4x^2+49} = \int \frac{dx}{4\left(x^2+\frac{49}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7} arctg\ \frac{2x}{7} + C =$$

$$= \frac{1}{14} arctg\ \frac{2x}{7} + C \qquad \left(\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C\right).$$

2°. Метод підстановки (заміни змінної). Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Нехай $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, тобто

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,\ \ x \in (a;b),$$

і нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку $(\alpha;\beta)$, причому множина значень цієї функції є проміжок $(a;b)$. Тоді справедлива формула

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big) + C\,,\ t \in (\alpha;\beta). \qquad (1.3)$$

Приклади. Знайти інтеграли:

$$1. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = \left|\begin{matrix} u = x^2+4 \\ du = d(x^2+4) = (x^2+4)'dx = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}du \end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C.$$

$$2. \int \frac{(5\ln x+6)^7}{x}dx = \left|\begin{matrix} u = 5\ln x + 6 \\ du = d(5\ln x+6) = (5\ln x+6)'dx = 5\frac{dx}{x} \\ \frac{dx}{x} = \frac{1}{5}du \end{matrix}\right| =$$

$$= \int u^7\cdot\frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int u^7du = \frac{1}{5}\,\frac{u^{7+1}}{7+1} + C = \frac{1}{40}u^8 + C = \frac{1}{40}(5\ln x+6)^8 + C.$$

Розв'яжемо цей же приклад другим способом при умові, що ми не помітили готовий для підстановки шаблон $\frac{dx}{x} = \frac{1}{5}du$:

$$\int \frac{(5\ln x+6)^7}{x}dx = \left|\begin{matrix} u = 5\ln x+6, \qquad 5\ln x = u-6 \\ \ln x = \frac{u-6}{5}\ ,\ \ x = e^{\frac{u-6}{5}} \\ dx = \left(e^{\frac{u-6}{5}}\right)'du = e^{\frac{u-6}{5}}\left(\frac{u-6}{5}\right)'du = \frac{1}{5}e^{\frac{u-6}{5}}\,du \end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{u^7}{e^{\frac{u-6}{5}}}\cdot\frac{1}{5}e^{\frac{u-6}{5}}du = \frac{1}{5}\int u^7du = \frac{1}{5}\,\frac{u^{7+1}}{7+1} + C = \frac{1}{40}u^8 + C = \frac{1}{40}(5\ln x+6)^8 + C.$$

Отримали такуж відповідь, як і при попередньому способі розв'язання.

$$3. \int \frac{\sqrt[5]{(2+3tg\,x)^3}}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{matrix} u = 2+3tg\,x \\ du = d(2+3tg\,x) = (2+3tg\,x)'dx = 3\dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{3}du \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \sqrt[5]{u^3}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{3}{5}}du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}u^{\frac{8}{5}} + C = \frac{5}{24}\sqrt[5]{(2+3tg\,x)^8} + C.$$

$$4. \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+3}}dx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = d(e^x) = (e^x)'dx = e^x dx \\ e^{2x} = (e^x)^2 = u^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+3}} =$$

$$= ln\left|u+\sqrt{u^2+3}\right| + C = ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}+3}\right| + C.$$

$$5. \int \frac{x^3}{x+1}dx = \left| \begin{matrix} u = x+1 \\ x = u-1 \\ dx = d(u-1) = (u-1)'du = du \end{matrix} \right| = \int \frac{(u-1)^3}{u}du =$$

$$= \int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}du = \int \frac{u^3}{u}du - \int \frac{3u^2}{u}du + \int \frac{3u}{u}du - \int \frac{1}{u}du =$$

$$= \int u^2\,du - 3\int u\,du + 3\int du - \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 3u - ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{3}{2}(x+1)^2 + 3(x+1) - ln|x+1| + C.$$

Розв'яжемо цей же приклад другим способом без заміни змінної:

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx = \int \frac{x^3+1-1}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}dx =$$

$$= \int (x^2-x+1)\,dx - \int \frac{dx}{x+1} = \int x^2dx - \int xdx + \int dx - \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - ln|x+1| + C.$$

Ми отримали на перший погляд різні значення інтегралів. Але коли ми в першому варіанті розв'язку розкриємо дужки і зберемо коефіцієнти при однакових ступенях x, то в результаті отримаємо другий варіант розв'язку, який можливо буде відрізнятись від першого варіанту лише сталою. Але стала інтегрування у нас довільна, тому отримані розв'язки є однакові.

$$6. \int \frac{xdx}{x+4} = \int \frac{x+4-4}{x+4}dx = \int \frac{x+4}{x+4}dx - \int \frac{4}{x+4}dx =$$

$$= \int dx - 4\int \frac{dx}{x+4} = x - ln|x+4| + C.$$

$$7. \int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \left| \begin{matrix} u = \cos x \\ du = d(\cos x) = (\cos x)'dx = -\sin x\,dx \\ \sin x\,dx = -du \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\,ln|u| + C = -ln|\cos x| + C.$$

3°. Метод інтегрування частинами. Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді з властивості диференціала маємо

$$d(uv) = udv + vdu, \quad udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu\,,$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \qquad (1.4)$$

Формула (1.4) називається формулою інтегрування частинами. Вона дає змогу звести обчислення інтеграла $\int udv$ до обчислення інтеграла $\int vdu$.

Як правило, підінтегральний вираз, який складає добуток udv, можна розбити на множники u та dv кількома способами. Вміння подати підінтегральну функцію через u та dv так, щоб інтеграл справа у формулі (1.4) був простішим, ніж інтеграл зліва, виробляється в процесі обчислення інтегралів.

Зазначимо, що під час знаходження функції v за диференціалом dv вважають, що стала $C = 0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливає. Справді, підставивши $v + C$ в формулу (1.4), маємо:

$$\int udv = u(v + C) - \int (v + C)du\;;$$

$$\int udv = uv + uC - \int vdu - Cu = uv - \int vdu\,.$$

Іноді формулу (1.4) доводиться застосовувати кілька разів. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) інтеграли виду $\int P_n(x)\, e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\, a^{kx}dx$, $\int P_n(x)\, sin\, kx\, dx$, $\int P_n(x)\, cos\, kx\, dx$, де $P_n(x), n \in N$ — многочлен n-го ступеня відносно x, а k — дійсне число. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P_n(x)$, а за dv — вираз, що залишився і застосувавши формулу (1.4) n разів, отримаємо остаточний результат;

Приклад. Знайти інтеграл $\int(3x - 1)\cos x\, dx$:

$$\int (3x-1)\cos x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x - 1,\;\; du = (3x-1)'dx = 3dx \\ dv = \cos x\, dx, \qquad v = \int \cos x\, dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (3x-1)\sin x - 3\int \sin x\, dx = (3x-1)\sin x + 3\cos x + C.$$

2) інтеграли виду $\int P_n(x)\, ln\, x\, dx$, $\int P_n(x)\, log_a\, x\, dx$, $\int P_n(x)\, arcsin\, x\, dx$, $\int P_n(x)\, arccos\, x\, dx$, $\int P_n(x)\, arctg\, x\, dx$, $\int P_n(x)\, arcctg\, x\, dx$, де $P_n(x)$, $n \in N$ — многочлен n-го ступеня відносно x. У цих інтегралах слід взяти $dv = P_n(x)dx$, а за u відповідну функцію, що залишилася і застосувавши формулу (1.4) один раз, отримаємо остаточний результат;

Приклад. Знайти інтеграл $\int x^6 \ln x\, dx$:

$$\int x^6 \ln x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = lnx,\;\; du = (lnx)'dx = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^6dx, \qquad v = \int x^6dx = \dfrac{1}{7}x^7 \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{7}x^7 lnx-\int\frac{1}{7}x^7\ \frac{dx}{x}=\frac{1}{7}x^7 lnx-\frac{1}{7}\int x^6 dx=\frac{1}{7}x^7 lnx-\frac{1}{49}x^7+C.$$

3) інтеграли виду $\int\ e^{\alpha x}\, sin\, \beta x\, dx$, $\int\ e^{\alpha x}\, cos\, \beta x\, dx$, де α, β — дійсні числа. Тут після двократного застосування формули (6) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл. За u ми двічі беремо функцію $e^{\alpha x}$.

Приклади. Знайти інтеграли:

$$1.\ \ I=\int\ e^{2x}\, cos\, 3x\, dx=\begin{vmatrix} u=\ e^{2x},\ \ du=(\ e^{2x})'dx=\ 2e^{2x}dx \\ dv=cos\, 3x\, dx\,, \qquad v=\dfrac{1}{3}\ sin\, 3x \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\ e^{2x}\, sin\, 3x-\ \frac{2}{3}\int\ e^{2x}\, sin\, 3x\ \ dx=\begin{vmatrix} u=\ e^{2x},\ \ du=(\ e^{2x})'dx=\ 2e^{2x}dx \\ dv=sin\, 3x\ \ dx, \qquad v=-\dfrac{1}{3}\ cos\, 3x \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\ e^{2x}\, sin\, 3x-\ \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\ \ e^{2x}\, cos\, 3x-\int 2\, e^{2x}\left(-\frac{1}{3}\ cos\, 3x\ \right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\ e^{2x}\, sin\, 3x+\ \frac{2}{9}\ \ e^{2x}\, cos\, 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\, cos\, 3x\ \ dx.$$

Ми отримали алгебраїчне рівняння для знаходження невідомого інтеграла:

$$I=\frac{1}{3}\ e^{2x}\, sin\, 3x+\ \frac{2}{9}\ \ e^{2x}\, cos\, 3x-\frac{4}{9}I,$$

або

$$\frac{13}{9}I=\frac{1}{3}\ e^{2x}\, sin\, 3x+\ \frac{2}{9}\ \ e^{2x}\, cos\, 3x\,,$$

Звідки знаходимо остаточний результат:

$$I=\int\ e^{2x}\cos 3x\, dx=\frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}\ e^{2x}\sin 3x+\ \frac{2}{9}\ \ e^{2x}\cos 3x\right)+C=$$

$$=\frac{3}{13}\ e^{2x}\sin 3x+\ \frac{2}{13}\ \ e^{2x}\cos 3x+C.$$

$$2.\ \ I=\int\sin\sqrt{x}\, dx=\begin{vmatrix} t=\sqrt{x},\ \ x=t^2 \\ dx=(t^2)'dt=2tdt \end{vmatrix}=2\int t\sin t\, dt=$$

$$=\begin{vmatrix} u=t,\ \ du=dt \\ dv=\sin t\, dt\,, v=-\cos t \end{vmatrix}=2\left(-t\cos t-\int(-\cos t)\, dt\right)=$$

$$=-2t\cos t+2\int\cos t\, dt=-2t\cos t+2\sin t+C=-\ 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C.$$

1.4. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен.

Розглянемо інтеграли виду:

$$1.\ \ \int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\ dx; \qquad 2.\ \ \int\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}\ dx; \qquad (1.5)$$

$$3.\ \ \int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\ dx; \qquad 4.\ \ \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx; \qquad (1.6)$$

Для обчислення інтегралів (1.5) застосовується заміна $t = x + \frac{p}{2}$, а для обчислення інтегралів (1.6) застосовується заміна $t = x + \frac{b}{2a}$. Вказані заміни зводять відповідні інтеграли до обчислення суми або різниці двох інтегралів, один з яких є табличний, а інший зводиться до табличного ще одною простою заміною. Покажемо це на прикладах.

Приклади. Знайти інтеграли:

$$1.\ \int \frac{2x+1}{x^2+6x-5}\,dx.$$

Це є інтеграл типу (1.5) з $p = 6$, тому

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x-5}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = x + \frac{6}{2} = x + 3, \\ x = t-3,\ \ dx = (t-3)'dt = dt \\ 2x+1 = 2(t-3)+1 = 2t-5 \\ x^2+6x-5 = (t-3)^2 + 6(t-3) - 5 = \\ = t^2 - 6t + 9 + 6t - 18 - 5 = t^2 - 14 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t-5}{t^2-14}\,dt = \int \frac{2tdt}{t^2-14} - 5\int \frac{dt}{t^2-14} = ln|t^2-14| -$$

$$- \frac{5}{2\sqrt{14}} ln\left|\frac{t-\sqrt{14}}{t+\sqrt{14}}\right| + C = ln|x^2+6x-5| - \frac{5}{2\sqrt{14}} ln\left|\frac{x+3-\sqrt{14}}{x+3+\sqrt{14}}\right| + C.$$

Проміжні інтеграли обчислені нами нижче.

$$\int \frac{2tdt}{t^2-14} = \left| \begin{array}{c} u = t^2 - 14 \\ du = (t^2-14)'dt = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} = ln|u| + C = ln|t^2-14| + C.$$

$$\int \frac{dt}{t^2-14} = \int \frac{dt}{t^2 - \left(\sqrt{14}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{14}} ln\left|\frac{t-\sqrt{14}}{t+\sqrt{14}}\right| + C.$$

$$2.\ \int \frac{3x-5}{\sqrt{7+6x-9x^2}}\,dx.$$

Це є інтеграл типу (1.6) з $a = -9$ і $b = 6$, тому

$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{7+6x-9x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = x + \frac{6}{2(-9)} = x - \frac{1}{3}, \\ x = t + \frac{1}{3},\ \ dx = \left(t + \frac{1}{3}\right)' dt = dt \\ 3x - 5 = 3\left(t + \frac{1}{3}\right) - 5 = 3t - 4 \\ 7 + 6x - 9x^2 = 7 + 6\left(t + \frac{1}{3}\right) - 9\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 = \\ = 7 + 6t + 2 - 9t^2 - 6t - 1 = 9 - 9t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3t-4}{\sqrt{9-9t^2}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{3t-4}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\sqrt{1-t^2} - \frac{4}{3}\arcsin t + C = -\frac{1}{3}\sqrt{7+6x-9x^2} - \frac{4}{3}\arcsin\left(x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

Проміжні інтеграли обчислені нами нижче.

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = \left| \begin{matrix} u = 1-t^2 \\ du = (1-t^2)'dt = -2tdt \\ tdt = -\frac{1}{2}du \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-t^2} + C.$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C.$$

1.5. Деякі відомості про раціональні функції.

Відношення $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ двох многочленів $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ (відповідно m-го і n-го ступеня відносно x, $m, n \in N$) називається раціональною функцією або раціональним дробом ($P_m(x) \not\equiv 0$, $Q_n(x) \not\equiv 0$).

Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m < n$; в іншому випадку ($m \geq n$) раціональний дріб називається неправильним.

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, дістанемо

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1.7)$$

де $W_k(x)$ і $R_p(x)$ — многочлени k -го і p-го степеня, причому $p < n$, тобто дріб $\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ правильний. Наприклад,

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}.$$

Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дроби таких чотирьох видів:

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{(x-a)^n}$, $n \geq 2$;

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $n \geq 2$,

де A, a, B, p, q — дійсні числа, а тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $p^2-4q < 0$.

Теорема. Нехай знаменник правильного раціонального дробу розкладено на множники:

$$Q_n(x) = (x-a)^\alpha \cdots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \cdots (x^2+vx+s)^\rho$$

(де $\alpha + \cdots + \beta + 2(\mu + \cdots + \rho) = n$), тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\frac{R_p(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu} + \cdots +$$

$$+ \frac{L_1x+F_1}{x^2+vx+s} + \frac{L_2x+F_2}{(x^2+vx+s)^2} + \cdots + \frac{L_\rho x+F_\rho}{(x^2+vx+s)^\rho}, \qquad (1.8)$$

де $A_1,\ldots,\ A_\alpha;\ B_1,\ldots,\ B_\beta;\ M_1,\ldots,\ M_\mu;\ N_1,\ldots,\ N_\mu;\ L_1,\ldots,\ L_\rho;\ F_1,\ldots,\ F_\rho$ — деякі дійсні числа, які потрібно знайти.

Вираз (1.8) називається розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

Для знаходження чисел $A_1,\ldots,\ F_\rho$ можна скористатись методом порівнювання коефіцієнтів. Суть його така. Помножимо обидві частини рівності (1.8) на $Q_n(x)$, внаслідок чого дістанемо два тотожно рівні многочлени: відомий многочлен $R_p(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1,\ldots,\ F_\rho$. Прирівнюючи їхні коефіцієнти при однакових степенях x (два многочлени рівні, коли рівні їх коефіцієнти при однакових ступенях x), дістанемо систему лінійних рівнянь, з якої визначимо невідомі $A_1,\ldots,\ F_\rho$.

Приклад. Виразити через елементарні дроби дріб $\frac{x^4+5x^3+2x-1}{x^2(x+1)(x^2+1)}$.

Розв'язання. Це правильний дріб, тому його розклад на елементарні дроби будемо шукати за формулою (1.8) у вигляді:

$$\frac{x^4+5x^3+2x-1}{x^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $x^2(x+1)(x^2+1)$ дістанемо тотожність

$$x^4+5x^3+2x-1=Ax(x+1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+Cx^2(x^2+1)+$$
$$+(Dx+E)x^2(x+1)=A(x^4+x^3+x^2+x)+B(x^3+x^2+x+1)+$$
$$+C(x^4+x^2)+D(x^4+x^3)+E(x^3+x^2).$$

Тоді

$$x^4+5x^3+2x-1=x^4(A+C+D)+x^3(A+B+D+E)+$$
$$+x^2(A+B+C+E)+x(A+B)+B.$$

Прирівнюючи значення при однакових ступенях x в обох частинах рівності, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A+C+D=1\\ A+B+D+E=5\\ A+B+C+E=0\\ A+B=2\\ B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} B=-1\\ A=3\\ C+E=-2\\ D+E=3\\ C+D=-2\end{cases}$$

Окремо розв'яжемо три останні рівняння системи:

$$\begin{cases} C+E=-2\\ D+E=3\\ C+D=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} E=D\\ 2E=3\\ C+E=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} E=\dfrac{3}{2}\\ D=\dfrac{3}{2}\\ C=-\dfrac{7}{2}\end{cases}.$$

Отже маємо $A=3,\ B=-1,\ C=-\frac{7}{2},\ D=\frac{3}{2}\ ,\ E=\frac{3}{2}$. Можемо записати остаточний результат:

$$\frac{x^4+5x^3+2x-1}{x^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{7}{2(x+1)}+\frac{3x+3}{2(x^2+1)}.$$

Крім методу порівняння коефіцієнтів, користуються також методом окремих значень аргументу. Нехай після множення обох частин рівності (1.8) дістаємо два тотожно рівні многочлени, один з яких — відомий, а другий з невідомими коефіцієнтами. Надаючи змінній конкретні значення стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначимо шукані коефіцієнти. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_n(x)$. Іноді зручно скористатись комбінованим методом, тобто деякі з невідомих коефіцієнтів визначати, надаючи x значення дійсних коренів знаменника, а інші — визначати методом порівняння.

Приклади. 1. Виразити через елементарні дроби дріб $\frac{4x^2-x+1}{x(x-4)(x+3)}$.

Розв'язання. Це правильний дріб, тому його розклад на елементарні дроби будемо шукати за формулою (1.8) у вигляді:

$$\frac{4x^2-x+1}{x(x-4)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+3}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $x(x-4)(x+3)$, дістанемо тотожність

$$4x^2-x+1\equiv A(x-4)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-4).$$

Якщо в цій тотожності покласти $x=0$, то отримаємо $1=\mathrm{A}(-4)\cdot 3$, звідки $-12\mathrm{A}=1$ і $A=-\frac{1}{12}$; якщо покласти $x=4$, то отримаємо $61=B\cdot 4\cdot 7$, звідки $28B=61$ і $B=\frac{61}{28}$; якщо ж покласти $x=-3$, то отримаємо $40=C\cdot(-3)\cdot(-7)$, звідки $21C=40$ і $C=\frac{40}{21}$.

Отже,

$$\frac{4x^2-x+1}{x(x-4)(x+3)}=-\frac{1}{12x}+\frac{61}{28(x-4)}+\frac{40}{21(x+3)}.$$

2. Виразити через елементарні дроби дріб $\frac{2x^2-4}{x^3+1}$.

Розв'язання. Це правильний дріб, тому його розклад на елементарні дроби будемо шукати за формулою (1.8). Для цього спочатку розкладемо за формулою скороченого множення вираз x^3+1 як добуток двох виразів $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Тоді маємо

$$\frac{2x^2-4}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $(x+1)(x^2-x+1)$, дістанемо тотожність

$$2x^2-4\equiv A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1),$$

або

$$2x^2-4\equiv A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1).$$

Якщо в цій тотожності покласти $x=-1$, то отримаємо $-2=3\mathrm{A}$, звідки $A=-\frac{2}{3}$; якщо покласти $x=0$, то отримаємо $-4=A+C$, звідки

$C=-4-A=-4-\left(-\frac{2}{3}\right)=-4+\frac{2}{3}=-\frac{10}{3}$; якщо ж покласти $x=1$, то отримаємо

$-2=A+2B+2C$, звідки $2B=-2-A-2C=-2+\frac{2}{3}+\frac{20}{3}=\frac{16}{3}$ і $B=\frac{8}{3}$.

Отже,

$$\frac{2x^2-4}{(x+1)(x^2-x+1)}=-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{8x-10}{3(x^2-x+1)}.$$

1.6. Інтегрування раціональних функцій.

Раціональні функції складають важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції.

Нехай треба знайти

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx.$$

Враховуючи рівність (1.7), цей інтеграл можна подати як суму інтеграла від многочлена і правильного раціонального дробу:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int W_k(x)dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}dx.$$

Інтеграл від многочлена знаходять безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться за допомогою формули (1.8) до інтегралів від елементарних дробів.

Розглянемо ці інтеграли:

$$1.\ \int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\,ln\,|x-a| + C.$$

$$2.\ \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A}{(1-n)\,(x-a)^{n-1}} + C.$$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$ Обчислення даного інтеграла розглянуто вище у пункті 1.4.

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx.$ Даний інтеграл спрощується заміною $t = x + \frac{p}{2}$. Після цього за допомогою методу інтегрування частинами отримуємо рекурентну формулу для обчислення інтеграла.

Приклади.

1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{4x^2-x+1}{x(x-4)(x+3)}dx.$

Розв’язання. Оскільки розклад підінтегральної функції на елементарні дроби вже відомий п. 1.5, то

$$I = \int \frac{4x^2-x+1}{x(x-4)(x+3)}dx = \int \left(-\frac{1}{12x} + \frac{61}{28(x-4)} + \frac{40}{21(x+3)}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{12}\int \frac{dx}{x} + \frac{61}{28}\int \frac{dx}{x-4} + \frac{40}{21}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{12}ln|x| + \frac{61}{28}\,ln|x-4| + \frac{40}{21}ln|x+3| + C.$$

2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^6+2x^2-5}{x^3+1}dx.$

Розв’язання. Під знаком інтеграла маємо неправильний дріб, тому спочатку виділимо його цілу частину:

$$\frac{x^6+2x^2-5}{x^3+1} = x^3 - 1 + \frac{2x^2-4}{x^3+1}.$$

Нижче показано як виконувалося ділення двох многочленів:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^6+2x^2-5 & x^3+1 \\ \underline{x^6+x^3\qquad\quad} & \overline{x^3-1} \\ -\;-x^3+2x^2-5 & \\ \underline{-x^3\qquad-\quad 1} & \\ 2x^2-4 & \end{array}$$

Розклад правильного дробу $\frac{2x^2-4}{x^3+1}$ на елементарні дроби вже відомий п. 1.5:

$$\frac{2x^2-4}{x^3+1}=\frac{2x^2-4}{(x+1)(x^2-x+1)}=-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{8x-10}{3(x^2-x+1)}.$$

Тоді

$$I=\int\frac{x^6+2x^2-3}{x^3+1}dx=\int\left(x^3-1-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{8x-10}{3(x^2-x+1)}\right)dx=$$

$$=\int x^3dx-\int dx-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{4x-5}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-x-\frac{2}{3}ln|x+1|+\frac{2}{3}\int\frac{4x-5}{x^2-x+1}dx=(*)$$

Інтеграл $\int\frac{4x-5}{x^2-x+1}dx$ обчислимо окремо, як інтеграл з квадратним тричленом.

$$\int\frac{4x-5}{x^2-x+1}dx=\left|\begin{array}{c} t=x-\frac{1}{2}\,,\;\; x=t+\frac{1}{2}\,,\;\; dx=\left(t+\frac{1}{2}\right)'dt=dt \\ x^2-x+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(t+\frac{1}{2}\right)+1= \\ =t^2+t+\frac{1}{4}-t-\frac{1}{2}+1=t^2+\frac{3}{4} \\ 4x-5=4\left(t+\frac{1}{2}\right)-5=4t-3 \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{4t-3}{t^2+\frac{3}{4}}dt=4\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}-3\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}dt=(**)$$

Кожен з двох інтегралів $(**)$ обчислимо окремо

1. $$\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}=\left|\begin{array}{c} u=t^2+\frac{3}{4} \\ du=\left(t^2+\frac{3}{4}\right)'dt=2tdt \\ tdt=\frac{1}{2}du \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{2}ln|u|+C=\frac{1}{2}ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|+C.$$

2. $$\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+C.$$

Отже,

$$(**) = \frac{4}{2} ln\left|t^2 + \frac{3}{4}\right| - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= 2ln|x^2 - x + 1| - 2\sqrt{3} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Тоді остаточно маємо

$$(*) = \frac{x^4}{4} - x - \frac{2}{3} ln|x+1| + \frac{2}{3} \cdot 2\, ln|x^2 - x + 1| - \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3}\, arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Отже

$$I = \frac{x^4}{4} - x - \frac{2}{3} ln|x+1| + \frac{4}{3} ln|x^2 - x + 1| - \frac{4}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1.7. Інтегрування деяких ірраціональних і трансцендентних функцій.

Насамперед зауважимо, що інтеграли від ірраціональних та трансцендентних функцій не завжди обчислюються в елементарних функціях. Розглянемо деякі типи інтегралів, які за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Нехай $R(u, v, \dots, s)$ — раціональна функція від змінних $u, v, \dots, s$, тобто така функція, в якій над зазначеними змінними та дійсними числами виконується скінченна кількість чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення.

Наприклад, раціональною відносно змінних u i v є функція

$$R(u, v) = \frac{5u^3 - 4uv + 7}{2u^2 - 4v^2 + 3v}.$$

Якщо змінні u та v, в свою чергу, є функціями від x: $u = u(x)$ i $v = v(x)$, то функція $R\big(u(x), v(x)\big)$ є раціональною відносно функцій $u(x)$ і $v(x)$.

Наприклад, функція

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{4\sqrt[5]{x-2}}{x^3 + 9}$$

є раціональною функцією від $\sqrt[5]{x-2}$, $\sqrt[3]{x}$ і x:

$$f(x) = R\left(\sqrt[5]{x-2}, \sqrt[3]{x}, x\right).$$

Розглянемо тепер інтеграли від деяких ірраціональних функцій і покажемо, що в ряді випадків вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій (або, як кажуть, раціоналізуються).

1. Інтеграли виду $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$ раціоналізуються підстановкою $x = t^k$, де k — найменший спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. Тоді $dx = (t^k)' dt = kt^{k-1} dt$, тобто, x та dx виражаються через раціональні функції від t.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}$.

Розв'язання. Під знаком інтеграла стоїть раціональна функція $R\left(x, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{2}}\right)$. Найменший спільний знаменник дробів $\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{2}$ дорівнює 6, тому

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^6, \;\; t = \sqrt[6]{x} \\ dx = (t^6)' dt = 6t^5 dt \\ \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = (t^6)^{\frac{2}{3}} = t^4 \\ \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} =$$

$$= 6\int \frac{t^2dt}{t-1} = 6\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 6\int \frac{t^2-1}{t-1}dt + 6\int \frac{dt}{t-1} =$$

(так як $t^2-1=(t-1)(t+1)$, то отримаємо)

$$= 6\int (t+1)\,dt + 6\int \frac{dt}{t-1} = 6\cdot\frac{t^2}{2} + 6t + 6\,ln|t-1| + C =$$

(повертаємося до початкової змінної за допомогою рівності $t=\sqrt[6]{x}$)

$$= 3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + 6\sqrt[6]{x} + 6\,ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C = 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\,ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C.$$

2. Інтеграли виду $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k — найменший спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},\dots,\frac{r}{s}$.

Дійсно, якщо

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k \;\Rightarrow\; ax+b = t^k(cx+d) \;\Leftrightarrow\; ax - ct^kx = dt^k - b \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (a-ct^k)x = dt^k - b \;\Rightarrow x = \frac{dt^k-b}{a-ct^k} = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}.$$

Тоді

$$dx = \left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a}\right)'dt = \frac{kt^{k-1}(ad-bc)}{(ct^k-a)^2}dt,$$

тобто, x та dx виражаються через раціональні функції від t.

Оскільки, крім того, кожний степінь дробу $\frac{ax+b}{cx+d}$ виразиться через цілий степінь t, то підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від t.

Приклади. Знайти інтеграли:

$$1.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}-5\sqrt[4]{4x-1}}.$$

Розв'язання. Під знаком інтеграла стоїть раціональна функція $R\left(x,(4x-1)^{\frac{1}{2}},(4x-1)^{\frac{1}{4}}\right)$. Найменший спільний знаменник дробів $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{4}$ дорівнює 4, тому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}-5\sqrt[4]{4x-1}} = \left|\begin{array}{c} 4x-1=t^4, \qquad x=\frac{1}{4}(t^4+1),\;\; t=\sqrt[4]{4x-1} \\ dx=\left(\frac{1}{4}(t^4+1)\right)'dt = t^3dt \\ \sqrt{4x-1}=(4x-1)^{\frac{1}{2}}=(t^4)^{\frac{1}{2}}=t^2 \\ \sqrt[4]{4x-1}=(4x-1)^{\frac{1}{4}}=(t^4)^{\frac{1}{4}}=t \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{t^3dt}{t^2-5t} = \int \frac{t^2dt}{t-5} = \int \frac{t^2-25+25}{t-5}dt = \int \frac{t^2-25}{t-5}dt + 25\int \frac{dt}{t-5} =$$

(так як $t^2-25=(t-5)(t+5)$, то отримаємо)

$$\int (t+5)\,dt + 25\int \frac{dt}{t-5} = \frac{t^2}{2} + 5t + 25\,ln|t-5| + C =$$

(повертаємося до початкової змінної за допомогою рівності $t = \sqrt[4]{4x-1}$)

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-1} + 5\sqrt[4]{4x-1} + 6\,ln\left|\sqrt[4]{4x-1} - 5\right| + C.$$

$$2.\ \int \frac{1}{(x+1)^3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx\,.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{1}{(x+1)^3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \left|\begin{array}{c} \dfrac{x-1}{x+1} = t^4,\ \ x = -\dfrac{t^4+1}{t^4-1}, \\ dx = \left(-\dfrac{t^4+1}{t^4-1}\right)' dt = \dfrac{8t^3dt}{(t^4-1)^2} \\ x+1 = -\dfrac{t^4+1}{t^4-1} + 1 = -\dfrac{2}{t^4-1} \\ t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} \end{array}\right| =$$

$$= \int \left(-\frac{t^4-1}{2}\right)^3 t\,\frac{8t^3dt}{(t^4-1)^2} = -\int \frac{(t^4-1)^3}{8}\,\frac{8t^4dt}{(t^4-1)^2} = -\int\ (t^4-1)t^4dt =$$

$$= -\int t^8dt\ + \int t^4dt = -\frac{1}{9}t^9 + \frac{1}{5}t^5 + C = -\frac{1}{9}\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^9} + \frac{1}{5}\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5} + C\,.$$

3. Інтегрування диференціальних біномів. Вираз виду $x^m(a+bx^n)^p$, де m, n, p — сталі раціональні числа, a і b — довільні сталі числа, називається диференціальним біномом. Справедлива така теорема Чебишева.

Теорема. Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:

1) p — ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку $x = t^s$, де s — найменший спільний знаменник дробів m і n;

2) $\frac{m+1}{n}$ — ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку $a + bx^n = t^r$, де r — знаменник дробу p;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку $ax^{-n} + b = t^r$, де r — знаменник дробу p.

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається.

Приклад. Знайти інтеграл:

$$I = \int \frac{\sqrt{2+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx\,.$$

Розв'язання. Оскільки в інтегралі

$$I = \int \frac{\sqrt{2+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(2+x^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}dx\,;$$

$m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{6}$, $p = \frac{1}{2}$: $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{6}} = 2 \in Z$, то застосовний другий випадок теореми Чебишева.

Маємо

$$I = \left| \begin{gathered} t^2 = 2+\sqrt[6]{x}, \qquad \sqrt[6]{x} = t^2-2 \\ x = (t^2-2)^6,\ \ t = \sqrt{2+\sqrt[6]{x}} \\ dx = ((t^2-2)^6)'dt = 12t(t^2-2)^5dt \end{gathered} \right| = \int \frac{t\cdot 12t(t^2-2)^5}{((t^2-2)^6)^{\frac{2}{3}}}dt =$$

$$= 12\int t^2(t^2-2)dt = 12\int t^4dt - 24\int t^2dt = \frac{12}{5}t^5 - \frac{24}{3}t^3 + C =$$

$$= 2{,}4\sqrt{\left(2+\sqrt[6]{x}\right)^5} - 8\sqrt{\left(2+\sqrt[6]{x}\right)^3} + C\,.$$

4. Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ раціоналізуються підстановкою $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$, яка називається універсальною.

Дійсно,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctg\ t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt,$$

Тому

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\ dt = \int R_1(t)\,dt,$$

де $R_1(t)$ — раціональна функція від t.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2\cos x+3}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{2\cos x+3} = \left| \begin{gathered} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt \end{gathered} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}+3\right)} =$$

$$\int \frac{2dt}{2(1-t^2)+3(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{t^2+5} = 2\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\ arctg\ \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}}\ arctg\ \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C.$$

Зауважимо, що універсальна підстановка завжди раціоналізує інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Проте на практиці вона часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках користуються іншими підстановками. Наведемо деякі з них.

а) інтеграл $\int R(\sin x)\cos x\, dx$ раціоналізується підстановкою $\sin x = t$;

б) інтеграл $\int R(\cos x)\sin x\, dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x = t$;

в) інтеграл $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$;

г) інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x = t$, якщо функція R непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ або підстановкою $\sin x = t$, якщо функція R непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ або підстановкою $\operatorname{tg} x = t$, якщо функція R парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$;

д) інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ знаходиться підстановкою $\sin x = t$, якщо n — ціле додатне непарне число, або підстановкою $\cos x = t$, якщо m — ціле додатне непарне число, а також за допомогою формули пониження степеня

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

якщо m та n — цілі додатні парні числа; коли m і n — цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$; така сама підстановка використовується у випадку, коли m і n — цілі непарні і від'ємні;

є) інтеграли $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ обчислюються за допомогою відомих формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Приклади. Знайти інтеграли:

$$1.\ \int \sin^2 x\, dx.$$

Розв’язання. Розв’яжемо даний приклад за допомогою формули пониження степеня:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

$$2.\ \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Розв’язання. Оскільки підінтегральна функція парна відносно $\cos x$, то скористаємось підстановкою $\operatorname{tg} x = t$. Звідси

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x, \ \ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\dfrac{1}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$3. \ \int \sin^5 x \cos^8 x \, dx.$$

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, то скористаємось підстановкою $\cos x = t$. Звідси

$$\int \sin^5 x \cos^8 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^8 x \sin x \, dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x\,, \ \ dt = -\sin x \, dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int (1-t^2)^2 t^8 dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4) t^8 dt = -\int (t^{12} - 2t^{10} + t^8) dt =$$

$$= -\frac{1}{13} t^{13} + \frac{2}{11} t^{11} - \frac{1}{9} t^9 + C = -\frac{1}{13} \cos^{13} x + \frac{2}{11} \cos^{11} x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C.$$

5. Інтеграл виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ за допомогою підстановки $t = x + \frac{b}{2a}$ зводиться до одного з таких інтегралів:

а) $\int R\left(t, \sqrt{t^2 + m^2}\right) dt$, б) $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - m^2}\right) dt$, в) $\int R\left(t, \sqrt{m^2 - t^2}\right) dt$,

де $m \in R$. Неважко переконатись, що за допомогою підстановок

а) $t = m \, tg \, z$, б) $t = \dfrac{m}{\sin z}$, в) $t = m \sin z$ відповідні інтеграли зводяться до інтеграла $\int R(\sin x\,, \cos x) \, dx$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sqrt{16 - x^2} \, dx$.

Розв'язання.

$$\int \sqrt{16 - x^2} \, dx = \left| \begin{matrix} x = 4 \sin t, \ \ \sin t = \dfrac{x}{4}, \\ dx = 4 \cos t \, dt\,, \ \ t = \arcsin \dfrac{x}{4} \\ \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} = 4 \cos t \end{matrix} \right| = \int 4 \cos t \cdot 4 \cos t \, dt =$$

$$= 16 \int \cos^2 t \, dt = 16 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8 \int dt + 8 \int \cos 2t \, dt = 8t + 4 \sin 2t + C =$$

$$= 8t + 8 \sin t \cos t = 8 \arcsin \frac{x}{4} + 8 \ \frac{x}{4} \ \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + C = 8 \arcsin \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \ x \sqrt{16 - x^2} + C.$$

Необхідно зазначити, що інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ виражаються через раціональні функції також за допомогою так званих підстановок Ейлера:

1) якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} \, x + t$;

2) якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$;

3) якщо $b^2 - 4ac > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha) t$,

де α — корінь тричлена $ax^2 + bx + c$.

6. Інтеграл виду $\int R(e^x) dx$ раціоналізується підстановкою $t = e^x$.

Дійсно, оскільки $x = \ln t$, то $dx = \frac{dt}{t}$ і

$$\int R(e^x) dx = \int R(t) \frac{dt}{t} \ .$$

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int \frac{5e^{2x}-2e^{x}-7}{e^{2x}-3e^{x}-4}\,dx.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{5e^{2x}-2e^{x}-7}{e^{2x}-3e^{x}-4}\,dx=\left|\begin{matrix} e^{x}=t \\ x=\ln t \\ dx=\dfrac{dt}{t}\end{matrix}\right|=\int \frac{5t^2-2t-7}{(t^2-3t-4)t}\,dt=$$

$$=\int \frac{(t+1)\,(5t-7)}{t(t+1)\,(t-4)}\,dt=\int \frac{5t-7}{t\,(t-4)}\,dt=\int \left(\frac{4}{7t}+\frac{4}{13\,(t-4)}\right)dt=$$

$$\frac{4}{7}\int \frac{dt}{t}+\frac{4}{13}\int \frac{dt}{t-4}=\frac{4}{7}\ln|t|+\frac{4}{13}\ln|t-4|+C=$$

$$=\frac{4}{7}\ln e^{x}+\frac{4}{13}\ln|e^{x}-4|+C=\frac{4}{7}x+\frac{4}{13}\ln|e^{x}-4|+C.$$

1.8. Інтеграли, що «не беруться».

Як видно було з диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є також функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить нас із класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування — операцію, обернену до диференціювання. Інтегрування елементарної функції не завжди знову приводить до елементарної функції. Подібне спостерігається й для інших взаємно обернених операцій: сума довільних натуральних чисел є завжди число натуральне, а різниця— ні; добуток двох цілих чисел завжди є цілим числом, а частка —ні і т. п. Строго доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони не обчислюються в скінченному вигляді або «не беруться».

Наприклад, доведено, що «не беруться» такі інтеграли:

$\int e^{-x^2}dx$ — інтеграл Пуассона;

$\int cos\,x^2\,dx,\ \int sin\,x^2\,dx$ — інтеграли Френеля;

$\int \frac{dx}{ln\,x}$ — інтегральний логарифм;

$\int \frac{cos\,x}{x}\,dx$— інтегральний косинус;

$\int \frac{sin\,x}{x}\,dx$ — інтегральний синус;

$\int \sqrt{1-k^2\,sin^2\,x}\,dx,\ |k|<1$ — еліптичний інтеграл;

$\int x^{\alpha}\,sin\,x\,dx,\ \int x^{\alpha}\,cos\,x\,dx,\ \int x^{\alpha}e^{x}\,dx\ \ (\alpha\neq 0,1,2,\dots)$ та ряд інших інтегралів.

Вказані інтеграли хоча й існують, але не є елементарними функціями В подібних випадках первісна являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, яка не виражається через скінченне число арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями. Неелементарні (або так звані спеціальні) функції розширюють множину елементарних функцій.

Зрозуміло, що інтеграл, який не обчислювався в класі елементарних функцій, може виявитись таким, що обчислюється в розширеному класі функцій.

Таким чином, інтегрування в порівнянні з диференціюванням — операція набагато складніша. Тому треба твердо володіти основними методами інтегрування і чітко знати види функцій, інтеграли від яких цими методами знаходяться. Крім того, виявляється, що треба розрізняти також інтеграли, які «не беруться». Тому в інженерній практиці широко користуються довідниками, в яких містяться докладні таблиці інтегралів, що виражаються через елементарні і неелементарні функції.

§ 2. Визначений інтеграл.

2.1. Задача про площу криволінійної трапеції.

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано функцію $y=f(x)\geq 0$. Фігура $aABb$ (рис. 2.1), обмежена графіком даної функції і відрізками прямих $y=0$, $x=a$, $x=b$, називається криволінійною трапецією. Потрібно обчислити площу S цієї трапеції.

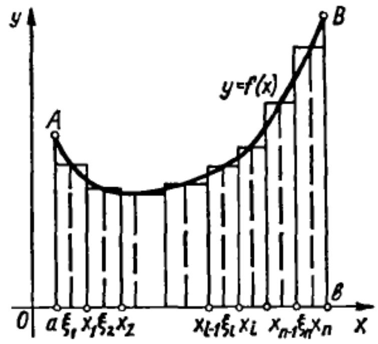


Рис. 2.1.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ за допомогою точок $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ на n частинних відрізків $[x_{i-1};x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$. На кожному з цих відрізків візьмемо довільну точку $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$ і обчислимо значення $f(\xi_i)$. Тоді добуток $f(\xi_i)\,\Delta x_i$, де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, дорівнює площі прямокутника з основою Δx_i і висотою $f(\xi_i)$ а сума цих добутків — площі ступінчатої фігури і наближено дорівнює площі криволінійної трапеції:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

Із зменшенням усіх величин Δx_i точність цієї формули збільшується, тому природно за площу криволінійної трапеції вважати границю площ ступінчатих фігур за умови, що максимальна довжина частинних відрізків прямує до нуля:

$$S=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

2.2. Означення та умови існування визначеного інтеграла. Геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a<b$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\,.$$

Сукупність точок x_0, x_1, ..., x_n позначимо через τ і назвемо τ – розбиттям відрізка $[a;b]$.

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1};x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, візьмемо довільну точку $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$ і побудуємо суму

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i\,,\qquad(2.1)$$

де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ — довжина відрізка $[x_{i-1};x_i]$.

Сума (2.1) називається інтегральною сумою функції $f(x)$, яка відповідає τ-розбиттю відрізка $[a;b]$ на частинні відрізки і даному вибору проміжних точок ξ_i.

Геометричний зміст інтегральної суми: якщо $f(x) \geq 0$, то число σ_n дорівнює площі ступінчатої фігури (рис. 1), тобто сумі площ n прямокутників з основами Δx_i і висотами $f(\xi_i)$.

Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка τ -розбиття і назвемо його діаметром цього розбиття:

$$\lambda = \lambda(\tau) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \, .$$

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (2.1) при $\lambda \to 0$, яка не залежить ні від τ -розбиття, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int_a^b f(x)dx$. Отже, згідно з означенням,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i \, . \qquad (2.2)$$

У цьому випадку функція $f(x)$ називається інтегровною на відрізку $[a;b]$. Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою межею інтегрування; функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією; $f(x)dx$ — підінтегральним виразом, x — змінною інтегрування; $[a;b]$ — проміжком інтегрування.

Геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла.

1) Площа S криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geq 0$, дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції:

$$S = \int_a^b f(x)dx \, . \qquad (2.3)$$

У цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла: визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції;

2) робота A змінної сили $F(x)$, яка діє на відрізку $[a;b]$, дорівнює визначеному інтегралу від сили:

$$A = \int_a^b F(x)dx \, ; \qquad (2.4)$$

3) шлях s, пройдений точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$s = \int_a^b v(t)dt \, . \qquad (2.5)$$

Ця формула характеризує фізичний зміст визначеного інтеграла;

4) маса m неоднорідного стержня на відрізку $[a;b]$ дорівнює визначеному інтегралу від густини $\gamma(x)$:

$$m = \int_a^b \gamma(x)dx. \qquad (2.6)$$

Сформулюємо умови інтегровності функції.

Теорема 1 (необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Теорема 2 (достатня умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$ і неперервна в ньому скрізь, крім скінченного числа точок, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Теорема 4. Всяка обмежена і монотонна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку.

Надалі, як правило, розглядатимемо лише неперервні функції.

2.3. Властивості визначеного інтеграла.

1°. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz\,.$$

2°. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

3°. Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

4°. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на максимальному з відрізків $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$ то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(адитивність визначеного інтеграла).

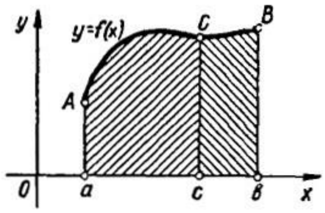


Рис. 2.2.

5°. Сталий множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx\,.$$

6°. Визначений інтеграл від суми (різниці) інтегровних функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\,.$$

7°. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ маємо $f(x) \geq 0$ $(a < b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом).

8°. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ маємо $f(x) \leq g(x)$ $(a < b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(монотонність визначеного інтеграла).

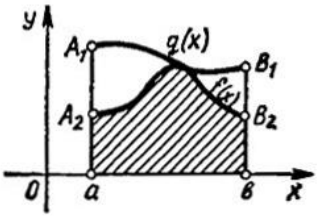


Рис. 2.3.

9°. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx\,.$$

10°. Якщо $\forall\, x \in [a;b]$ $(a < b)$: $|f(x)| \leq C$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq C(b-a)\,.$$

11°. Якщо m і M —відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

(оцінки інтеграла по області).

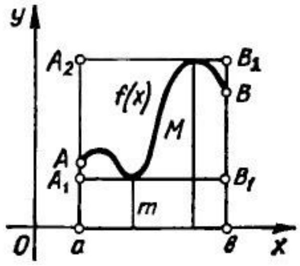


Рис. 2.4.

12°. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(теорема про середнє значення функції). Звідки

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.7)$$

Рівність (2.7) називається формулою середнього значення, а величина $f(c)$ — середнім значенням функції на відрізку $[a;b]$.

2.4. Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона — Лейбніца.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, тоді вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a;x] \subset [a;b]$, тобто для довільного $x \in [a;b]$ існує інтеграл $\int_a^x f(t)dt$. (Оскільки визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування, то ми позначили її через t, щоб не плутати з верхньою межею x). Заданий інтеграл, очевидно, є функцією від x. Позначимо цю функцію через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (2.8)$$

і назвемо інтегралом із змінною верхньою межею.

Геометрично (рис. 2.5) при $f(x)\geq 0$ функція $\Phi(x)$ дорівнює площі заштрихованої криволінійної трапеції. Розглянемо основну властивість функції $\Phi(x)$.

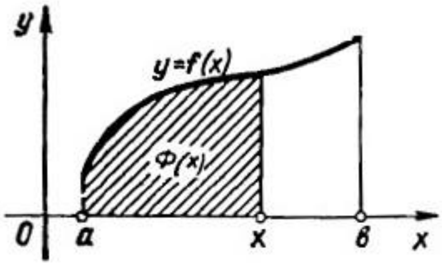


Рис. 2.5.

Теорема 1. Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)\,. \qquad (2.9)$$

Наслідок. Для всякої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ існує первісна функція. При цьому однією з первісних функцій є визначений інтеграл (2.9).

Теорема 2. Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною від неперервної функції $f(x)$, $x\in[a;b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\,. \qquad (2.10)$$

Ця формула називається формулою Ньютона — Лейбніца.

Доведення. Нехай $F(x)$ — деяка первісна функції $f(x)$. Оскільки інтеграл (2.8) є також первісною, то

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C\,.$$

Поклавши в цій рівності $x=a$, дістанемо

$$\int_a^a f(t)dt=F(a)+C=0\,,$$

звідки $C=-F(a)$, тому

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)\,.$$

Зокрема, при $x=b$ дістаємо формулу (2.10).

Різницю $F(b)-F(a)$ умовно позначають символами $F(x)|_a^b$, тому формула Ньютона — Лейбніца записується ще й так:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)\,. \qquad (2.11)$$

Формула Ньютона — Лейбніца дає практично зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених для верхньої і нижньої меж інтегрування.

Приклади. Обчислити інтеграли:

$$1.\quad \int_0^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{32}{5} - 0 = 6{,}4\,.$$

$$2.\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

$$3.\quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{9-x^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-3^2} = -\frac{1}{2\cdot 3}\, ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}\left(ln\left|\frac{1-3}{1+3}\right| - ln\left|\frac{-1-3}{-1+3}\right|\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(ln\frac{1}{2} - ln2\right) = -\frac{1}{6}(-ln2 - ln2) = \frac{1}{3}ln2\,.$$

$$4.\quad \int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|\Big|_{-1}^{2} = ln\left|2+\sqrt{2^2+4}\right| - ln\left|-1+\sqrt{(-1)^2+4}\right| =$$

$$= ln\left(2+2\sqrt{2}\right) - ln\left(\sqrt{5}-1\right) = ln\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}\right).$$

2.5. Методи обчислення визначених інтегралів.

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко користуються методом заміни змінної (або методом підстановки) і методом інтегрування частинами.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:
1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;
2) функція $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$;
3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і $\forall\, t\in(\alpha;\beta)$: $a<\varphi(t)<b$.
Тоді справджується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt\,. \qquad (2.12)$$

Формула (2.12) називається формулою заміни змінної (або підстановки) у визначеному інтегралі.

Зауваження 1. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $x=\varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a=\varphi(t)$ відносно невідомого t, а верхня межа β — з рівняння $b=\varphi(t)$.

Зауваження 2. Часто замість підстановки $x=\varphi(t)$ застосовують підстановку $t=\psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$. Проте тут слід мати на увазі, що функція $x=x(t)$, обернена до функції $\psi(t)$, має, як і раніше, задовольняти всі умови теореми 1. Зокрема, функція $x(t)$ в межах інтегрування має бути означеною неперервно диференційовною функцією t і при зміні t від α до β змінна $x(t)$ має змінюватися від a до b.

Приклади. Обчислити інтеграли:

1. $$\int_1^6 \frac{x^2dx}{\sqrt{x+3}} = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{x+3}, \quad t^2 = x+3, \qquad x = t^2-3, \\ dx = (t^2-3)'dt = 2tdt, \\ x_1 = 1, \qquad t_1 = \sqrt{1+3} = 2, \\ x_2 = 6, \qquad t_2 = \sqrt{6+3} = 3. \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-3)^2 2tdt}{t} =$$

$$= 2\int_2^3 (t^2-3)^2dt = 2\int_2^3 (t^4-6\,t^2+9)dt = 2\int_2^3 t^4dt - 1\,2\int_2^3 t^2dt + 18\int_2^3 dt =$$

$$= 2\frac{t^5}{5}\bigg|_2^3 - 12\frac{t^3}{3}\bigg|_2^3 + 18t|_2^3 = \frac{2}{5}(3^5-2^5) - 4(3^3-2^3) + 18(3-2) =$$

$$= \frac{2}{5}(243-32) - 4(27-8) + 18 = 84{,}4 - 76 + 18 = 26{,}4\,.$$

2. $$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{c} x = \frac{1}{\sin t}, \qquad \sin t = \frac{1}{x}, \qquad t = \arcsin\frac{1}{x}, \\ dx = \left(\frac{1}{\sin t}\right)' dt = -\frac{1}{\sin^2 t}(\sin t)'dt = -\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}, \\ \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \left|\frac{\cos t}{\sin t}\right|, \\ \frac{1}{x^3} = \sin^3 t, \quad x_1 = \sqrt{2}, \qquad t_1 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \\ x_2 = 2, \qquad t_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\,. \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 t \left|\frac{\sin t}{\cos t}\right| \left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) dt =$$

(так як при $t \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ функції $\sin t$ і $\cos t$ є додатними, то модуль можна опустити; поміняємо місцями межі інтегрування, при цьому знак інтеграла зміниться на протилежний)

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t\ \frac{\sin t}{\cos t}\ \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Приклад. Довести, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

коли $f(x)$ — парна функція;

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0\,,$$

коли $f(x)$—непарна функція.

Доведення. Маємо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx\,.$$

У першому інтегралі виконаємо підстановку $x = -t$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \left|\begin{matrix} x = -t\,, & dx = -dt \\ x_1 = -a, & t_1 = a\,, \\ x_2 = 0, & t_2 = 0\,. \end{matrix}\right| = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx\,.$$

Далі дістаємо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}\big(f(-x)+f(x)\big)dx\,.$$

Якщо функція парна, то $f(-x)+f(x)=2f(x)$, а якщо непарна, то $f(-x)+f(x)=0$.

Знайдені формули дуже корисні. Можна, наприклад, зразу, не виконуючи обчислень, сказати, що

$$\int_{-a}^{a} x^6 \sin x\,dx = 0\,; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x \cos^8 x\,dx = 0\,,$$

тощо.

Теорема 2. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на відрізку $[a; b]$ неперервні похідні, то справедлива формула

$$\int_{a}^{b} udv = uv|_a^b - \int_{a}^{b} vdu\,. \qquad (2.13)$$

Формула (2.13) називається формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла.

Усі зауваження відносно формули (1.4) інтегрування частинами невизначеного інтеграла переносяться і на формулу (2.13).

Приклади.

Обчислити інтеграли:

1. $$\int_{0}^{\frac{\pi}{9}} x\,cos9xdx = \left|\begin{matrix} u = x, & dv = cos9xdx \\ du = (x)'dx = dx, & v = \dfrac{1}{9}sin9x \end{matrix}\right| = \frac{1}{9}x\,sin9x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} - \frac{1}{9}\int_{0}^{\frac{\pi}{9}} sin9xdx =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{\pi}{9}sin\pi - 0 + \frac{1}{81}cos9x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} = 0 + \frac{1}{81}(cos\pi - cos0) = \frac{1}{81}(-1-1) = -\frac{2}{81}\,.$$

2. $$\int_{1}^{e} x^3 \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x\,, & dv = x^3dx \\ du = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{1}{4}x^4 \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}x^4 \ln x|_1^e -$$

$$-\frac{1}{4}\int_1^e x^4\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}e^4\ln e-\frac{1}{4}1^4\ln 1-\frac{1}{4}\int_1^e x^3dx=\frac{1}{4}e^4-0-\frac{1}{16}x^4\Big|_1^e=$$

$$=\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{16}(e^4-1^4)=\frac{3}{16}e^4+\frac{1}{16}.$$

3. $$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x, & dv=dx \\ du=(\operatorname{arctg} x)'dx=\dfrac{dx}{x^2+1}, & v=x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{x^2+1}=\left|\begin{matrix} t=x^2+1, \quad dt=(x^2+1)'dx=2xdx \\ xdx=\dfrac{1}{2}dt \\ x_1=0, \quad t_1=0^2+1=1, \\ x_2=1, \quad t_2=1^2+1=2.\end{matrix}\right|=$$

$$=1\cdot\operatorname{arctg}1-0-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

2.6. Невласні інтеграли.

1°. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ +\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad (2.14)$$

її називають невласним інтегралом першого роду і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (2.15)$$

Таким чином, за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.16)$$

У цьому випадку інтеграл (2.15) називають збіжним, а підінтегральну функцію $f(x)$ — інтегровною на проміжку $[a;\ +\infty)$.

Якщо ж границя (2.14) не існує або нескінченна, то інтеграл (2.15) називається також невласним, але розбіжним, а функція $f(x)$ — неінтегровною на $[a;\ +\infty)$.

Аналогічно інтегралу (2.16) означається невласний інтеграл на проміжку $(-\infty;\ b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.17)$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2.18)$$

де c — довільне дійсне число. Отже, інтеграл зліва у формулі (2.18) існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа. Можна довести, що інтеграл, визначений формулою (2.18), не залежить від вибору числа c.

З наведених означень видно, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею означеного інтеграла із змінною межею інтегрування.

Зауважимо, що коли функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a;\ +\infty)$ і коли інтеграл (2.16) збігається, то природно вважати, що він виражає площу необмеженої області (рис. 2.6).

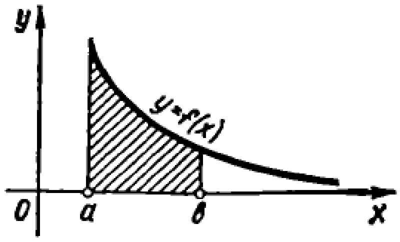


Рис. 2.6.

Приклади. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$1.\ \int_{4\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+16} = \lim_{b\to+\infty} \int_{4\sqrt{3}}^{b} \frac{dx}{x^2+4^2} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{4}\, arctg\, \frac{x}{4}\Big|_{4\sqrt{3}}^{b} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{b\to+\infty}\left(arctg\,\frac{b}{4} - arctg\,\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{24}\ .$$

Отже інтеграл є збіжним.

$$2.\ \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{8}} \sin 4x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{\frac{\pi}{8}} \sin 4x\, dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)\cos 4x\Big|_{a}^{\frac{\pi}{8}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 4a\right) = \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty} \cos 4a\ .$$

Оскільки ця границя не існує при $a \to -\infty$, так як косинус є 2π періодичною функцією, то наш інтеграл є розбіжним.

$$3.\ \int_{1}^{+\infty} e^{2x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} e^{2x}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{1}^{b} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(e^{2b}-e^{2}) = +\infty\ .$$

Отже наш інтеграл розбіжним.

$$4.\ \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}\ , \quad \alpha \in R.$$

Якщо $\alpha = 1$, то

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\,|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty\ .$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_{1}^{b} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} (b^{-\alpha+1} - 1) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{якщо } \alpha > 1; \\ +\infty, & \text{якщо } \alpha < 1. \end{cases}$$

Отже наш інтеграл є збіжним при $\alpha > 1$ і розбіжним при $\alpha \le 1$.

У розглянутих прикладах обчислення невласного інтеграла ґрунтувалося на його означенні. Проте у деяких випадках немає необхідності обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні. Розглянемо деякі ознаки збіжності.

Теорема 1. Якщо на проміжку $[a;\ +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \qquad (2.19)$$

випливає збіжність інтеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\,, \qquad (2.20)$$

а із розбіжності інтеграла (2.20) випливає розбіжність інтеграла (2.19).

Наведена теорема має простий геометричний зміст (рис. 2.7); якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченне число, то площа меншої області є також скінченне число; якщо площа меншої області нескінченно велика величина, то площа більшої області є також нескінченно велика величина.

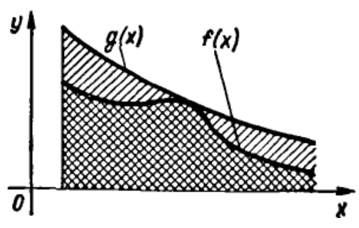


Рис. 2.7.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграли:

$$1.\ \int_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^8+7}}$$

Оскільки $\forall\, x \in [1;\ +\infty)$:

$$0 < f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^8+7}} < \frac{x^2}{\sqrt{x^8}} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} = g(x)$$

і інтеграл

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

збігається (бо в даному випадку $\alpha = 2 > 1$), то за теоремою 1 заданий інтеграл також збігається.

$$2.\ \int_3^{+\infty} \frac{1-\cos x + \ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$$

Цей інтеграл розбігається, бо $\forall\, x \in [3;\ +\infty)$:

$$f(x) = \frac{1-\cos x + \ln x}{\sqrt[3]{x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = g(x) > 0$$

і інтеграл

$$\int_3^{+\infty} g(x)dx = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

розбігається (бо в даному випадку $\alpha = \frac{1}{3} < 1$), то за теоремою 1 заданий інтеграл також розбігається.

Теорема 2. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty, \qquad (f(x) > 0, g(x) > 0)$$

то інтеграли (2.19) і (2.20) або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

Ця ознака іноді виявляється зручнішою, ніж теорема 1, бо не потребує перевірки нерівності $0 \le f(x) \le g(x)$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\, arctg\, x}{\sqrt[3]{x^7+1}} dx\,.$$

Розв’язання. Оскільки інтеграл

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^7}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$$

збігається (бо в даному випадку $\alpha = \frac{4}{3} > 1$) і

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\, arctg\, x}{\sqrt[3]{x^7+1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^7}}{x} \right) = \lim_{x\to+\infty} arctg\, x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt[3]{x^7+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

$\left(0 < k = \frac{\pi}{2} < +\infty\right)$, то за теоремою 2 заданий інтеграл також збігається.

У теоремах 1 і 2 розглядались невласні інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива така теорема.

Теорема 3. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 + 5\cos x}{x^4} dx\,.$$

Тут підінтегральна функція знакозмінна. Оскільки

$$\left| \frac{2 + 5\cos x}{x^4} \right| \le \frac{7}{x^4} \ \text{ і } \int_1^{+\infty} \frac{7}{x^4} dx = 7 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$$

збігається (бо в даному випадку $\alpha = 4 > 1$), то заданий інтеграл збігається.

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не випливає, взагалі кажучи, збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Ця обставина виправдовує такі означення.

Якщо разом з інтегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається й інтеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають абсолютно збіжним, а функцію $f(x)$ — абсолютно інтегровною на проміжку $[a;\ +\infty)$.

Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають умовно (або неабсолютно) збіжним.

Тепер теорему 3 можна перефразувати так: абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Отже, для знакозмінної функції викладені тут міркування дають змогу встановити лише абсолютну збіжність інтеграла. Якщо ж невласний інтеграл збігається умовно, то застосовують більш глибокі ознаки збіжності.

2°. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ b)$. Точку $x = b$ назвемо особливою точкою функції $f(x)$, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to b - 0$ (рис. 2.8). Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b - \varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$ тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,, \qquad (2.21)$$

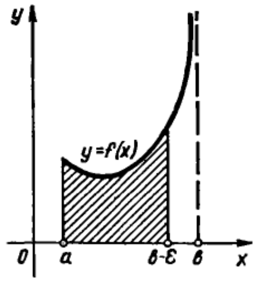


Рис. 2.8.

її називають невласним інтегралом другого роду і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.22)$$

Отже, за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,, \qquad (2.23)$$

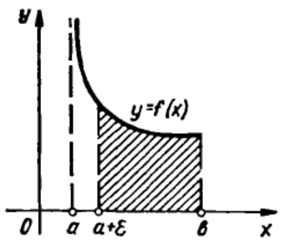


Рис. 2.9.

У цьому випадку кажуть, що інтеграл (2.22) існує або збігається. Якщо ж границя (2.21) нескінченна або не існує, то інтеграл (2.22) також називають невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно якщо $x = a$ — особлива точка (рис. 2.9), то невласний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\,.$$

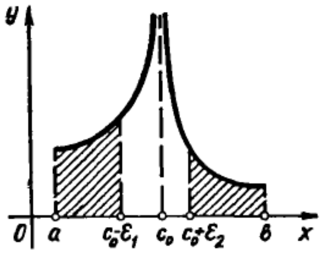


Рис. 2.10.

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c_0 \in (a, b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^{c_0} f(x)dx$ і $\int_{c_0}^b f(x)dx$ за означенням покладають (рис. 2.10).

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_0} f(x)dx + \int_{c_0}^b f(x)dx\,.$$

Нарешті, якщо a та b — особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)dx$ і $\int_c^b f(x)dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

де c — довільна точка інтервалу (a, b).

Приклади. Обчислити невласні інтеграли:

$$1.\ \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Розв'язання.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3} - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збіжний.

$$2.\ \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}\ , \quad \alpha > 0.$$

Якщо $\alpha = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln|x|\,|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon = +\infty$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to+0}(1-\varepsilon^{-\alpha+1}) = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\ , & \text{якщо } 0<\alpha<1; \\ +\infty\ , & \text{якщо } \alpha>1\ . \end{cases}$$

Отже наш інтеграл є збіжним при $0 < \alpha < 1$ і розбіжним при $\alpha \geq 1$.

Сформулюємо тепер ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

Теорема 4. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a;\, b)$, мають особливу точку $x = b$ і задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+6x^7}\ .$$

Розв'язання. Заданий інтеграл збігається, бо $\forall\, x \in (0; 1]$:

$$0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+6x^7} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = g(x)$$

і збігається інтеграл

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$$

(бо в даному випадку $0 < \alpha = \frac{1}{3} < 1$).

Теорема 5. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a;\ b)$ неперервні, додатні і мають особливість в точці $x = b$, тоді якщо існує границя

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty,$$

то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arcsin x}\ .$$

Розв'язання. Функції $f(x) = \frac{1}{\arcsin x}$ та $g(x) = \frac{1}{x}$ — мають особливість в точці $x = 0$. Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x} = 1$$

і інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ розбігається, то заданий інтеграл також розбігається.

Теорема 6. Якщо $x = b$ — особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^2 \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{x-1}}\ .$$

Розв'язання. Заданий інтеграл збігається, тому що $\left|\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{x-1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$ і збігається інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}$. Покажемо це.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = \begin{vmatrix} t = \sqrt[5]{x-1}\,,\ \ x = t^5 + 1 \\ dx = (t^5+1)'dt = 5t^4dt \\ x_1 = 1+\varepsilon,\ \ t_1 = \sqrt[5]{\varepsilon} \\ x_2 = 2, \qquad t_2 = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\sqrt[5]{\varepsilon}}^1 \frac{5t^4dt}{t} = 5\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\sqrt[5]{\varepsilon}}^1 t^3dt = \frac{5}{4}\lim_{\varepsilon\to+0} t^4\Big|_{\sqrt[5]{\varepsilon}}^1 =$$

$$= \frac{5}{4}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1^4 - \left(\sqrt[5]{\varepsilon}\right)^4\right) = \frac{5}{4}(1-0) = \frac{5}{4} = 1{,}25\ .$$

§ 3. Деякі застосування визначеного інтеграла.

3.1. Обчислення площ плоских фігур.

Як уже зазначалось (п. 2.2), якщо на відрізку $[a;b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \ge 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 3.1), знаходять за формулою

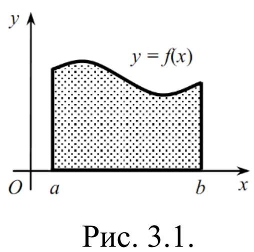


Рис. 3.1.

$$S = \int_a^b f(x)dx\ . \qquad (3.1)$$

Часто буває, що фігура, площу якої треба знайти, не є криволінійною трапецією. Якщо $f(x) \leq 0$ на $[a; b]$, то фігура лежить під віссю Ox (рис. 3.2). Площа цієї фігури дорівнює:

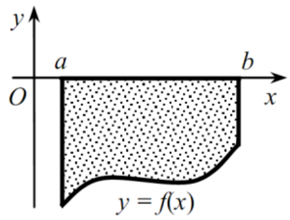


Рис. 3.2.

$$S = \int_a^b |f(x)| dx\,. \qquad (3.2)$$

Ця формула залишається справедливою, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ скінченне число разів змінює знак (рис. 3.3):

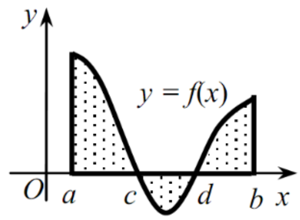


Рис. 3.3.

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = = \int_a^b |f(x)|dx\,. \qquad (3.3)$$

Якщо треба обчислити площу фігури $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 3.4), то за формулою (3.1)

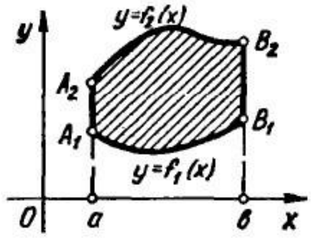


Рис. 3.4.

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx\,, \qquad (3.4)$$

тобто площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$ та $x = b$ за умови, що $f_2(x) \geq f_1(x)$, знаходять за формулою (3.4).

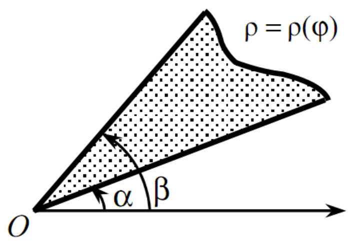
Розглянемо випадок, коли криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \end{cases}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — неперервні функції, які мають на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$. Тоді якщо $x(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ є монотонною, причому $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то для обчислення площі криволінійної трапеції досить в інтегралі (3.1) зробити заміну змінної $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$. Дістанемо формулу

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)\, x'(t)dt\,. \qquad (3.5)$$

Тепер розглянемо плоску фігуру, обмежену кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ (рис. 3.5). Таку фігуру називають криволінійним сектором. Площа криволінійного сектора обчислюється за формулою



$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi\,. \qquad (3.6)$$

Рис. 3.5.

Приклади.

1. Знайти площу фігури, обмеженої прямою $y = x$ і параболою $y = 2 - x^2$ (рис. 3.6).

Розв’язання. Знайдемо абсциси точок перетину даних ліній. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 2 - x^2; \\ y = x, \end{cases}$$

дістанемо $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Це і є межі інтегрування.

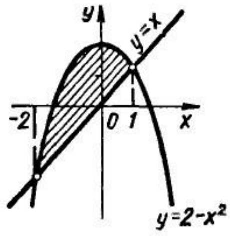


Рис. 3.6.

За формулою (3.4) знаходимо площу:

$$S = \int_{-2}^{1} \left((2 - x^2) - x\right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(2(-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2}\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (кв. од.)}$$

2. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ \ 0 \le t \le 2\pi$.

Розв’язання. Оскільки еліпс (рис. 3.7) симетричний відносно обох координатних осей, то шукана площа дорівнює почетвереній площі фігури, яка знаходиться в першій чверті.

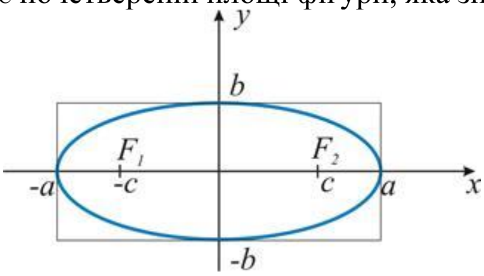


Рис. 3.7.

За формулою (3.5)

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t (a\cos t)'\, dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\, dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right) = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\right) =$$

$$= \pi ab \text{ (кв. од.)}$$

3. Обчислити площу, обмежену «трипелюстковою розою» $\rho = a\cos 3\varphi$ (рис. 3.8).

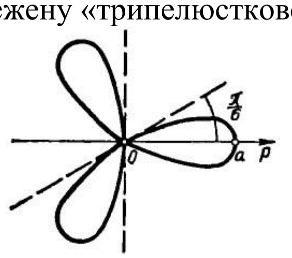


Рис. 3.8.

Розв’язання. Знаходимо площу півпелюстки «рози» і множимо на шість. Тому за формулою (3.6)

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(a\cos 3\varphi)^2d\varphi=3\,a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}d\varphi=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\left(\varphi+\frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{2}a^2\left(\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{6}\sin 0\right)\right)=\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi a^2}{4}\ \text{(кв. од.)}$$

3.2. Довжина дуги.

Як відомо, диференціал dL довжини дуги гладкої кривої, заданої функцією $y=f(x)$, $a\le x\le b$, знаходять за формулою $dL=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$. Тому довжина дуги

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx\,. \qquad (3.7)$$

Якщо крива задана параметрично: $x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\le t\le\beta,$ то $dL=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt$, тому її довжина

$$L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt\,. \qquad (3.8)$$

Нехай тепер гладка крива задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, в полярних координатах. Якщо в рівностях $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ параметром вважати кут φ, то

$$x'_\varphi=\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi,\ \ y'_\varphi=\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi\ \text{ і }\ \sqrt{\left(x'_\varphi\right)^2+\left(y'_\varphi\right)^2}=\sqrt{\rho^2+{\rho'}^2}\,,$$

тому з формули (3.8) знаходимо

$$L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+{\rho'}^2}d\varphi\,. \qquad (3.9)$$

Довжину дуги гладкої просторової кривої, заданої рівняннями

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t),\ \ \alpha\le t\le\beta,$$

обчислюють за формулою, аналогічною формулі (3.8):

$$L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{{x'_t}^2+{y'_t}^2+{z'_t}^2}dt\,. \qquad (3.10)$$

Приклади.

1. Знайти довжину дуги параболи $y=\frac{x^2}{2}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$.

Розв’язання. Оскільки $y'=\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$, $0\le x\le 1$, то за формулою (3.7) одержимо

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx=\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\int\limits_0^1\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$= ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 + \int_0^1 \frac{x\cdot xdx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} & v = \sqrt{1+x^2} \end{matrix}\right| = ln\left(1+\sqrt{2}\right) + x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx =$$

$$\left(\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \left|\begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = (1+x^2)'dx = 2xdx \\ xdx = \dfrac{1}{2}dt \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = \sqrt{1+x^2} + C.\right)$$

$$= ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 0 - \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx.$$

Отже ми отримали рівняння:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx,$$

або

$$L = ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - L.$$

Звідки знаходимо L:

$$2L = \sqrt{2} + ln\left(1+\sqrt{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \quad (\text{лін. од.})$$

2. Знайти довжину однієї арки циклоїди (рис. 3.9):

$$x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \;\; 0 \le t \le 2\pi.$$

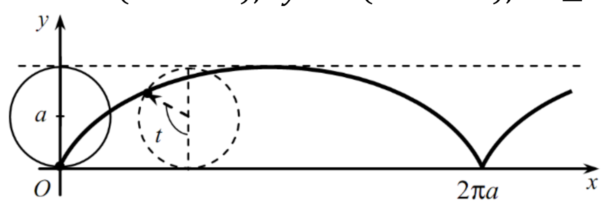


Рис. 3.9.

Розв’язання. Скористаємося формулою (3.8). Для цього спочатку знайдемо

$$x'_t = \left(a(t - \sin t)\right)' = a(1 - \cos t),$$

$$y'_t = \left(a(1 - \cos t)\right)' = a\sin t,$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(a(1-\cos t)\right)^2 + (a\sin t)^2}dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cdot\frac{1-\cos t}{2}}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right|dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = -4a(-1-1) = 8a \quad (\text{лін. од.})$$

3. Знайти довжину кардіоїди (рис. 3.10): $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

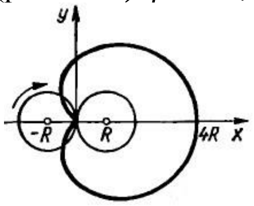


Рис. 3.10.

Розв'язання. Змінюючи полярний кут від 0 до π, одержимо половину шуканої довжини. Тому довжину шукаємо за формулою (3.9). Для цього спочатку знайдемо $\rho' = -a\sin\varphi$,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^\pi \sqrt{4\cdot\frac{1+\cos\varphi}{2}}d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 4a\int_0^\pi \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 8a(1-0) = 8a \quad (\text{лін. од.})$$

3.3. Об'єм тіла.

Нехай треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад Ox: $S = S(x),\ a \le x \le b$ (рис. 3.11).

Перетнемо тіло двома площинами, які проходять через точки x та $x + dx$, перпендикулярно до осі Ox. Тоді утворену між перерізами фігуру можна вважати циліндром з основою $S(x)$ і висотою dx, тому диференціал об'єму $dV = S(x)dx$, і якщо x змінюється від a до b, то об'єм тіла

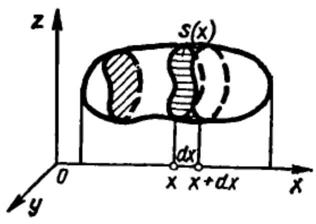


Рис. 3.11.

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (3.11)$$

Формула (3.11) називається формулою об'єму тіла за площами паралельних перерізів.

Розглянемо, зокрема, об'єм тіл обертання. Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y = f(x),\ a \le x \le b$. Якщо цю трапецію обертати навколо осі Ox, то утвориться просторова фігура, яка називається тілом обертання (рис. 3.12). Оскільки площа паралельного перерізу $S = \pi y^2 = \pi f^2(x)$, то, згідно з формулою (3.11), об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Ox,

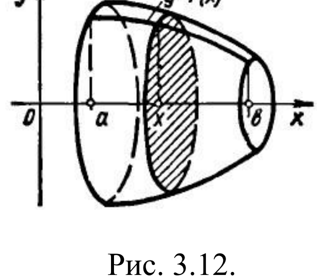


Рис. 3.12.

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (3.12)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y) \geq 0$ і прямими $y = c$, $y = d$, $x = 0$, то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Oy, знаходять за формулою

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad (3.13)$$

Приклади.

1. Знайти об'єм еліпсоїда (рис. 3.13)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

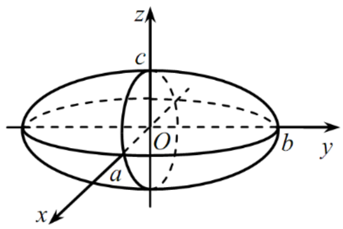


Рис. 3.13.

Розв'язання. У перерізі еліпсоїда площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{або} \quad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Площа такого еліпса (п. 3.1) дорівнює

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

тому за формулою (3.11) маємо

$$V = \pi bc \int_{=a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

(так як функція $y = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ парна)

$$= 2\pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi bc\left(a - \frac{a^3}{3a^2} - 0\right) = 2\pi bc \cdot \frac{2}{3}a = \frac{4}{3}\pi abc \ \text{(куб. од.)}$$

Зокрема, якщо $a = b = c = R$, еліпсоїд перетворюється в кулю, і в цьому випадку

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболи $y = x^2$ на проміжку $1 \leq x \leq 2$ навколо: а) осі Ox; б) осі Oy.

Розв'язання. а) За формулою (3.12) маємо

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{5}(2^5 - 1^5) = \frac{\pi}{5}(32 - 1) = \frac{31\pi}{5} \quad (\text{куб. од.})$$

б) В даному випадку маємо $x = \sqrt{y}$ на проміжку $1 \le y \le 4$ і за формулою (3.13) отримаємо

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy = \pi \int_1^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 y dy = \pi \left. \frac{y^2}{2} \right|_1^4 = \frac{\pi}{2}(4^2 - 1^2) = \frac{15\pi}{2} \quad (\text{куб. од.})$$

3.4. Площа поверхні обертання.

Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, обертається навколо осі Ox. Перетнемо поверхню обертання двома площинами, які проходять через точки x та $x + dx$, паралельно Oyz. Замінимо утворену між перерізами фігуру зрізаним конусом, твірна якого дорівнює $dL = \sqrt{1 + y'^2}dx$, а радіуси основ дорівнюють $f(x)$ та $f(x + dx)$ (рис. 3.14). Якщо висота конуса dx досить мала, то площа dQ бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса, тобто маємо диференціал площі

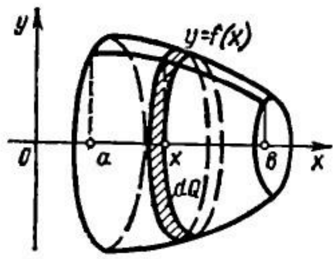


Рис. 3.14.

$$dQ = 2\pi f(x)\sqrt{1 + y'^2}dx$$

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx. \qquad (3.14)$$

Приклад. Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$, де $0 \le x \le 4$.

Розв'язання. Маємо

$$y = \sqrt{2x}\,, \quad y' = \left(\sqrt{2x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x}}(2x)' = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \sqrt{\frac{2x + 1}{2x}}.$$

За формулою (3.14) знаходимо

$$Q = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{\frac{2x + 1}{2x}} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx = \pi \int_0^4 (2x + 1)^{\frac{1}{2}} d(2x + 1) = \pi \left. \frac{(2x + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} \right|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\,(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\pi\left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\pi(27-1) = \frac{52}{3}\pi \ \ (\text{кв. од.})$$

3.5. Обчислення роботи.

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота A, виконана з цією силою при переміщенні точки на відрізок $[a; b]$, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx\,. \qquad (3.15)$$

Приклад. Яка робота виконується під час стискання гвинтової пружини на 5 см, якщо для стискання пружини на 1 см витрачається сила 44 Н. Стиск гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі.

Розв’язання. Сила F і стискання x за умовою пропорційні: $F = kx$, де k — стала. При $x = 0{,}01$ м, $F = 4$ Н, тому з рівності $4 = k \cdot 0{,}01$ знаходимо $k = 400$, отже $F(x) = 400x$, $0 \le x \le 0{,}05$. Тому за формулою (3.15) маємо

$$A = \int_a^b F(x)dx = 400\int_0^{0{,}05} xdx = 200\,x^2\big|_0^{0{,}05} = 200((0{,}05)^2 - 0) = 200 \cdot 0{,}0025 = 0{,}5 \text{ Дж.}$$

II. Звичайні диференціальні рівняння.

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій. Такі рівняння називають диференціальними (термін «диференціальне рівняння» введений у 1576 р. Лейбніцем).

Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і диференціальним рівнянням у частинних похідних, якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння.

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку.

1.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0\ , \qquad (1.1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'.

Рівняння (1.1) може не містити явно x або y, але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Диференціальне рівняння (1.1), нерозв'язне відносно похідної y', називають неявним диференціальним рівнянням. Якщо рівняння (3.1) можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \qquad (1.2)$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням в нормальній формі. Ми, в основному, розглядатимемо саме такі рівняння.

Знаходження невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (1.2) на деякому інтервалі (a, b) називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (1.2) обертає його в тотожність по x на (a, b), тобто

$$\forall\, x \in (a, b)\colon\ \varphi'(x) \equiv f\big(x, \varphi(x)\big).$$

Приклад. Функція $y = x\ln x,\ x \in (0, +\infty)$, є розв'язком рівняння $xy' - x - y = 0$. Дійсно, підставляючи цю функцію та її похідну $y' = (x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$ в дане рівняння, дістаємо тотожність

$$x(\ln x + 1) - x - x\ln x \equiv 0;\quad x \in (0, +\infty).$$

Неважко переконатися, що розв'язком даного рівняння є також функція $y = x\ln x + Cx$, де C — довільна стала. Надаючи C довільного дійсного значення, щоразу дістаємо розв'язок даного рівняння, тобто маємо нескінченну множину розв'язків.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою цього рівняння.

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (1.2) має розв'язок, дає теорема Коші про існування і єдиність розв'язку.

Теорема. (про існування і єдиність розв'язку). Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f_y'(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0;\ y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1.2), який задовольняє умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ тобто } \varphi(x_0) = y_0. \qquad (1.3)$$

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (1.2).

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0;\ y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0, не виходячи при цьому з області G, то діставатимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (1.2) має безліч різних розв'язків (рис. 1.1).

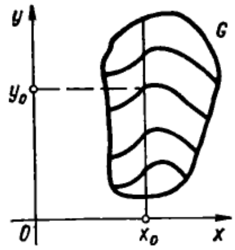


Рис. 1.1.

Умову (1.3), згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) = y_0. \qquad (1.4)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (1.2), який задовольняє початкову умову (1.4), називається задачею Коші.

З погляду геометрії розв'язати задачу Коші — це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку $(x_0;\ y_0)$.

Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші (наприклад, $f(x, y)$ або $f_y'(x, y)$ в цих точках розривні), називаються особливими. Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають особливим розв'язком.

Диференціальне рівняння може мати нескінченну множину розв'язків. За певних умов з цієї сім'ї можна виділити єдину криву, яка проходить через задану точку. У зв'язку з цим дамо означення частинного розв'язку диференціального рівняння.

Нехай права частина диференціального рівняння (1.2) задовольняє в області G умови теореми Коші.

Означення. Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C, називається загальним розв'язком рівняння (1.2) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0;\, y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0 .$$

Означення. Частинним розв'язком рівняння (1.2) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають загальним інтегралом диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ у цьому випадку називають частинним інтегралом рівняння.

Переходимо тепер до розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. Якщо задачу про знаходження всіх розв’язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах (або зводиться до квадратур). Зрозуміло, що далеко не всяке диференціальне рівняння, яке інтегрується в квадратурах, має розв'язок, який виражається через елементарні функції. Більше того, дуже часто диференціальне рівняння не можна проінтегрувати не тільки в елементарних функціях, а й у квадратурах. Проте існують окремі типи диференціальних рівнянь, для яких це можливо. Розглянемо такі рівняння. На жаль, клас інтегровних в квадратурах диференціальних рівнянь надзвичайно вузький.

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Означення. Рівняння виду

$$y' = f(x)\, g(y)\,, \tag{1.5}$$

де $f(x)$ і $g(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Права частина рівняння (1.5) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (1.5), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (1.5) на $g(y)$ (вважаємо, що $g(y) \neq 0$) і помножимо на dx:

$$y' = f(x)\, g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \qquad \Big| \cdot \frac{dx}{g(y)}.$$

Тоді рівняння (1.5) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx. \tag{1.6}$$

Диференціальне рівняння виду (1.6), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x, а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y, називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

Оскільки рівняння (1.6) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C .$$

Таким чином, рівняння (1.5) розв'язано в квадратурах.

Диференціальне рівняння (1.5) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0 \qquad (1.7)$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить перенести перший доданок в праву частину рівняння і після цього обидві його частини поділити на функцію $g_1(y)\,f_2(x)$. Тоді маємо:

$$\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + C\,.$$

Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (1.5) на $g(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $g(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (1.5), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $g_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (1.7).

Приклади.

1. Розв'язати рівняння: $y' = \frac{\sqrt{y^2+8}}{x^2+4}$.

Розв’язання. Маємо рівняння рівнянням з відокремлюваними змінними. Його можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2+8}}{x^2+4} \qquad \Big| \cdot \frac{dx}{\sqrt{y^2+8}}$$

Тоді отримаємо

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2+8}} = \frac{dx}{x^2+4} \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+8}} = \int \frac{dx}{x^2+4}\;.$$

Інтегруючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\ln\left|y + \sqrt{y^2+8}\right| = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C\,.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y\,dx - (x^2-9)\ln^4 y\;dy = 0$$

Розв’язання. Перетворимо ліву частину рівняння. Перший член перенесемо в праву частину рівняння

$$-(x^2-9)\ln^4 y\;dy = -y\,dx \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-9)\ln^4 y\;dy = y\,dx \quad \Big|\cdot\frac{1}{(x^2-9)y}\;,$$

після цього обидві його частини поділили на функцію $(x^2-9)y \neq 0$, дістали рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{\ln^4 y}{y}\;dy = \frac{dx}{x^2-9}\;,$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл

$$\int \frac{\ln^4 y}{y}\;dy = \int \frac{dx}{x^2-9}\;,$$

або

$$\int \ln^4 y\;d(lny) = \int \frac{dx}{x^2-3^2}\;,$$

звідки

$$\frac{1}{5}\ln^5 y = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C\,, \quad \text{або} \quad \ln^5 y = \frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C\,.$$

3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = -\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}$, який задовольняє початкову умову $y(0) = \frac{1}{5}$.

Розв’язання. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Його можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Big| \cdot \left(-\frac{dx}{y^2}\right)\,.$$

Тоді отримаємо

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;\Rightarrow\; -\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Інтегруючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1}{y} = \arcsin x + C \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{\arcsin x + C}\,.$$

Дістали загальний інтеграл. Використовуючи початкову умову, знайдемо сталу C: $\frac{1}{5} = \frac{1}{\arcsin 0 + C}$, звідки $C = 5$.

Підставивши знайдену сталу в загальний інтеграл, дістанемо шуканий частинний розв'язок:

$$y = \frac{1}{\arcsin x + 5}\,.$$

Розглянемо тепер рівняння

$$y' = f(ax + by + c)\,, \qquad (1.8)$$

де a, b, c — задані числа, і покажемо, що заміною

$$u = ax + by + c \qquad (1.9)$$

рівняння *(1.8)* зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Справді, диференціюючи рівність (1.9) по x, дістанемо $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, тому згідно з (1.8) маємо рівняння $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$, у якому при $a + bf(u) \neq 0$ відокремлюються змінні:

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx\,.$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи u на $ax + by + c$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (1.8).

Якщо $a + bf(u) = 0$, або, що те ж саме, $\frac{du}{dx} = 0$, то, згідно з рівністю (1.9), рівняння (1.8) може мати розв'язки $ax + by + c = C$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = (16x + 25y - 7)^2$.

Розв’язання. Покладемо $u = 16x + 25y - 7$, тоді

$$\frac{du}{dx} = 16 + 25\frac{dy}{dx} \quad \text{або} \quad \frac{du}{dx} = 16 + 25u^2\,,$$

звідки

$$\frac{du}{16+25u^2}=dx\,,$$

інтегруючи це рівняння, знаходимо

$$\int\frac{du}{16+25u^2}=\int dx \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{25}\int\frac{du}{u^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\int dx$$

$$\text{або}\quad \frac{1}{25}\cdot\frac{5}{4}\,arctg\frac{5u}{4}=\ x+C\quad\text{або}\quad arctg\frac{5u}{4}=20(x+C)\,,$$

тобто $arctg\frac{5(16x+25y-7)}{4}=20(x+C)$ або $16x+25y-7=\frac{4}{5}tg(20x+20c)$ — загальний інтеграл заданого рівняний. Інших розв'язків це рівняння не має, бо $16+25u^2\neq 0$.

1.3. Однорідні диференціальні рівняння.

Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією n -го виміру відносно змінних x та y, якщо для довільного числа $t\neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)\,.$$

Наприклад, функція $f(x,y)=x^3-4xy^2$ — однорідна функція третього виміру, оскільки

$$f(tx,ty)=(tx)^3-4(tx)(ty)^2=t^3(x^3-4xy^2)=t^3f(x,y)\,;$$

функція $f(x,y)=\frac{3xy-2y^2}{x^2}$ однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx,ty)=\frac{3(tx)(ty)-2(ty)^2}{(tx)^2}=\frac{t^2(3xy-2y^2)}{t^2x^2}=\frac{3xy-2y^2}{x^2}=t^0f(x,y)\,.$$

Означення. Диференціальне рівняння

$$y'=f(x,y) \qquad (1.10)$$

називається однорідним, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Очевидно, рівняння виду

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1.11)$$

буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ будуть однорідними функціями одного й того самого виміру.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y=ux\,, \qquad (1.12)$$

де u — невідома функція: $u=u(x)$.

Якщо функція (1.12) є розв'язком диференціального рівняння (1.10) і

$$y'=(ux)'=u'x+u\,,\quad\text{то}\quad u'x+u=f(x,ux) \qquad (1.13)$$

За умовою $f(x,y)$ — однорідна функція нульового виміру, тобто $f(tx,ty)=f(x,y)$. Поклавши в цій тотожності $y=ux$ і $t=\frac{1}{x}$, дістанемо $f(x,ux)=f(1,u)$. Крім того $u'=\frac{du}{dx}$ тому рівняння (1.13) набирає вигляду

$$x\,\frac{du}{dx}+u=f(1,u)\quad\Leftrightarrow\quad x\,\frac{du}{dx}=f(1,u)-u\,. \qquad (1.14)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо $f(1,u)-u\neq 0$, то, відокремлюючи змінні, дістаємо рівняння

$$x\,\frac{du}{dx}=f(1,u)-u \qquad \Big|\cdot\frac{dx}{x\,(f(1,u)-u)} \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x},$$

проінтегрувавши, знайдемо

$$\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\int\frac{dx}{x} \qquad\Rightarrow\qquad \int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln|x|+C\,.$$

Підставимо після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$ і дістанемо інтеграл рівняння (1.10). Якщо $f(1,u)-u=0$, то рівняння (1.14) запишеться у вигляді

$$x\,\frac{du}{dx}=0\,.$$

У цьому випадку рівняння (1.10) і (1.11) можуть мати ще розв'язки $y=Cx$ $\left(\frac{du}{dx}=0 \;\Leftrightarrow\; u'=0 \;\Rightarrow\; u=C \;\Rightarrow \frac{y}{x}=C \;\Rightarrow\; y=Cx\right)$ та $x=0$ $(y\neq 0)$.

Приклади.

1. Розв'язати рівняння $y'=\frac{x^2y-y^3}{x^3}$.

Розв’язання. Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2ty-(ty)^3}{(tx)^3}=\frac{t^3(x^2y-y^3)}{t^3x^3}=\frac{x^2y-y^3}{x^3}=f(x,y)\,.$$

Отже, диференціальне рівняний є однорідним. Застосувавши підстановку $y=ux$, дістанемо загальний інтеграл даного рівняння:

$$u'x+u=\frac{x^2ux-(ux)^3}{x^3} \quad\Leftrightarrow\quad u'x+u=u-u^3 \quad\Leftrightarrow\quad x\,\frac{du}{dx}=-u^3 \;\Big|\cdot\frac{dx}{x(-u^3)} \quad\Rightarrow$$

$$-\frac{du}{u^3}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad -\int\frac{du}{u^3}=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2u^2}=\ln|x|+C \;\Rightarrow$$

$$\left(-\int\frac{du}{u^3}=-\int u^{-3}du=-\frac{u^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{1}{2u^2}+C\right)$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\ln|x|+C \;\Rightarrow\quad \frac{x^2}{2y^2}=\ln|x|+C \;\Rightarrow\quad x^2=2y^2(\ln|x|+C)\,.$$

При відокремленні змінних ми ділили на x і на u^3, що можливо при $x\neq 0$ та $u\neq 0$. Точки, в яких $x=0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому пряма $x=0$ не може бути інтегральною кривою цього рівняння.

Нехай $u=0$, тобто $\frac{y}{x}=0$, або $y=0$. Функція $y=0$ перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв'язком. Цей розв'язок є особливим і його слід вказувати додатково до знайденого інтеграла.

2. Розв'язати рівняння

$$(y-x)dx+(y+x)dy=0\,.$$

Розв’язання. Дане рівняння є однорідним, тому що функції $P(x,y)=y-x$ і $Q(x,y)=y+x$ є однорідними функціями одного й того самого виміру один:

$$P(tx,ty)=ty-tx=t(y-x)=t^1P(x,y)\,,$$

$$Q(tx,ty)=ty+tx=t(y+x)=t^1Q(x,y)$$

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Для розв’язання його краще звести до виду (1.10):

$$(y-x)dx+(y+x)dy=0 \quad\Leftrightarrow\quad (y+x)dy=-(y-x)dx$$

$$\Leftrightarrow\quad (x+y)dy=(x-y)dx \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y} \quad\Leftrightarrow\quad y'=\frac{x-y}{x+y}\,.$$

Застосувавши підстановку $y=ux$, дістанемо загальний інтеграл даного рівняння:

$$u'x+u=\frac{x-ux}{x+ux} \quad\Leftrightarrow\quad u'x+u=\frac{1-u}{1+u} \quad\Leftrightarrow\quad u'x=\frac{1-u}{1+u}-u \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; u'x=\frac{1-u-u-u^2}{1+u} \quad\Leftrightarrow\quad x\,\frac{du}{dx}=-\frac{u^2+2u-1}{u+1}\;\Bigg|\cdot\frac{(u+1)\,dx}{(u^2+2u-1)\,x} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{(u+1)\,du}{u^2+2u-1}=-\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{2(u+1)\,du}{u^2+2u-1}=-2\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \ln|u^2+2u-1|=-2\ln|x|+\ln C \quad\Leftrightarrow\quad \ln|u^2+2u-1|=\ln\frac{C}{|x^2|} \quad\Rightarrow$$

$$\left(\int\frac{2(u+1)\,du}{u^2+2u-1}=\begin{vmatrix}z=u^2+2u-1\\ dz=(2u+2)du\end{vmatrix}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln|u^2+2u-1|+C\right)$$

$$\Rightarrow\quad u^2+2u-1=\frac{C}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}-1=\frac{C}{x^2} \quad\Rightarrow\quad y^2+2yx-x^2=C\,.$$

При відокремленні змінних ми ділили на x і на вираз u^2+2u-1, що можливо при $x\neq 0$ та $u^2+2u-1\neq 0$. Точки, в яких $x=0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому пряма $x=0$ не може бути інтегральною кривою цього рівняння.

Нехай $u^2+2u-1=0$. Маємо два розв’язки даного рівняння: $u_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$ тобто $\frac{y}{x}=-1\pm\sqrt{2}$, або $y=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)x$. Функція $y=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)x$ перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв'язком. Цей розв'язок є особливим і його слід вказувати додатково до знайденого інтеграла.

Розглянемо тепер рівняння, які можна звести до однорідних. Нехай маємо рівняння виду

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \qquad (1.15)$$

де a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — задані сталі.

Якщо визначник $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0$, то підстановкою $z=a_1x+b_1y+c_1$ рівняння (1.15) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $\Delta\neq 0$, то можна зробити таку заміну змінних $x=z+\alpha,\ y=v+\beta$, що в лінійних функціях зникнуть вільні члени, тобто виконуватимуться рівності

$$a_1x+b_1y+c_1=a_1z+b_1v \quad\text{та}\quad a_2x+b_2y+c_2=a_2z+b_2v\,.$$

Після такої заміни рівняння буде однорідним.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = \frac{4x+3y-9}{3x+y-8}$.

Розв'язання. Для цього рівняння $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5 \neq 0$, тому, поклавши $x = z + \alpha,\ y = v + \beta$, дістанемо $dx = (z+\alpha)'dz = dz$,

$$dy = (v+\beta)'dv = dv, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dz};$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{4(z+\alpha) + 3(v+\beta) - 9}{3(z+\alpha) + v + \beta - 8} \ \Leftrightarrow\ \frac{dv}{dz} = \frac{4z + 3v + (4\alpha + 3\beta - 9)}{3z + v + (3\alpha + \beta - 8)}.$$

Сталі α і β доберемо так, щоб

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta - 9 = 0; \\ 3\alpha + \beta - 8 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta - 9 = 0 \\ 3\alpha + \beta - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 9 \\ 3\alpha + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 8 - 3\alpha \\ 4\alpha + 3(8 - 3\alpha) = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 8 - 3\alpha \\ -5\alpha = 9 - 24 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 8 - 3\alpha = 8 - 9 = -1 \end{cases}$$

Отже $\alpha = 3,\ \beta = -1$, тому заміною змінних $x = z + 3,\ y = v - 1$ задане рівняння зводиться до однорідного:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{4z + 3v}{3z + v} \quad \text{або} \quad v' = \frac{4z + 3v}{3z + v}.$$

За допомогою підстановки $v = uz$, де $u = u(z)$, *а* $v' = u'z + u$ знаходимо загальний інтеграл цього рівняння:

$$u'z + u = \frac{4z + 3uz}{3z + uz} \ \Leftrightarrow\ u'z + u = \frac{4 + 3u}{3 + u} \ \Leftrightarrow\ u'z = \frac{4 + 3u}{3 + u} - u \ \Leftrightarrow$$

$$u'z = \frac{4 + 3u - 3u - u^2}{3 + u} \ \Leftrightarrow\ z\frac{du}{dz} = -\frac{u^2 - 4}{u + 3} \ \Big| \cdot \frac{(u+3)\,dz}{(u^2 - 4)\,z} \ \Rightarrow$$

$$\frac{(u+3)\,du}{u^2 - 4} = -\frac{dz}{z} \ \Rightarrow\ \int \frac{4(u+3)\,du}{u^2 - 4} = -4\int \frac{dz}{z} \ \Leftrightarrow$$

$$4\int \frac{u\,du}{u^2 - 4} + 12\int \frac{du}{u^2 - 4} = -4\int \frac{dz}{z} \ \Leftrightarrow\ 2\int \frac{d(u^2 - 4)}{u^2 - 4} + 12\int \frac{du}{u^2 - 2^2} = -4\int \frac{dz}{z} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\,ln|u^2 - 4| + 3\,ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| = -4\,ln|z| + ln\,C \ \Leftrightarrow ln\left|(u^2 - 4)^2 \cdot \left(\frac{u-2}{u+2}\right)^3\right| = ln\frac{C}{|z^4|} \ \Rightarrow$$

$$\left((u^2 - 4)^2 \cdot \left(\frac{u-2}{u+2}\right)^3 = (u-2)^2(u+2)^2\frac{(u-2)^3}{(u+2)^3} = \frac{(u-2)^5}{u+2}\right)$$

$$\Rightarrow\ ln\left|\frac{(u-2)^5}{u+2}\right| = ln\frac{C}{|z^4|} \ \Rightarrow\ \frac{(u-2)^5}{u+2} = \frac{C}{z^4} \ \Rightarrow\ (u-2)^5 = \frac{C(u+2)}{z^4} \ \Rightarrow$$

Так як $u = \frac{v}{z}$, то маємо

$$\Rightarrow \ \left(\frac{v}{z}-2\right)^5=\frac{C\left(\frac{v}{z}+2\right)}{z^4} \ \Rightarrow \ (v-2z)^5=C(v+2z)\,, C>0$$

Звідси, враховуючи, що $z=x-3$, $v=y+1$, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння

$$\big(y+1-2(x-3)\big)^5=C\big(y+1+2(x-3)\big) \text{ або } (y-2x+7)^5=C(y+2x-5).$$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння.

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y'+P(x)y=Q(x)\,, \qquad (1.16)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Рівняння називається лінійним тому, що невідома функція y і її похідна y' входять до нього у першому степені, тобто лінійно.

Є кілька методів інтегрування рівняння (1.16). Один з них (метод Бернуллі) полягає в тому, що розв'язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y=uv\,, \qquad (1.17)$$

де $u=u(x)$, $v=v(x)$— невідомі функції x, причому одна з цих функцій довільна (але не рівна тотожно нулю).

Знаходячи похідну $y'=(uv)'=u'v+uv'$ і підставляючи значення y та y' в рівняння (1.16), дістанемо

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x)$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, доберемо її так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v'+P(x)v=0 \qquad (1.18)$$

тоді

$$u'v=Q(x)\,. \qquad (1.19)$$

Розв'яжемо ці рівняння. Відокремлюючи в рівнянні (1.18) змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв'язок:

$$v'+P(x)v=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx}=-P(x)v \ \Big| \cdot \frac{dx}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=-P(x)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \int\frac{dv}{v}=-\int P(x)\,dx \quad \Rightarrow \ln|v|=-\int P(x)\,dx+\ln C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{|v|}{C}=-\int P(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{C}=e^{-\int P(x)\,dx},\ \ C>0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v=Ce^{-\int P(x)\,dx},\ \ C>0.$$

Візьмемо за v який-небудь частинний розв'язок рівняння (1.18), наприклад при $C=1$ маємо

$$v=e^{-\int P(x)\,dx} \qquad (1.20)$$

Знаючи функцію v, з рівняння (1.19) знаходимо функцію u:

$$u'e^{-\int P(x)\,dx}=Q(x) \ \Leftrightarrow \ u'=Q(x)e^{\int P(x)\,dx} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{du}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\ \Rightarrow\ du=Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx\ \Rightarrow\int du=\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ u=\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx+C_0 \qquad (1.21)$$

Підставляючи функції (1.20) і (1.21) в (1.17), знаходимо загальний розв'язок рівняння (1.16)

$$y=uv=e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx+C_0\right).$$

Якщо у рівнянні (1.16) $P(x)=\pm Q(x)$, то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Приклади.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'+\frac{y}{x}=\frac{\cos 4x}{x}$.

Розв’язання. Це лінійне рівняння виду (1.16), в якому

$$P(x)=\frac{1}{x}\,,\quad Q(x)=\frac{\cos 4x}{x}$$

Нехай $y=uv$, тоді $y'=u'v+uv'$. Маємо

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{\cos 4x}{x}\quad\Leftrightarrow\quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{\cos 4x}{x}\ .$$

Підберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю $v'+\frac{v}{x}=0$; тоді $u'v=\frac{\cos 4x}{x}$. Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаємо

$$v'+\frac{v}{x}=0\ \Leftrightarrow\ v'=-\frac{v}{x}\ \Leftrightarrow\ \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}\ \Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \ln|v|=-\ln|x|+lnC\ \Rightarrow\ v=\frac{C}{x}\ .$$

Найпростіший вираз в даному випадку буде при $C=1$, тому $v=\frac{1}{x}$.

Підставивши значення v у друге рівняння, дістанемо

$$u'\frac{1}{x}=\frac{\cos 4x}{x}\ \Rightarrow\ u'=\cos 4x\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=\cos 4x\ \Rightarrow\ du=\cos 4x\,dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int du=\int\cos 4x\,dx\ \Rightarrow\ u=\frac{1}{4}\sin 4x+C_0\,,$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$y=uv=\left(\frac{1}{4}\sin 4x+C_0\right)\frac{1}{x}.$$

2. Знайти розв'язок рівняння $y'-4x^3y=4x^3$, який задовольняє умову $y(0)=4$.

Розв’язання. Поклавши $y=uv,\ y'=u'v+uv'$, матимемо:

$$u'v+uv'-4x^3uv=4x^3\quad\Leftrightarrow\quad u'v+u(v'-4x^3v)=4x^3\ .$$

Підберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю $v' - 4x^3v = 0$; тоді $u'v = 4x^3$. Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаємо

$$v' - 4x^3v = 0 \iff v' = 4x^3v \iff \frac{dv}{dx} = 4x^3v \implies \frac{dv}{v} = 4x^3dx \implies$$

$$\implies \int \frac{dv}{v} = \int 4x^3dx \implies \ln|v| = x^4 + C \implies v = e^{x^4+C} .$$

Найпростіший вираз в даному випадку буде при $C = 0$, тому $v = e^{x^4}$.

Підставивши значення v у друге рівняння, дістанемо

$$u'e^{x^4} = 4x^3 \implies u' = 4x^3e^{-x^4} \implies \frac{du}{dx} = 4x^3e^{-x^4} \implies du = 4x^3e^{-x^4}dx \implies$$

$$\implies \int du = -\int e^{-x^4}d(-x^4) \implies u = -e^{-x^4} + C_0 ,$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$y = uv = \left(C_0 - e^{-x^4}\right)e^{x^4} = C_0e^{x^4} - 1 .$$

Знайдемо значення сталої C_0, при якому частинний розв'язок задовольняє задану початкову умову $y(0) = 4$:

$$4 = C_0e^0 - 1 \text{ звідки } C_0 = 5.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = 5e^{x^4} - 1$.

Але в даному рівнянні $P(x) = -Q(x)$, тому воно є рівнянням з відокремлюваними змінними і його загальний розв'язок можна знайти простіше:

$$y' - 4x^3y = 4x^3 \iff y' = 4x^3(y+1) \iff \frac{dy}{dx} = 4x^3(y+1) \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y+1} \implies$$

$$\implies \frac{dy}{y+1} = 4x^3dx \implies \int \frac{dy}{y+1} = \int 4x^3dx \implies \ln|y+1| = x^4 + \ln C_0 \implies$$

$$\implies \ln\frac{|y+1|}{C_0} = x^4 \implies \frac{y+1}{C_0} = e^{x^4} \implies y + 1 = C_0e^{x^4} \iff y = C_0e^{x^4} - 1 .$$

1.5. Рівняння Бернуллі.

Означення. Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha , \ \alpha \in R, \qquad \alpha \neq 0; 1. \qquad (1.22)$$

(Рівняння (1.22) запропонував у 1695 р. Якоб Бернуллі, а в 1697 р. його брат Йоганн Бернуллі розв'язав це рівняння.)

Очевидно, при $\alpha = 0$ це рівняння —лінійне, а при $\alpha = 1$ —з відокремлюваними змінними. Припускаючи $y \neq 0, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, поділимо рівняння (1.22) на y^α, тоді матимемо рівняння виду:

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x) .$$

Таким чином, заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Проте на практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння. Слід зазначити, що при $\alpha > 0$, крім розв'язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y' + y\, ctgx = y^4 \sin x\, .$$

Розв’язання. Маємо рівняння Бернуллі. Поклавши $y = uv,\ y' = u'v + uv'$, отримаємо:

$$u'v + uv' + uv\, ctgx = (uv)^4 \sin x \quad \Leftrightarrow \quad u'v + u(v' + v\, ctgx) = u^4 v^4 \sin x\, .$$

Підберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю $v' + v\, ctgx = 0$; тоді $u'v = u^4 v^4 \sin x$, або $u' = u^4 v^3 \sin x$. Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаємо

$$v' + v\, ctgx = 0 \ \Leftrightarrow\ v' = -v\, ctgx \ \Leftrightarrow\ \frac{dv}{dx} = -v\, ctgx \ \Rightarrow\ \frac{dv}{v} = -ctgx\, dx \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int \frac{dv}{v} = -\int ctgx\, dx \ \Rightarrow\ \ln|v| = -\ln|\sin x\,| + \ln C \Rightarrow\ v = \frac{C}{\sin x}\, .$$

Найпростіший вираз в даному випадку буде при $C = 1$, тому $v = \dfrac{1}{\sin x}$.

Підставивши значення v у друге рівняння, дістанемо

$$u' = u^4 \left(\frac{1}{\sin x}\right)^3 \sin x \ \Rightarrow\ u' = \frac{u^4}{\sin^2 x} \ \Rightarrow\ \frac{du}{dx} = \frac{u^4}{\sin^2 x} \ \Rightarrow\ \frac{du}{u^4} = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int u^{-4} du = \int \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow\ \frac{u^{-3}}{-3} = -ctg\, x - C_0 \ \Rightarrow\ u^3 = \frac{1}{3(ctg\, x + C_0)} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ u = \frac{1}{\sqrt[3]{3(ctg\, x + C_0)}},$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$y = uv = \frac{1}{\sqrt[3]{3(ctg\, x + C_0)}} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt[3]{3(ctg\, x + C_0)}\ \sin x}\, .$$

1.6. Рівняння Ріккаті.

Рівняння виду

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)\, , \qquad (1.23)$$

де $p(x), q(x), r(x)$ – задані функції, називається рівнянням Ріккаті.

Якщо p, q, r – сталі числа, то це рівняння інтегрується відокремленням змінних:

$$\int \frac{dy}{r - py - qy^2} = x + C\, .$$

Коли $q(x) \equiv 0$, рівняння (1.23) стає лінійним, а у випадку $r(x) \equiv 0$ – рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (1.23) не інтегрується у квадратурах. Проте, якщо відомий його один частинний розв’язок $y_1 = y_1(x)$, то заміною $y = y_1 + z$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

1.7. Деякі застосування диференціальних рівнянь першого порядку.

Математичні моделі деяких процесів (фізичних, хімічних, біологічних і т.д.) можна описати за допомогою диференціальних рівнянь. Розглянемо кілька найпростіших прикладів таких моделей.

Приклади.

1. (Про розмноження бактерій.) У сприятливих для розмноження умовах знаходиться деяка кількість N_0 бактерій. Знайти залежність збільшення числа бактерій від часу, якщо швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості.

Розв'язання. Позначимо через $N(t)$ кількість бактерій в момент часу t. Тоді $\dfrac{dN}{dt}$ — швидкість розмноження за умовою

$$\frac{dN}{dt} = kN, \qquad k > 0.$$

Коефіцієнт k залежить від виду бактерій та умов, в яких вони знаходяться. Його визначають експериментально. Інтегруючи знайдене рівняння, дістаємо його загальний розв'язок:

$$\frac{dN}{dt} = kN \;\Rightarrow\; \frac{dN}{N} = kdt \;\Rightarrow\; \int \frac{dN}{N} = k\int dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; ln|N| = kt + ln\,C \;\Rightarrow\; ln\frac{|N|}{C} = kt \;\Rightarrow\; \frac{N}{C} = e^{kt} \;\Rightarrow\; N = Ce^{kt}.$$

З умови $N(0) = N_0$ знаходимо $C = N_0$, тому остаточно маємо:

$$N = N_0 e^{kt}.$$

2. (Про радіоактивний розпад.) Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості в даний момент часу. Вказати закон зміни маси речовини від часу, якщо при $t = 0$ маса речовини дорівнювала m_0.

Розв'язання. Нехай $m = m(t)$ — маса речовини в момент часу t. За умовою

$$\frac{dm}{dt} = -km, \qquad k > 0,\; m(0) = m_0,$$

де k — коефіцієнт пропорційності. Знак мінус береться тому, що з часом кількість речовини зменшується. Розв'язуючи знайдене рівняння, дістаємо

$$\frac{dm}{dt} = -km \;\Rightarrow\; \frac{dm}{m} = -kdt \;\Rightarrow\; \int \frac{dm}{m} = -k\int dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; ln|m| = -kt + ln\,C \;\Rightarrow\; ln\frac{|m|}{C} = -kt \;\Rightarrow\; \frac{m}{C} = e^{-kt} \;\Rightarrow\; m = Ce^{-kt}.$$

З умови $m(0) = m_0$ знаходимо $C = m_0$, тому остаточно маємо:

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

3. (Про охолодження тіла.) Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища. Відомо, що нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює T_1 ($T_0 > T_1$). Знайти залежність температури тіла від часу.

Розв'язання. Нехай в момент часу t температура T тіла дорівнює $T(t)$. За умовою

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \qquad k > 0,\; T(0) = T_0$$

(знак мінус вказує на зменшення температури). Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1) \;\Rightarrow\; \frac{dT}{T - T_1} = -kdt \;\Rightarrow\; \int \frac{dT}{T - T_1} = -k\int dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ ln|T-T_1| = -kt + ln\,C \ \Rightarrow\ ln\frac{|T-T_1|}{C} = -kt \ \Rightarrow\ \frac{T-T_1}{C} = e^{-kt} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ T - T_1 = Ce^{-kt} \ \Leftrightarrow\ T = T_1 + Ce^{-kt}.$$

З умови $T(0) = T_0$ знаходимо $C = T_0 - T_1$, тому остаточно маємо:

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}\,.$$

§ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.

2.1. Основні поняття і означення. Задача Коші.

Розглянемо диференціальні рівняння, які містять похідні вищих порядків. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається порядком цього рівняння. Зокрема, диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\big) = 0, \qquad (2.1)$$

де x — незалежна змінна; $y = y(x)$ — невідома функція; F — відома функція.

У рівняння n -го порядку (2.1) похідна n-го порядку $y^{(n)}$ має справді входити, тоді як наявність у ньому решти змінних, тобто $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ необов'язкова.

Рівняння (2.1), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається неявним диференціальним рівнянням.

Нормальним або явним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння (2.1), розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\big)\,. \qquad (2.2)$$

Розглядатимемо в основному саме такі рівняння.

Означення. Розв'язком рівняння (2.2) на деякому інтервалі (a, b) називається n разів неперервно диференційовна на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в дане рівняння обертає його в тотожність по $x \in (a, b)$, тобто

$$\forall\, x \in (a, b)\colon\ \ \varphi^{(n)}(x) \equiv f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right).$$

Графік розв'язку диференціального рівняння (2.1) або (2.2) називається його інтегральною кривою.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків, як і для рівнянь першого порядку, розглядається задача Коші або задача з початковими умовами. Для рівняння (2.2) ця задача ставиться так: серед усіх розв’язків рівняння (2.2) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, який при $x = x_0 \in (a, b)$ задовольняє такі умови

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0', \qquad y''(x_0) = y_0'', \qquad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (2.3)$$

де y_0, y_0', y_0'', … , $y_0^{(n-1)}$ — довільні наперед задані дійсні числа.

Умови (2.3) називають початковими умовами рівняння (2.2). Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y')\,. \qquad (2.4)$$

початкові умови при $x = x_0$ мають вигляд

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'\,. \qquad (2.5)$$

Існування і єдиність розв'язку задачі Коші визначаються такою теоремою Коші.

Теорема. Якщо функція $f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$ і її частинні похідні по аргументам $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ неперервні в деякій відкритій області $G \subset R^{n+1}$, то для всякої точки $\left(x_0, y_0,\ y_0',\ y_0'',\ y_0^{(n-1)}\right) \in G$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2.2), який задовольняє початкові умови (2.3).

Розглянемо поняття загального та частинного розв'язку рівняння (2.2). Нам з вищевикладеного матеріалу вже відомо, що загальний розв'язок рівняння першого порядку знаходиться за допомогою операції інтегрування і містить одну довільну сталу. В загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n-го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому загальний розв'язок рівняння (2.2) містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots C_n) \qquad (2.6)$$

Якщо загальний розв'язок знаходиться в неявній формі:

$$\Phi(x, C_1, C_2, \dots C_n) = 0\,, \qquad (2.7)$$

то його називають загальним інтегралом рівняння (2.2).

Зауважимо, що не кожний розв'язок рівняння (2.2), який містить n довільних сталих, є загальним розв'язком. Розв'язок (2.6) диференціального рівняння (2.2), який містить n довільних сталих називається загальним розв'язком, якщо можна знайти такі єдині сталі $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \dots C_n = C_{n0}$, що частинний розв'язок $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \dots C_{n0})$ задовольняє початкові умови (2.3).

Таким чином, розв'язати (проінтегрувати) диференціальне рівняння n-го порядку — це означає: 1) знайти його загальний розв'язок; 2) із загального розв'язку виділити частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови, якщо такі умови задані.

Для диференціального рівняння другого порядку (2.4) загальний розв'язок має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \qquad (2.8)$$

або в неявній формі:

$$\Phi(x, C_1, C_2) = 0\,, \qquad (2.9)$$

2.2. Диференціальні рівняння n -го порядку, які інтегруються в квадратурах.

Рівняння n-го порядку інтегруються в квадратурах дуже рідко. Розглянемо деякі класи таких рівнянь.

1°. Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x)\,, \qquad (2.10)$$

де $f(x)$ — задана неперервна функція, інтегрується в квадратурах.

Справді, записавши це рівняння у вигляді

$$\frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{dx} = f(x) \quad \text{або} \quad d\left(y^{(n-1)}\right) = f(x)dx$$

та інтегруючи, дістанемо

$$\int d\left(y^{(n-1)}\right) = \int f(x)dx \quad \text{або} \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1\,,$$

де C_1 — стала інтегрування.

Аналогічно знайдемо

$$\frac{d\left(y^{(n-2)}\right)}{dx}=\int f(x)dx+C_1 \quad \text{або} \quad d\left(y^{(n-2)}\right)=\left(\int f(x)\,dx+C_1\right)dx$$

Звідки

$$\int d\left(y^{(n-2)}\right)=\int\left(\int f(x)\,dx+C_1\right)dx \quad \text{або} \quad y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx+C_1x+C_2\,;$$

$$\int d\left(y^{(n-3)}\right)=\int\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx+C_1x+C_2\right)dx$$

або

$$y^{(n-3)}=\int\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx\right)dx+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3\,,$$

де C_1, C_2, C_3 — сталі інтегрування. Продовжуючи далі, після n інтегрувань знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.10):

$$y=\int\left(\ldots\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx\right)\ldots\right)dx+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\cdots+C_n\,.$$

Приклади.

1**.** Знайти загальний розв'язок рівняння $y''=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Розв’язання. Послідовно дістанемо

$$y''=\frac{1}{\sqrt{x}} \;\Leftrightarrow\; \frac{d(y')}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; d(y')=\frac{1}{\sqrt{x}}dx \;\Rightarrow\; \int d(y')=\int\frac{dx}{\sqrt{x}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y'=2\sqrt{x}+C_1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=2\sqrt{x}+C_1 \;\Rightarrow\; dy=\left(2\sqrt{x}+C_1\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dy=\int\left(2\sqrt{x}+C_1\right)dx \;\Rightarrow\; y=2\int x^{\frac{1}{2}}dx+C_1\int dx=$$

$$=2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C_1x+C_2=2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1x+C_2=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C_1x+C_2\,.$$

Відповідь: $y=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C_1x+C_2$.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''=12x^3-\frac{1}{x^2}$.

Розв’язання. Послідовно дістанемо

$$y''=12x^3-\frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{d(y')}{dx}=12x^3-\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; d(y')=\left(12x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int d(y')=\int\left(12x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx \;\Rightarrow\; y'=12\int x^3dx-\int\frac{dx}{x^2}=3x^4+\frac{1}{x}+C_1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx}=3x^4+\frac{1}{x}+C_1 \;\Rightarrow\; dy=\left(3x^4+\frac{1}{x}+C_1\right)dx \Rightarrow \int dy=\int\left(3x^4+\frac{1}{x}+C_1\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y=3\int x^4dx+\int\frac{dx}{x}+C_1\int dx=\frac{3}{5}x^5+ln|x|+C_1x+C_2\,.$$

Відповідь: $y=\frac{3}{5}x^5+ln|x|+C_1x+C_2$.

3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} = \sin 3x$.
Розв’язання. Послідовно дістанемо

$$y^{(4)} = \sin 3x \;\Leftrightarrow\; \frac{d(y''')}{dx} = \sin 3x \;\Longrightarrow\; d(y''') = \sin 3x\,dx \;\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \int d(y''') = \int \sin 3x\,dx \;\Rightarrow\; y''' = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{d(y'')}{dx} = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1 \;\Longrightarrow\; d(y'') = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x + C_1\right)dx \;\Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \int d(y'') = \int \left(-\frac{1}{3}\cos 3x + C_1\right)dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y'' = -\frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx + C_1\int dx = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{d(y')}{dx} = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2 \;\Longrightarrow\; d(y') = \left(-\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2\right)dx \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int d(y') = \int \left(-\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2\right)dx \;\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow\; y' = -\frac{1}{9}\int \sin 3x\,dx + C_1\int xdx + C_2\int dx = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \;\Longrightarrow\; dy = \left(\frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int dy = \int \left(\frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\; y = \frac{1}{27}\int \cos 3x\,dx + \frac{C_1}{2}\int x^2dx + C_2\int xdx + C_3\int dx =$$

$$= \frac{1}{81}\sin 3x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4\,.$$

Відповідь: $y = \frac{1}{81}\sin 3x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$.

2.3. Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку.

Одним з методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків є метод пониження порядку. Суть його полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку.

Розглянемо два типи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку.

1°. Нехай задано диференціальне рівняння виду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (2.11)$$

яке не містить явно шуканої функції. Порядок такого рівняння можна понизити, якщо за нову невідому функцію $z = z(x)$ взяти найнижчу із похідних даного рівняння, тобто покласти $y^{(k)} = z$; тоді $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$, …, $y^{(n)} = z^{(n-k)}$, тому дістаємо рівняння

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0\,.$$

Таким чином, порядок рівняння понижується на k одиниць. Окремим випадком рівняння (2.11) є рівняння

$$F\left(x,,y^{(n-1)},y^{(n)}\right)=0\,,$$

яке за допомогою нової змінної $z=y^{(n-1)}$, $z'=y^{(n)}$ зводиться до рівняння першого порядку:

$$F(x,z,z')=0\,.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $z=z(x,C)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)}=z(x,C)$ виду (2.10), яке інтегрується в квадратурах.

Приклад. Розв'язати рівняння $y''+8y'=e^{5x}$.

Розв’язання. Покладемо $z=y'$, тоді $z'=y''$ і маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z=z(x)$:

$$z'+8z=e^{4x}.$$

Розв'яжемо це рівняння. Поклавши $z=uv$, $z'=u'v+uv'$, матимемо:

$$u'v+uv'+8uv=e^{4x}\quad\Leftrightarrow\quad u'v+u(v'+8v)=e^{4x}\ .$$

Підберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю $v'+8v=0$; тоді $u'v=e^{4x}$. Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаємо

$$v'+8v=0\ \Leftrightarrow\ v'=-8v\ \Leftrightarrow\ \frac{dv}{dx}=-8v\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-8dx\ \Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-8\int dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ln|v|=-8x+C\Rightarrow\ v=e^{-8x+C}\ .$$

Найпростіший вираз в даному випадку буде при $C=0$, тому $v=e^{-8x}$.

Підставивши значення v у друге рівняння, дістанемо

$$u'e^{-8x}=e^{4x}\ \Rightarrow\ u'=e^{8x}e^{4x}\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=e^{12x}\ \Rightarrow\ du=e^{12x}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int du=\int e^{12x}dx\Rightarrow\ u=\frac{1}{12}e^{12x}+C_1\,,$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$z=uv=\left(\frac{1}{12}e^{12x}+C_1\right)\,e^{-8x}=\frac{1}{12}e^{4x}+C_1e^{-8x}\,,.$$

тоді $y'=\frac{1}{12}e^{4x}+C_1e^{-8x}$, звідки

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{12}e^{4x}+C_1e^{-8x}\ \Rightarrow\ dy=\left(\frac{1}{12}e^{4x}+C_1e^{-8x}\right)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int dy=\int\left(\frac{1}{12}e^{4x}+C_1e^{-8x}\right)dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{1}{12}\int e^{4x}dx+C_1\int e^{-8x}dx=\frac{1}{48}e^{4x}-\frac{1}{8}C_1e^{-8x}+C_2\,.$$

2°. Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$F\left(y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=0\,,\qquad (2.12)$$

яке не містить явно незалежної змінної x.

Рівняння (2.12) допускають пониження порядку на одиницю.

Справді, покладемо $y' = p$, де (на відміну від попереднього випадку) новою невідомою p є функція від y: $p = p(y)$, тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p = pp'_y\,,$$

тобто порядок другої похідної понизився на одиницю. Аналогічно дістаємо

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(pp'_y\right) = \frac{d}{dy}\left(pp'_y\right)\frac{dy}{dx} = p\left(pp''_{yy} + \left(p'_y\right)^2\right)$$

тощо. Методом індукції можна довести, що порядок усіх наступних похідних також понижується на одиницю.

Таким чином, від рівняння (2.12) n -го порядку приходимо до рівняння $(n-1)$-го порядку

$$F\left(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}\right) = 0\,.$$

Окремим випадком рівняння (2.12) є рівняння

$$F(y, y', y'') = 0\,, \qquad (2.13)$$

яке підстановкою $y' = p$, $y'' = pp'_y$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку:

$$F\left(y, p, pp'_y\right) = 0\,.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $yy'' + 4(y')^2 = 0$.

Розв'язання. Маємо рівняння виду (2.13). Поклавши $y' = p$, $y'' = pp'_y$ дістанемо

$$ypp'_y + 4p^2 = 0 \quad \text{або} \quad p\left(yp'_y + 4p\right) = 0\,.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$p = 0\,,\ \ yp'_y + 4p = 0\,.$$

З першого маємо $y' = 0$, звідки $y = C$. У другому рівнянні відокремлюються змінні:

$$yp'_y + 4p = 0 \;\Rightarrow\; p'_y = -4\frac{p}{y} \;\Rightarrow\; \frac{dp}{dy} = -4\frac{p}{y} \;\Rightarrow\; \frac{dp}{p} = -4\frac{dy}{y} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dp}{p} = -4\int\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \ln|p| = -4\ln|y| + \ln|C_1| \;\Rightarrow\; p = \frac{C_1}{y^4}\,,\ \ C_1 \neq 0\,.$$

Оскільки $p = y' = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y^4} \;\Rightarrow\; y^4dy = C_1dx \;\Rightarrow\; \int y^4dy = C_1\int dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{5}y^5 = C_1x + C_2 \;\Leftrightarrow\; y = \sqrt[5]{5(C_1x + C_2)}\,.$$

Отже, задане рівняння має розв'язки

$$y = C \quad \text{та} \quad y = \sqrt[5]{5(C_1x + C_2)}\,.$$

§ 3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.

3.1. Основні означення і поняття.

Рівняння виду

$$b_0(x)\,y^{(n)} + b_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + b_n(x)\,y = \varphi(x), \qquad (3.1)$$

де $b_0(x)$, $b_1(x)$, ..., $b_n(x)$, $\varphi(x)$ — задані функції, називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Термін «лінійне рівняння» пов'язаний з тим, що рівняння (3.1) містить невідому функцію $y = y(x)$ і всі її похідні лише в першому степені.

Функції $b_i(x), i = 0, 1, \dots, n,$ називаються коефіцієнтами даного рівняння, а функція $\varphi(x)$ — його вільним членом. Якщо вільний член $\varphi(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (3.1) називається однорідним, якщо $\varphi(x) \neq 0$, то рівняння (3.1) називається неоднорідним.

Коефіцієнт $b_0(x) \neq 0$ в своїй області визначення, бо в противному разі рівняння (3.1) не було б рівнянням n-го порядку. Поділивши дане рівняння на $b_0(x)$, дістанемо

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = f(x), \qquad (3.2)$$

де

$$a_i(x) = \frac{b_i(x)}{b_0(x)}\,,\ \ i = 1, 2, \dots, n;\ \ f(x) = \frac{\varphi(x)}{b_0(x)}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння виду (3,1) завжди можна звести до виду (3.2). У зв'язку в цим ми надалі розглядатимемо лише такі рівняння.

Надалі вважатимемо, що коефіцієнти і вільний член рівняння (3.2) на деякому інтервалі $(a; b)$ є неперервними функціями.

3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \qquad (3.3)$$

і встановимо деякі властивості його розв'язків.

Очевидно, одним з розв'язків рівняння (3.3) є $y = 0$. Цей розв'язок називають нульовим або тривіальним. Надалі під задачею розв'язання однорідного диференціального рівняння розумітимемо задачу відшукання його нетривіальних розв'язків.

Теорема. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівняння (3.3), то розв'язком цього рівняння є також функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (3.4)$$

де C_1, C_2— довільні сталі.

Функція (3.4) містить дві довільні сталі і є розв'язком рівняння (3.3), тому природно виникає запитання: чи не є розв'язок (3.4) загальним розв'язком рівняння (3.3)? Щоб відповісти на це запитання, введемо поняття лінійної залежності і лінійної незалежності функцій.

Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються лінійно незалежними на проміжку $(a; b)$, якщо тотожність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0 \qquad (3.5)$$

де α_1, α_2 — дійсні числа, справджується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Якщо хоча б одне з чисел α_1 чи α_2 відмінне від нуля і виконується тотожність (3.5), то функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються лінійно залежними на проміжку $(a; b)$.

Неважко переконатись, що функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ тоді і тільки тоді лінійно залежні на проміжку $(a;b)$, коли існує таке стале число λ, що для всіх $x \in (a;b)$ виконується рівність

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda, \text{ тобто } y_1(x) = \lambda y_2(x).$$

Інакше кажучи, дві функції тоді і тільки тоді лінійно залежні, коли вони пропорціональні. Наприклад, нехай $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = 5x^2$, $y_3(x) = x^4$, тоді функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні, а $y_1(x)$ і $y_3(x)$ — лінійно незалежні:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5} = const; \quad \frac{y_1(x)}{y_3(x)} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \neq const.$$

Якщо $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ — функції від x, то визначник

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

називається визначником Вронського або вронскіаном цих функцій і позначається символом $W(y_1, y_2)$ або $W(x)$.

Теорема. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — диференційовні і лінійно залежні на проміжку $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому проміжку тотожно дорівнює нулю.

Теорема. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння (3.3) на проміжку $(a;b)$, то визначник Вронського цих функцій в жодній точці даного проміжку не дорівнює нулю.

З теорем 2 і 3 випливає такий критерій лінійної незалежності розв'язків диференціального рівняння: для того щоб розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (3.3) були лінійно незалежними на заданому проміжку, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці даного проміжку.

Приклади.

1. Функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$ при $k_1 \neq k_2$ лінійно незалежні, тому що вронскіан

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} k_2 e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0 \quad \text{для } \forall\, x \in R.$$

2. Довести, що функції $y_1 = e^{kx}$ та $y_2 = xe^{kx}$ лінійно незалежні.

Розв'язання.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + xke^{kx} \end{vmatrix} = e^{kx}(e^{kx} + xke^{kx}) - ke^{kx} xe^{kx} =$$

$$= e^{2kx} + kxe^{2kx} - kxe^{2kx} = e^{2kx} \neq 0 \quad \text{для } \forall\, x \in R.$$

Оскільки вронскіан $W(y_1, y_2) \neq 0$, то за теоремою 3 функції $y_1 = e^{kx}$ та $y_2 = xe^{kx}$ лінійно незалежні.

Тепер ми можемо дати відповідь на поставлене раніше запитанні. Встановимо умови, за яких функція (3.4) буде загальним розв'язком рівняння (3.3).

Теорема. (Про структуру загального розв'язку однорідного рівняння.) Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — два лінійно незалежні на проміжку $(a;b)$ розв'язки рівняння (3.3), то функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (3.6)$$

де C_1 і C_2— довільні сталі, є його загальним розв'язком.

Теорема. Якщо відомий який-небудь частинний ненульовий розв'язок рівняння (3.3), то це рівняння розв'язується в квадратурах.

3.3. Лінійні однорідні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (3.7)$$

де p, q —дійсні числа.

Ейлер запропонував шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \qquad (3.8)$$

де k — стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Тоді

$$y' = (e^{kx})' = e^{kx}(kx)' = ke^{kx}, \qquad y'' = k(e^{kx})' = k^2e^{kx}.$$

Підставивши функцію (3.8) в рівняння (3.7), дістанемо

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \quad \text{або} \quad e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (3.9)$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (3.9), то функція (3.8) буде розв'язком рівняння (3.7). Квадратне рівняння (3.9) називається характеристичним рівнянням диференціального рівняння (3.7).

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 і k_2.

Можливі три випадки:

I. k_1 і k_2 — дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);

II. k_1 і k_2 — комплексні числа ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$);

III. k_1 і k_2 — дійсні і рівні числа ($k_1 = k_2$).

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку частинними розв'язками рівняння (3.7) є функції

$$y_1 = e^{k_1x}, \ \ y_2 = e^{k_2x}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні – це доведено у п. 3.2.

Згідно з теоремою 4 (п. 3.2) загальний розв'язок рівняння (3.7) знаходять за формулою

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \qquad (3.10)$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 10y' + 9y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 10k + 9 = 0$ і знайдемо його корені

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2.$$

Тоді

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 + 8}{2} = 9, \quad k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 - 8}{2} = 1.$$

У цьому випадку частинними розв'язками рівняння є функції

$$y_1 = e^{9x}\,, \;\; y_2 = e^{x}\,.$$

За формулою (3.10) загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{9x} + C_2 e^{x}.$$

II. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:

$$k_1 = \alpha + \beta i\,, \quad k_2 = \alpha - \beta i\,.$$

У цьому випадку частинними розв'язками рівняння (3.7) є функції

$$y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x\,, \;\; y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x\,.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = tg\,\beta x \neq const,$$

тому загальний розв'язок рівняння (3.7) запишеться у вигляді

$$y = C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x. \quad (3.11)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 13 = 0$ і знайдемо його корені

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0\,.$$

Тоді

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i\,.$$

У нашому випадку $\alpha = 2$, а $\beta = 3$ і частинними розв'язками рівняння є функції

$$y_1 = e^{2x}\sin 3x\,, \;\; y_2 = e^{2x}\cos 3x\,.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{2x}\sin 3x + C_2 e^{2x}\cos 3x.$$

III. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні: $k_1 = k_2 = k$. За формулою (3.8) дістанемо один з розв'язків:

$$y_1 = e^{kx}\,.$$

Тоді другий розв'язок рівний $y_2 = xe^{kx}$, тому загальний розв'язок рівняння (3.7) запишеться у вигляді

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \qquad (3.12)$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені

$$k^2 + 10k + 25 = 0 \quad \Leftrightarrow (k+5)^2 = 0\,.$$

Тоді

$$k_1 = k_2 = -5\,.$$

У цьому випадку частинними розв'язками рівняння є функції

$$y_1 = e^{-5x}\,, \;\; y_2 = xe^{-5x}\,.$$

За формулою (3.10) загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}.$$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' + y' - 6y = 0$,

який задовольняє початкові умови $y(0) = 7$, $y'(0) = 4$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + k - 6 = 0$ і знайдемо його корені

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2 .$$

Тоді

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + 5}{2} = 2, \quad k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - 5}{2} = -3 .$$

У цьому випадку частинними розв'язками рівняння є функції

$$y_1 = e^{2x}, \ \ y_2 = e^{-3x} .$$

За формулою (3.10) загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Для знаходження частинного розв’язку знайдемо спочатку y':

$$y' = (C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x})' = C_1 e^{2x}(2x)' + C_2 e^{-3x}(-3x)' = 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x}$$

Тепер використаємо початкові умови для знаходження сталих C_1 і C_2:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 7 , \\ y'(0) = 2C_1 e^0 - 3C_2 e^0 = 2C_1 - 3C_2 = 4 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7 , \\ 2C_1 - 3C_2 = 4 . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 7 - C_1 , \\ 2C_1 - 3(7 - C_1) = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 7 - C_1 , \\ 2C_1 - 21 + 3C_1 = 4 . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 , \\ C_2 = 7 - 5 = 2 . \end{cases}$$

Підставляючи значення знайдених сталих C_1 і C_2 у загальний розв'язок, знайдемо частинний розв'язок нашого рівняння:

$$y = 5e^{2x} + 2e^{-3x}.$$

3.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку.

Розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x) \qquad (3.13)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі $(a; b)$ функції.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0 , \qquad (3.14)$$

ліва частина якого збігається з лівою частиною неоднорідного рівняння (3.13), надалі називатимемо відповідним йому однорідним рівнянням.

Теорема. (про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння). Загальним розв'язком рівняння (3.13) є сума його загального розв'язку $\bar{y}(x)$ відповідного однорідного рівняння (3.14) та довільного частинного розв'язку $y^*(x)$, тобто

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x) \qquad (3.15)$$

З теореми випливає, що для знаходження загального розв'язку рівняння (3.13) потрібно знайти який-небудь його частинний розв'язок, а також загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Якщо відомий загальний розв'язок однорідного рівняння (3.14), то частинний розв'язок рівняння (3.13) можна знайти, скориставшись так званим методом варіації довільних сталих.

3.5. Метод варіації довільних сталих.

Нехай

$$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (3.16)$$

— загальний розв'язок однорідного рівняння (3.14), відповідного рівнянню (3.13). Замінимо у формулі (3.16) сталі C_1 і C_2 невідомими функціями $C_1(x)$, $C_2(x)$ і підберемо ці функції так, щоб функція

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \qquad (3.17)$$

була частинним розв'язком рівняння (3.13).

Це можливо лише тоді, коли функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольнятимуть наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0; \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases} \qquad (3.18)$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x)$ для лінійно незалежних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (3.14), тому $W(x) \neq 0$. Тоді система (3.18) має єдиний розв'язок $C_1'(x) = \varphi(x)$ та $C_2'(x) = \psi(x)$, де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — деякі функції від x. Інтегруючи ці функції, знаходимо $C_1(x)$ та $C_2(x)$, а потім за формулою (3.17) складаємо частинний розв'язок рівняння (3.13).

При знаходженні частинних розв'язків може стати корисною наступна теорема.

Теорема. (про накладання розв'язків). Якщо права частина рівняння $y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x)$ дорівнює сумі двох функцій: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y_1(x)$ та $y_2(x)$ — розв'язки рівнянь $y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f_1(x)$ та $y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f_2(x)$, то функція $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ буде розв'язком даного рівняння.

Це означає, що коли можна знайти розв'язки рівнянь, правими частинами яких є окремі доданки заданої правої частини, то можна дуже просто — у вигляді суми розв'язків — знайти розв'язок даного рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$$

Розв’язання. Загальний розв'язок нашого рівняння шукаємо у вигляді:

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x),$$

де $\bar{y}(x)$ є розв'язком відповідного однорідного рівняння $y'' + 9y = 0$, а $y^*(x)$ - довільний частинний розв'язок нашого неоднорідного рівняння.

Шукаємо спочатку розв'язок однорідного рівняння $y'' + 9y = 0$.

Для цього складемо відповідне характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ і знайдемо його корені:

$$k^2 + 9 = 0 \iff k^2 = -9 \iff k_{1,2} = \pm 3i$$

У нашому випадку $\alpha = 0$, а $\beta = 3$ і частинними розв'язками рівняння є функції

$$y_1 = \sin 3x, \quad y_2 = \cos 3x.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x.$$

Запишемо частинний розв'язок даного рівняння у вигляді

$$y = C_1(x)\sin 3x + C_2(x)\cos 3x.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему рівнянь виду (3.18):

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin 3x + C_2'(x)\cos 3x = 0; \\ 3C_1'(x)\cos 3x - 3C_2'(x)\sin 3x = \dfrac{1}{\sin 3x}. \end{cases}$$

Розв'язуємо дану систему за правилом Крамера. Розширена матриця системи $\overline{\mathrm{A}}$ рівна

$$\overline{\mathrm{A}} = \left(\begin{matrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sin 3x} \end{matrix}\right.\right)$$

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix} = -3\sin^2 3x - 3\cos^2 3x = -3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = -3,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos 3x \\ \dfrac{1}{\sin 3x} & -3\sin 3x \end{vmatrix} = 0 - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = -ctg\, 3x\ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin 3x & 0 \\ 3\cos 3x & \dfrac{1}{\sin 3x} \end{vmatrix} = \frac{\sin 3x}{\sin 3x} - 0 = 1\ .$$

Знайдемо $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-ctg\, 3x}{-3} = \frac{1}{3}ctg\, 3x, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Інтегруючи, дістаємо

$$C_1(x) = \int \frac{1}{3} ctg\, 3x dx = \frac{1}{3}\int ctg\, 3x dx = \frac{1}{9}\ln|\sin 3x| + C_1^0\ ,$$

$$C_2(x) = \int \left(-\frac{1}{3}\right) dx = -\frac{1}{3}\int dx = -\frac{1}{3}x + C_2^0\ .$$

Тоді

$$y = C_1(x)\sin 3x + C_2(x)\cos 3x = \left(\frac{1}{9}\ln|\sin 3x| + C_1^0\right)\sin 3x + \left(-\frac{1}{3}x + C_2^0\right)\cos 3x =$$

$$= C_1^0 \sin 3x + C_2^0\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x\ \ln|\sin 3x| - \frac{1}{3}x\cos 3x\ .$$

Це і є загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. В нашому випадку

$\bar{y}(x) = C_1^0 \sin 3x + C_2^0 \cos 3x$, а $y^*(x) = \frac{1}{9}\sin 3x\ \ln|\sin 3x| - \frac{1}{3}x\cos 3x$.

3.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Рівняння із спеціальною правою частиною.

Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (3.19)$$

де p, q —дійсні числа, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами, якщо $f(x) \not\equiv 0$.

Як нам вже відомо загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (3.19) має вид

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x)\,,$$

де $\bar{y}(x)$ – загальний розв’язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння: $y'' + py' + qy = 0$, а $y^*(x)$ – який-небудь частинний розв’язок рівняння (3.19).

Якщо права частина рівняння (3.19) $f(x)$ має певний вигляд, то частинний розв’язок y^* можна знаходити методом невизначених коефіцієнтів. Розглянемо кілька випадків:

а) права частина $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (3.20)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; α – дійсне число, що може дорівнювати й нулю.

У цьому випадку частинний розв’язок шукають у вигляді

$$y^* = x^s Q_n(x)e^{\alpha x},$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня, що й $P_n(x)$, s – кратність, з якою входить α у число коренів характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0.$$

$s = 0$, якщо α не є коренем характеристичного рівняння $\alpha \neq k_1$ і $\alpha \neq k_2$;

$s = 1$, якщо α є простим коренем характеристичного рівняння $\alpha = k_1 \neq k_2$ або $\alpha = k_2 \neq k_1$;

$s = 2$, якщо α є двократним коренем характеристичного рівняння $\alpha = k_1 = k_2$.

Невідомі коефіцієнта многочлена $Q_n(x)$ шукають методом невизначених коефіцієнтів, суть якого розглянемо на конкретному прикладі.

Приклади. 1. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Розв’язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 3e^{2x}$.

Загальний розв’язок даного рівняння має вид

$$y = \bar{y} + y^*,$$

1) Знайдемо $\bar{y}$ – загальний розв’язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння: $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$ і знайдемо його корені

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2\,.$$

Тоді

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3, \quad k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1\,.$$

У цьому випадку частинними розв'язками рівняння є функції

$$y_1 = e^{3x}\,,\ \ y_2 = e^{x}\,.$$

За формулою (3.10) загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}.$$

2) Знайдемо y^* – частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Права частина рівняння $3e^{2x}$ має вигляд $P_0(x)e^{2x}$, де $P_0(x) = 3$ – многочлен нульового степеня. Оскільки $\alpha = 2$ не є кореним характеристичного рівняння, тобто $\alpha \neq k_1 = 3$ і $\alpha \neq k_2 = 1$, то $s = 0$ і частинний розв’язок шукаємо у вигляді

$$y^* = Q_0(x)e^{2x}, \text{ або } y^* = Ae^{2x}.$$

Маємо $y^{*\prime} = (Ae^{2x})' = 2Ae^{2x}$, $y^{*\prime\prime} = (2Ae^{2x})' = 4Ae^{2x}$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$$y'' - 4y' + 3y = 4Ae^{2x} - 4 \cdot 2Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x},$$

або $-Ae^{2x} = 3e^{2x}$. Звідки $A = -3$.

Отже, шуканий частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд $y^* = -3e^{2x}$.

Загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^{3x} + C_2e^x - 3e^{2x}.$$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = xe^x$.

Загальний розв'язок даного рівняння має вид $y = \bar{y} + y^*$.

1) Знайдемо $\bar{y}$ – загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння: $y'' - 4y' + 3y = 0$ ми знайшли в попередньому прикладі.

$$\bar{y} = C_1e^{3x} + C_2e^x.$$

2) Знайдемо y^* – частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Права частина рівняння xe^x має вигляд $P_1(x)e^x$, де $P_1(x) = x$ – многочлен першого степеня. Оскільки $\alpha = 1$ є простим коренем характеристичного рівняння, тобто $\alpha \neq k_1 = 3$ і $\alpha = k_2 = 1$, то $s = 1$ і частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = xQ_1(x)e^x, \text{ або } y^* = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Маємо

$$y^{*\prime} = \left((Ax^2 + Bx)e^x\right)' = (Ax^2 + Bx)'e^x + (Ax^2 + Bx)(e^x)' =$$

$$= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x;$$

$$y^{*\prime\prime} = \left((2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x\right)' = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$$y'' - 4y' + 3y = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x -$$

$$-4\left((2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x\right) + 3(Ax^2 + Bx)e^x = xe^x.$$

Або

$$2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x - 4(2Ax + B)e^x - 4(Ax^2 + Bx)e^x +$$

$$+3(Ax^2 + Bx)e^x = xe^x.$$

Або

$$2Ae^x - 2(2Ax + B)e^x = xe^x \quad \Leftrightarrow \quad 2Ae^x - 4Axe^x - 2Be^x = xe^x.$$

Скоротивши на $e^x \neq 0$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах, дістанемо систему

$$x^1 \mid -4A = 1;$$
$$x^0 \mid 2A - 2B = 0;$$

Звідки $A = -\frac{1}{4}$, $B = A = -\frac{1}{4}$.

Отже, шуканий частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд $y^* = (Ax^2 + Bx)e^x = \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^x = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$.

Загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^{3x} + C_2e^x - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x.$$

б) права частина $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = M\sin bx + N\cos bx, \qquad (3.21)$$

де M, N, b – дійсні числа, причому $b \neq 0$.

Тоді частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (3.19) шукають у вигляді

$$y^* = A\sin bx + B\cos bx,$$

якщо bi не є коренем характеристичного рівняння, і

$$y^* = x(A\sin bx + B\cos bx),$$

якщо bi є коренем характеристичного рівняння.

3. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x$.

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x) = 5\sin 2x$.

Загальний розв’язок цього рівняння має вид $y = \bar{y} + y^*$.

1) Знайдемо $\bar{y}$ – загальний розв’язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння: $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 13 = 0$ і знайдемо його корені

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0 .$$

Тоді

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i .$$

У нашому випадку $\alpha = -2$, а $\beta = 3$ і частинними розв'язками рівняння є функції

$$y_1 = e^{-2x}\sin 3x\ , \quad y_2 = e^{-2x}\cos 3x\ .$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 e^{-2x}\sin 3x + C_2 e^{-2x}\cos 3x.$$

2) Знайдемо y^* – частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Права частина його $5\sin 2x$ має вигляд $M\sin 2x + N\cos 2x$, де $M = 5$, $N = 0$. Оскільки число $2i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв’язок шукаємо у вигляді

$$y^* = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

Диференціюємо двічі і отримуємо

$$y^{*\prime} = (A\sin 2x + B\cos 2x)' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

$$y^{*\prime\prime} = (2A\cos 2x - 2B\sin 2x)' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

Підставляючи значення y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в задане рівняння дістаємо

$$y^{*\prime\prime} + 4y^{*\prime} + 13y^* = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 4(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) +$$

$$+13(A\sin 2x + B\cos 2x) = 5\sin 2x$$

або $(9A - 8B)\sin 2x + (8A + 9B)\cos 2x = 5\sin 2x$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в обох частинах рівності, маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sin 2x \ |\ 9A - 8B = 5;$$
$$\cos 2x \ |\ 8A + 9B = 0;$$

Звідки $A = \frac{9}{29}$, $B = -\frac{8}{29}$.

Отже, шуканий частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y^* = \frac{9}{29}\sin 2x - \frac{8}{29}\cos 2x$$

Записуємо загальний розв’язок заданого рівняння:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-2x}\sin 3x + C_2 e^{-2x}\cos 3x + \frac{9}{29}\sin 2x - \frac{8}{29}\cos 2x\ .$$

в) права частина $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\sin bx + Q_m(x)\cos bx), \qquad (3.22)$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно; a, b – дійсні числа, причому $b \neq 0$.

Тоді частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (3.19) шукають у вигляді

$$y^* = e^{ax}(L_r(x)\sin bx + G_r(x)\cos bx),$$

де $L_r(x)$, $G_r(x)$ – многочлени степеня $r = max(n, m)$ з невизначеними коефіцієнтами, якщо число $a + bi$ не є коренем відповідного характеристичного рівняння та у вигляді

$$y^* = xe^{ax}(L_r(x)\sin bx + G_r(x)\cos bx),$$

якщо число $a + bi$ є коренем відповідного характеристичного рівняння.

ІІІ. Ряди.

Ряди досить широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь тощо.

Найпростіший ряд— суму членів нескінченної геометричної прогресії — вперше ввели вчені Стародавньої Греції, зокрема Архімед застосував такий ряд до обчислення площі параболічного сегмента.

Систематично рядами почали користуватись, починаючи з 17 ст., проте теорія рядів була створена лише в 19 ст. на основі поняття границі в роботах К. Гаусса, О. Коші та багатьох інших учених.

§ 1. Числові ряди.

1.1. Основні поняття та означення. Геометрична прогресія. Гармонічний ряд.

Нехай задано послідовність дійсних чисел $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$.

Рядом називають вираз

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1.1)$$

Цьому виразу ми не приписуємо ніякого числа, тому що нескінченне число додавань виконати не можна. Для кожного $n \in N$ покладемо

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n\ .$$

Число u_n називається n-м членом, а число S_n — n-ю частинною сумою ряду (1.1).

Якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збіжна і $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називається сумою ряду (1.1), а ряд називається збіжним. Символічно це записується так:

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд (1.1) називається розбіжним.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n .$$

Розв'язання. Розглянемо частинну суму $S_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ то ряд розбіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} .$$

Розв'язання. Запишемо послідовність частинних сум:

$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0, \dots, S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0.$

Ця послідовність границі не має, тому ряд розбіжний.

3. Дослідити на збіжність ряд:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} .$$

Розв'язання. Знайдемо суму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \left(\text{бо } \ \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \ \text{ для всіх } k \in N\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то наш ряд збіжний і сума його $S = 1$.

4. Дослідити на збіжність ряд:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \ , \ \ a \neq 0 .$$

Розв'язання. Це геометрична прогресія з першим членом a і знаменником q. Точніше було б сказати — ряд, складений з членів геометричної прогресії. Проте для стислості даний ряд далі називаємо геометричною прогресією. При $q \neq 1$ маємо

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, якщо $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, якщо $|q| > 1$.

Отже, при $|q| < 1$ наш ряд збіжний, а при $|q| > 1$ — розбіжний. Якщо $q = 1$, то матимемо $a + a + \cdots + a + \ \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} an = \infty$, тобто ряд розбіжний. Якщо $q = -1$, то матимемо ряд $a - a + a - a + \cdots$, $S_n = a$ при непарному n і $S_n = 0$ при парному n, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, тому ряд розбіжний.

Таким чином, геометрична прогресія збіжна при $|q| < 1$ і розбіжна при $|q| \geq 1$.

5. Дослідити на збіжність ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Розв'язання. Цей ряд називається гармонічним. Він розбіжний. Ми покажемо це в подальшому.

1.2. Найпростіші властивості числових рядів.

Розглянемо деякі властивості збіжних рядів.

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також збіжний і сума його дорівнює CS $(C = const)$. Іншими словами, збіжний ряд можна множити почленно на одне і те саме число.

2. Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ мають суми відповідно S та σ, то збіжними є також ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ і їх суми дорівнюють $S \pm \sigma$.

3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

Розглянемо ряд (1.1) і покладемо

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Величину r_n називають n-м залишком ряду (1.1), її можна розглядати як суму ряду, який утворюється з ряду (1.1) після відкидання перших n його членів.

Якщо ряд збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $r_n = S - S_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Справедливе і більш загальне твердження.

4. Ряд (1.1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок.

Ця властивість є наслідком властивості 3.

5. (Необхідна умова збіжності ряду.) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

6. (Достатня умова розбіжності ряду.) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

Дійсно, якби даний ряд був збіжний, то за властивістю 5° його загальний член прямував би до нуля при $n \to \infty$, що суперечить умові.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Розв'язання. Тут виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0\,,$$

проте ряд розбіжний. Дійсно,

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n^2},$$

тобто $S_n > \sqrt[3]{n^2}$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Отже, ряд розбіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-5}{2n+3}.$$

Розв’язання. Тут виконується достатня умова розбіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7n-5}{2n+3} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \neq 0,$$

тому ряд розбіжний.

3. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}.$$

Розв’язання. Ряд збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{8}$.

Таким чином, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ніякого висновку про збіжність чи розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ зробити не можна.

Потрібне додаткове дослідження, яке виконується за допомогою достатніх умов збіжності ряду. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

1.3. Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності.

При дослідженні на збіжність знакододатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами, найчастіше користуються такими достатніми умовами (ознаками) збіжності, як ознаки порівняння, ознаки Д’Аламбера і Коші та інтегральна ознака Коші.

Теорема (ознака порівняння). Нехай задано два ряди з невід'ємними членами

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad u_n \geq 0 \qquad (1.2)$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \quad v_n \geq 0 \qquad (1.3)$$

і для всіх n виконується нерівність

$$u_n \leq v_n \qquad (1.4)$$

Тоді, якщо ряд (1.3) збіжний, то збіжний і ряд (1.2). Якщо ряд (1.2) розбіжний, то розбіжний і ряд (1.3).

Зауваження 1. Ознаки порівняння можна застосовувати і тоді, коли нерівність (1.4) виконується не для всіх членів рядів (1.2) і (1.3), а починаючи з деякого номера N. Це випливає з властивості 3.

Зауваження 2. При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння необхідно знати, які ряди збіжні і які розбіжні.

Для порівняння часто користуються рядами:

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geq 1; \end{cases}$$

$$2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}\text{збіжний при } \alpha>1\,,\\ \text{розбіжний при } \alpha\le 1\,.\end{cases}$$

Перший з цих рядів, як відомо, називається геометричною прогресією. Другий з рядів називається рядом Діріхле, або узагальненим гармонічним рядом. Його ми дослідимо пізніше. Зокрема, при $\alpha=1$ дістанемо гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

який, як відомо, розбіжний.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+n}.$$

Розв'язання. Застосовуємо ознаки порівняння. Оскільки

$$u_n=\frac{1}{5^n+n}<\frac{1}{5^n}=v_n$$

і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$$

збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q=\frac{1}{5}<1$, то наш початковий ряд теж збіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}\,, n=1,2,\ldots$$

і ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

розбіжний як гармонічний, то наш початковий ряд також розбіжний.

Теорема. (гранична ознака порівняння). Якщо задано два ряди з додатними членами

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \qquad (1.5)$$
$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \qquad (1.6)$$

причому існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a\ \ (a\neq 0\,,\ \ a\neq\infty),$$

то ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{5n}.$$

Розв'язання. Застосуємо граничну ознаку порівняння. Оскільки

$$u_n = \sin\frac{\pi}{5n}\,, \qquad v_n = \frac{1}{n}\,, \qquad \text{то}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5n}}{\frac{\pi}{5n}} = \frac{\pi}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{5n}}{\frac{\pi}{5n}} = \frac{\pi}{5}\cdot 1 = \frac{\pi}{5} \neq 0$$

і гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний, то наш початковий ряд також розбіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^4}\,.$$

Розв'язання. Порівняємо цей ряд із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (це ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\,,\ \text{ де }\ \alpha = 3 > 1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{n^4} : \frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{n^4}\cdot n^3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n} = 3 \neq 0\,.$$

Отже, даний ряд збіжний.

Теорема. (ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \qquad (1.7)$$

існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l\,,$$

то: 1) ряд збіжний при $l < 1$; 2) ряд розбіжний при $l > 1$.

Зауваження. Якщо $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку ряд треба дослідити за допомогою інших ознак.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{(n+1)!}\,.$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$$u_n = \frac{3^{2n-1}}{(n+1)!}\,, \quad u_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)-1}}{(n+1+1)!} = \frac{3^{2n+1}}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{2n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{3^{2n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3^2}{n+2} = 0 < 1$$

$$(\ (n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)!\ \ )\,,$$

заданий ряд збіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{(2n+3)\,7^n}\,.$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$$u_n = \frac{9^n}{(2n+3)\,7^n}\,, \quad u_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(2(n+1)+3)\,7^{n+1}} = \frac{9^{n+1}}{(2n+5)\,7^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9^{n+1}}{(2n+5)\,7^{n+1}}\cdot\frac{(2n+3)\,7^n}{9^n}\right) = \frac{9}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+5} = \frac{9}{7}\cdot 1 = \frac{9}{7} > 1\,.$$

Заданий ряд розбіжний.

Теорема. (ознака Коші). Якщо для ряду (1.7) з додатними членами існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l\,,$$

то цей ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+7}\right)^n.$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Коші:

$$u_n = \left(\frac{2n-1}{3n+7}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+7}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+7} = \frac{2}{3} < 1\,,$$

тобто заданий ряд збіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg^n\frac{\pi}{3n}.$$

Розв'язання. Застосуємо ознаку Коші:

$$u_n = tg^n\frac{\pi}{3n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{tg^n\frac{\pi}{3n}} = \lim_{n\to\infty} tg\frac{\pi}{3n} = tg\,0 = 0 < 1\,,$$

тобто заданий ряд збіжний.

Теорема. (інтегральна ознака Коші). Нехай задано ряд

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (1.8)$$

члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ на проміжку $[1;\, +\infty)$. Тоді ряд (1.8) збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^2 n}\,.$$

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Візьмемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{x\, ln^2 x}\ , \qquad x \in [2;\ +\infty)\ ,$$

тоді матимемо ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\, ln^2 n} = f(2) + f(3) + \cdots + f(n) + \cdots\ .$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^2 x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{dx}{x\, ln^2 x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{d(\ln x)}{ln^2 x} =$$

$$\lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_2^A = -\lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln A} - \frac{1}{\ln 2}\right) = -\left(0 - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Цей інтеграл збіжний, тому і заданий ряд збіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд (див. п. 1.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}\ .$$

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Візьмемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}\ , \qquad x \in [1;\ +\infty)\ ,$$

тоді матимемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots\ .$$

Обчислимо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

Розглянемо окремо два випадки: 1) $\alpha = 1$ і 2) $\alpha \neq 1$.

1) $\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln|x|\big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln|A| - \ln 1) = +\infty\ .$$

Отже при $\alpha = 1$ невласний інтеграл є розбіжний, а отже розбіжним є і гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

2) $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} x^{-\alpha} dx = \lim_{A\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha>1\,;\\ +\infty & \text{при } \alpha<1\,.\end{cases}$$

Невласний інтеграл збіжний при $\alpha > 1$, тому заданий ряд при $\alpha > 1$ теж збіжний. При $\alpha < 1$ невласний інтеграл розбіжний , тому заданий ряд при $\alpha < 1$ також розбіжний. Таким чином, узагальнений гармонічний ряд збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \leq 1$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}\text{збіжний при } \alpha>1\,,\\ \text{розбіжний при } \alpha\leq 1\,.\end{cases}$$

1.4. Ряди, в яких знаки членів строго чергуються. Ознака Лейбніца.

У попередньому пункті ми розглянули ряди з додатними членами. Ряди з недодатними членами можна досліджувати аналогічно, оскільки від знакододатних вони відрізняються множником -1, який на збіжність ряду не впливає.

Розглянемо тепер ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд, довільні два сусідні члени якого мають різні знаки:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}\,u_n+\cdots\,, \qquad (1.9)$$

де $u_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Цей ряд досліджується на збіжність за допомогою такої достатньої ознаки.

Теорема. (ознака Лейбніца). Ряд (1.9) збіжний, якщо:

1) $u_{n+1} < u_n\,,\quad n = 1, 2, \dots$; (1.10)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. (1.11)

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

Зазначимо, що до рядів, знаки яких строго чергуються, належить також ряд

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-u_5+\cdots+(-1)^n\,u_n+\cdots,\; u_n>0\,. \quad (1.12)$$

Якщо для такого ряду виконуються умови 1) і 2), то він збіжний, його сума S від'ємна і задовольняє нерівність $|S| \leq u_1$.

Таким чином, для рядів (1.9) і (1.12) ознака Лейбніца формулюється так: якщо модуль n-го члена ряду (1.9) чи (1.12) із зростанням n спадає і прямує до нуля, то ряд збіжний, причому модуль його суми не перевищує модуля першого члена.

Ряди (1.9) і (1.12), для яких виконується ознака Лейбніца, називаються рядами лейбніцевого типу.

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (1.9) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто $|S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Інакше кажучи, модуль n-го залишку r_n збіжного ряду (1.9) не перевищує модуля $(n + 1)$-го члена цього ряду, тобто $|\, r_n| \leq u_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Приклад. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n)^2}$$

збіжний і знайти його суму з точністю до 0,01.

Розв’язання. Очевидно, всі три умови ознаки Лейбніца виконуються: 1) знаки членів даного ряду строго чергуються

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n)^2}=\frac{1}{9}-\frac{1}{36}+\frac{1}{81}-\frac{1}{144}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(3n)^2}+\cdots;$$

2) модулі його членів монотонно спадають

$$u_n=\frac{1}{(3n)^2},\quad u_{n+1}=\frac{1}{\big(3(n+1)\big)^2},\quad \frac{1}{\big(3(n+1)\big)^2}<\frac{1}{(3n)^2},n=1,2,\dots;$$

3) n-й член ряду прямує до нуля при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n)^2}=0.$$

Отже, ряд збіжний і має певну суму S.

Для того щоб обчислити цю суму з точністю до 0,01, треба взяти стільки його членів, щоб перший з наступних членів був за модулем менший від 0,01. Тоді весь залишок ряду, починаючи з цього члена, буде менший від 0,01. У даному разі маємо

$$u_1=\frac{1}{9}>0{,}01;\quad u_2=\frac{1}{36}>0{,}01;\quad u_3=\frac{1}{81}>0{,}01;\quad u_4=\frac{1}{144}<0{,}01,$$

тобто, щоб знайти суму даного ряду з точністю до 0,01, досить залишити перші три члени ряду, а решту відкинути. Таким чином,

$$S\approx S_3=\frac{1}{9}-\frac{1}{36}+\frac{1}{81}=\frac{36-9+4}{324}=\frac{31}{324}\approx 0{,}10.$$

1.5. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжності.

Ряд називається знакозмінним, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. (Зрозуміло, що розглядається випадок, коли ряд містить нескінченну кількість додатних членів і нескінченну кількість від'ємних членів.)

Розглянуті в попередньому пункті ряди, в яких знаки чергуються, є, очевидно, окремим випадком знакозмінних рядів.

Візьмемо довільний знакозмінний ряд

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1.13}$$

де числа u_i можуть мати довільний знак. Одночасно розглянемо ряд, утворений з модулів ряду (1.13):

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots, \tag{1.14}$$

Для знакозмінних рядів справедлива така ознака збіжності.

Теорема. Якщо ряд (1.14) збіжний, то збіжний і ряд (1.13).

Ця теорема показує, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності знакододатних рядів.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2},$$

де α — довільне дійсне число.

Розв’язання.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2} = \frac{\cos\alpha}{1^2} + \frac{\cos 2\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{\cos n\alpha}{n^2} + \cdots.$$

Складемо ряд з модулів членів заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right| = \left|\frac{\cos\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\cos 2\alpha}{2^2}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right| + \cdots.$$

Оскільки

$$\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right| = \frac{|\cos n\alpha|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний як узагальнений гармонічний (п. 1.3) з $\alpha = 2 > 1$, то за ознакою порівняння ряд з модулів збіжний, тому збіжний і заданий ряд.

Дана теорема дає лише достатню умову збіжності і не є необхідною умовою збіжності знакозмінного ряду, оскільки існують знакозмінні ряди, які є збіжними, а ряди, утворені з модулів їхніх членів, розбіжні. Наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

збіжний за ознакою Лейбніца, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

утворений з модулів його членів, розбіжний. У зв'язку з цим всі збіжні ряди можна розділити на абсолютно збіжні і умовно збіжні.

Знакозмінний ряд (1.13) називають абсолютно збіжним, якщо ряд (1.14), утворений з модулів його членів, є збіжним.

Якщо ж ряд (1.13) збіжний, а ряд (1.14), утворений з модулів його членів, розбіжний, то ряд (1.13) називають умовно збіжним. Так, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$ є абсолютно збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ — умовно збіжним.

Розмежування рядів на абсолютно і умовно збіжні є досить істотним. Справа в тому, що абсолютно збіжні ряди мають цілу низку важливих властивостей скінченних сум, тоді як умовно збіжні ряди таких властивостей не мають. Наприклад, абсолютно збіжні мають переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Умовно збіжні ряди переставної властивості не мають, тому що від перестановки їхніх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитись розбіжний ряд.

§2. Степеневі ряди.

2.1. Функціональні ряди. Поняття рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштрасса.

Перейдемо тепер до вивчення функціональних рядів, тобто рядів, членами яких є не числа, а функції, визначені на деякій множині E:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (2.1)$$

Якщо взяти довільне число $x_0 \in E$ і в ряді (2.1) покласти $x = x_0$, то дістанемо числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \qquad (2.2)$$

Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо ряд (2.2) є збіжним, то точка x_0 називається точкою збіжності функціонального ряду (2.1). Якщо ж ряд (2.2) є розбіжним, то точка x_0 називається точкою розбіжності ряду (2.1).

Множина всіх точок збіжності функціонального ряду називається областю його збіжності. Область збіжності функціонального ряду може або збігатися з множиною E, на якій визначені члени ряду, або становити деяку частину цієї множини.

Частинна сума функціонального ряду є функцією від x і визначається за аналогією з числовими рядами:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)\,.$$

У кожній точці x, яка належить області збіжності ряду (2.1), існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)\,,$$

яку називають сумою ряду (2.1) і пишуть

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots\,.$$

Функція $S(x)$ визначена в області збіжності функціонального ряду.

Якщо функціональний ряд (2.1) збіжний до функції $S(x)$, то різниця $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ називається n-м залишком ряду:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots\,.$$

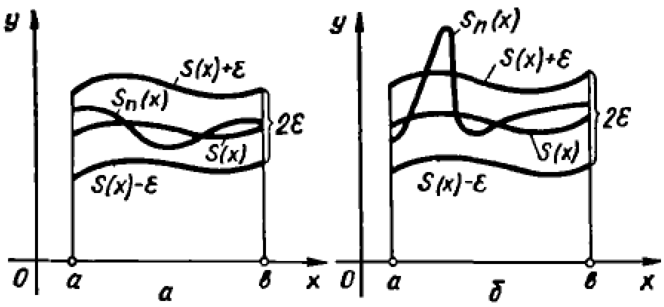
Зрозуміло, що для всіх значень x з області збіжності ряду

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0\,.$$

Відомо, що сума скінченного числа неперервних функцій є функцією неперервною. Крім того, суму скінченного числа функцій можна почленно диференціювати та інтегрувати. Виявляється, що ці властивості не завжди виконуються для сум нескінченного числа функцій, тобто для функціональних рядів. Проте ці властивості зберігаються для так званих рівномірно збіжних рядів.

Означення. Функціональний ряд (2.1) називається рівномірно збіжним на множині D якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)$, яке залежить лише від ε і не залежить від x, що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Розглянемо поняття рівномірної і нерівномірної збіжності функціонального ряду з погляду геометрії.



а) Рівномірно збіжний ряд *б*) Нерівномірно збіжний ряд

Рис. 2.1.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають ряд важливих властивостей. Сформулюємо деякі з них без доведення.

1. Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функція, неперервна на цьому проміжку.

2. Якщо на відрізку $[a,b]$ функціональний ряд (2.1) рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на $[a,b]$, то його можна почленно інтегрувати в межах $[\alpha,\beta]$, де $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx\,.$$

3. Якщо функціональний ряд (2.1) збіжний на відрізку $[a,b]$, а його члени мають неперервні похідні $u_n'(x)$, $x\in[a,b]$, $n=1,2,\dots$, причому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

рівномірно збіжний на $[a,b]$, то заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)\ ,\ \ x\in[a,b]\,.$$

Таким чином, всі збіжні функціональні ряди поділяються за характером збіжності на рівномірно збіжні і нерівномірно збіжні. Рівномірно збіжні ряди мають ряд властивостей, які дають змогу ефективно використовувати їх при наближених обчисленнях. У цьому полягає практична перевага рівномірно збіжних рядів перед нерівномірно збіжними.

Для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність користуються такою достатньою умовою рівномірної збіжності.

Теорема (ознака Вейєрштрасса). Функціональний ряд (2.1) абсолютно і рівномірно збіжний на відрізку $[a,b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2.3)$$

такий, що

$$|u_n(x)|\le a_n\ ,\quad \forall x\in[a,b]\,, n=1,2,\dots\,. \quad (2.4)$$

Приклад. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$\frac{\cos x}{1^3}+\frac{\cos 2x}{2^3}+\dots+\frac{\cos nx}{n^3}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\,.$$

Розв’язання. Скористаємось ознакою Вейєрштрасса. Оскільки при $x\in(-\infty,+\infty)$ і $n\in N$

$$\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}\ \text{ і ряд }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

збіжний (як узагальнений гармонічний ряд з $\alpha=3>1$), то заданий функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі.

2.2. Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду.

Означення. Степеневим рядом, називається функціональний ряд вигляду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ,\quad (2.5)$$

де a_0 , a_1 , ..., a_n , ... — дійсні числа, які називаються коефіцієнтами ряду.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$, де x_0 — дійсне число, називають функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n . \quad (2.6)$$

Ряд (2.6) заміною змінної $x - x_0 = t$ зводиться до ряду вигляду (2.5), тому надалі розглядатимемо лише степеневі ряди вигляду (2.5).

Всякий степеневий ряд вигляду (2.5) збіжний в точці $x = 0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Детальніші відомості про область збіжності ряду (2.5) дістанемо з наступної, дуже важливої в теорії рядів теореми.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (2.5) збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо при $x = x_1$ ряд (2.5) розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду. Дійсно, якщо x_0 — точка збіжності ряду (2.5), то весь інтервал $(-|x_0|;\ |x_0|)$заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 2.2).

Рис. 2.2.

Якщо x_1 — точка розбіжності ряду (2.5), то вся нескінченна напівпряма $(-\infty;\ -|x_1|)$ зліва від точки $-|x_1|$ і вся нескінченна напівпряма $(|x_1|;\ +\infty)$ справа від точки $|x_1|$ (рис. 2.3) складається з точок розбіжності цього ряду.

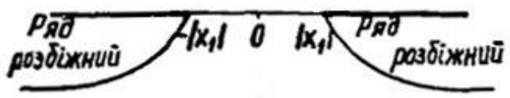


Рис. 2.3.

Отже, для області збіжності степеневого ряду можливі три випадки: 1) ряд (2.5) збіжний лише в точці $x = 0$; 2) ряд (2.5) збіжний при всіх $x \in (-\infty, +\infty)$; 3) існує таке скінченне число $R \in (0, +\infty)$, що при $|x| < R$ степеневий ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ — розбіжний (рис. 2.4).

Рис. 2.4.

Число R називають радіусом збіжності степеневого ряду, а інтервал $(-R, R)$ — інтервалом збіжності.

Вкажемо спосіб визначення радіуса збіжності степеневого ряду. Складемо ряд із модулів членів ряду (2.5):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| .$$

Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = L|x| \neq 0 \, , x \neq 0 \, .$$

Згідно з ознакою Д'Аламбера, ряд (2.5) є абсолютно збіжним при $L|x|<1$, або $|x|<\frac{1}{L}$, і розбіжним при $L|x|>1$, або $|x|>\frac{1}{L}$.

Отже, інтервал $\left(-\frac{1}{L},\frac{1}{L}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду (2.5), а число

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (2.7)$$

— його радіусом збіжності.

Аналогічно скориставшись ознакою Коші, можна встановити, що

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (2.8)$$

Зауваження 1. Неважко переконатись, що коли

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=+\infty \ \text{ або } \ L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0\,,$$

то ряд (2.5) є абсолютно збіжним на всій числовій осі. У цьому разі вважають $R=+\infty$. Якщо $L=+\infty$, то $R=0$, і степеневий ряд має лише одну точку збіжності $x=0$.

Зауваження 2. Питання про збіжність ряду при $x=\pm R$ (на кінцях інтервалу збіжності) розв'язується для кожного ряду окремо. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R,R)$ не більше ніж двома точками $x=\pm R$.

Зауваження 3. Радіус збіжності ряду (2.6) визначається за тими самими формулами (2.7) і (2.8), що і ряду (2.5). Інтервал збіжності ряду (2.6) знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$, тобто має вигляд (x_0-R,x_0+R).

Зауваження 4. На практиці інтервал збіжності степеневого ряду часто знаходять за ознакою Д'Аламбера або ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів заданого ряду.

Приклади. Знайти область збіжності рядів:

$$1.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(3n+1)!}.$$

Розв’язання. Скористаємося формулою (2.7). У нашому випадку $a_n=\frac{1}{(3n+1)!}$, а $a_{n+1}=\frac{1}{(3(n+1)+1)!}=\frac{1}{(3n+4)!}$, тому

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)!}{(3n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)(3n+1)!}{(3n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(3n+4)(3n+3)(3n+2)=+\infty\,.$$

Отже, даний ряд абсолютно збіжний на всій числовій осі.

$$2.\sum_{n=0}^{\infty}\big((5n+1)x\big)^n\,.$$

Розв’язання. Скористаємося формулою (2.8). У нашому випадку ряд можна записати у вигляді:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big((5n+1)x\big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(5n+1)^n x^n\,,$$

і отже $a_n=(5n+1)^n$, тому

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(5n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5n+1} = 0\,,$$

тобто даний ряд збіжний лише в точці $x = 0$.

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n+5}\,.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (2.7). У нашому випадку $a_n = \frac{1}{4n+5}$, а $a_{n+1} = \frac{1}{4(n+1)+5} = \frac{1}{4n+9}$, тому

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+9}{4n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{9}{n}}{4+\frac{5}{n}} = \frac{4+0}{4+0} = 1$$

отже, $(-1, 1)$ інтервал збіжності даного ряду. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = -1$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+5},$$

який є збіжним за ознакою Лейбніца. Покажемо це.

У нашому випадку

$$u_n = \frac{1}{4n+5}\,, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4n+9}\,.$$

Очевидно, всі три умови ознаки Лейбніца виконуються:

1) знаки членів даного ряду строго чергуються

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots + \frac{(-1)^n}{4n+5} + \cdots;$$

2) модулі його членів монотонно спадають

$$u_{n+1} = \frac{1}{4n+9} < u_n = \frac{1}{4n+5}\,, n = 1, 2, \dots;$$

3) n-й член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n+5} = 0\,.$$

тобто наш ряд збіжний за ознакою Лейбніца.

При $x = 1$ дістаємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+5} = \frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+5}.$$

Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+5}$ за граничною ознакою порівняння. У нашому випадку

$$u_n = \frac{1}{4n+5} > 0\,, \forall n \in N\,.$$

За v_n візьмемо вираз

$$v_n = \frac{1}{n} > 0\,, \forall n \in N\,.$$

Знайдемо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4+\frac{5}{n}}=\frac{1}{4+0}=\frac{1}{4}\,,\qquad \text{де } 0<\frac{1}{4}<+\infty\,.$$

Тоді за граничною ознакою порівняння ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+5}\ \text{ і }\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

або одночасно збіжні або одночасно розбіжні. Але ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

є гармонічним рядом. Він розбіжний. Тому розбіжним є наш ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+5}\ \text{, а відповідно розбіжний і ряд }\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+5}$$

Таким чином, областю збіжності нашого степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4n+5}$$

є проміжок $[-1;1)$.

$$4.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n^3}$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (2.7). У нашому випадку $a_n=\frac{1}{n^3}$, а $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^3}$, тому

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=(1+0)^3=1\,.$$

Інтервал збіжності ряду знаходимо з нерівності

$$|x-7|<1\ \Leftrightarrow\ -1<x-7<1\ \Leftrightarrow -1+7<x-7+7<1+7\ \Leftrightarrow 6<x<8\,.$$

Отже, даний ряд абсолютно збіжний на інтервалі $(6,8)$.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x=6$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$$

Розглянемо ряд утворений з модулів даного ряду, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,,$$

який є збіжним як узагальнений гармонічний (п. 1.3) з $\alpha=3>1$. Тоді збіжним є і наш початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$.

При $x = 8$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

про збіжність якого нам відомо з викладеного вище. Отже, областю збіжності даного ряду є відрізок $[6; 8]$.

2.3. Властивості степеневих рядів.

1. Степеневий ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[-\rho; \rho]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R, R)$.

З цієї властивості і властивостей 1—3 функціональних рядів (п. 2.1) випливають такі твердження.

2. Сума степеневого ряду (2.5) неперервна всередині його інтервалу збіжності.

3. Якщо межі інтегрування α та β лежать всередині інтервалу збіжності $(-R, R)$ ряду (2.1), то на відрізку $[\alpha; \beta]$ цей ряд можна почленно інтегрувати.

Зокрема, якщо ряд (2.5) інтегрувати по відрізку $[0; x]$, де $|x| < R$, то в результаті дістанемо степеневий ряд, який має той самий інтервал збіжності, що і ряд (2.5); при цьому, якщо $S(x)$ — сума ряду (2.5):

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

то

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_nx^ndx.$$

4. Якщо ряд (2.5) має інтервал збіжності $(-R, R)$, то ряд, утворений диференціюванням ряду (2.5), має той самий інтервал збіжності $(-R, R)$; при цьому, якщо $S(x)$ — сума ряду (2.5), то

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_nx^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}, \quad x \in (-R, R).$$

Таким чином, ряд (2.5) на відрізку $[0; x]$, де $|x| < R$, можна інтегрувати і диференціювати скільки завгодно раз в будь-якій точці $x \in (-R, R)$. При цьому інтервалом збіжності кожного ряду є той самий інтервал $(-R, R)$.

Сформульовані властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Розв’язання. Позначимо суму даного ряду через $S(x)$, тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots (-1)^n x^{2n} + \cdots.$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$. Знайшовши суму прогресії, дістанемо

$$S'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0; x] \subset (-1, 1)$, маємо

$$\int_0^x S'(x)dx = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots (-1)^n x^{2n} + \cdots)dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x = S(x)\,,$$

Звідки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = arctg\, x\,,\ \ |x| < 1\,.$$

2.4. Ряд Тейлора.

Досі ми вивчали властивості суми заданого степеневого ряду. Вважатимемо тепер, що функція задана, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти цей ряд.

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \qquad (2.9)$$

в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$. У цьому разі кажуть, що функція $f(x)$ розкладена в степеневий ряд в околі точки x_0 або за степенями $x - x_0$. Знайдемо коефіцієнти ряду (2.9). Для цього, згідно з властивістю 4° (п. 2.3), послідовно диференціюватимемо ряд (2.9) і підставлятимемо в знайдені похідні значення $x = x_0$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 +$$
$$+ a_4(x - x_0)^4 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots\ ,\quad f(x_0) = a_0;$$
$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 +$$
$$+ \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots\ ,\quad f'(x_0) = 1 \cdot a_1;$$
$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 +$$
$$+ \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots\ ,\quad f''(x_0) = 1 \cdot 2a_2;$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x_0) +$$
$$+ \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \cdots\ ,\quad f'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3;$$
$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1a_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_n(x - x_0)^{n-4} + \cdots\ ,$$
$$f^{(4)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4a_4;$$

....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_n + (n+1)n(n-1)(n-2) \cdots 2a_{n+1}(x - x_0) + \cdots\ ,$$
$$f^{(n)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1)na_n\ .$$

Звідси знаходимо коефіцієнти

$$a_0 = f(x_0), \qquad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}\,,\ \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}\,, \ldots,\ \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,, \ldots.$$

Підставивши значення цих коефіцієнтів у рівність (2.9), дістанемо

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots .$$

Ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots . \quad (2.10)$$

називається рядом Тейлора функції $f(x)$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ можна розкласти в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.

Нехай тепер $f(x)$ — довільна нескінченне число разів диференційовна функція. Складемо для неї ряд (2.10). Виявляється, що сума ряду (2.10) не завжди збігається з функцією $f(x)$. Інакше кажучи, ряд (2.10) може збігатися до іншої функції, а не до функції $f(x)$, для якої його формально складено. Встановимо умови, за яких сума ряду (2.10) збігається з функцією $f(x)$.

Теорема. Для того щоб ряд Тейлора (2.10) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$, тобто

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n \to \infty$ для всіх x з цього інтервалу:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\,, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R). \qquad (2.11)$$

Відомо, що для функції, яка має похідні всіх порядків, справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)\,, \qquad (2.12)$$

де

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \qquad (2.13)$$

— залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа.)

Таким чином, функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови: 1) вона має похідні всіх порядків; 2) залишковий член формули Тейлора (2.13) прямує до нуля при $n \to \infty$ і всіх $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Безпосередня перевірка цих умов нерідко виявляється непростою задачею. Сформулюємо теорему, яка дає досить прості достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M\,, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R), \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (2.14)$$

де $f^{(0)}(x) = f(x)$, то функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора.

2.5. Розкладання елементарних функцій в ряд Маклорена.

Рядом Маклорена функції $f(x)$ називають степеневий ряд по степенях x, який можна дістати з ряду (2.10) при $x_0 = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots \ . \qquad (2.15)$$

З п. 2.4 випливає таке правило розкладання функції в ряд: щоб функцію $f(x)$ розкласти в ряд Маклорена, потрібно:

а) знайти похідні $f'(x),\ f''(x)\,, \dots\,,\ f^{(n)}(x), \dots\,;$

б) обчислити значення похідних в точці $x = 0$;

в) записати ряд Маклорена (2.15) для даної функції і знайти інтервал його збіжності;

г) визначити інтервал $(-R,\ R)$, в якому залишковий член формули Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо такий інтервал існує (він може відрізнятись від інтервалу збіжності ряду (2.15)), то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума ряду Маклорена збігаються:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots.$$

Розглянемо ряди Маклорена деяких елементарних функцій (вони часто використовуються і тому їх варто запам'ятати):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\,, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\,, \quad x \in (-\infty; +\infty)\,;$$

$$(2.16)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + \cdots\,, \quad x \in (-1; 1]\,;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\,, \quad x \in [-1; 1]\,;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}\,x + \frac{m(m-1)}{2!}\,x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\,x^3 + \cdots +$$

$$(2.17)$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\,x^n + \cdots\,, \quad m \in R\,, \ x \in (-1; 1);$$

зокрема, якщо $m = -1$, маємо формули

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots\,, \ x \in (-1; 1)\,; \qquad (2.18)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\,, \qquad x \in (-1; 1)\,. \qquad (2.19)$$

Ряди (2.16) — (2.19) використовуються при знаходженні степеневих рядів для інших функцій.

Приклади.

1. Розкласти в ряд функцію $f(x) = x^3 \ln(1 - x^4)$.

Розв'язання. Поклавши у формулі (2.16) $-x^4$ замість x. маємо

$$ln(1 - x^4) = -x^4 - \frac{(-x^4)^2}{2} + \frac{(-x^4)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(-x^4)^n}{n} + \cdots =$$

$$= -x^4 - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{12}}{3} - \cdots - \frac{x^{4n}}{n} - \cdots, \quad x \in (-1; 1)$$

$$f(x) = x^3 \ln(1 - x^4) = x^3 \left(-x^4 - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{12}}{3} - \cdots - \frac{x^{4n}}{n} - \cdots \right) =$$

$$= -x^7 - \frac{x^{11}}{2} - \frac{x^{15}}{3} - \cdots - \frac{x^{4n+3}}{n} - \cdots, \quad x \in (-1; 1).$$

2. Розкласти в ряд по степенях x функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$.

Розв'язання. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}}$ Поклавши у формулі (2.17) $-x^3$ замість x, при $m = -\frac{1}{2}$ дістанемо

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} = (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^9 + \cdots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} x^{3n} + \cdots, x \in (-1; 1).$$

2.6. Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів.

1. Наближені обчислення значень функцій. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R,\ R)$ і $x_0 \in (-R,\ R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене — частинній сумі $S_{\mathrm{n}}(x_0)$. Похибку $|f(x_0) - S_{\mathrm{n}}(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $r_{\mathrm{n}}(x_0)$. Для рядів лейбніцевого типу

$$|r_{\mathrm{n}}(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + u_{n+3}(x_0) + \cdots| < |u_{n+1}(x_0)|.$$

Для знакозмінних і знакододатних рядів оцінювання величини $r_{\mathrm{n}}(x_0)$ є трохи складнішою процедурою.

Приклад. Обчислити значення $\cos 9^\circ$ з точністю до 0,001 .

Розв'язання. Скориставшись формулою (2.16) для $\cos x$ при $x = 9^\circ$ або $x = \frac{\pi}{20}$ маємо

$$\cos 9^\circ = \cos\frac{\pi}{20} = 1 - \frac{\pi^2}{20^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{20^4 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{20^{2n} \cdot (2n)!} + \cdots$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{\pi^2}{20^2 \cdot 2!} = \frac{\pi^2}{800} > 0{,}001, \qquad \frac{\pi^4}{20^4 \cdot 4!} = \frac{\pi^2}{160000 \cdot 24} < 0{,}001,$$

то з точністю до 0,001 маємо

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{\pi^2}{20^2 \cdot 2!} = 1 - \frac{\pi^2}{800} \approx 1 - 0{,}0123 = 0{,}9877 \approx 0{,}988.$$

2°. Наближене обчислення визначених інтегралів. Нехай потрібно знайти інтеграл

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx\,,$$

який або не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислень. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, що рівномірно збігається на деякому відрізку, то для обчислення заданого інтеграла можна скористатись властивістю про почленне інтегрування цього ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчислень значень функцій.

Приклад. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx\,.$$

Розв'язання. Формула Ньютона — Лейбніца тут не застосовна, тому що первісна від $\frac{\ln(1+x)}{x}$ в елементарних функціях не виражається.

Скориставшись рядом (2.16), маємо

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots$$

Тоді

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\cdots$$

Цей ряд рівномірно збіжний на $(-1;1]$, тому його можна почленно інтегрувати на будь-якому скінченному сегменті, зокрема на відрізку $[0;0{,}1]$:

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\int_0^{0,1}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\cdots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^6}{36}+\cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{10}}=$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{10^2\cdot 4}+\frac{1}{10^3\cdot 9}-\frac{1}{10^4\cdot 16}+\frac{1}{10^5\cdot 25}-\frac{1}{10^6\cdot 36}+\cdots$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{1}{10}>0{,}001\,,\qquad \frac{1}{10^2\cdot 4}=\frac{1}{400}>0{,}001\,,\quad \frac{1}{10^3\cdot 9}=\frac{1}{9000}<0{,}001\,,$$

то з точністю до 0,001 маємо

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx\approx\frac{1}{10}-\frac{1}{10^2\cdot 4}=\frac{1}{10}-\frac{1}{400}=\frac{39}{400}\approx 0{,}098\,.$$

Як уже зазначалось, первісна $F(x)$ для функції $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ не є елементарною функцією. Проте її легко знайти у вигляді степеневого ряду, проінтегрувавши ряд для функції $\frac{\ln(1+x)}{x}$ в межах від 0 до x:

$$F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\int_0^x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\cdots\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^6}{36}+\cdots,\quad x\in(-1;1]\,.$$

§ 3. Ряди Фур'є.

3.1. Гармонічні коливання.

У природі і техніці дуже поширені процеси, які через певні проміжки часу повторюються. Такі процеси називаються періодичними. Прикладами періодичних процесів можуть бути механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи в теорії пружності, акустиці, радіотехніці, електротехніці тощо.

Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій. Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається періодичною з періодом $T>0$, якщо вона визначена на всій числовій осі і для неї виконується рівність $f(x+T)=f(x)$, $x\in R$.

Періодична функція $x=f(t)$ зображає періодичний рух, або коливання точки, що має в момент часу t координату x.

Найпростішим коливанням є просте гармонічне коливання, яке, як відомо, задається функцією

$$x(t)=a\sin(\omega t+\varphi_0)\,,\quad t\ge 0, \qquad (3.1)$$

де a — амплітуда коливання; ω — циклічна частота; φ_0 — початкова фаза. Основним періодом функції (3.1) є $T=\frac{2\pi}{\omega}$; тобто одне повне коливання відбувається за проміжок часу $\frac{2\pi}{\omega}$.

Функція (3.1) та її графік називається простою гармонікою.

Просту гармоніку зображає також функція

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t\,. \qquad (3.2)$$

Дійсно,

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right)=$$

$$=a\sin(\omega t+\varphi_0)\,,$$

де $a=\sqrt{A^2+B^2}$, $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi_0$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\varphi_0$.

Коливання, утворені внаслідок накладання кількох простих гармонік, називають складними гармонічними коливаннями. Наприклад, функція

$$\varphi(t)=a_1\sin(t+\varphi_1)+a_2\sin(2t+\varphi_2)+a_3\sin(3t+\varphi_3)+\cdots+a_n\sin(nt+\varphi_n)$$

задає складне гармонічне коливання і є результатом накладання n простих гармонік. Перша з цих гармонік має період 2π, друга — $\frac{2\pi}{2}$, третя — $\frac{2\pi}{3}$ і т. д., n-а — $\frac{2\pi}{n}$, тому загальний період T функції $\varphi(t)$ дорівиює 2π.

Графік складного гармонічного коливання, яке складається з кількох простих гармонік, може значно відрізнятися від графіків цих гармонік.

Таким чином, накладанням простих гармонік можна дістати різноманітні періодичні коливання, які зовсім не схожі на прості гармонічні коливання.

Природно, постає обернена задача: чи не можна періодичний рух, заданий деякою періодичною функцією, подати як суму простих гармонік? Виявляється, що цього взагалі кажучи, зробити не можна, якщо обмежитися скінченною сумою простих гармонік. Якщо ж ввести нескінченні суми простих гармонік, тобто тригонометричні ряди, то практично кожну періодичну функцію можна розкласти на прості гармоніки.

3.2. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є.

Ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \cdots +$$

$$+a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (3.3)$$

називається тригонометричним рядом, а дійсні числа a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ — його коефіцієнтами. Вільний член в сумі (3.3) для зручності записують у вигляді $\frac{a_0}{2}$.

Припустимо, що ряд (3.3) на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ рівномірно збіжний до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (3.4)$$

Оскільки члени ряду (3.3) є неперервними функціями, то його сума $f(x)$ є також неперервною функцією (п. 2.1). Проінтегрувавши почленно ряд (3.4) на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin nx\,dx\right),$$

звідки

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx = \frac{a_0}{2}\,x|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2}\big(\pi - (-\pi)\big) = \frac{a_0}{2}(\pi + \pi) = a_0\pi\,,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,, \qquad (3.5)$$

Оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\sin n\pi - \sin(-n\pi)) = 0\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}(\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = 0\,.$$

Помножимо обидві частини рівності (3.4) на $\cos kx$ і проінтегруємо одержаний ряд почленно на відрізку $[-\pi;\ \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right) \qquad (3.6)$$

Проте

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = 0\,,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx = 0 \ \text{ при } \ k \neq n\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx = 0.$$

тому з рівності (3.6) при $k = n$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}a_n\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx\,)\,dx = \frac{1}{2}a_n\left(x+\frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_n\pi\,;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, \qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad (3.7)$$

Аналогічно, помноживши рівність (3.4) на $\sin kx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi;\ \pi]$, знайдемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx\right) \qquad (3.8)$$

Проте

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx = 0\,,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx = 0\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx = 0 \ \text{ при } \ k \neq n.$$

тому з рівності (3.8) при $k = n$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}b_n\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx\,)\,dx=\frac{1}{2}b_n\left(x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\,\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=b_n\pi\,;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\,,\qquad n=1,2,\ldots.\qquad(3.9)$$

Нехай $f(x)$ — інтегровна функція на відрізку $[-\pi;\ \pi]$. Числа a_0, a_n, b_n, які визначаються формулами (3.5), (3.7), (3.9), називаються коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$. Тригонометричний ряд (3.3), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають рядом Фур'є цієї функції і записують

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad(3.10)$$

Знак відповідності $\sim$ означає, що інтегровній на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ функції $f(x)$ поставлено у відповідність її ряд Фур'є.

Аналогічне явище спостерігалось і для рядів Тейлора (п. 2.4). Доведений вище результат можна тепер сформулювати так.

Теорема. Якщо функцію $f(x)$ можна подати на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду (3.10), то цей тригонометричний ряд єдиний і є рядом Фур'є для функції $f(x)$.

З'ясуємо умови, за яких знак відповідності у формулі (3.10) можна замінити знаком рівності, тобто, за яких ряд Фур'є функції є збіжним і має своєю сумою саме функцію $f(x)$.

Теорема. (достатня умова подання функції через її ряд Фур'є). Нехай періодична функція $f(x)$ з періодом 2π є кусково-монотонна і обмежена на відрізку $[-\pi;\ \pi]$. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ є збіжним на всій числовій осі. Сума $S(x)$ знайденого ряду дорівнює значенню функції $f(x)$ в усіх точках неперервності функції $f(x)$; якщо x_0 — точка розриву функції $f(x)$, то

$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\,,$$

тобто сума ряду Фур'є в точці x_0 дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь функції $f(x)$ в цій точці; в кінцевих точках відрізка $[-\pi;\ \pi]$ сума ряду Фур'є набуває значень

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\,.$$

Зауваження 1. Якщо ряд Фур'є збігається до функції $S(x)$, то ця функція 2π-періодична, бо такими є всі члени ряду (3.4). Тому, якщо ряд (3.4) збіжний до функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\ \pi]$, то він збігатиметься до цієї самої функції на всій числовій осі $(-\infty;\ +\infty)$; при цьому $f(x+2\pi)=f(x)$. Отже, функцію, задану на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ та періодично продовжену на всю числову пряму, можна подати через суму ряду Фур'є.

Зауваження 2. При періодичному продовженні функції $f(x)$, $x\in[-\pi;\ \pi]$ на всю числову вісь знайдена функція буде або неперервною в точках $\pm(2n-1)\pi$, $n\in N$, або розривною в цих точках. Неперервність можлива лише, якщо $f(-\pi)=f(\pi)$. У цьому випадку сума ряду Фур'є дорівнює $S(\pm(2n-1)\pi)=f(-\pi)=f(\pi)$. Якщо ж $f(-\pi)\neq f(\pi)$, то ми можемо залишити без зміни значення функції на проміжку $(-\pi;\ \pi]$ і періодично з періодом 2π продовжити її на всю числову вісь.

При цьому в точках $\pm(2n-1)\pi,\, n \in N$ можуть виникнути точки розриву першого роду, в яких сума ряду Фур'є дорівнює $S(\pm(2n-1)\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi) + f(\pi)\big)$.

Зауваження 3. Для довільної інтегровної 2π-періодичної функції $\varphi(x)$ виконується рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(x)\,dx$$

для будь-якого числа $\alpha \in (-\infty;\, +\infty)$. У зв'язку з цим коефіцієнти ряду Фур'є можна знайти, обчислюючи інтеграли (3.5), (3.7), (3.9) по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду, тобто

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin nx\,dx\,.$$

У випадку, коли 2π-періодична функція задана на проміжку $[0;2\pi]$, ці формули спрощують задачу знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є.

Зауваження 4. Умови, які накладаються на функцію $f(x)$ при розкладі її в ряд Фур'є, значно простіші, ніж при розкладі її в степеневий ряд. Дійсно, якщо функція розкладається в ряд Тейлора, то вона на всьому інтервалі збіжності є не тільки неперервною, а й скільки завгодно разів диференційовною. Для розкладу функції в ряд Фур'є у цьому зовсім немає потреби. Згідно з теоремою 2, достатньо, щоб лише функція була неперервною або навіть мала на відрізку скінченне число точок розриву першого роду.

Отже, клас функцій, які можна подати рядом Фур'є значно ширший, ніж клас функцій, які можна подати рядом Тейлора.

Зауваження 5. Якщо функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є, то частинні суми $S_n(x)$ цього ряду (по аналогії з многочленами Тейлора їх називають многочленами Фур'є) дають змогу знайти наближення цієї функції

$$f(x) \approx S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

Похибка цієї формули зменшується зі збільшенням числа n. Проте оцінити цю похибку набагато складніше, ніж для многочленів Тейлора.

При знаходженні розкладу функцій в ряд Фур'є зручно використовувати при нагоді наступну властивість визначеного інтеграла для парних і непарних функцій:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx\,,$$

коли $f(x)$ — парна функція; (3.11)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0\,,$$

коли $f(x)$—непарна функція.

Приклади.

1. Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну функцію $f(x) = \pi + x,\ -\pi < x \le \pi$.

Розв'язання. Задана функція кусково-монотонна на проміжку $(-\pi;\, \pi]$, тому її можна зобразити рядом Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є. Маємо

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left.\frac{(\pi+x)^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{(\pi+\pi)^2}{2}-\frac{1}{\pi}\frac{(\pi-\pi)^2}{2}=2\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nx\,dx=\begin{vmatrix} u=\pi+x & du=(\pi+x)'dx=dx \\ dv=\cos nx\,dx & v=\frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(\pi+x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin nx}_{\text{непарна}}\,dx\right)=\frac{1}{\pi n}\,2\pi\sin n\pi-0-0=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin nx}_{\text{непарна}}\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\sin nx}_{\text{парна}}\,dx=$$

$$=0+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin nx\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=-\frac{2}{\pi n}\pi\cos n\pi+0+\frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi+\frac{2}{\pi n^2}(\sin n\pi-\sin 0)=-\frac{2}{n}\cos n\pi+0=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

де

$$\sin n\pi=0,\ \ n\in N;\quad \cos n\pi=(-1)^n=\begin{cases}-1, & \text{при } n=2k-1,\\ \ \ 1, & \text{при } n=2k,\end{cases}\quad k\in N.$$

Таким чином, за формулою (3.4) ряд Фур’є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{2\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos nx+\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx\right)=$$

$$=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

або

$$f(x)=\pi+2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right).$$

Побудуємо графік даної періодичної функції $y=\pi+x$.

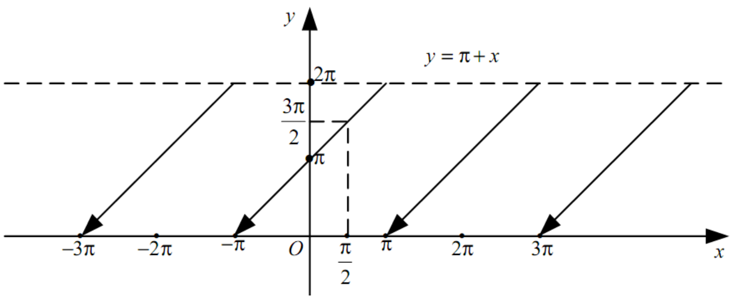


Рис 3.1.

Сума ряду Фур'є в точках неперервності функції дорівнює її значенню. Наприклад, в точці $x_0 = 0$ сума ряду $S(x_0) = \pi + 0 = \pi$. В точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$ сума ряду $S(x_0) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

В точках розриву, наприклад, в точці $x_0 = \pi$ сума ряду

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi-0} f(x) + \lim_{x\to\pi+0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi\,.$$

2. Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } x \in (-\pi;\ 0) \\ \ \ 2 \text{ при } x \in [0;\ \pi] \end{cases}.$$

Розв'язання. Знаходимо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-x|_{-\pi}^{0} + 2x|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(-\big(0-(-\pi)\big) + 2(\pi - 0)\Big) = \frac{1}{\pi}(-\pi + 2\pi) = 1\,.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(\sin 0 - \sin(-n\pi)) + \frac{2}{n}(\sin n\pi - \sin 0)\right) = 0\,.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(\cos 0 - \cos(-n\pi)) - \frac{2}{n}(\cos n\pi - \cos 0)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\big(1 - \cos n\pi - 2(\cos n\pi - 1)\big) = \frac{1}{\pi n}(3 - 3\cos n\pi) = \frac{3}{\pi n}(1 - (-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{6}{\pi(2k-1)}, & \text{при } n = 2k-1, \\ 0, & \text{при } n = 2k, \end{cases} \quad k \in N\,.$$

Таким чином, за формулою (3.4) ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\,.$$

або

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

Побудуємо графік даної періодичної функції $f(x)$.

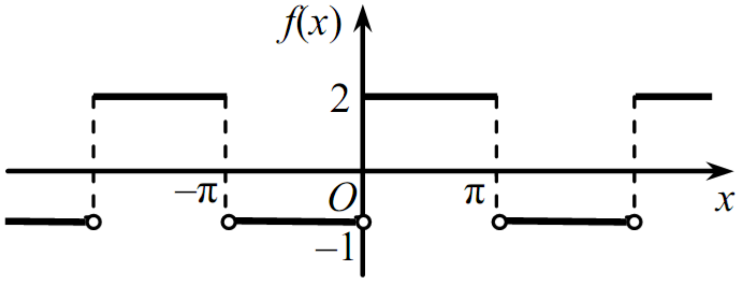


Рис 3.2.

Ця рівність виконується для всіх точок неперервності заданої функції, тобто для $x \neq \pi n, n \in Z$. У точках $x = \pi n$ сума ряду дорівнює півсумі односторонніх границь у цих точках, тобто

$$S(\pi n) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to\pi n-0} f(x) + \lim_{x\to\pi n+0} f(x)\Big) = \frac{1}{2}(-1+2) = \frac{1}{2}.$$

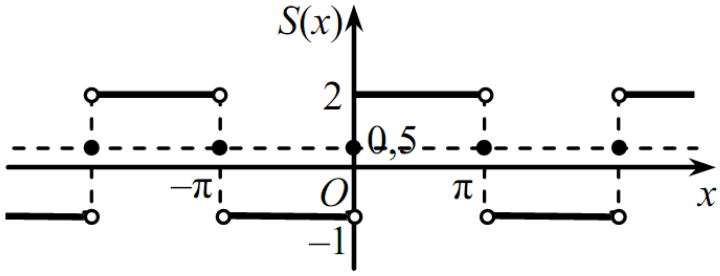


Рис 3.3.

3.3. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій.

Нехай функцію $f(x)$ можна подати на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ рядом Фур'є.

Покажемо, що, враховуючи формули (3.11) обчислення коефіцієнтів цього ряду спрощується, якщо функція $f(x)$ є парною, або непарною.

Якщо функція $f(x)$ парна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,, \qquad (3.12)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx\,, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (3.13)$$

Якщо функція $f(x)$ непарна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,, \qquad (3.14)$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,. \qquad (3.15)$$

Приклади.

1. Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну функцію $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ парна, то, користуючись формулами (3.12) і (3.13), дістанемо

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^\pi = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 0^2) = \pi\,,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\bigg|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left(\underbrace{\cos\pi n}_{\substack{\parallel\\(-1)^n}} - \underbrace{\cos 0}_{\substack{\parallel\\1}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2} & \text{при } n = 2k-1, \\ 0 & \text{при } n = 2k, \end{cases} \quad k \in N\,.$$

Тоді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right)\cos(2k-1)x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

Побудуємо графік даної періодичної функції $y = f(x) = |x|$.

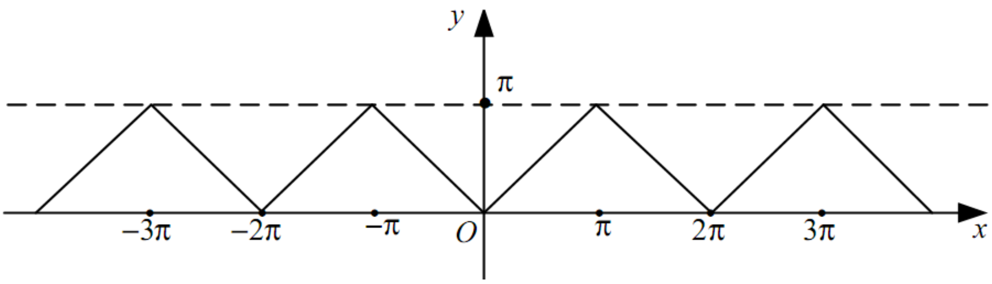


Рис 3.4.

2. Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну функцію $f(x) = x$, $-\pi \le x \le \pi$.
Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ непарна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,,$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx\,.$$

Тоді

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx\,dx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\bigg|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi + 0 + \frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_0^\pi\right) =$$

$$= -\frac{2}{n}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + \frac{2}{\pi n^2}\left(\underbrace{\sin n\pi}_{0} - \underbrace{0}_{0}\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n + 0 = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Тоді

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx =$$

$$= 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right).$$

3.4. Ряд Фур'є для $2l$-періодичної функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l;\ l]$ має період $2l$ (l -довільне додатне число) і є на відрізку $[-l;\ l]$ кусково-монотонною.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x = \frac{lt}{\pi}$ і розглянемо функцію $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$.

Ця функція-визначена на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ і є кусково-монотонною на ньому.

Розкладемо функцію $\varphi(t)$ на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ в ряд Фур'є:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \qquad (3.16)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt. \qquad (3.17)$$

Повернемось до змінної x. При $x = \frac{lt}{\pi}$, $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l}dx$ формули (3.16) і (3.17) набирають вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad (3.18)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \qquad (3.19)$$

Ряд (3.18) і є рядом Фур'є для функції $f(x)$ з періодом $2l$. Коефіцієнти цього ряду знаходять за формулами (3.19). Усі теореми, які справджуються для рядів Фур'є 2π-періодичних функцій, зберігаються і для рядів Фур'є $2l$-періодичних функцій. Зокрема, справедливими залишаються достатні умови для розкладу функції в ряд Фур'є (п. 3.2), зауваження про можливість обчислювати коефіцієнти ряду Фур'є, інтегруючи її по довільному відрізку, довжина якого дорівнює періоду (п. 3.2), а також особливості рядів Фур'є для парних і непарних функцій (п. 3.3).

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2$, задану на відрізку $[-3;\ 3]$ з періодом $T = 6$.

Розв'язання. Оскільки задана функція $f(x)$ неперервна на всій числовій осі, періодична з періодом $T = 2l = 6$ і парна, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{3}\ ,$$

де

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x^2\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3=\frac{2}{9}(3^3-0^3)=6\,,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x^2\cos\frac{\pi nx}{3}dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=(x^2)'dx=2xdx \\ dv=\cos\frac{\pi nx}{3}dx & v=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\pi n}x^2\sin\frac{\pi nx}{3}\bigg|_0^3-\frac{3}{\pi n}\int_0^3 2x\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right)=\frac{2}{\pi n}\cdot 3^2\cdot\underbrace{\sin\pi n}_{0}-0-\frac{4}{\pi n}\int_0^3 x\sin\frac{\pi nx}{3}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\frac{\pi nx}{3}dx & v=-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\end{vmatrix}=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{3}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{3}\bigg|_0^3+\frac{3}{\pi n}\int_0^3\cos\frac{\pi nx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{12}{\pi^2n^2}\cdot 3\cdot\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n}-0-\frac{12}{\pi^2n^2}\cdot\frac{3}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi nx}{3}\bigg|_0^3=\frac{36}{\pi^2n^2}(-1)^n-\frac{36}{\pi^3n^3}\left(\underbrace{\sin\pi n}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)=$$

$$=\frac{36}{\pi^2n^2}(-1)^n\,.$$

Тоді

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{3}=\frac{6}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{\pi^2n^2}(-1)^n\cos\frac{\pi nx}{3}=3+\frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{3}=$$

$$=3+\frac{36}{\pi^2}\left(-\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{3}+\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{3}-\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{3}+\frac{1}{4^2}\cos\frac{4\pi x}{3}-\cdots\right).$$

3.5. Ряди Фур'є для функцій заданих на відрізку $[0;\ l]$ або на відрізку $[a;\ b]$.

Нехай треба розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ задану на відрізку $[0;\ l]$. Ми можемо довільним способом продовжити функцію $f(x)$ на відрізок $[-l;\ 0]$, але так, щоб утворена на відрізку $[-l;\ l]$ нова функція збігалась з функцією $f(x)$ при $x\in[0;\ l]$ і була кусково-монотонною (покладемо, наприклад, $F(x)=0$ при $x\in[-l,0)$ і $F(x)=f(x)$ при $x\in[0;\ l]$).

Розклавши функцію $F(x)$ в ряд Фур'є на відрізку $[-l;\ l]$, дістанемо шуканий ряд Фур'є функції при $x\in[0;\ l]$.

Зокрема функцію $f(x)$ можна продовжити на відрізок $[-l;\ 0]$ як парним, так і непарним способом. У випадку парного способу продовження графік функції $F(x)$ $x\in[-l;\ l]$ буде симетричним відносно осі Oy (рис. 3.5), а її ряд Фур'є міститиме лише косинуси.

У випадку непарного способу продовження функцію $f(x)$ на відрізок $[-l;\ 0]$ графік функції $F(x)$ $x\in[-l;\ l]$ буде симетричним відносно точки $x=0$ (рис. 3.6), а її ряд Фур'є міститиме лише синуси.

Таким чином, якщо функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;\ l]$ можна розкласти в ряд Фур'є, то таких рядів існує безліч. Особливо важливими для застосування є розклади функції $f(x)$ в ряд синусів і ряд косинусів.

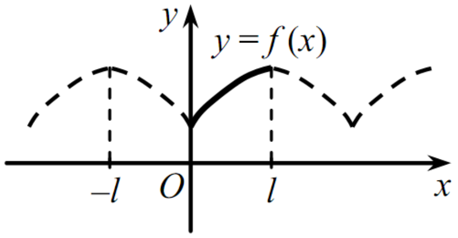


Рис 3.5.

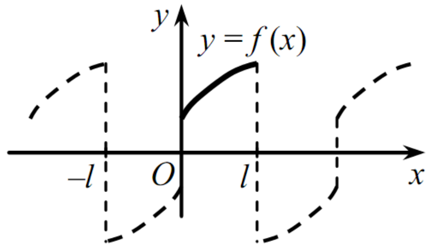


Рис 3.6.

Коли функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;\, b]$, де $a < b$, $0 < |a|$, $|b| < +\infty$, то задача подання такої функції через ряд Фур'є зводиться до розглянутої вище.

Приклади.

1. Функцію $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ розкласти в ряд косинусів на інтервалі $(0;\, \pi)$.

Розв’язання. Продовжуючи задану функцію парним чином, як показано на рис. 7 — пунктиром, маємо:

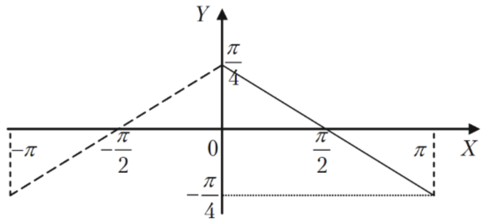


Рис 3.7.

Оскільки функція $f(x)$ стала парною, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \ ,$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx\,, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,.$$

Тоді

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} - 0\right) = 0\,,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = \pi - 2x & du = (\pi - 2x)'dx = -2dx \\ dv = \cos nx\,dx & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n}(\pi - 2x)\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\underbrace{\sin n\pi}_{\substack{\parallel \\ 0}} - \frac{\pi}{n}\underbrace{\sin 0}_{\substack{\parallel \\ 0}} - \frac{2}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n^2}\left(\underbrace{\cos n\pi}_{\substack{\parallel \\ (-1)^n}} - \underbrace{\cos 0}_{\substack{\parallel \\ 1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(2k-1)^2} & \text{при } n = 2k-1, \\ 0 & \text{при } n = 2k, \end{cases} \quad k \in N\,.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x =$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

2. Функцію $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ розкласти в ряд синусів на інтервалі $(0;\ \pi)$.

Розв’язання. Продовжуючи задану функцію непарним чином, як показано на рис. 3.8 — пунктиром, маємо:

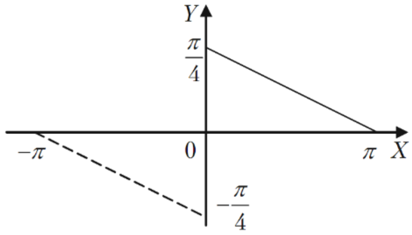


Рис 3.8.

Оскільки функція $f(x)$ стала непарною, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\ ,\qquad \text{де}\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\,.$$

Тоді

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\pi-x & du=(\pi-x)'dx=-dx\\ dv=\sin nx\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(\pi-x)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{n}\pi\underbrace{\cos 0}_{\parallel\atop 1}-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{\pi n^2}\left(\underbrace{\sin n\pi}_{\parallel\atop 0}-\underbrace{\sin 0}_{\parallel\atop 0}\right)=\frac{1}{n}.$$

Тоді

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots$$

ЗМІСТ