ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 22 травня 2024 р.
№ 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Частина 1

з навчальної дисципліни
«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності
121 «Інженерія програмного забезпечення»
освітньо-професійні програми «Інженерія програмного забезпечення» та
«Веб-технології»
факультет інформаційно-комп`ютерних технологій
кафедра інженерії програмного забезпечення

Рекомендовано на засіданні кафедри
інженерії програмного забезпечення
30 квітня 2024 р., протокол № 4

Розробник: к.ф.-м.н., доцент кафедри інженерії програмного забезпечення
ПРИЛИПКО Олександр

Житомир

2024

Конспект лекцій (частина 1) з навчальної дисципліни «Математичний аналіз» для студентів освітнього рівня «Бакалавр» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» – Житомир : Державний університет «Житомирська політехніка», 2024. – 72 с.

Розробник: ПРИЛИПКО Олександр

Рецензенти:

к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій у медицині та телекомунікаціях Нікітчук Т.М.;

к.пед.н., доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Сверчевська І.А.

Розглянуто і рекомендовано на засіданні кафедри інженерії програмного забезпечення. Протокол від 30 квітня 2024 р., № 4

І. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Математичний аналіз — це розділ математики, що пов’язаний з дослідженням функцій методами нескінченно малих.

Курс математичного аналізу містить такі розділи: вступ до аналізу, диференціальне числення, інтегральне числення і теорія рядів.

§1. ФУНКЦІЇ.

1.1. Множини.

Поняття множини є одним з фундаментальних у математиці, якому не можна дати строге означення. Інтуїтивно множину розуміють як сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об’єктів, об’єднаних за певною ознакою, характеристикою чи властивістю.

Прикладами множин може бути множина деталей, з яких складається даний прилад, множина поштових відділень даного міста, множина розв’язків даного рівняння, множина всіх цілих чисел тощо.

Об’єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи — малими. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$.

Запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика її елементів, коли про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні. Так, множині цілих чисел належить число 9, але не належить число 0,9.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається скінченною. Запис $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ означає, що множина A скінченна і містить s елементів. Множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s, \dots\}$, яка містить нескінченну кількість елементів, називається нескінченною. Так, множина слухачів в даній аудиторії — скінченна, а множина трикутників, які можна вписати в дане коло, — нескінченна.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\emptyset$.

Прикладом порожньої множини є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Нехай задано дві множини A і B. Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають підмножиною множини B і пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$ («A міститься в B» або «B містить A»), Наприклад, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел.

Очевидно, що кожна множина є своєю підмножиною і порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Якщо множини A і B містять одні і ті самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$ то їх називають рівними і пишуть $A = B$.

Визначимо деякі операції, які можна виконувати над множинами.

Множину C, яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або множині B, називають об'єднанням (сумою) множин A та B і позначають $C = A \cup B$ (рис. 1.1, а).

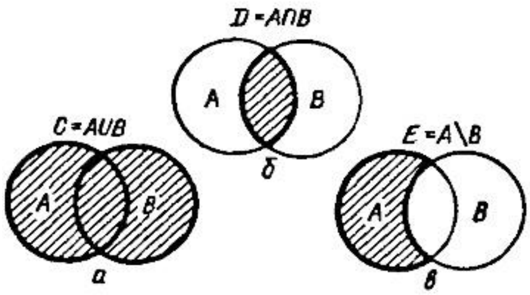


Рис 1.1.

Множину D, що складається з елементів, кожен з яких одночасно належить множинам A і B, називають перерізом (добутком) множин A та B і позначають $D = A \cap B$ (рис. 1.1, б).

Множину E, що складається з елементів, кожен з яких належить множині A і не належить множині B, називають різницею множин A та B і позначають $E = A \backslash B$ (рис. 1.1, в).

Квантори.

Загальноприйняті в математиці символи і позначення називають кванторами. В подальшому ми будемо використовувати наступні квантори:

$\Leftrightarrow$ − рівносильно,

$\Rightarrow$ − слідує,

$\exists$ − існує,

$\exists!$ − існує єдиний, єдина, єдине (в залежності від контексту),

$\forall$ − будь-який, довільний, всякий.

1.2. Сталі та змінні величини.

Величина — одне з основних математичних понять, зміст якого з розвитком математики змінювався і узагальнювався. Це поняття настільки широке і всеохоплююче, що його важко визначити. Маса, сила, тиск, напруга, довжина, об’єм, дійсне число, вектор — все це приклади величин.

На першій стадії під величиною розуміли те, що, виражаючись в певних одиницях (наприклад, довжина в метрах, маса — в грамах і т.д.), характеризується своїм числовим значенням.

Згодом величинами стали і такі поняття, як число, вектор та інші. Величини в деякому процесі можуть набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величина називається змінною, у другому — сталою.

Приклади.

1. Відношення довжини кола до його діаметра є величина стала для всіх кіл і дорівнює числу π.

2. Величина *x,* яка задовольняє умову $x \in [0; 1]$, є змінною величиною.

3. Якщо в різних місцях і на різних глибинах озера вимірювати одночасно тиск води і її густину, то виявиться, що тиск — змінна величина, а густину можна вважати величиною сталою.

У перших двох прикладах стала і змінна величини визначаються точно. У третьому випадку густина води, хоч і незначно, але змінюється, тому вона є сталою тільки з певною точністю. В багатьох реальних явищах можна вказати величини, які лише умовно будуть сталими.

Предметом вищої математики є вивчення змінних величин.

Стала величина вважається окремим випадком змінної: стала — це така змінна, всі значення якої рівні між собою.

Якщо величина набуває своїх значень дискретно (перервно), то її називають *послідовністю*. Якщо ж змінна величина набуває неперервних значень, то її просто називають змінною.

1.3. Означення функції.

Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом f поставлене у відповідність єдине число y з деякої числової множини Y, то кажуть, що задана функція $f: X \to Y$ або $y = f(x)$, $x \in X$.

Змінна x називається незалежною змінною, або аргументом, а змінна y — залежною змінною, або функцією; під символом f розуміють те правило, за яким кожному x відповідає

y, або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

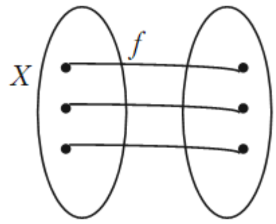


Рис 1.2.

Множина X називається областю визначення функції. Множина Y усіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in X$ називається множиною значень функції.

1.4. Способи задання функцій.

Основними способами задання функції є аналітичний, графічний і табличний.

При аналітичному способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції.

При графічному способі функція задається своїм графіком, тобто множиною точок площини з координатами $(x; f(x))$.

Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов'язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певні функції, які характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Табличний спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2, \dots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \dots, y_n$.

1.5. Класифікація елементарних функцій.

Основними елементарними функціями називаються такі:

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$. Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення α.

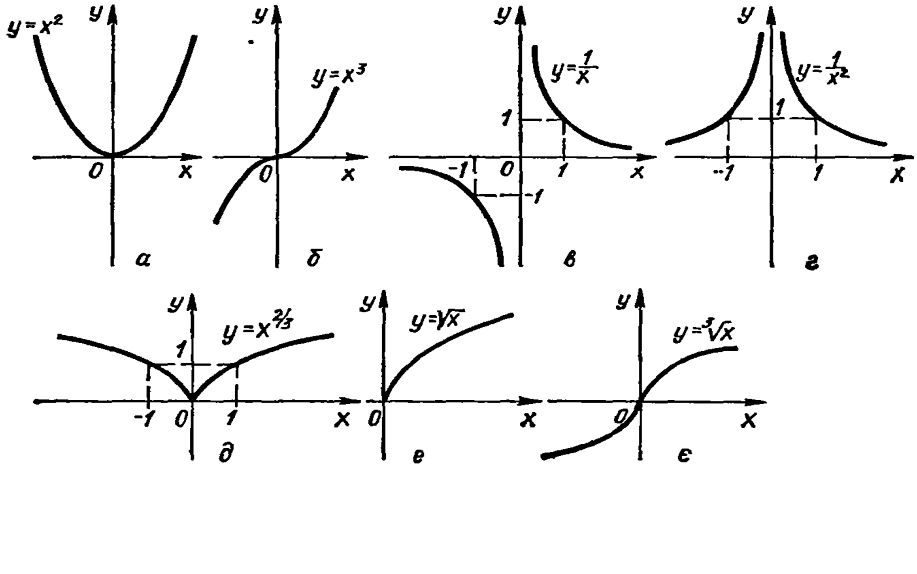


Рис 1.3.

2. Показникова функція $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.

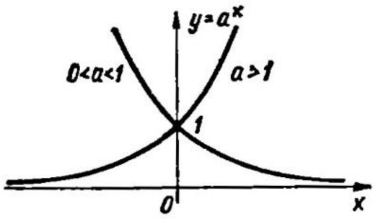


Рис 1.4.

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x\,, a > 0, a \neq 1$.

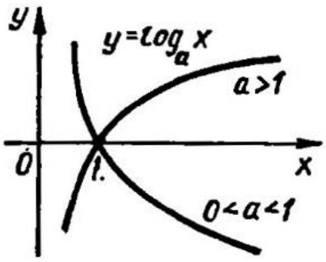


Рис 1.5.

4. Тригонометричні функції: $y = sin\,x,\, y = cos\,x,\, y = tg\,x,\, y = ctg\,x.$

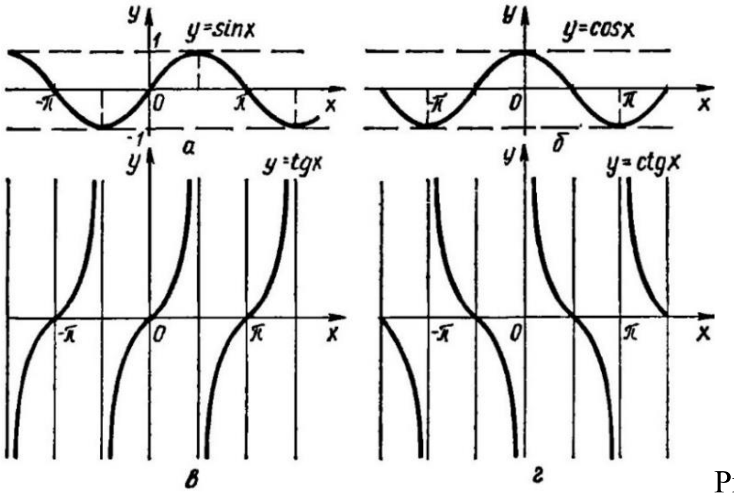


Рис 1.6.

5. Обернені тригонометричні функції: $y = arcsin\,x,\, y = arccos\,x,\, y = arctg\,x,\, y = arcctg\,x.$

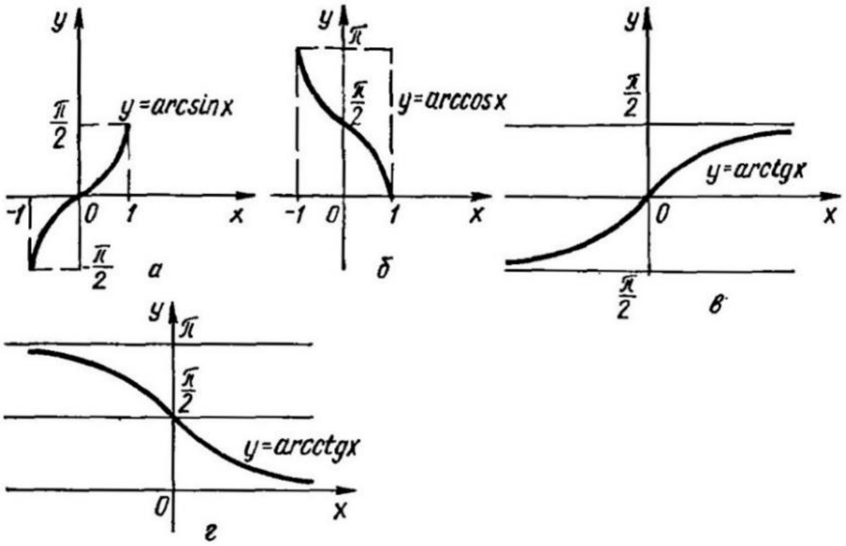


Рис 1.7.

1.6. Складена функція (суперпозиція функцій).

Над функціями виконують і так звану операцію суперпозиції, або накладання. Нехай функція $z = g(y)$ визначена на множині Y, а функція $y = f(x)$— на множині X, причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $y = f(x) \in Y$. Тоді на множині X визначена функція $g\big(f(x)\big)$, яку називають складеною функцією від x, або суперпозицією заданих функцій, або функцією від функції.

Змінну $y = f(x)$ функції $z = g(y)$ називають проміжним аргументом, або внутрішньою функцією, а змінну $z = g(y)$ зовнішньою функцією.

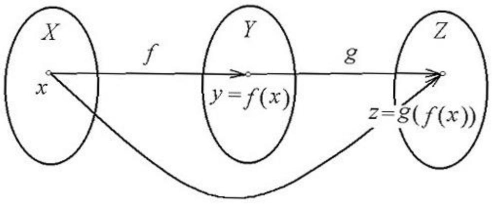


Рис 1.8.

Приклади.

1. Функція $y = \sqrt[5]{cos\ x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій— степеневої $y = \sqrt[5]{u}, u \in [—1; 1]$ та тригонометричної $u = \cos x, x \in (—\infty; +\infty)$.

Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

2. Функцію $y = 3^{sin\,x^7}$ можна розглядати як суперпозицію трьох функцій:
$y = 3^u, u \in [—1; 1], u = \sin v, v \in (—\infty; +\infty), v = x^7, x \in (—\infty; +\infty)$.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються елементарними.

Одним із прикладів представлення більш складних елементарних функцій є наступна функція:

$$y = \sqrt[9]{\frac{2^{arctg\,2x} - 7\,sin\,log_4\left(3x^2 - 5x + 4\right)}{6 + \left(tg\left(9x + ln\,x\right) - 8\,cos\,x\right)^3}}$$

1.7. Обмежені функції.

Означення. Функцію $f(x)$, визначену на множині A, називають обмеженою на цій множині, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$.

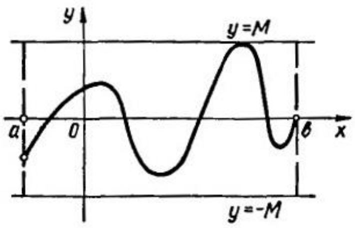


Рис 1.9.

1.8. Монотонні функції.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A. Якщо для двох довільних різних значень x_1 $і$ x_2 аргументу, взятих із множини A, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається зростаючою;

б) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається спадною;

в) $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція називається неспадною;

г) $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція називається незростаючою.

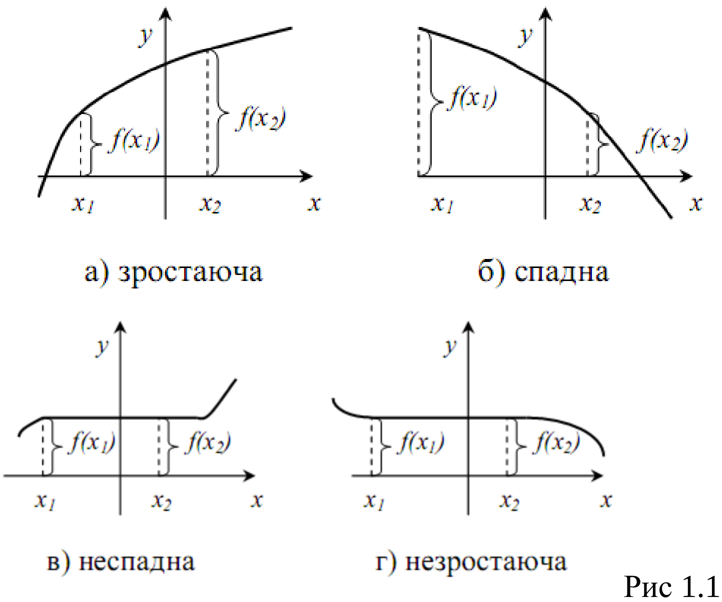


Рис 1.10.

1.9. Парні і непарні функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A точок осі Ox, розміщених симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in A$, то й $-x \in A$.

Означення. Функцію f(x) називають парною, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in A$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$.

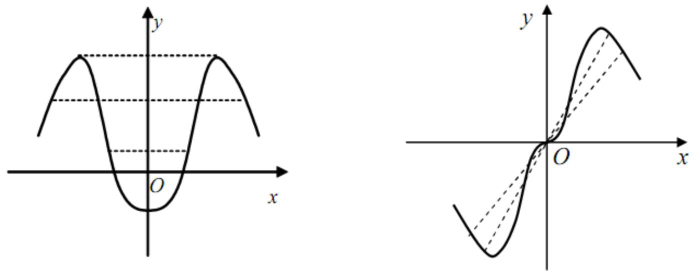


Рис 1.11.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат; графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функцію, що не є ні парною, ні непарною, називають функцією загального вигляду.

1.10. Періодичні функції.

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається періодичною, якщо існує таке число T, $f(x + T) = f(x)$. Число Т називається періодом функції. Якщо T — період функції, то її періодами є також числа kT, де $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається основним періодом функції.

Ми визначили періодичну функцію, задану на всій числовій прямій. Більш загальним є таке означення.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається періодичною на цій множині, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in X$ $і$ $f(x + T) = f(x)$, $x \in X$.

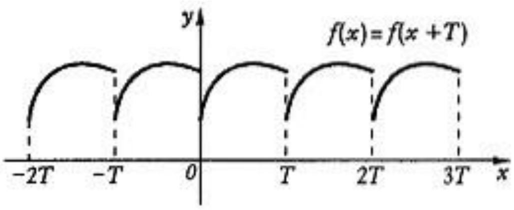


Рис 1.12.

1.11. Неявно задані функції.

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $f(x) - y = 0$, але не навпаки. Наприклад, функцію $\cos y - y^2 \sin x + xy = 0$ явно записати не можна, бо це рівняння не можна розв'язати відносно y. Тому неявна форма запису функції більш загальна, ніж явна. Неявно задану функцію називають неявною.

1.12. Обернені функції.

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y. Функція $f(x)$ кожному значенню $x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$ (рис. 1.13). При цьому може виявитись, що різним значенням аргументу x_1, i x_2 відповідає одне й те саме значення функції y_1 (рис. 1.14). Додатково вимагатимемо, щоб функція $f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y. Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = \varphi(y)$ з областю визначення Y і множиною значень X. Ця функція називається оберненою функцією до даної.

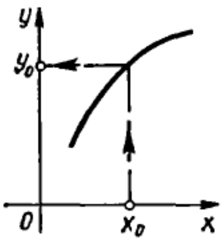


Рис 1.13.

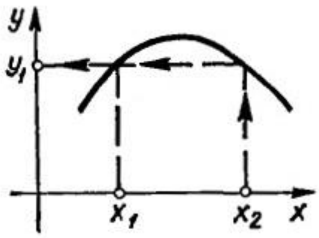


Рис 1.14.

Отже, функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо:
1) областю визначення функції φ є множина значень функції f;
2) множина значень функції φ є областю визначення функції f;
3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ i $x = \varphi(y)$ може бути названа прямою або оберненою, тобто ці функції взаємно обернені.

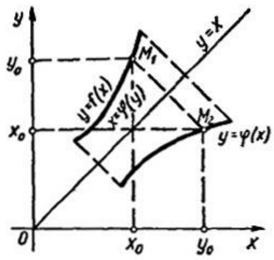


Рис 1.15.

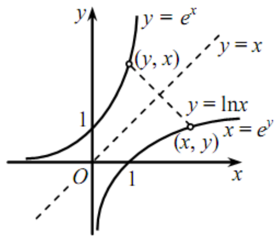


Рис 1.16.

§ 2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ.

2.1. Числова послідовність.

Означення. Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ називають числовою послідовністю (або коротко послідовністю) і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називають членами або елементами послідовності: x_1— перший член послідовності, x_2 — другий і т. д., x_n —n-й, або загальний член послідовності.

Послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена. Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена.

Очевидно, що всяка функція $y = f(n)$, задана на множині натуральних чисел N, визначає деяку числову послідовність $\{y_n\}$ з загальним членом $y_n = f(n)$.

Іншими словами послідовність – це функція натурального аргументу.

Приклади:

1. $\left\{\frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$ або $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots\right\}$.
2. $\{(-1)^n, n \geq 1\}$ або $\{-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$.

2.2. Границя послідовності.

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

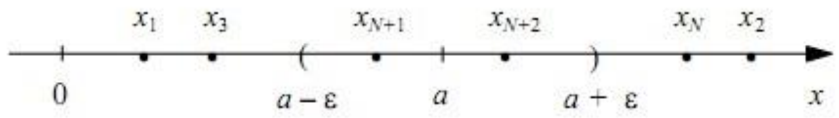


Рис 1.17.

Запис: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Теорема. Якщо границя послідовності існує, то вона єдина.

2.3. Границя змінної величини.

Означення. Число a називається границею змінної величини x, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого для всіх наступних значень x виконується нерівність $|x - a| < \varepsilon$.

Запис: $\lim\, x = a$ або $x \to a$.

2.4. Нескінченно великі змінні величини.

Якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке значення x', починаючи з якого всі наступні значення x задовольняють нерівність $|x| > M$, то кажуть, що змінна x прямує до нескінченності.

Запис: $\lim\, x = \infty$ або $x \to \infty$.

Якщо змінна $x \to \infty$, то її називають нескінченно великою змінною величиною.

2.5. Властивості нескінченно великих величин.

1. Сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є величина нескінченно велика.
2. Сума двох нескінченно великих величин одного знаку є нескінченно велика величина.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих величин різних знаків не завжди буде нескінченно великою величиною, тому ця сума називається невизначеністю виду $\infty - \infty$.

3. Добуток двох нескінченно великих величин є величиною нескінченно великою.
4. Добуток нескінченно великої величини на величину, що більша за абсолютним значенням деякого додатного числа, також є нескінченно велика величина.

Частка двох нескінченно великих величин не завжди є нескінченно великою величиною, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$.

2.6. Границя функції у точці.

Припустимо, що незалежна змінна x має границю x_0. Розглянемо зміну функції $y = f(x)$, при $x \to x_0$.

Нехай функція $y = f(x)$, визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення границі за Гейне. Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$, має границю, яка дорівнює числу A.

Запис: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Функція $f(x)$ може мати в точці x_0 тільки одну границю. Це випливає з того, що кожна змінна може мати лише одну границю.

Геометричний зміст границі функції: співвідношення $\mathop{lim}\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x досить близьких до точки x_0 відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від точки A.

З цим пов'язане друге означення границі. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення границі за Коші. Число A називається границею функції в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це означення коротко можна записати так:

$$(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \colon 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon) \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Геометрично це ілюструється так: число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного ε-околу точки A знайдеться δ-окіл точки x_0 такий, що коли значення аргументу x взяти з множини $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε-околі точки A (рис. 1.18.).

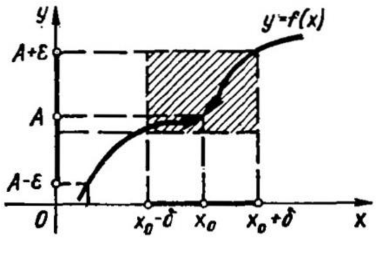


Рис 1.18.

2.7. Нескінченно малі величини.

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю. Зокрема, функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою величиною (або нескінченно малою функцією) при $x \to x_0$ або $x \to \infty$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \text{ або } \lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0.$$

2.8. Властивості нескінченно малих величин.

1. Для того щоб число А було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною, тобто

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

2. Якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала величина при $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$.

3. Сума скінченного числа нескінченно малих величин в величина нескінченно мала.

4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

2.9. Односторонні границі.

У деяких випадках спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести поняття односторонніх границь.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ зліва (або лівою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Означення. Число B називається границею функції $y = f(x)$ справа (або правою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.

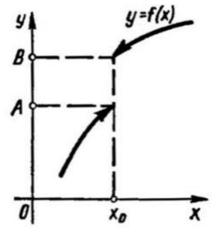


Рис 1.19.

Ліву і праву границі функції називають односторонніми границями і позначають

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B\ .$$

Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{x \to -0} f(x) = f(-0) = A \quad \lim_{x \to +0} f(x) = f(+0) = B.$$

2.10. Основні теореми про границі.

Теорема 1 (про границю суми, різниці, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$) і справедливі формули

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

Дана теорема справджується для алгебраїчної суми та добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають границю в точці.

Наслідки. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, то виконуються рівності:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x),\ c \in R$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^n$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = {x_0}^n$.

Приклад. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 3}(4x^2-5x+8)$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)=4x^2-5x+8$ $\big(D(f)=(-\infty,+\infty)\big)$ є елементарною, то підставивши в аналітичний вираз функції замість аргументу x його граничне значення 3, одержимо

$\lim\limits_{x\to 3}(4x^2-5x+8)=4\cdot 3^2-5\cdot 3+8=36-15+8=29.$

Теорема 2 (про границю проміжної функції). Нехай в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, визначені функції $\varphi(x)$, $f(x)$ *і* $\psi(x)$ і виконуються нерівності

$$\varphi(x)\le f(x)\le \psi(x)$$

Тоді, якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ мають в точці x_0 *одну й ту саму границю* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$, то таку саму границю має функція $f(x)$*:* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

§3. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ.

3.1. Важливі границі.

3.1.1. Перша важлива границя:

В даному випадку ми маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

Наслідки:

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\qquad 2.\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad 3.\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\qquad 4.\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1\,.$$

Приклади. 1. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\sin 9x}{9x}=9\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}=9\cdot 1=9\,.$$

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x}$**.**

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю:

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{x}{tg3x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3tg3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}\,.$$

Даний приклад можна також розв'язати іншим способом, розділивши одночасно і чисельник і знаменник дробу на x і далі використовуємо теорему про границю частки двох функцій.

3. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник та знаменник є нескінченно малими. Тому маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обчислимо цю границю. Для цього використаємо формулу: $1-cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$. Тоді

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=$$

$$=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

3.1.2. Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ або } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

В даному випадку ми маємо невизначеність виду (1^∞).

Приклади. 1. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+5}\right)^{2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5-5-4}{3x+5}\right)^{2-7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{3x+5}\right)^{2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{2-7x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{\frac{3x+5}{-9}\cdot\frac{-9}{3x+5}(2-7x)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(3x+5)/_{-9}}\right)^{\frac{3x+5}{-9}}\right]^{\frac{-9}{3x+5}(2-7x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{3x+5}(2-7x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63x-18}{3x+5}}=e^{21}.$$

Окремо знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63x-18}{3x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{63-\frac{18}{x}}{3+\frac{5}{x}}=\frac{63-0}{3+0}=21$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{5x}{3-x}}$.

Розв'язання. Дана границя має невизначеність виду 1^{∞} і обчислюється з використанням формули $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Для цього нам потрібно у прикладі перейти від границі при $x\to 3$ до границі при $x\to 0$, що можна зробити здійснивши заміну $y=x-3$:

$$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{5x}{3-x}}=\left|\begin{matrix}y=x-3,\\ x=y+3\end{matrix}\right|=\lim_{y\to 0}\big(7-2(y+3)\big)^{\frac{5(y+3)}{3-(y+3)}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}(7-2y-6)^{\frac{5y+15}{3-y-3}}=\lim_{y\to 0}(1-2y)^{\frac{5y+15}{-y}}=\lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{5y+15}{-y}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{1}{-2y}\cdot(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}}=\left[\lim_{y\to 0}\big(1+(-2y)\big)^{\frac{1}{-2y}}\right]^{(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{y\to 0}(-2y)\cdot\frac{5y+15}{-y}}=e^{2\lim\limits_{y\to 0}(5y+15)}=e^{2(5\cdot 0+15)}=e^{30}\,.$$

3.1.3. Розкриття деяких невизначеностей.

Як уже вказувалось, у найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0**.** Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

1) відношення двох нескінченно великих величин — невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$;

2) різниця двох нескінченно великих величин—невизначеність виду $\infty-\infty$;

3) добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику —невизначеність виду $0\cdot\infty$;

4) відношення двох нескінченно малих величин — невизначеність виду $\frac{0}{0}$;

5) якщо $\alpha_1(x)\to 0$ та $\alpha_2(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то вираз ${\alpha_1}^{\alpha_2}$ — невизначеність виду 0^0;

6) якщо $\alpha(x)\to 0,\ \beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз β^{α} — невизначеність виду ∞^0;

7) якщо $f(x)\to 1,\ \beta(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то вираз f^{β} — невизначеність виду 1^{∞} (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу f^{β}, де $f\to 1,\ \beta\to\infty$).

Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{n+4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на n:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{4}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1+\frac{4}{n}}=\frac{5}{1+0}=5\,.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-4x^2+8}{9x^3+3x-2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-4x^2+8}{9x^3+3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}+\frac{8}{x^3}}{\frac{9x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}}{9+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{6-0+0}{9+0-0}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-2x^3-7x}{3x^6+3x^2+2x-9}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^6:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-2x^3-7x}{3x^6+8x^2+4x-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^6}-\frac{2x^3}{x^6}-\frac{7x}{x^6}}{\frac{3x^6}{x^6}+\frac{8x^2}{x^6}+\frac{4x}{x^6}-\frac{9}{x^6}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{7}{x^5}}{3+\frac{8}{x^4}+\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x^6}}=\frac{0-0-0}{3+0+0-0}=\frac{0}{3}=0\,.$$

Застосований прийом є загальним: щоб розкрити невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник розділити на найвищий степінь x у цих многочленах.

2. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$.

Розв'язання. Підстановкою значення $x=1$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Спочатку розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

Розглянемо рівняння $2x^2+x-3=0$. Його коренями є числа $x_1=-\frac{3}{2}$ та $x_2=1$.

Покажемо це. Ми знаємо, що розв'язок рівняння $ax^2+bx+c=0$ можна знайти за формулами:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\,,x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\,,$$

де $D=b^2-4ac>0$. Тому маємо:

$$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot2\cdot(-3)=1+24=25=5^2\,,$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\cdot2}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2},x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot2}=\frac{4}{4}=1\,.$$

Тоді за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ маємо:

$2x^2+x-3=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)=(2x+3)(x-1)$.

Аналогічно, розв'язуємо рівняння $x^2+5x-6=0$:

$$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot1\cdot(-6)=25+24=49=7^2\,,$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{49}}{2\cdot1}=\frac{-12}{2}=-6,x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1\,.$$

одержимо $x_1=-6$, $x_2=1$ та представимо $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$. Тому

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to1}\frac{(2x+3)(x-1)}{(x+6)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+3}{x+6}=\frac{2\cdot1+3}{1+6}=\frac{5}{7}\,.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

Розв'язання. Підстановкою значення $x=2$ переконуємось, що маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Знаходимо границю розкладаючи чисельник та знаменник дробу на множники. Для цього спочатку розпишемо:

$$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)\,.$$

Тепер розглянемо рівняння $x^2-3x+2=0$. Його коренями є числа $x_1=1$ та $x_2=2$. Тоді $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Підставляємо знайдене в нашу границю і отримуємо:

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{2+2}{2-1}=\frac{4}{1}=4.$$

Це загальний прийом. Скорочення на $x-1$ тут можливе, тому що при визначенні границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ значення $x\neq x_0$.

Множник $x-x_0$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, іноді називають критичним множником.

3. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$.

Розв'язання. Тут невизначеність виду $\frac{0}{0}$, $x-3$ — критичний множник. Позбудемось від ірраціональності в чисельнику. Для цього множимо одночасно наш чисельник і знаменник на спряжений до чисельника вираз. В результаті отримаємо:

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=$$

(далі застосовуємо формулу $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7-16}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}=\frac{3+3}{\sqrt{3^2+7}+4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0{,}75\,.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{3x+4}}{2-\sqrt{3x-2}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Тоді множимо одночасно наш чисельник і знаменник на спряжені до чисельника і знаменника вирази:

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{3x+4}}{2-\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5x}-\sqrt{3x+4}\right)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{3x+4}\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(2-\sqrt{3x-2}\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{3x+4}\right)}$$

(далі застосовуємо формулу $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(5x-(3x+4)\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(4-(3x-2)\right)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{3x+4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(5x-3x-4)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}{(4-3x+2)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{3x+4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}{(6-3x)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{3x+4}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}{(-3)(x-2)\left(\sqrt{5x}+\sqrt{3x+4}\right)}=$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 2}\frac{2+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{5x}+\sqrt{3x+4}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{2+2}{\sqrt{10}+\sqrt{10}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{2\sqrt{10}}=$$

$$=-\frac{4}{3\sqrt{10}}=-\frac{4\sqrt{10}}{30}=-\frac{2\sqrt{10}}{15}.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x^2-11x-4}{4-\sqrt{x+12}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Тоді множимо одночасно наш чисельник і знаменник на спряжений до знаменника вираз:

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-11x-4}{4-\sqrt{x+12}}=\lim_{x\to 4}\frac{(3x^2-11x-4)\left(4+\sqrt{x+12}\right)}{\left(4-\sqrt{x+12}\right)\left(4+\sqrt{x+12}\right)}=$$

Далі розкладемо квадратний тричлен $3x^2-11x-4$ на множники. Для цього розв'яжемо рівняння $3x^2-11x-4=0$.

$$D=b^2-4ac=(-11)^2-4\cdot 3\cdot(-4)=121+48=169=13^2,$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{11-13}{2\cdot 3}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3},x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{11+13}{2\cdot 3}=\frac{24}{6}=4.$$

Тоді за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$:

$3x^2-11x-4=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-4)=(3x+1)(x-4)$.

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(3x+1)(x-4)\left(4+\sqrt{x+12}\right)}{16-(x+12)}=\lim_{x\to 4}\frac{(3x+1)(x-4)\left(4+\sqrt{x+12}\right)}{4-x}=$$

$$=-\lim_{x\to 4}(3x+1)\left(4+\sqrt{x+12}\right)=-(3\cdot 4+1)\left(4+\sqrt{4+12}\right)=-13\cdot 8=-104.$$

4. Невизначеності виду $\infty-\infty$ задані ірраціональними виразами.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)$

Розв'язання. Маємо невизначеність $(\infty-\infty)$. Тоді множимо і ділимо одночасно наш вираз на спряжений до нього вираз:

$$(\infty-\infty)\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+7-x}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x}}=\left(\frac{7}{\infty}\right)=0.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

Розв'язання. Маємо невизначеність $(\infty-\infty)$. Тоді множимо і ділимо одночасно наш вираз на спряжений до нього вираз:

$$(\infty-\infty)\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+x}+3x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+x-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x} =$$

(далі маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, тому поділимо чисельник і знаменник дробу на x)

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3} = \frac{1}{\sqrt{9+0}+3} = \frac{1}{6}$$

3.2. Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі функції при $x\to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0, \lim_{x\to x_0}\alpha_2(x)=0.$$

Введемо такі означення:

1) функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0, A\in R;$$

2) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0;$$

3) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty;$$

4) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою k-го порядку відносно $\alpha_2(x)$ при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{[\alpha_2(x)]^k} = A \neq 0, A\in R;$$

5) нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються непорівнянними при $x\to x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Введені означення охоплюють усі випадки, які можуть трапитись при порівнянні двох нескінченно малих функцій в околі точки x_0. Такі самі правила порівняння нескінченно малих при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ та при $x\to x_0\pm 0$.

Аналогічно порівнюються нескінченно великі величини.

Приклади.

1. Функції $\alpha_1(x)=x$, $\alpha_2(x)=tg\ 7x$ нескінченно малі одного порядку при $x\to 0$, тому що

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{tg\ 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{7x}{7tg\ 7x} = \frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{7x}{tg\ 7x} = \frac{1}{7}\cdot 1 = \frac{1}{7}.$$

2. Функція $\alpha_1(x) = x^3$ при $x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція $\alpha_2(x) = sin\, x$, тому що

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{sin\, x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{sin\, x} = 0 \cdot 1 = 0$$

Очевидно, функція $\alpha_2(x) = sin\, x$ при $x \to 0$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_1(x) = x^3$.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку особливу роль відіграють так звані еквівалентні нескінченно малі.

Означення. Функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x \to x_0$, називаються еквівалентними нескінченно малими, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.

Розглянемо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 1. Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

Теорема 2. Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \to x_0$. Якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$ і ці границі рівні між собою.

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченною малою, яка еквівалентна заданій. Часто зустрічаються, наприклад, такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$sin\, \alpha \sim \alpha, \alpha \to 0;\quad e^\alpha - 1 \sim \alpha, \alpha \to 0;$

$tg\, \alpha \sim \alpha, \alpha \to 0;\quad a^\alpha - 1 \sim \alpha\, lna, \alpha \to 0;$

$arcsin\, \alpha \sim \alpha, \alpha \to 0;\quad \log_a(1+\alpha) \sim \alpha \log_a e, \alpha \to 0;$

$arctg\, \alpha \sim \alpha, \alpha \to 0;\quad \ln(1+\alpha) \sim \alpha, \alpha \to 0;$

$1 - cos\, \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \alpha \to 0;\quad (1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha, \alpha \to 0, k > 0.$

Ці еквівалентності досить просто дістати за допомогою правила Лопіталя, яке ми вивчимо в подальшому курсі вищої математики.

Теорема 3. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\, 9x}{sin\, 3x}$.

Розв'язання. Оскільки $tg\, 9x \sim 9x$, $sin\, 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то за теоремою 2 дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\, 9x}{sin\, 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{9x}{3x} = \frac{9}{3} = 3\,.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{arctg\,(x-5)}{x^2-7x+10}$.

Розв'язання. Оскільки $arctg\,(x-5) \sim x-5$ при $x \to 5$ та $x^2 - 7x + 10 = (x-5)\,(x-2)$, то

$$\lim_{x\to 5}\frac{arctg\,(x-5)}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\,(x-2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{5-2}=\frac{1}{3}.$$

§ 4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу — поняття неперервності функції.

4.1. Неперервність функції в точці. Точки розриву.

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (4.1)$$

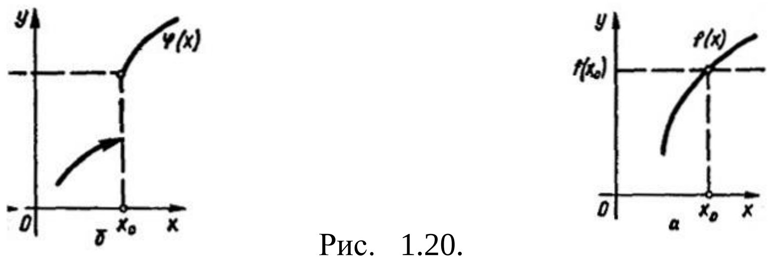


Рис. 1.20.

Якщо порівняти це означення з означенням границі функції $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, то при означенні границі функції число x_0 могло й не належати області визначення функції, а якщо число x_0 належало області визначення, то значення функції $f(x_0)$ в цій точці могло й не збігатися з границею A.

Таким чином, функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

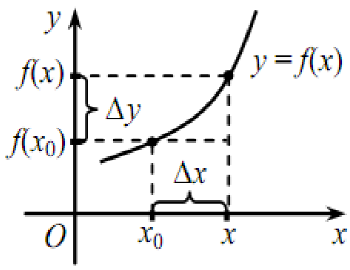
1) функція визначена в точці x_0 i в деякому околі цієї точки;

2) існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 і значення функції в цій точці x_0 збігаються, тобто виконується рівність (4.1).

Можна дати ще одне означення неперервності функції, опираючись на поняття приростів аргументу і функції.

Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y=f(x)$. Різниця $x-x_0$ називається *приростом аргументу* в точці x_0 і позначається через Δx («дельта x»):



$$\Delta x = x - x_0 \text{ або } x = x_0+\Delta x.$$

Рис. 1.21.

Різниця відповідних значень функції $f(x)-f(x_0)$ називається приростом функції в точці x_0 і позначається через Δy:

$$\Delta y=\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

Очевидно, приріст Δx може бути додатним або від'ємним числом, приріст Δy — довільним числом. Запишемо рівність (4.1) в нових позначеннях, для чого перенесемо в ній значення $f(x_0)$ в ліву частину і внесемо його під знак границі. Оскільки умови $x\to x_0$ і $x-x_0\to 0$ однакові, то рівність (4.1) набуває вигляду

$$\lim_{x-x_0\to 0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0 \text{ або } \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \qquad (4.2)$$

Рівність (4.2) і є ще одним означенням неперервності функції, яке можна сформулювати так.

Означення. Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$.

Часто зустрічається поняття односторонньої неперервності.

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 зліва, якщо вона визначена на півінтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0]$, де $\varepsilon > 0$ і $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0;\, x_0 + \varepsilon)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною в точці x_0 справа.

Використовуючи ці поняття, можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \quad (4.3)$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 називається точкою розриву функції.

Розрізняють такі види розривів. Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою, то розрив в точці x_0 називають розривом першого роду, точку x_0 — точкою розриву першого роду.

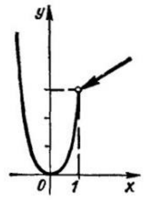


Рис. 1.22.

Зокрема , якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0),$$

то розрив в точці x_0 називають усувним, а точку x_0 — точкою усувного розриву. У цьому випадку досить довизначити функцію лише в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в точці x_0.

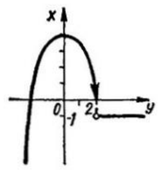


Рис. 1.23.

Якщо $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то розрив в точці x_0 називають неусувним, а точку x_0 — точкою неусувного розриву. Величину $\delta = |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ називають стрибком функції.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (4.3) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається розривом другого роду, а сама точка x_0 — точкою розриву другого роду.

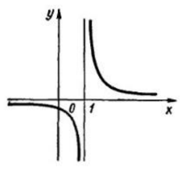


Рис. 1.24.

4.2. Дії над неперервними функціями. Неперервність елементарних функцій.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є функції

$$f(x) \pm g(x), f(x)\, g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (4.4)$$

(остання за умови, що $g(x) \neq 0$).

Теорема 2. Якщо функція $u = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f\big(g(x)\big)$ неперервна в точці x_0.

Теорема 3. Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Означення. Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Означення. Функція називається неперервною на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a; b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b.

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей.

Сформулюємо деякі з них.

Теорема 1. (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині відрізка $[a; b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює, нулю: $f(c) = 0, a < c < b$.

Геометричний зміст цієї теореми такий (рис. 1.25): неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею між якими є вісь Ox, перетинає цю вісь.

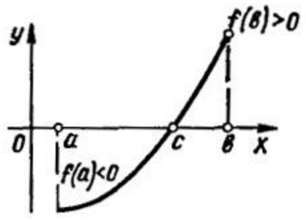


Рис. 1.25.

Теорема 2 (друга теорема Больцано — Коші). Нехай функція неперервна на відрізку $[a; b]$ і набуває, на його кінцях різних значень: $f(a) = A,\ f(b) = B,\ A \neq B$. Тоді для довільного числа $\mu \in (A; B)$ знайдеться таке число $c \in (a; b)$, що $f(c) = \mu$.

Отже, неперервна функція при переході від одного значення до другого набуває також всіх проміжних значень.

Зміст теореми 2 ілюструється на рис. 1.26.

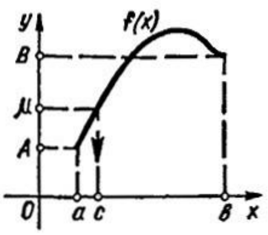


Рис. 1.26.

Теорема 3 (Вейєрштрасса). Якщо функція f(x) неперервна на відрізку $[a; b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше.

Отже, неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ досягає на цьому відрізку найбільшого значення $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ і найменшого значення $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ (рис. 4.8).

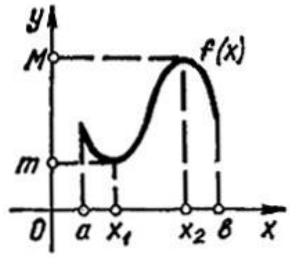


Рис. 1.27.

II. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Диференціальне числення — розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Деякі задачі диференціального числення розв’язані ще в давнину. Так, Евклід розв’язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім’я, а Аполлоній — дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь.

§1. Похідна.

Центральне поняття диференціального числення — похідна — широко використовується при розв’язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

Нехай на деякому інтервалі $(a; b)$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in (a; b)$ і надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала інтервалу $(a; b)$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

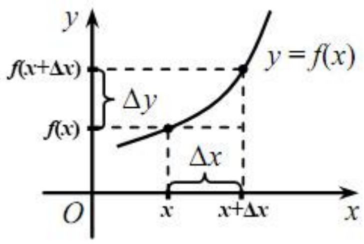


Рис. 2.1.

1.1. Означення похідної.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, якщо ця границя існує.

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y'_x.$$

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається одним із таких символів:

$$y'(x_0) = f'(x_0).$$

Приклад. Знайдіть за означенням похідну функції $y = cos\, x$.

Розв'язання. Запишемо приріст заданої функції $\Delta y = cos\,(x + \Delta x) - cos\, x$. Використовуючи першу важливу границю у вигляді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\, x}{\Delta x} = 1,$$

а також формулу розкладання різниці косинусів у добуток

$$cos\, \alpha - cos\, \beta = -2 sin\, \frac{\alpha - \beta}{2}\, sin\, \frac{\alpha + \beta}{2},$$

дістаємо

$$(cos\, x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\,(x + \Delta x) - cos\, x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\, sin\, \frac{\Delta x}{2}\, sin\, \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\, sin\, \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} sin\, \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot sin\, x = -sin\, x\, .$$

1.2. Механічний, фізичний та геометричний зміст похідної. Механічний зміст похідної:

Механічний зміст похідної:

Швидкість в даний момент часу — це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом t:

$$v = S'(t).$$

Фізичний зміст похідної:

Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. В цьому полягає фізичний зміст похідної. Інакше кажучи, яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни функції у відносно аргументу x, а похідну $f'(x)$ — миттєву швидкість зміни функції.

Геометричний зміст похідної.

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ або тангенс кута α, що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox,— це похідна $f'(x_0)$ в цій точці: $k = tg\alpha = f'(x_0)$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$: $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Оскільки кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов'язані між собою умовою перпендикулярності, то рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд:

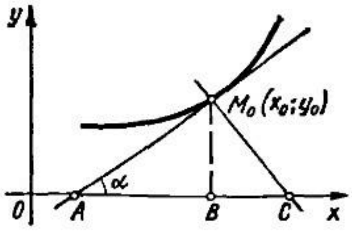


Рис. 2.2.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

1.3. Неперервність і диференційовність функцій.

Означення. Функція $f(x)$ називається диференційовною в точці x_0, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Означення. Функцію $f(x)$ називають диференційовною на інтервалі, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Зв'язок між неперервністю функції в точці і диференційовністю її в цій точці встановлює така теорема.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

§ 2. Диференціювання функцій.

2.1. Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки.

Теорема 1. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні в точці x, то сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці і справедливі такі формули:

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(u - v)' = u' - v';$$

$$(uv)' = u'v + uv'\,;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Теорема 2. Якщо $y = f(x) = C$, де C — стале число, то $f'(x) = C' = 0$.

Теорема 3. Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто $(Cu)' = Cu'$.

2.2. Гіперболічні функції.

У математиці, будівельній механіці, електротехніці та інших дисциплінах зустрічаються так звані гіперболічні функції.

Гіперболічними синусом $sh\,x$, косинусом $ch\,x$, тангенсом $th\,x$ і котангенсом $cth\,x$ називаються

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\; ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};\ cth\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Справедлива формула: $ch^2x - sh^2x = 1$.

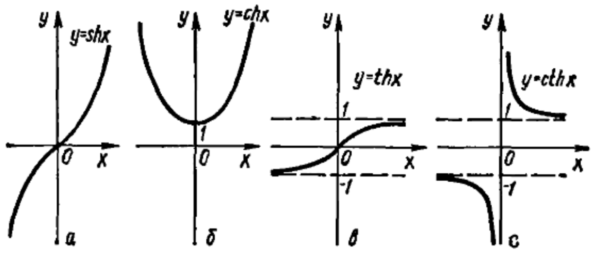


Рис. 2.3.

2.3. Похідна оберненої функції.

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ — пара взаємно обернених функцій.

Теорема 4. Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

2.4. Таблиця похідних.

1. $C' = 0$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$;
   2.1. При $\alpha = 1$ маємо $(x)' = 1$;
   2.2. При $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
   2.3. При $\alpha = -1$ маємо $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
3. $(a^x)' = a^x\, lna$, $a > 0$, $a \neq 1$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\, lna}$;
6. $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{cos^2x}$;
10. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{sin^2x}$;
11. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
12. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
13. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{ch^2x}$;
14. $(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2x}$;
15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
16. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
17. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
18. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклади. Знайти похідні функцій.

1. $y = 3x^5 - \frac{5}{x^4} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язання. $y' = \left(3x^5 - \frac{5}{x^4} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = 3(x^5)' - 5(x^{-4})' + 4\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 3 \cdot 5x^{5-1} -$

$$-5 \cdot (-4)x^{-4-1} + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = 15x^4 + 20x^{-5} - \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} = 15x^4 + \frac{20}{x^5} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x^5}}.$$

2. $y = 7^x \cdot \arccos x$

Розв'язання. За формулою похідної добутку двох функцій маємо

$$y' = (7^x \cdot \arccos x)' = (7^x)' \arccos x + 7^x \cdot (\arccos x)' =$$

$$= 7^x \cdot \ln 7 \cdot \arccos x + 7^x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 7^x \cdot \arccos x \cdot \ln 7 - \frac{7^x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y = \dfrac{x^7}{\cos x}$.

Розв'язання. За формулою похідної частки маємо

$$y' = \left(\frac{x^7}{\cos x}\right)' = \frac{(x^7)' \cos x - x^7 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{7x^6 \cos x - x^7(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{7x^6 \cos x + x^7 \sin x}{(\cos x)^2}.$$

4. $y = tg\, x$.

Розв'язання. За формулою похідної частки маємо

$$(tg\, x)' = \left(\frac{sin\, x}{cos\, x}\right)' = \frac{(sin\, x)' \, cos\, x - sin\, x\, (cos\, x)'}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{cos\, x\, cos\, x - sin\, x\, (-sin\, x)}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}.$$

5. Знайти $y'(0)$, якщо $y = (x^2+3) \cdot e^x$.

Розв'язання. За формулою похідної добутку двох функцій маємо

$$y' = \left((x^2+3) \cdot e^x\right)' = (x^2+3)' e^x + (x^2+3)(e^x)' = 2xe^x + (x^2+3) \cdot e^x =$$

$$= (x^2 + 2x + 3) \cdot e^x .$$

Тоді $y'(0) = (0^2 + 2 \cdot 0 + 3) \cdot e^0 = 3 \cdot 1 = 3$.

2.5. Похідна складеної функції.

Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$, тоді $y = f\big(\varphi(x)\big)$ — складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим x.

Теорема 5. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складена функція $y = f\big(\varphi(x)\big)$ має похідну y'_x в точці x і справедлива формула

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

Приклади. Застосовуючи правило диференціювання складеної функції, знайдіть похідні функцій.

1. $y = (x^3 - 5)^9$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = u^9$, де $u = x^3 - 5$. Шукаємо похідну за правилом диференціювання складеної функції:

$$y' = ((x^3-5)^9)' = 9(x^3-5)^{9-1}\,(x^3-5)' = 9(x^3-5)^8 \cdot 3x^2 = 27x^2(x^3-5)^8 .$$

2. $y = \sqrt[5]{x^6 - 3x^4 + 7}$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = \sqrt[5]{u}$, де $u = x^6 - 3x^4 + 7$. Тоді

$$y' = \left(\sqrt[5]{x^6 - 3x^4 + 7}\right)' = \left((x^6 - 3x^4 + 7)^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}(x^6 - 3x^4 + 7)^{\frac{1}{5}-1} \cdot (x^6 - 3x^4 + 7)' =$$

$$= \frac{1}{5}(x^6 - 3x^4 + 7)^{-\frac{4}{5}} \cdot (6x^{6-1} - 3 \cdot 4x^{4-1} + 0) = \frac{6x^5 - 12x^3}{5\sqrt[5]{(x^6 - 3x^4 + 7)^4}}.$$

3. $y = ln(x^8 + x)$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = ln\,u$, де $u = x^8 + x$. Тоді

$$y' = \left(ln(x^8 + x)\right)' = \frac{1}{x^8 + x} \cdot (x^8 + x)' = \frac{8x^7 + 1}{x^8 + x}.$$

4. $y = 3^{\operatorname{arctg} x}$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = 3^{\mathrm{u}}$, де $u = \operatorname{arctg} x$. Тоді

$$y' = (3^{\operatorname{arctg} x})' = 3^{\operatorname{arctg} x} \cdot \ln 3 \cdot (\operatorname{arctg} x)' = 3^{\operatorname{arctg} x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{3^{\operatorname{arctg} x} \cdot \ln 3}{1 + x^2},$$

або

$$y' = (3^{\mathrm{u}})' = 3^{\mathrm{u}} \cdot \ln 3 \cdot u' = 3^{\operatorname{arctg} x} \cdot \ln 3 \cdot (\operatorname{arctg} x)' = 3^{\operatorname{arctg} x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{3^{\operatorname{arctg} x} \cdot \ln 3}{1 + x^2}.$$

5. $y = ctg\,\sqrt{x}$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = ctg\,u$, де $u = \sqrt{x}$. Тоді

$$y' = \left(ctg\,\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{sin^2\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{sin^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\,sin^2\sqrt{x}},$$

або

$$y' = (ctg\,u)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot \mathrm{u}' = -\frac{1}{sin^2\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{sin^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\,sin^2\sqrt{x}}.$$

2.6. Похідна функції, заданої параметрично.

Функція може задаватися параметрично:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta.$$

Приклад. Рівняння кола радіуса R з центром в початку координат відоме: $x^2 + y^2 = R^2$. Параметрично воно запишеться так:

$$x = Rcos\,t, y = Rsin\,t, 0 \le t \le 2\pi.$$

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично у вигляді: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклади. 1. Знайти y'_x, якщо $x = Rcos\,t, y = Rsin\,t$.

Розв'язання. Оскільки $x'_t = -Rsin\,t, y'_t = Rcost$, то за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ отримаємо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{Rcos\ t}{-Rsin\ t} = -ctg\ t\ .$$

2. Знайдіть y'_x, якщо $\begin{cases} y = t^3 + 4t^5, \\ x = 8t - 3t^4. \end{cases}$

Розв'язання. Знаходимо похідні

$$y'_t = (t^3 + 4t^5)' = 3t^2 + 20t^4\ , x'_t = (8t - 3t^4)' = 8 - 12t^3\ ,$$

тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 + 20t^4}{8 - 12t^3}\ .$$

2.7. Диференціювання неявно заданої функції.

Нехай неявна функція $y(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклади.

1. Знайти похідну y', якщо $x^3 + y^4 - 5x + 3y = 1$.

Розв'язання. Маємо

$$(x^3 + y^4 - 5x + 3y)'_x = (1)'_x\ ,$$

$$3x^2 + 4y^3y' - 5 + 3y' = 0\ ,$$

$$y'(4y^3 + 3) = 5 - 3x^2\ ,$$

Звідки

$$y' = \frac{5 - 3x^2}{4y^3 + 3}.$$

Зауважимо, що при диференціюванні другого доданка ми скористалися правилом диференціювання складеної функції: $(y^4)'_x = (y^4)'_y\, y'_x = 4y^3y'$.

2. Знайдіть y' якщо $arctg\frac{y^2}{x} = ln\sqrt{y^4 + x^2}$.

Розв'язання. Послідовно маємо

$$\left(arctg\frac{y^2}{x}\right)'_x = \left(\frac{1}{2}ln(y^4 + x^2)\right)'_x, \frac{1}{1 + \left(\frac{y^2}{x}\right)^2}\left(\frac{y^2}{x}\right)'_x = \frac{1}{2(y^4 + x^2)}\ (y^4 + x^2)'_x\ ,$$

$$\left(\text{неважко помітити, що } 1 + \left(\frac{y^2}{x}\right)^2 = 1 + \frac{y^4}{x^2} = \frac{x^2 + y^4}{x^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{x^2 + y^4}\ \frac{2yy' \cdot x - y^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{4y^3y' + 2x}{2(y^4 + x^2)}\ , \qquad \frac{x^2}{x^2 + y^4}\ \frac{2xyy' - y^2}{x^2} = \frac{2y^3y' + x}{y^4 + x^2}\ ,$$

$$2xyy' - y^2 = 2y^3y' + x\ , \qquad y'(2xy - 2y^3) = x + y^2\ ,$$

звідси

$$y' = \frac{x + y^2}{2xy - 2y^3}\ .$$

2.8. Логарифмічне диференціювання функцій.

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається логарифмічним диференціюванням.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \frac{x^7(x^8+5)\, e^{2x}}{(x^2-1)\sqrt[4]{(6x-1)^3}}$.

Розв'язання. Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки. Проте такий спосіб дуже громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$lny = 7\,ln\,x + ln(x^8+5) + 2x - ln(x^2-1) - \frac{3}{4}ln|6x-1|\,;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{7}{x} + \frac{8x^7}{x^8+5} + 2 - \frac{2x}{x^2-1} - \frac{3}{4}\cdot\frac{6}{6x-1}\,;$$

$$y' = y\left(\frac{7}{x} + \frac{8x^7}{x^8+5} + 2 - \frac{2x}{x^2-1} - \frac{9}{2(6x-1)}\right);$$

$$y' = \frac{x^7(x^8+5)\, e^{2x}}{(x^2-1)\sqrt[4]{(6x-1)^3}}\left(\frac{7}{x} + \frac{8x^7}{x^8+5} + 2 - \frac{2x}{x^2-1} - \frac{9}{2(6x-1)}\right).$$

У розглянутому прикладі похідну можна знаходити двома способами: за допомогою відомих правил і формул диференціювання і логарифмічним диференціюванням. Проте існують функції, похідні яких знаходять лише логарифмічним диференціюванням. Прикладом такої функції є показниково-степенева функція. $y = u^v$, де u, v — задані і диференційовні функції від x. Знайдемо похідну функції:

$$ln\,y = ln\,u^v = v\,ln\,u\ ;\ (ln\,y)' = (v\,ln\,u)'\,;$$

$$\frac{y'}{y} = v'\,ln\,u + v\frac{u'}{u}\ ;\ y' = y\left(v'\,ln\,u + v\frac{u'}{u}\right);$$

$$y' = u^v\left(v'\,ln\,u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\,ln\,u\cdot v' + v\,u^{v-1}u'\,.$$

Отже, похідна показниково-степеневої функції $y = u^v$ дорівнює:

$$(u^v)' = u^v\,ln\,u\cdot v' + v\,u^{v-1}u'\,.$$

Приклад. Знайдіть похідну функції $y = x^{\mathrm{ctg}\,x}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$ln\,y = ln\,x^{ctg\,x};\ ln\,y = ctg\,x\cdot ln\,x\ ;\ (ln\,y)' = (ctg\,x\cdot ln\,x)'\,;$$

$$\frac{y'}{y} = (ctg\,x)'\,ln\,x + ctg\,x\,(ln\,x)'\,;\ y' = y\left(-\frac{1}{sin^2x}\,ln\,x + ctg\,x\,\frac{1}{x}\right);$$

$$y' = y\left(-\frac{ln\,x}{sin^2x} + \frac{ctg\,x}{x}\right),$$

тобто

$$y' = x^{ctg\,x}\left(-\frac{ln\,x}{sin^2x} + \frac{ctg\,x}{x}\right).$$

Другий спосіб. Скориставшись основною логарифмічною тотожністю $a^{log_a b} = b$, запишемо задану функцію у вигляді

$$y = x^{ctg\,x} = (e^{ln\,x})^{ctg\,x} = e^{ctg\,x\,ln\,x}.$$

Тоді

$$y' = (e^{ctg\,x\,ln\,x})' = e^{ctg\,x\,ln\,x}\,(ctg\,x\,ln\,x)' =$$

$$= e^{ctg\,x\,ln\,x}\left(-\frac{1}{sin^2x}\,ln\,x + ctg\,x\,\frac{1}{x}\right) = x^{ctg\,x}\left(-\frac{ln\,x}{sin^2x} + \frac{ctg\,x}{x}\right).$$

2.9. Зведена таблиця правил і формул диференціювання.

Вважатимемо, що $u = u(x)$, $v = v(x)$ — диференційовні функції, C — стала величина.

Правила диференціювання:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';\ y = f(u), u = u(x) \ \Rightarrow\ y'_x = y'_u \cdot u'_x\,;$$

$$(uv)' = u'v + uv'\,;\ y = f(x), x = \varphi(y) \Rightarrow\ y'_x = \frac{1}{x'_y}\,;$$

$$(Cu)' = Cu';\ x = x(t), y = y(t)\ \Rightarrow\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}\,;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\,;\ (u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v\,u^{v-1}u'.$$

Формули диференціювання:

1. $C' = 0$;
2. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in R$;

2.1. При $\alpha = 1$ маємо $(u)' = u'$;

2.2. При $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;

2.3. При $\alpha = -1$ маємо $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$;

3. $(a^u)' = a^u\,lna \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$;
4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u\,lna} \cdot u'$;
6. $(ln\,u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
9. $(\mathrm{tg}\,u)' = \frac{1}{cos^2u} \cdot u'$;
10. $(ctg\,u)' = -\frac{1}{sin^2u} \cdot u'$;
11. $(\mathrm{sh}\,u)' = \mathrm{ch}\,u \cdot u'$;
12. $(\mathrm{ch}\,u)' = \mathrm{sh}\,u \cdot u'$;
13. $(\mathrm{th}\,u)' = \frac{1}{ch^2u} \cdot u'$;
14. $(cth\,u)' = -\frac{1}{sh^2u} \cdot u'$;
15. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
16. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
17. $(\mathrm{arctg}\,u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
18. $(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

§ 3. Диференціал.

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної, і є одним з найважливіших в математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ. Будь-який процес протягом достатньо малого проміжку часу змінюється майже рівномірно, тому дійсний приріст величини, що характеризує процес, можна замінити диференціалом цієї величини на даному проміжку часу. Таку заміну називають лінеаризацією процесу.

3.1. Означення та геометричний зміст диференціала.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x \in [a; b]$, тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді з властивості 1 нескінченно малих функцій

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

звідки

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x. \qquad (3.1)$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx і при $\Delta x \to 0$ та $f'(x) \neq 0$ є нескінченно малою одного порядку з Δx, тому що:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = f'(x)\,.$$

Другий доданок — нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0\,.$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx, тобто містить Δx в степені, вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок у формулі (3.1) є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

Означення. Диференціалом dy функції $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \qquad (3.2)$$

Диференціал dy називають також диференціалом першого порядку.

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Тому формулу (3.2) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (3.3)$$

Геометричний зміст диференціала.

Геометричний зміст диференціала представлено на рис .2.4. В нашому випадку $PN = \Delta y, QN = MN \cdot tg\alpha = f'(x)\Delta x = f'(x)dx = dy$. Тому маємо, що диференціал функції $y = f(x)$ при заданих значеннях x і Δx рівний приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x. Приріст функції Δy при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином при достатньо малих значеннях Δx приріст функції наближено рівний її диференціалу.

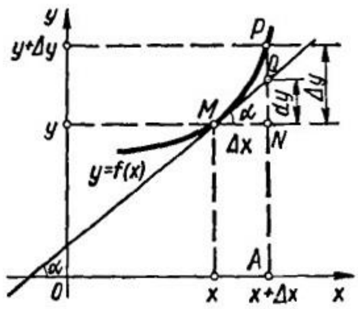


Рис. 2.4.

3.2. Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала.

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала можна легко дістати із відповідних властивостей похідної. Якщо, наприклад, u і v — диференційовні функції від x, C — стала, то маємо такі правила знаходження диференціалів:

$dC = 0$; $d(u \pm v) = du \pm dv$; $d(uv) = vdu + udv$;

$d(Cu) = Cdu$; $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Особливо важливий висновок випливає з правила диференціювання складеної функції. Нехай $y = f(x) = f\big(\varphi(t)\big)$ — складена функція з проміжним аргументом $x = \varphi(t)$ і кінцевим аргументом t, причому функції $f(x)$, $\varphi(t)$ диференційовні в точках x і t. Тоді існує похідна $y'_t = y'_x x'_t$, а отже, і диференціал

$$dy = y'_t dt = y'_x x'_t dt = y'_x dx. \tag{3.4}$$

Порівнюючи формули (3.3) і (3.4), бачимо, що перший диференціал функції $y = f(x)$ визначається за однією і тією самою формулою незалежно від того, чи змінна x є незалежною змінною, чи вона є функцією іншої змінної.

Цю властивість диференціала називають інваріантністю (незмінністю) форми диференціала.

Приклад. Знайдіть диференціал функції $y = \sqrt{x - x^3} - \ln\cos x$.

Розв'язання. Так як диференціал функції y дорівнює $dy = y'dx$, то спочатку знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\sqrt{x - x^3} - \ln\cos x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x - x^3}}(x - x^3)' - \frac{1}{\cos x}\,(\cos x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - x^3}}(1 - 3x^2) - \frac{1}{\cos x}\,(-\sin x) = \frac{1 - 3x^2}{2\sqrt{x - x^3}} + \operatorname{tg} x.$$

Тоді

$$dy = y'dx = \left(\frac{1 - 3x^2}{2\sqrt{x - x^3}} + \operatorname{tg} x\right)dx.$$

3.3. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.

Як уже зазначалось, приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy в цій точці: $\Delta y \approx dy$. Підставивши сюди значення Δy і dy, дістанемо

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,,$$

або

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{3.5}$$

Приклади.

1. Довести, що при малих значеннях Δx і $x > 0$ справедлива формула

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0;\ +\infty)$. Маємо $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ і шукана рівність $\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$ випливає з формули (3.5). Зокрема, якщо $x = 1$, то $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{2}$.

Наприклад,

$$\sqrt{1{,}06} = \sqrt{1 + 0{,}06} \approx 1 + \frac{0{,}06}{2} = 1{,}03\,;$$

$$\sqrt{0{,}98} = \sqrt{1 - 0{,}02} \approx 1 + \frac{(-0{,}02)}{2} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99\,;$$

$$\sqrt{68} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{64\left(1 + \frac{4}{64}\right)} = 8\sqrt{1 + \frac{1}{16}} \approx 8\left(1 + \frac{1}{32}\right) = 8 + \frac{1}{4} = 8{,}25\,.$$

2. Обчислити наближено $arctg$ 0,96.

Розв'язання. Нехай $f(x) = arctgx$, тоді за формулою (3.5) маємо

$$arctg(x + \Delta x) \approx arctgx + (arctgx)' \, \Delta x \, ;$$

$$arctg(x + \Delta x) \approx arctgx + \frac{\Delta x}{1 + x^2} \, .$$

Тоді

$$arctg\, 0{,}96 = arctg\,(1 - 0{,}04) \approx arctg\, 1 + \frac{(-0{,}04)}{1 + 1^2} = \frac{\pi}{4} - 0{,}02 \approx 0{,}766 \, .$$

В нашому випадку $x = 1, \ \Delta x = -0{,}04$.

§ 4. Похідні та диференціали вищих порядків.

4.1. Похідні вищих порядків явно заданої функції.

Нехай на інтервалі $(a; b)$ задана диференційовна функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо ще першою похідною (або похідною першого порядку), також є функцією від x. Може трапитись, що функція $f'(x)$ також має похідну на інтервалі $(a; b)$ або в деякій точці $x \in (a;\ b)$. Цю останню похідну називають другою похідною (або похідною другого порядку) і позначають одним із таких символів:

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Друга похідна має такий механічний зміст. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом $S = f(t)$, то похідна S', як було з'ясовано раніше, дорівнює швидкості точки в даний момент часу: $v = S' = f'(t)$. Оскільки прискорення — це похідна від швидкості, то $a = v' = S'' = f''(t)$.

Отже, другу похідну можна тлумачити як величину, що дорівнює прискоренню рухомої точки в даний момент часу.

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають третьою похідною, або похідною третього порядку, і позначають так:

$$y''', f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3f}{dx^3}, \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$) називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \text{ або } f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідні порядку вище першого називають похідними вищого порядку.

Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Порядок похідної береться в дужки для того, щоб не сплутати його з показником степеня.

Приклад. Знайти четверту похідну функції $y = x^7 + 5x^4 - 3x^2 - 5x + 8$.

Розв'язання. Маємо

$$y' = (x^7 + 5x^4 - 3x^2 - 5x + 8)' = 7x^6 + 20x^3 - 6x - 5 \, ;$$

$$y'' = (7x^6 + 20x^3 - 6x - 5)' = 42x^5 + 60x^2 - 6 \, ;$$

$$y''' = (42x^5 + 60x^2 - 6)' = 210x^4 + 120x \, ;$$

$$y^{(4)} = (210x^4 + 120x)' = 840x^3 + 120\,.$$

4.2. Похідні вищих порядків неявно заданої функції.

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівністю $F(x, y) = 0$. Диференціюючи цю рівність по x і розв'язуючи одержане рівняння відносно y', знайдемо першу похідну.

Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одну за одною послідовно похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад. Знайти y'', якщо $8x^3 - 3y^4 = 5$.

Розв'язання. Продиференціюємо задану рівність по x, вважаючи функцію у залежною від x, і знайдемо y':

$$(8x^3 - 3y^4)'_x = (5)'_x \Rightarrow 24x^2 - 12y^3y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{24x^2}{12y^3} = \frac{2x^2}{y^3}\,.$$

Далі маємо

$$y'' = \left(\frac{2x^2}{y^3}\right)'_x = 2\left(\frac{x^2}{y^3}\right)'_x = 2\frac{(x^2)'y^3 - x^2(y^3)'}{(y^3)^2} = 2\frac{2xy^3 - 3x^2y^2y'}{y^6} =$$

$$= \frac{4xy - 6x^2y'}{y^4} = \frac{4xy - 6x^2\frac{2x^2}{y^3}}{y^4} = \frac{4xy^4 - 12x^4}{y^7} = \frac{4x\frac{1}{3}(8x^3 - 5) - 12x^4}{y^7} =$$

(так як з умови задачі $y^4 = \frac{1}{3}(8x^3 - 5)$)

$$= \frac{4x(8x^3 - 5) - 36x^4}{3y^7} = \frac{32x^4 - 20x - 36x^4}{3y^7} = \frac{-4x^4 - 20x}{3y^7} = -\frac{4x^4 + 20x}{3y^7}\,.$$

4.3. Похідні вищих порядків параметрично заданої функції.

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \text{де } t \in (\alpha;\ \beta).$$

Якщо функції $x(t)$ *і* $y(t)$ мають перші похідні, причому $x'(t) \neq 0$, а $x(t)$ строго монотонна функція, то, як відомо (п. 2.6), першу похідну знаходять за формулою

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Якщо функції $x(t)$ *і* $y(t)$ мають похідні другого порядку, то можна знайти другу похідну від y по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)}.$$

Дійсно, диференціюючи першу похідну за правилом диференціювання складеної функції і використовуючи похідну оберненої функції, маємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t t'_x = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)}.$$

Аналогічно знаходять похідну будь-якого порядку $n > 2$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)'_t \frac{1}{x'(t)} .$$

Приклади.

1. Знайдіть $\frac{d^2 y}{dx^2}$, якщо $x = 5\,sin\,t,\ y = 7\,cos\,t,$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(7\,cos\,t)'_t}{(5\,sin\,t)'_t} = \frac{-7\,sin\,t}{5\,cos\,t} = -\frac{7}{5}\ tg\ t\ ;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)} = \frac{\left(-\frac{7}{5}\ tg\ t\right)'_t}{(5\,sin\,t)'_t} = \frac{-\frac{7}{5\,cos^2 t}}{5\,cos\,t} = -\frac{7}{25\,cos^3 t} .$$

2. Знайти $\frac{d^n y}{dx^n}$, якщо $x = ln\,t,\ y = t^5$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(t^5)'_t}{(ln\,t)'_t} = \frac{5t^4}{1/_t} = 5t^5\ ;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'(t)} = \frac{(5t^5)'_t}{(ln\,t)'_t} = \frac{25t^4}{1/_t} = 25t^5 = 5^2 t^5\ ;$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)'_t \frac{1}{x'(t)} = \frac{(25t^5)'_t}{(ln\,t)'_t} = \frac{125t^4}{1/_t} = 125t^5 = 5^3 t^5\ ;$$

……………………………………………………………………

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 5^n t^5 .$$

4.4. Диференціали вищих порядків.

Нехай маємо диференційовну на деякому проміжку функцію $y = f(x)$, де x — незалежна змінна. Тоді її перший диференціал або диференціал першого порядку

$$dy = f'(x)\,dx \qquad (4.1)$$

— це деяка функція від x і можна говорити про диференціал цієї функції.

Означення. Другим диференціалом $d^2 y$, або диференціалом другого порядку, називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2 y = d(dy) .$$

Оскільки dx не залежить від x, то при диференціюванні першого диференціала dx можна винести за знак похідної, тому

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x\,dx = f''(x)dxdx = f''(x)\,dx^2 .$$

Тут dx розглядається як єдиний символ (а не як добуток d на x), тому дужки в степені диференціала dx опускають, $(dx)^n = dx^n$:

$$d^2 y = f''(x)\,dx^2 . \qquad (4.2)$$

Третім диференціалом $d^3 y$, або диференціалом третього порядку, називається диференціал від другого диференціала:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)\,dx^3 . \qquad (4.3)$$

Взагалі, n-м диференціалом $d^n y$, або диференціалом n-го порядку, називається диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\, dx^n\,. \qquad (4.4)$$

Приклад. Знайти $d^4 y$, якщо $y = \cos 3x$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (4.4). Оскільки

$$y' = (\cos 3x)' = -3\sin 3x\,,\ \ y'' = (-3\sin 3x)' = -9\cos 3x\,,$$

$$y''' = (-9\cos 3x)' = 27\sin 3x\,,\quad y^{(4)} = (27\sin 3x)' = 81\cos 3x\,.$$

то

$$d^4 y = y^{(4)} dx^4 = 81\cos 3x\, dx^4\,.$$

§ 5. Деякі теореми диференціального числення.

5.1. Теореми Ферма і Ролля.

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці с цього інтервалу. Тоді, якщо в точці c існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, в якій $f'(c) = 0$.

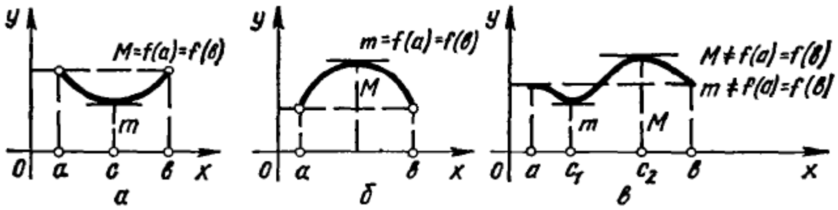


Рис. 2.5.

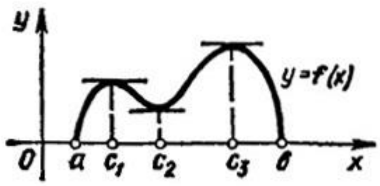


Рис. 2.6.

Геометричний зміст теореми Ролля: якщо функція задовольняє умови теореми Ролля, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі Ox.

5.2. Теореми Коші і Лагранжа.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовні в інтервалі $(a;b)$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in (a;b)$, то існує така точка $c \in (a;b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\,. \qquad (5.1)$$

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, в якій

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a). \qquad (5.2)$$

5.3. Правило Лопіталя.

У попередньому розділі ми ознайомились з деякими способами розкриття невизначеностей. Розглянемо ще один спосіб, який ґрунтується на застосуванні похідних.

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0\,,$$

і у вказаному околі $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження. Якщо похідні $f'(x)$ *і* $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то теорему 1 можна застосувати ще раз. При цьому дістанемо

$$\mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Взагалі, теорему 1 можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x \to x_0$. Цю саму границю матиме и відношення функцій:

$$\mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \mathop{lim}_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}\;.$$

Теорема 1 дає змогу розкривати невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Сформулюємо теорему, яка стосується розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty\,, \varphi'(x) \neq 0\,.$$

Тоді якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Виражене теоремами 1 і 2 правило обчислення границь називають правилом Лопіталя за іменем математика, який опублікував його. Але це правило відкрив І. Бернуллі, тому правило Лопіталя називають ще правилом Бернуллі — Лопіталя.

Приклади.

1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$, тому за правилом Лопіталя:

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{7x}-e^{3x})'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{7e^{7x}-3e^{3x}}{1} = \frac{7-3}{1} = 4.$$

2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$, тому за правилом Лопіталя:

$$\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2\,.$$

3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, тому за правилом Лопіталя:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{4x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^4} = 0\,.$$

Правило Лопіталя застосовується лише для розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називають основними. Відомі ще й такі невизначеності, як $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Покажемо, як ці невизначеності зводяться до основних.

а) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $0\cdot\infty$ можна звести до основних так:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\,\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right), \text{або } \lim_{x\to x_0}[f(x)\,\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{1/f(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Приклади.

1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)\,tg\,\frac{\pi x}{6}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, тому

$$\lim_{x\to 3}(3-x)\,tg\,\frac{\pi x}{6} = \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{ctg\,\frac{\pi x}{6}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)'}{\left(ctg\,\frac{\pi x}{6}\right)'} = \lim_{x\to 3}\frac{-1}{\left(-1/sin^2\,\frac{\pi x}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{\pi}\,.$$

2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to+0} x^3\,ln\,x$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, тому

$$(0\cdot\infty)\lim_{x\to+0} x^3\,ln\,x = \lim_{x\to+0}\frac{ln\,x}{1/x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{(ln\,x)'}{(1/x^3)'} = \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-3/x^4} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to+0} x^3 = 0\,.$$

б) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $\infty-\infty$ зводиться до невизначеності $\frac{0}{0}$:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1/\varphi(x) - 1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/\varphi(x)}\,.$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\,x - sec\,x)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Зведемо її до невизначеності $\frac{0}{0}$ після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$(\infty-\infty)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\,x - sec\,x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,x - \frac{1}{cos\,x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin\,x - 1}{cos\,x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(sin\,x-1)'}{(cos\,x)'}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos\,x}{-sin\,x} = \frac{0}{-1} = 0\,.$$

в) Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)\ln f(x)}$ і невизначеність виду 0^0 зводиться до невизначеності $0\cdot\infty$, розглянутої вище. Аналогічно розкриваються невизначеності 1^∞ і ∞^0.

Приклади.

1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 7x)^{tg\,4x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 0^0, тоді

$$(0^0)\ \lim_{x\to 0}(\sin 7x)^{tg\,4x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} tg\,4x\,\ln\sin 7x} .$$

Окремо знайдемо границю:

$$\lim_{x\to 0} tg\,4x\,\ln\sin 7x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 7x}{ctg\,4x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{7\,ctg\,7x}{-4/\sin^2 4x} = -\frac{7}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{tg\,7x} = -\frac{7}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(4x)^2}{7x} = 0 .$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}(\sin 7x)^{tg\,4x} = e^0 = 1 .$$

2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 8x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 1^∞, тоді

$$(1^\infty)\ \lim_{x\to 0}(\cos 8x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 8x} .$$

Окремо знайдемо границю:

$$(\infty\cdot 0)\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 8x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 8x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 8x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-8\sin 8x/\cos 8x}{2x} = -32\lim_{x\to 0}\frac{tg\,8x}{8x} = -32 .$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}(\cos 8x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-32} .$$

Таким чином, щоб розкрити невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0, їх треба спочатку звести до основних і лише після цього застосовувати правило Лопіталя.

5.4. Формула Тейлора.

Розглянемо одну з основних формул математичного аналізу, так звану формулу Тейлора, яка широко застосовується як в самому аналізі, так і в суміжних дисциплінах. Зупинимося лише на трьох застосуваннях.

В п. 3.3 ми бачили, що заміна приросту функції її диференціалом дає змогу утворювати різні наближені формули. Виявляється, що ці формули можна уточнити, якщо застосувати диференціали вищих порядків: про це і йдеться у формулі Тейлора.

Формула Тейлора дає змогу розробити простий аналітичний апарат для обчислення значень функції $y = f(x)$, які відповідають заданим значенням незалежної змінної x. Очевидно, що у випадках, коли функція задається формулою виду $y = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 9x - 7$, її значення обчислюється лише за допомогою чотирьох арифметичних дій. Але як знайти, наприклад, значення функції $y = \cos x$? Очевидно, цю задачу найпростіше можна «розв'язати» за допомогою калькулятора. Але ж калькулятор дає лише відповідь. А питання проте, які він при цьому виконує дії, залишається відкритим. Формула Тейлора і вказує, які арифметичні дії потрібно виконати над x, щоб одержати $\cos x$.

Іншими словами, формула Тейлора дає змогу зобразити дану функцію многочленом, що зручно для складання програм і обчислень цієї функції на комп'ютері.

Ще одне практичне застосування цієї формули пов'язане з обробкою числових експериментальних даних. Якщо в результаті експерименту одержано масив значень $(x_t,\ y_t)$, то спочатку будують графік залежності $y = f(x)$, а потім цю залежність описують аналітично, причому, як правило, у вигляді многочлена.

Обґрунтування можливості представляти функцію многочленом дає формула Тейлора.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 і в деякому її околі похідні до $(n+1)$-го порядку включно, і нехай x — довільне значення аргументу із вказаного околу $(x \neq x_0)$. Тоді між точками x_0 і x знайдеться така точка c, що справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) = \varphi(x, x_0) + R_n(x) \quad (5.3)$$

де

$$\varphi(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n ,$$

$$R_n(x) = f(x) - \varphi(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (5.4)$$

$$(c = x_0 + \theta(x - x_0)\,, 0 < \theta < 1)\,.$$

Формула (5.3) називається формулою Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0, а вираз (5.4) для $R_n(x)$ — залишковим членом у формі Лагранжа. Величина $R_n(x)$ показує, яку помилку ми робимо, замінюючи функцію $f(x)$ її многочленом Тейлора $\varphi(x, x_0)$ степеня n для функції $f(x)$.

При цьому формулу (5.4) можна використати для того, щоб оцінити величину $R_n(x)$ при $x \to x_0$ і фіксованому n, а також при $n \to \infty$.

Формулою Маклорена називають формулу Тейлора (5.3) при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1} \qquad (5.5)$$

де точка с знаходиться між 0 і x $(c = \theta x\,, 0 < \theta < 1)$.

Многочлени Тейлора дають найкраще наближення функції $f(x)$ у вигляді многочлена даного степеня поблизу точки x_0. Це треба розуміти так (рис. 2.7): серед усіх многочленів цього степеня, які збігаються з функцією при $x = x_0$, лише для многочлена Тейлора величина $|R_n(x)|$ виявляється найменшою.

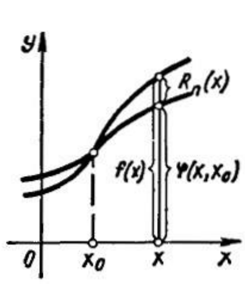


Рис. 2.7.

Наведемо розклади деяких елементарних функцій за формулою Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)\;;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)\;;$$

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)\,;$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + R_n(x)\,; \tag{5.6}$$

$$arctg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x)\,;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}\,x + \frac{m(m-1)}{2!}\,x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\,x^3 + \cdots +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\,x^n + R_n(x)\,, \tag{5.7}$$

зокрема, якщо $m = -1$, маємо формули

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x)\,,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + R_n(x)\,. \tag{5.8}$$

Приклад. Знайти формулу Маклорена для функції $f(x) = ln(1+x)$.
Розв’язання. Знаходимо значення даної функції і її похідних при $x = 0$*:*

$$f(x) = ln(1+x)\,, f(0) = ln1 = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1;\; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\,, f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1 = -1!;$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2 = 1\cdot 2 = 2!;$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}\,, f^{(4)}(0) = -\frac{6}{(1+0)^4} = -6 = -1\cdot 2\cdot 3 = -3!;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+0)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,.$$

Підставляючи значення похідних у формулу Маклорена, маємо

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\,.$$

§ 6. Застосування диференціального числення для дослідження функцій.

6.1. Монотонність функції.

Теорема 1 (достатні умови строгої монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ всюди, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких $f'(x) = 0$ на $(a;b)$, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $(a;b)$.

Теорема 2 (необхідна умова зростання). Якщо диференційовна на інтервалі $(a;b)$ функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на $(a;b)$.

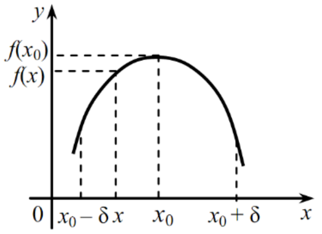
Приклад. Знайти інтервали монотонності функції $y = arctg\,x$.

Розв'язання. Областю визначення заданої функції є нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$. Похідна $y' = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ також існує на всій числовій осі, тому критичних точок дана функція не має. Оскільки для будь-якого $x \in (-\infty; +\infty)$: $y'(x) > 0$, то функція зростає на всій області визначення.

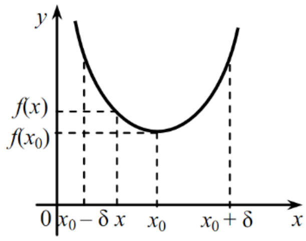
6.2. Локальний екстремум функції.

Означення 1. Точку x_0 називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ $\big(f(x) > f(x_0)\big)$.

Геометричний зміст означення зрозумілий з рис. 2.8.



x_0 — точка максимуму



x_0 — точка мінімуму

Рис. 2.8.

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму, а значення функції в цих точках називаються відповідно локальним максимумом і локальним мінімумом або локальним екстремумом.

Означення 2. Точки, в яких перша похідна функції дорівнює нулю називають стаціонарними точками функції.

Означення 3. Стаціонарні точки функції, і точки в яких перша похідна функції не існує називають критичними точками функції, або критичними точками першого роду.

Теорема 1. (необхідна умова локального екстремуму). Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.

Таким чином, повну необхідну умову локального екстремуму можна сформулювати так: якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною. Обернене твердження невірне: не всяка критична точка функції є її екстремальною точкою.

Іншими словами, точки локального екстремуму можуть бути по-перше, серед точок, в яких $f'(x) = 0$, і, по-друге, серед точок, в яких $f'(x)$ не існує.

У зв'язку з цим критичні точки іноді називають точками можливого екстремуму.

Теорема 2 (перша достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 — критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x - x_0;\ x + x_0)$ точки x_0, в якому функція має похідну $f'(x)$ крім, можливо, точки x_0, тоді:

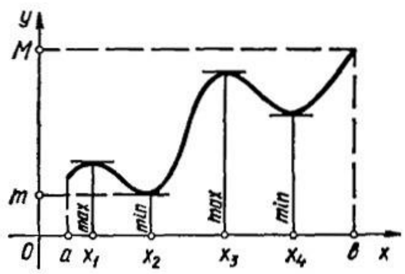


Рис. 2.9.

1) якщо в інтервалі $(x - x_0;\ x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x + x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;

2) якщо в інтервалі $(x - x_0;\ x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x + x_0)$ похідна $f'(x) > 0$ то x_0 в точкою локального мінімуму функції $f(x)$;

3) якщо в обох інтервалах $(x - x_0;\ x_0)$ і $(x_0;\ x + x_0)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Можна ще сказати так: якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 — точка локального максимуму; якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в точці x_0 екстремум відсутній.

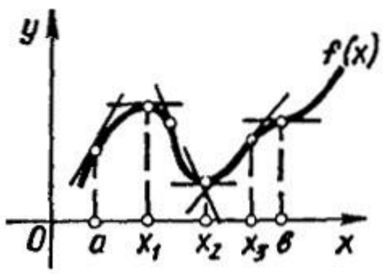


Рис. 2.10.

Геометричний зміст теореми 2 ілюструє рис. 2.10.

Приклад. Знайти локальні екстремуми функції $f(x) = \sqrt[5]{x^4}\, e^x$.

Розв'язання. Область визначення функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну функції

$$f'(x) = \left(\sqrt[5]{x^4}\, e^x\right)' = \left(x^{\frac{4}{5}}\right)' e^x + x^{\frac{4}{5}}(e^x)' = \frac{4}{5} x^{-\frac{1}{5}} e^x + x^{\frac{4}{5}} e^x = \frac{4 + 5x}{5\sqrt[5]{x}}\ e^x .$$

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x = -\frac{4}{5}$ і не існує при $x = 0$. Отже $x_1 = -\frac{4}{5}$ та $x_2 = 0$ критичні точки даної функції.

Складаємо таблицю (символами ↗ та ↘ умовно позначається відповідно зростання і спадання функції на інтервалі).

При цьому скористаємось тим, що

$$f'^{(-1)} > 0,\ f'^{\left(-\frac{1}{5}\right)} < 0,\ f'^{(1)} > 0,\ f\left(-\frac{4}{5}\right) = \sqrt[5]{\left(-\frac{4}{5}\right)^4}\, e^{-\frac{4}{5}} \approx 0{,}38\,,\ f(0) = 0\ .$$

x	$\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	↗	$\approx 0{,}38$ max	↘	0 min	↗

А можна все просто розглянути на числовій осі поведінки $f'(x)$:

Рис. 2.11.

Якщо $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$, то $f'(x) > 0$ і функція зростає;

Якщо $x \in \left(-\frac{4}{5}; 0\right)$, то $f'(x) < 0$ і функція спадає;

Якщо $x \in (0; \infty)$, то $f'(x) > 0$ і функція зростає.

Отже, $x_1 = -\frac{4}{5}$ — точка локального максимуму, $y_{max} \approx 0{,}38$; $x_2 = 0$ — точка локального мінімуму, $y_{min} = 0$.

Теорема 3 (друга достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 — стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму.

Приклад. Знайти локальні екстремуми функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x - 2$.

Розв’язання. Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Похідна $f'(x) = x^2 - 5x + 4$.

Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$:

$$x^2 - 5x + 4 = 0\,, x_1 = 1, x_2 = 4\,.$$

Звідси дістаємо стаціонарні точки: $x_1 = 1, x_2 = 4$. Точок, в яких похідна $f'(x)$ не існує, немає. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками даної функції, тому можна знайти екстремуми за другою достатньою умовою: оскільки

$$f''(x) = 2x - 5$$

і $f''(1) = -3 < 0$, то $x_1 = 1$ — точка локального максимуму, $y_{max} = f(1) = -\frac{1}{6}$;

$f''(4) = 3 > 0$, тому $x_2 = 4$ — точка локального мінімуму, $y_{min} = f(4) = -\frac{14}{3}$.

6.3. Найбільше та найменше значення функції.

З властивості неперервних функцій відомо, що на відрізку $[a; b]$ вона досягає свого найбільшого та найменшого значення:

$$M = \max_{x \in [a;b]} f(x)\ , \quad m = \min_{x \in [a;b]} f(x)\ .$$

Зрозуміло, що для точки x_0, де функція досягає найбільшого значення, може бути лише три можливості:

а) $x_0 = a$, б) $x_0 \in (a; b)$, в) $x_0 = b$. Якщо $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 потрібно шукати серед критичних точок даної функції. Те саме можна сказати і про точку, в якій функція набуває найменшого значення.

Отже, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a; b]$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$:

2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках a та b і серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

Приклади. 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4 - 18x^2$ на відрізку $[-1; 5]$.

Розв’язання. Знаходимо критичні точки заданої функції. Маємо $f'(x) = 4x^3 - 36x$,

$$4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9) = 4x(x-3)(x+3) = 0 \iff x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3.$$

Відрізку $[-1; 5]$ належать точки $x_2 = 0$ та $x_3 = 3$. Обчислюємо значення функцій в цих точках і на кінцях відрізка:

$$f(-1) = -17, \qquad f(0) = 0, \qquad f(3) = -81, \qquad f(5) = 175\,,$$

і вибираємо найбільше та найменше. Отже,

$$M = \max_{x \in [-1;5]} f(x) = f(5) = 175\,,\ m = \min_{x \in [-1;5]} f(x) = f(3) = -81\,.$$

2. Визначити розміри консервної банки об’єму V, при яких на її виготовлення піде найменше матеріалу.

Розв’язання. Нехай банка має форму циліндра з радіусом основи r і висотою h. Тоді повна поверхня банки дорівнює: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Оскільки об’єм банки відомий:

$$V = \pi r^2 h, \text{то } h = \frac{V}{\pi r^2}\,,$$

Тому

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\,\frac{V}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right).$$

Знайдемо найменше значення функції $S(r)$:

$$\frac{dS}{dr} = \left(2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)\right)' = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right), \frac{dS}{dr} = 0 \text{ при } r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

$$\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=r_0} = 2\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right)\Big|_{r=r_0} > 0\,.$$

Отже при $r = r_0$ функція $S(r)$ має мінімум. Це значення найменше на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки

$$\lim_{r\to 0} S(r) = \infty \text{ і } \lim_{r\to +\infty} S(r) = \infty\,.$$

Обчислимо висоту

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r\,.$$

Таким чином, для того щоб при заданому об'ємі циліндрична банка мала найменшу повну поверхню, її висота повинна дорівнювати діаметру.

6.4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину.

Означення 1. Крива $y = f(x)$ називається опуклою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Означення 2. Крива $y = f(x)$ називається вгнутою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Означення 3. Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.

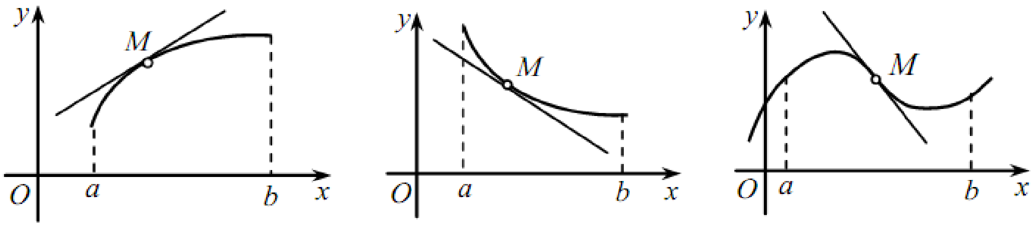


Рис. 2.12.

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять за допомогою такої теореми.

Теорема 1. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на $(a; b)$, тоді:

1) якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на $(a; b)$;

2) якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на $(a; b)$.

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками другого роду функції $f(x)$. Отже, якщо x_0 — абсциса точки перегину функції $f(x)$, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження неправильне.

Приклади.

1. Функція $f(x) = x^6$ має другу похідну $f''(x) = 30x^4$, яка дорівнює нулю при $x = 0$. Але критична точка $x = 0$ не є абсцисою точки перегину даної кривої.

2. Функція $f(x) = x^5$ має критичну точку $x = 0$, яка є абсцисою точки перегину.

Встановимо достатні умови існування точки перегину.

Теорема 2. Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0;\ f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.

Отже, щоб знайти точки перегину кривої, треба знайти критичні точки другого роду і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

Приклади.

1. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої

$$f(x) = x^7 - 21x^2 + 7x - 5\,.$$

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; +\infty)$. $f''(x) = 42x^5 - 42 = 0$ при $x = 1$, то точка $x = 1$ є критичною точкою другого роду. Інших критичних точок ця функція не має, бо $f''(x)$ існує на всій числовій осі.

Розбиваємо область визначення критичною точкою на інтервали і досліджуємо зміну знака другої похідної: якщо $x \in (-\infty; 1)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла; якщо $x \in (1; +\infty)$. то $f''(x) > 0$—крива вгнута. Точка $(1; -18)$ — точка перегину кривої.

2. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої

$$f(x) = 3 + (x-2)^{9/5}\,.$$

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знайдемо першу та другу похідні функції.

$$f'(x) = \left(3 + (x-2)^{9/5}\right)' = 0 + \frac{9}{5}(x-2)^{\frac{9}{5}-1} = \frac{9}{5}(x-2)^{\frac{4}{5}}\,,$$

$$f''(x) = \left(\frac{9}{5}(x-2)^{\frac{4}{5}}\right)' = \frac{9}{5}\cdot\frac{4}{5}(x-2)^{\frac{4}{5}-1} = \frac{36}{25}(x-2)^{-\frac{1}{5}} = \frac{36}{25\sqrt[5]{x-2}}\,.$$

Оскільки

$$f''(x) = \frac{36}{25\sqrt[5]{x-2}} \neq 0$$

і не існує при $x = 2$, то єдиною критичною точкою другого роду є точка $x = 2$.

Маємо

$$\forall\, x \in (-\infty; 2)\colon f''(x) < 0;\ \forall\, x \in (2; +\infty)\colon f''(x) > 0\,.$$

Тому крива опукла на інтервалі $(-\infty; 2)$ і вгнута на інтервалі $(2; +\infty)$; точка $(2; 3)$ — точка перегину.

6.5. Асимптоти кривої.

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називають пряму, до якої необмежено наближається точка кривої за необмеженого віддалення її від початку координат. Існує три типи асимптот: вертикальні, похилі та горизонтальні.

Пряма $x = c$ - вертикальна асимптота кривої $y = f(x)$ якщо

$$\lim_{x\to c+0} f(x) = \pm\infty \text{ або } \lim_{x\to c-0} f(x) = \pm\infty$$

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$ якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k\,,\ \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b\,.$$

Окремим випадком похилої асимптоти при $k = 0$ є горизонтальна асимптота.

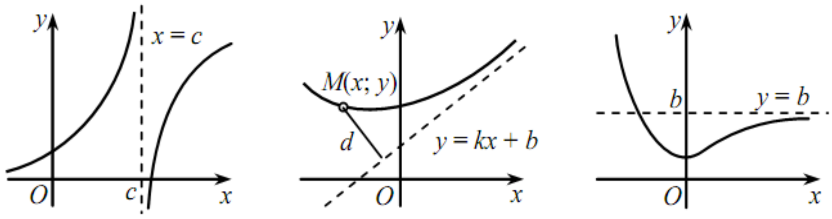


Рис. 2.13.

Приклад. Знайдіть асимптоти кривої $y = \frac{x^3}{x^2-9}$.

Розв'язання. Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді

$$y = kx + b\ .$$

За відповідними формулами дістанемо:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-9)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{1}{1-0} = 1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+9x}{x^2-9} = \lim_{x\to\infty}\frac{9x}{x^2-9} = 0\ .$$

Отже, $y = x$ — рівняння похилої асимптоти. Оскільки точки $x_1 = -3$ та $x_2 = 3$ є точками розриву другого роду функції $y = \frac{x^3}{x^2-9}$, то прямі $x = -3$ і $x = 3$ — вертикальні асимптоти заданої кривої.

Горизонтальних асимптот крива не має.

6.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка.

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

1) знайти область існування функції;
2) знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;
5) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати таблицю поведінки функції;
9) побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в п. 1—8.

Якщо графік виявиться не зовсім зрозумілим, потрібно додатково знайти кілька точок графіка, обчисливши значення функції при певних значеннях аргументу; бажано також в цих самих точках обчислити першу похідну, щоб визначити в них напрям дотичної.

Якщо дана функція періодична з періодом T, то досить побудувати її графік на відрізку $[0;\ T]$, після чого повторити цей графік на проміжках $(nT;\ (n+1)T)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Якщо функція парна (або непарна), то достатньо побудувати її графік для $x > 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (або відносно початку координат).

Приклади.

1. Дослідити та побудувати графік функції $y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Розв'язання. 1) область визначення — вся числова пряма, за винятком точки $x = 1$, тобто $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

2) функція неперіодична. З несиметричності області визначення $D(y)$ відносно нуля випливає, що задана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального вигляду;

3) графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) у точці $\left(0;\ f(0)\right)$. У цьому випадку $y(0) = -1$, отже, $A(0; -1)$ — точка перетину кривої з віссю Oy. Щоб знайти точки перетину графіка з віссю Ox потрібно розв'язати рівняння $y = 0$, тобто $\frac{x^2+1}{x-1} = 0$. Це рівняння не має дійсних коренів, тому функція не перетинає вісь абсцис;

4) функція в точці $x = 1$ має розрив другого роду:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty\,,\ \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty\,.$$

В усіх інших точках функція неперервна.

5) знаходимо похідну

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

і розв'язуємо рівняння $y' = 0$, або $x^2 - 2x - 1 = 0$, звідки дістаємо стаціонарні точки $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ і $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Крім того, похідна не існує в точці $x = 1$ (у цій точці задана функція не визначена). Отже, $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ і $x_3 = 1$ — критичні точки, або точки можливого екстремуму заданої функції. Ці точки розбивають область визначення на чотири інтервали: $\left(-\infty; 1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1-\sqrt{2}; 1\right)$, $\left(1; 1+\sqrt{2}\right)$, $\left(1+\sqrt{2}; +\infty\right)$. На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за методом інтервалів або обчислення значень похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу).

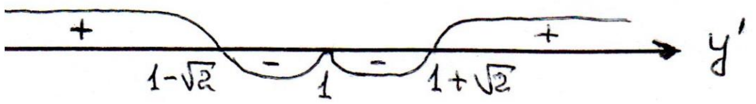


Рис. 2.14.

Якщо $x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{2}\right)$, то $y' > 0$ і y зростає;

Якщо $x \in \left(1-\sqrt{2}; 1\right)$, то $y' < 0$ і y спадає;

Якщо $x \in \left(1; 1+\sqrt{2}\right)$, то $y' < 0$ і y спадає;

Якщо $x \in \left(1+\sqrt{2}; +\infty\right)$, то $y' > 0$ і y зростає.

Переходячи через точку $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ (рух відбувається зліва направо), похідна змінює знак з плюса на мінус; отже, в цій точці функція має локальний максимум. Тоді

$$y_{max} = y\left(1-\sqrt{2}\right) = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + 1}{1-\sqrt{2}-1} = 2 - 2\sqrt{2}\,.$$

При переході через точку $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум, причому

$$y_{min} = y\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 1}{1+\sqrt{2}-1} = 2 + 2\sqrt{2}$$

Точка $x_3 = 1$ не є точкою екстремуму (в цій точці функція невизначена);

6) знайдемо другу похідну y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)\,(x-1)^2 - (x^2-2x-1)\,2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2\,(x-1)^2 - 2(x^2-2x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2-4x+2\ -2x^2+4x+2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}\,.$$

На інтервалі $(-\infty;1)$ $y'' < 0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; якщо $x \in (1;+\infty)$, то $y'' > 0$ — крива вгнута. Точок перегину немає;

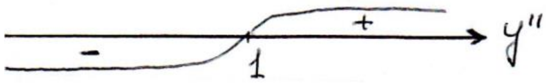


Рис. 2.15.

7) Знайдемо асимптоти кривої. Пряма $x = 1$ — вертикальна асимптота кривої. Це очевидно на підставі пункту 4.

Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді $y = kx + b$.

Обчислимо границі

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{(x-1)x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = 1\,,$$

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{(x-1)x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = 1\,.$$

Отже, $k = 1$, тоді

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1\,.$$

Таким чином, пряма $y = x + 1$ — похила асимптота заданої кривої при $x \to \pm\infty$;

8) Побудуємо таблицю поведінки функції:

x	$(-\infty; 1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2};$	1	$(1; 1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2}; +\infty)$
y'	+	0	-	Не існує	-	0	+
y''	-	-	-	Не існує	+	+	+
$f(x)$	↗,∩	$y_{max} = 2 - 2\sqrt{2}$	↘,∩	Точка розриву II роду	↘,∪	$y_{min} = 2 + 2\sqrt{2}$	↗,∪
Графік							

9) обчислимо додатково (хоча це необов'язково) кілька значень функції: $y(3) = 5$, $y(-1) = -1$. Отже, графік заданої функції проходить через точки $B(3;5)$ і $C(-1;-1)$;

10) підсумовуючи проведені дослідження, будуємо графік даної функції (рис. 2.16).

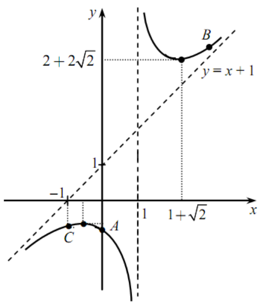


Рис. 2.16.

2. Дослідити та побудувати графік функції $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.

Розв'язання. 1) область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) функція ні парна, ні непарна;

3) точки перетину з осями координат: якщо $x = 0$, то $y = 0$; якщо $y = 0$, то $x = 0$ або $x = 2$. Отже, крива проходить через точки $(0; 0)$ і $(2; 0)$;

4) точок розриву функція не має;

5) знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}\right)' = \frac{1}{3}\,\frac{3x^2 - 4x}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} = \frac{x(x - 4/3)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}} = \frac{x - 4/3}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}}.$$

Похідна дорівнює нулю в точці $x = \frac{4}{3}$ і її не існує в точках $x = 0$ і $x = 2$; усі ці точки є критичними і розбивають числову пряму на чотири інтервали $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}; 2\right)$, $(2; +\infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, а саме: якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $y' > 0$ — функція зростає; якщо $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$, то $y' < 0$ — функція спадає; якщо $x \in \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$, то $y' > 0$ — функція зростає. Переходячи через точку $x = 0$, похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, $x = 0$ є точкою максимуму, причому $y_{max} = y(0) = 0$. Переходячи через точку $x = \frac{4}{3}$, похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці функція набуває мінімуму:

$$y_{min} = y\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{4}{3} - 2\right)} = -\sqrt[3]{\frac{32}{27}} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3} \approx -1{,}1\,.$$

Отже $P\left(\frac{4}{3}; -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ — екстремальна точка.

Переходячи через точку $x = 2$, похідна не змінює знак, отже, ця точка не є точкою екстремуму;

6) знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \left(\frac{x - 4/3}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}}\right)' = \frac{\sqrt[3]{x(x-2)^2} - (x - 4/3)\,\frac{1}{3}(x(x-2)^2)^{-2/3}\cdot(x(x-2)^2)'}{\sqrt[3]{(x(x-2)^2)^2}} =$$

$$= \frac{9x(x-2)^2 - (3x-4)\cdot\left((x-2)^2 + x\,2(x-2)\right)}{\sqrt[3]{(x(x-2)^2)^4}} =$$

$$= \frac{9x(x-2)^2 - (3x-4)\,(x-2)\,(3x-2)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}} = -\frac{8}{9}\,\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}} = -\frac{8}{9\sqrt[3]{x^4(x-2)^5}}.$$

Друга похідна не існує в точках $x = 0$ і $x = 2$. Отже, точки $x = 0$ і $x = 2$ —критичні точки другого роду. Розглянемо проміжки $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ і $(2; +\infty)$. На інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; 2)$ $y'' > 0$ — крива вгнута; якщо $x \in (2; +\infty)$ то $y'' < 0$ — крива опукла. Точка перегину має координати $(2; 0)$;

7) Знайдемо асимптоти кривої. Вертикальні асимптоти відсутні. Знайдемо похилу асимптоту у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = 1\,,$$

Отже, $k = 1$, тоді

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x\right)\left(\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\cdot\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2\right)}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\cdot\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - 2x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} + x\cdot\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} + x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Отже, пряма $y = x - \frac{2}{3}$ — похила асимптота цієї кривої. Інших асимптот немає;

8) Побудуємо таблицю поведінки функції:

x	$(-\infty; 0)$	0	$\left(0; \frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3}; 2\right)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	Не існує	-	0	+	Не існує	+
y''	+	Не існує	+		+	Не існує	-
$f(x)$	↗,∪	$y_{max} = 0$	↘,∪	$y_{min} \approx -1{,}1$	↗,∪	Точка перегину $(2; 0)$	↗,∩
Графік							

8) враховуючи проведені дослідження, будуємо графік заданої функції (рис. 2.17).

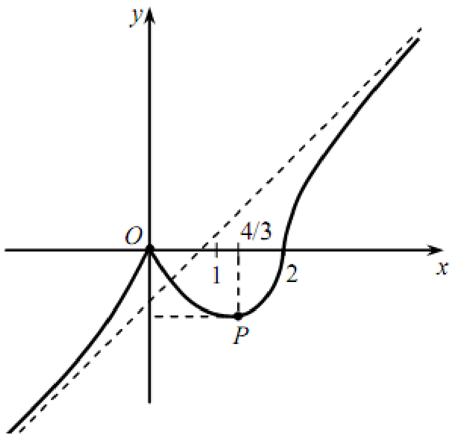


Рис. 2.17.

III. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

§ 1. Функція багатьох змінних, її границя та неперервність.

1.1. Функція багатьох змінних. Означення та символіка.

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел $(x;\ y)$.

Означення. Якщо кожній парі чисел $(x;\ y) \in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x і y і записують $z = f(x;\ y)$.

Наведемо такі приклади:

а) площу S прямокутника із сторонами a та b знаходять за формулою $S = ab$. Кожній парі значень a і b відповідає єдине значення площі, тобто S — функція двох змінних: $S = f(a;\ b)$;

б) за законом Ома електрорушійна сила E, сила струму I та опір R замкнутого електричного кола пов'язані співвідношенням $E = IR$. Тут E є функцією змінних I та R: $E = f(I; R)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а змінні x та y — незалежними змінними (аргументами).

Множину пар $(x;\ y)$ значень x та y, для яких функція $z = f(x;\ y)$ визначена, називають областю визначення цієї функції і позначають $D(f)$ або D.

Множину значень z позначають $E(f)$ або E.

Значення функції $z = f(x;\ y)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0;\ y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$, або $z = z|_{M_0}$.

Означення. Множина D точок площини називається зв'язною, якщо будь-які її дві точки можна сполучити неперервною лінією, яка цілком належить множині D.

Наприклад, круг — зв'язна множина, а множина, що складається з двох кругів, які не мають спільних точок, не є зв'язною.

Означення. Точка M називається внутрішньою точкою множини D, якщо існує δ-окіл цієї точки, який цілком міститься у множині D.

Означення. Множину D називають відкритою, якщо кожна її точка внутрішня.

Означення. Областю (або відкритою областю) називають зв'язну відкриту множину точок.

Означення. Точку M називають межовою точкою множини D, якщо будь-який її окіл містить як точки, що належать D, так і точки, що не належать множині D.

Означення. Множину всіх межових точок області називають межею області.

Означення. Область разом з її межею називається замкненою.

Замкнена область, в якій визначена функція двох змінних, є аналогом відрізка для функції однієї змінної.

Отже лінію, що обмежує область D, називають межею області визначення. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки, називається відкритою. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається замкненою.

Означення. Якщо існує круг скінченного радіуса, який цілком містить область, то вона називається обмеженою.

Функція двох змінних, як і функція однієї змінної, може бути задана різними способами. Ми користуватимемося, як правило, аналітичним способом, коли функція задається за допомогою формули.

Областю визначення такої функції вважається множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст.

Приклади. Знайти область визначення та множину значень функцій:

1. $z = 5x^4 + 2y^2$.

Розв'язання. Вираз $5x^4 + 2y^2$ існує і невід'ємний для будь-яких значень x та y. Тому областю визначення й функції $z = 5x^4 + 2y^2$ є вся площина Oxy, а множиною значень —проміжок $E = [0;\ +\infty)$.

2. $z = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x}}$.

Розв'язання. Область визначення D цієї функції визначається з нерівності $y^2 - x > 0$. Межа області (парабола $y^2 = x$) не належить

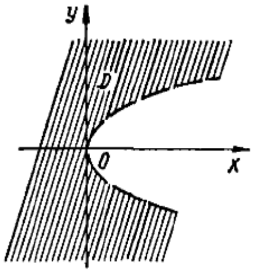


Рис. 3.1.

ій, тобто це відкрита область (рис. 3.1). Множина значень заданої функції — інтервал $E = (0; +\infty)$.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні. Дійсно, нехай функція $z = f(x;\ y)$ визначена в області D. Кожній точці $(x;\ y) \in D$ відповідає певне значення функції $z = f(x;\ y)$.

Означення. Графіком функції $z = f(x;\ y)$ в прямокутній системі Oxyz називають геометричне місце точок $M\big(x;\ y;\ f(x;\ y)\big)$, проекції яких $(x;\ y)$ належать області D. Це геометричне місце точок утворює в тривимірному просторі R^3 певну поверхню (рис. 3.2), проекцією якої на площину Oxy є множина D.

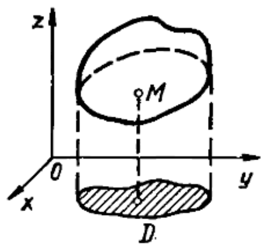


Рис. 3.2.

Приклад. Знайти лінії рівня і побудувати графік функції

$$z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}.$$

Розв’язання. Лінії рівня $z = c$ знайдемо з рівняння $\frac{1}{x^2+2y^2} = c$, де $c > 0$.

Маємо

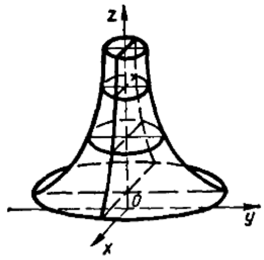


Рис. 3.3.

$$x^2 + 2y^2 = \frac{1}{c}, \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2c}}\right)^2} = 1,$$

тобто лініями рівня даної функції є еліпси з півосями $a = \sqrt{\frac{1}{c}}$ та $b = \sqrt{\frac{1}{2c}}$.

Ми розглянули поняття функції двох змінних. Узагальнимо його на випадок трьох і більшого числа незалежних змінних.

Нехай D — деяка множина упорядкованих трійок (x, y, z) дійсних чисел, тобто точок $M(x;\ y;\ z)$ тривимірного простору R^3.

Якщо кожній точці $(x;\ y;\ z) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних x, y і z, і записують $u = f(x;\ y;\ z)$ або $u = f(M)$.

При цьому змінна u називається залежною змінною (функцією), x, y, z — незалежними змінними (аргументами), множина $D \subset R^3$ — областю визначення функції.

Область визначення функції трьох змінних можна геометрично зобразити у вигляді деякої частини тривимірного простору. Але саму функцію $u = f(x;\ y;\ z)$ геометрично зобразити вже не можна, тому що наш простір тривимірний і четверту координатну вісь для значень u зобразити неможливо.

Поверхнею рівня функції $u = f(x;\ y;\ z)$ називають множину всіх точок $(x;\ y;\ z) \in D(f)$, для яких задана функція набуває одне й те саме значення $c \in E(f)$:

$f(x;\ y;\ z) = c$ (ізоповерхні).

Приклади.

1. Областю визначення функції $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ є куля одиничного радіуса з центром у початку координат: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Це замкнена область тому що їй належать точки сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — межі області.

2. Поверхні рівня функції $u = \frac{z^2}{x^2+y^2}$ визначаються рівнянням $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c} = 0$, де $c > 0$. Це сім'я конусів з вершиною в точці $O(0;\ 0;\ 0)$.

Лінії і поверхні рівня часто зустрічаються на практиці. Наприклад, сполучивши на карті поверхні Землі точки з однаковою середньодобовою температурою або з однаковим середньодобовим тиском дістанемо відповідно ізотерми та ізобари, які є важливими даними для прогнозу погоди.

Якщо число n незалежних змінних більше трьох, то їх частіш позначають однією буквою, але з різними індексами: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Функцію u від цих незалежних змінних можна визначити так. Нехай задано множину D упорядкованих систем $(x_1;\ x_2; \dots;\ x_n)$ з n чисел $(n \in N)$, або, що те саме, множину точок $M(x_1;\ x_2; \dots;\ x_n)$ n-вимірного простору R^n.

Якщо кожній точці $(x_1;\ x_2; \dots;\ x_n) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від n змінних: $x_1, x_2, \dots, x_n$ і записують

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ або } u = f(M),\ M \in R^n.$$

Область визначення D цієї функції у випадку $n \geq 4$ геометрично зобразити не можна.

Надалі розглядатимемо лише функції двох змінних, тому що результати для функцій двох змінних легко по аналогії узагальнити на випадок більшого числа змінних. Крім того, для функції двох змінних можна дати геометричні ілюстрації.

1.2. Границя функції багатьох змінних.

Введемо поняття δ-околу заданої точки $M_0(x_0;\ y_0)$ і поняття збіжної послідовності точок площини.

Означення. Множина всіх точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність $\rho(M;\ M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, де $\rho(M;\ M_0)$ — відстань від точки M до M_0, називається δ-околом точки $M_0(x_0;\ y_0)$.

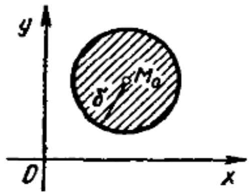


Рис. 3.4.

Іншими словами, δ-окіл точки M_0 — це всі внутрішні точки круга з центром M_0 радіуса δ (рис. 3.4).

Розглянемо послідовність точок $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, …, $M_n(x_n;\ y_n)$, яку позначимо символом $\{M_n\}$.

Означення. Послідовність точок $\{M_n\}$ називається збіжною до точки M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ виконується нерівність $\rho(M;\ M_0) < \varepsilon$. При цьому точку M_0 називають, границею послідовності $\{M_n\}$ і записують так:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0 \text{ або } M_n \to M_0 \text{ при } n \to \infty.$$

Якщо $M_n(x_n;\ y_n) \to M_0(x_0;\ y_0)$ при $n \to \infty$, то, очевидно, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$.

Тепер розглянемо границю функції двох змінних. її означення аналогічне означенню границі функції однієї змінної. Нехай функція $z = f(x;\ y)$ задана в деякій області D і точка $M_0(x_0;\ y_0) \in D$ або $M_0(x_0;\ y_0) \notin D$, але має таку властивість, що в довільному δ-околі цієї точки міститься хоча б одна точка множини D, відмінна від M_0.

Означення. Число A називається границею функції $z = f(M)$ в точці M_0, якщо для довільної, збіжної до M_0 послідовності точок M_1, M_2, ..., M_n, ... ($M_n \epsilon D$, $M_n \neq M_0$), відповідна послідовність значень функції $f(M_1)$, $f(M_2)$, …, $f(M_n)$, ... збігається до числа A. При цьому пишуть:

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A \text{ або } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;\ y) = A\ .$$

Наведене означення границі функції називають означенням за Гейне або означенням «на мові послідовностей».

Дамо еквівалентне означення границі функції за Коші або означення «на мові ε — δ».

Означення. Число A називається границею функції $z = f(M)$ в точці M_0, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x;\ y) \in D$, які задовольняють умову $0 < \rho(M;\ M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Користуючись означенням границі функції двох змінних, можна перенести основні теореми про границі для функції однієї змінної на функції двох змінних. Наприклад, правильне таке твердження.

Теорема. Нехай функції $f(M)$ і $g(M)$ визначені на одній і тій самій множині D і мають в точці M_0 границі B і C. Тоді функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M) \neq 0)$, мають в точці M_0 границі, які відповідно дорівнюють $B \pm C$, $B \cdot C$, $\frac{B}{C}$ $(C \neq 0)$.

Означення. Функція $z = f(M)$ називається нескінченно малою в точці M_0 (або при $M \to M_0$), якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$.

Якщо функція $z = f(M)$ має в точці M границю, яка дорівнює A, то функція $\alpha(M) = f(M) - A$ є нескінченно малою в точці M_0, тому що

$$\lim_{M \to M_0} \alpha(M) = \lim_{M \to M_0} (f(M) - A) = A - A = 0\,.$$

Звідси випливає, що функція $f(M)$ в околі точки M_0 відрізняється від границі A на нескінченно малу функцію.

Приклади. 1. Знайти границю: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Розв'язання. Якщо $M(x;\ y) \to M_0(0;\ 0)$, то $\rho(M;\ M_0) = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, тому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{\rho^2+1}-1\right)\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}{\rho^2+1-1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right)}{\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \left(\sqrt{\rho^2+1}+1\right) = 2\,.$$

2. Знайти границю: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Нехай $f(x;\ y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Візьмемо дві послідовності точок: $\{M_n\} = \left\{\left(0;\ \frac{1}{n}\right)\right\} \to 0$ і $\{P_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n};\ 0\right)\right\} \to 0$ при $n \to \infty$, тоді

$$\lim_{n \to \infty} f(M_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{0 - \frac{1}{n^2}}{0 + \frac{1}{n^2}} = -1; \qquad \lim_{n \to \infty} f(P_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = 1\,,$$

Таким чином, двом різним, збіжним до точки $(0;\ 0)$, послідовностям точок відповідають дві послідовності значень функції, які мають різні границі. Отже, дана функція в точці $(0;\ 0)$ границі не має.

1.3. Неперервність функції багатьох змінних.

Поняття неперервної функції багатьох змінних вводиться за допомогою поняття границі.

Нехай функція $z = f(M)$ визначена на множині D точка $M_0 \in D$ і довільний δ-окіл точки M_0 містить точки множини D.

Означення. Функція $z = f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \quad (1.1)$$

Точки, в яких функція неперервна, називаються точками неперервності, а точки, в яких неперервність порушується — точками розриву цієї функції.

Умові (1.1) неперервності ножна надати іншого вигляду.

Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x;\, y) - f(x_0;\, y_0)$. Величини Δx, Δy називають приростами аргументів x і y, а Δz — повним приростом функції $f(x;\, y)$ в точці $(x_0;\, y_0)$. З рівності (1.1) дістаємо:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \big(f(x;\, y) - f(x_0;\, y_0)\big) = 0$$

або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \Delta z = 0$. (1.2)

Рівність (1.2) дає ще одне означення неперервності.

Означення. Функція $f(x;\, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0;\, y_0)$, якщо повний приріст її в цій точці прямує до нуля, коли прирости її аргументів x та y прямують до нуля.

Означення. Функція $f(x;\, y)$ називається неперервною на множині D, якщо вона неперервна в кожній точці $(x;\, y)$ цієї множини.

Наприклад, функція $z = x^2 + y^2$ неперервна на всій площині Oxy, оскільки повний приріст цієї функції в довільній точці $(x_0;\, y_0)$ має вигляд

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta y + \Delta y^2 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$

і

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0\,.$$

Тепер сформулюємо властивості неперервних функцій двох змінних в замкненій обмеженій області.

1°. Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона обмежена в цій області, тобто існує таке число $c > 0$, що для всіх точок області виконується нерівність $|f(M)| < c$.

2°. Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває найбільшого і найменшого значень.

3°. Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області D і $f(M_1) < c < f(M_2)$, де $M_1, M_2 \in D$, то існує точка $M_0(x_0;\, y_0)$, в якій $f(M_0) = c$. Зокрема, якщо $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то в області D існує точка M_0, в якій $f(M_0) = 0$.

§ 2. Похідні та диференціали функції багатьох змінних.

2.1. Частинні похідні.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y незмінною, так, щоб точка $M_1(x + \Delta x, y)$ належала заданому околу.

Величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається частинним приростом функції $f(x, y)$ по змінній x.

Аналогічно вводиться частинний приріст $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ функції по змінній y.

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

то вона називається частинною похідною функції $f(x,y)$ в точці $M(x,y)$ по змінній x і позначається одним із таких символів:

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

при цьому частинні похідні по x в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначаються як $f'_x(x_{0,}y_0) = f'_x|_{M_0}$ –.

Аналогічно частинна похідна функції $f(x,y)$ по y визначається як границя

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

і позначається одним із символів:

$$z'_y = f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної z'_x обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x, вважаючи змінну y сталою, а при знаходженні z'_y сталою вважається змінна x. Тому частинні похідні знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

Частинна похідна z'_x (або z'_y) характеризує швидкість зміни функції в напрямі осі Ox (або Oy).

З'ясуємо геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних. Графіком функції $z = f(x,y)$ є деяка поверхня (рис. 3.5). Графіком функції $z = f(x, y_0)$ є лінія перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, дістанемо, що $f'_x(x_{0,}y_0) = tg\,\alpha$, де α — кут між віссю Ox і дотичною, проведеною до кривої $z = f(x, y_0)$ в точці $M_0\left(x_0; y_0;\ f(x_{0,}, y_0)\right)$. Аналогічно $f'_y(x_{0,}y_0) = tg\,\beta$.

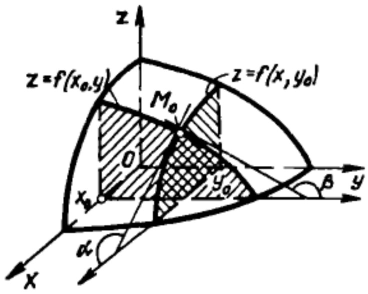


Рис. 3.5.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n змінних можна знайти n частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

де

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i},$$

а $\Delta_{x_i} u = f\left(x_1, x_2, \dots, x_{i-1,}\ x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\right) - f\left(x_1, x_2, \dots, x_{i-1,}\ x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\right)$.

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, треба взяти звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по змінній x_i вважаючи решту змінних сталими.

Приклади. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^4 + y^5 - 3xy^3 + 7x - 4y + 5$.

Розв’язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 + y^5 - 3xy^3 + 7x - 4y + 5)'_x =$$

$$= (x^4)'_x + 0 - 3y^3(x)'_x + 7(x)'_x - 0 + 0 = 4x^3 - 3y^3 + 7;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 + y^5 - 3xy^3 + 7x - 4y + 5)'_y =$$

$$= 0 + (y^5)'_y - 3x(y^3)'_y + 0 - 4(y)'_y + 0 = 5y^4 - 9xy^2 - 4\,.$$

б) $u = 4x^3z^7 + arctg\,\dfrac{x^2}{y}$.

Розв'язання:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(4x^3z^7 + arctg\,\frac{x^2}{y}\right)'_x = 4z^7(x^3)'_x + \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_x =$$

$$\left(\text{де } 1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 = 1 + \frac{x^4}{y^2} = \frac{y^2+x^4}{y^2} = \frac{x^4+y^2}{y^2}\ \text{, звідки } \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2} = \frac{y^2}{x^4+y^2}\right)$$

$$= 12x^2z^7 + \frac{y^2}{x^4+y^2}\cdot\frac{1}{y}\cdot(x^2)'_x = 12x^2z^7 + \frac{2xy}{x^4+y^2}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(4x^3z^7 + arctg\,\frac{x^2}{y}\right)'_y = 0 + \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = \frac{y^2}{x^4+y^2}\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$= \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x^2}{x^4+y^2}\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(4x^3z^7 + arctg\,\frac{x^2}{y}\right)'_z = 4x^3(z^7)'_z + 0 = 28x^3z^6\,.$$

Якщо функція $z = f(x,y)$ задана в області D і має частинні похідні z'_x, z'_y в усіх точках $(x;y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D. Тому має сенс питання про існування частинних похідних від цих функцій по якій-небудь змінній в точці $(x;y) \in D$.

Якщо існує частинна похідна по x від функції $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, то її називають частинною похідною другого порядку від функції $f(x,y)$ по змінній x і позначають $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{xx}.

Таким чином, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ або } f''_{xx} = (f'_x)'_x\,.$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ по змінній y, то цю похідну називають мішаною частинною похідною другого порядку від функції $f(x,y)$ і позначають $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або f''_{xy}.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ або } f''_{xy} = (f'_x)'_y\,.$$

Для функції двох змінних $f(x,y)$ можна розглядати чотири похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають частинними похідними третього порядку функції $f(x,y)$, їх вісім:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Теорема (про мішані похідні). Якщо функція $f(x,y)$ визначена разом із своїми похідними f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$, причому похідні f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0, то в цій точці мішані похідні рівні, тобто $f''_{xy}\big|_{M_0} = f''_{yx}\big|_{M_0}$.

Приклад. 1. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z = x^5 - 2x^3y^2 + 4y^4 - 8x + 2y - 1.$$

Розв'язання: Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^5 - 2x^3y^2 + 4y^4 - 8x + 2y - 1)'_x = 5x^4 - 6x^2y^2 - 8,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^5 - 2x^3y^2 + 4y^4 - 8x + 2y - 1)'_y = -4x^3y + 16y^3 + 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (5x^4 - 6x^2y^2 - 8)'_x = 20x^3 - 12xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-4x^3y + 16y^3 + 2)'_y = -4x^3 + 48y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (5x^4 - 6x^2y^2 - 8)'_y = -12x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-4x^3y + 16y^3 + 2)'_x = -12x^2y.$$

Переконалися, що

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12x^2y.$$

2.2. Диференційовність функції.

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M(x,y)$. Виберемо прирости Δx і Δy так, щоб точка $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ належала розглядуваному околу і знайдемо повний приріст функції в точці $M(x,y)$:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Функція $f(x,y)$ називається диференційовною в точці M, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad (2.1)$$

де A та B — дійсні числа, які не залежать від Δx та Δy, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Теорема 1 (неперервність диференційовної функції). Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M, то вона неперервна в цій точці.

Теорема 2 (існування частинних похідних диференційовної функції). Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то вона має в цій точці похідні $f'_x = f'_x(x, y)$ та $f'_y = f'_y(x, y)$ і

$$\Delta z = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y\,.$$

Теорема 3 (достатні умови диференційовності). Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки M і ці похідні неперервні в точці M, то функція $f(x, y)$ диференційовна в точці M.

2.3. Повний диференціал функції та його застосування до обчислення функцій. Диференціали вищих порядків.

Нагадаємо, що коли функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M, то її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y\,,$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ і $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Повним диференціалом dz диференційовної в точці M функції $z = f(M)$ називається лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту цієї функції в точці M, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (2.2)$$

Диференціалами незалежних змінних x та y назвемо прирости цих змінних $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді з урахуванням теореми 2 рівність (2.2) можна записати так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\,. \qquad (2.3)$$

Аналогічна формула має місце для диференційовної функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\,. \qquad (2.4)$$

Формула наближених обчислень функції двох змінних.

Повний диференціал називають також головною частиною повного приросту диференційовної функції. При цьому виконується наближена рівність $\Delta z \approx dz$.

Або

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y\,.$$

Тоді

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y\,,$$

В деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ ця формула має вигляд:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f\left(x_{0,}\, y_0\right) + f'_x\left(x_{0,}\, y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_{0,}\, y_0\right)\Delta y\,. \quad (2.5)$$

Приклади.

1. Знайти повний диференціал функції $z = x^7 - 5x^2y^4 + 3$.

Розв'язання: Частинні похідні заданої функції

$$z'_x = (x^7 - 5x^2y^4 + 3)'_x = 7x^6 - 10xy^4 \text{ і } z'_y = (x^7 - 5x^2y^4 + 3)'_y = -20x^2y^3$$

є неперервними функціями на всій площині Oxy. Тому диференціал цієї функції на всій площині дорівнює

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = (7x^6 - 10xy^4)dx - 20x^2y^3dy\,.$$

2. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала $arctg\left(\frac{3,02}{0,97} - 2\right)$.

Розв'язання: Розглянемо функцію $z = arctg\left(\frac{x}{y} - 2\right)$ і застосуємо до неї формулу (2.5), поклавши

$$x_0 = 3,\, y_0 = 1,\, \Delta x = x - x_0 = 3,02 - 3 = 0,02,\, \Delta y = y - y_0 = 0,97 - 1 = -0,03:$$

$$z'_x = \left(arctg\left(\frac{x}{y} - 2\right)\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} - 2\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y} - 2\right)'_x = \frac{y^2}{y^2 + (x - 2y)^2}\,\frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + (x - 2y)^2}\,,$$

$$z'_y = \left(arctg\left(\frac{x}{y} - 2\right)\right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} - 2\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y} - 2\right)'_y = \frac{y^2}{y^2 + (x - 2y)^2}\,\left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{x}{y^2 + (x - 2y)^2}\,.$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_{0,}\, y_0) + f'_x(x_{0,}\, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_{0,}\, y_0)\,\Delta y\,. \quad (2.5)$$

Підставляємо наші відповідні значення і отримаємо:

$$arctg\left(\frac{x_0 + \Delta x}{y_0 + \Delta y} - 2\right) \approx arctg\left(\frac{x_0}{y_0} - 2\right) + \frac{y_0}{{y_0}^2 + (x_0 - 2y_0)^2}\,\Delta x - \frac{x_0}{{y_0}^2 + (x_0 - 2y_0)^2}\,\Delta y\,;$$

$$arctg\left(\frac{3,02}{0,97} - 2\right) = arctg\left(\frac{3 + 0,02}{1 - 0,03} - 2\right) \approx arctg\left(\frac{3}{1} - 2\right) + \frac{1}{1^2 + (3 - 2)^2}\,0,02 -$$

$$- \frac{3}{1^2 + (3 - 2)^2}\,(-0,03) = arctg\,1 + \frac{0,02}{2} + \frac{0,09}{2} = \frac{\pi}{4} + 0,01 + 0,045 \approx 0,84\,.$$

Остаточно маємо $arctg\left(\frac{3,02}{0,97} - 2\right) \approx 0,84$.

Введемо поняття диференціала вищого порядку. Нехай $z = f(x, y)$ функція незалежних змінних x, y. Повний диференціал цієї функції, знайдений за формулою (2.3), називають ще диференціалом першого порядку. Диференціал другого порядку d^2z визначають за формулою $d^2z = d(dz)$.

Тоді, якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy\,,$$

звідки

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2\,. \qquad (2.6)$$

Символічно це записують так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z\,.$$

Аналогічно можна дістати формулу для диференціала третього порядку:

$$d^3z = d(d^2z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z\,.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, можна дістати формулу для диференціала n-го порядку:

$$d^nz = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z\,.$$

Зазначимо, що дана формула є справедливою лише для випадку, коли змінні x і y функції $z = f(x, y)$ є незалежними змінними.

Приклад. Знайти d^2z, якщо $z = e^{x^4+y^4}$.

Розв'язання: Послідовно дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{x^4+y^4}\right)'_x = e^{x^4+y^4}(x^4+y^4)'_x = 4x^3e^{x^4+y^4}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{x^4+y^4}\right)'_y = e^{x^4+y^4}(x^4+y^4)'_y = 4y^3e^{x^4+y^4}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4x^3e^{x^4+y^4}\right)'_x = (4x^3)'_x e^{x^4+y^4} + 4x^3\left(e^{x^4+y^4}\right)'_x =$$

$$= 12x^2e^{x^4+y^4} + 4x^3 4x^3 e^{x^4+y^4} = 4x^2e^{x^4+y^4}(3+4x^4)\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(4x^3e^{x^4+y^4}\right)'_y = 4x^3\left(e^{x^4+y^4}\right)'_y = 4x^3 4y^3 e^{x^4+y^4} = 16x^3y^3e^{x^4+y^4}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(4y^3e^{x^4+y^4}\right)'_y = (4y^3)'_y e^{x^4+y^4} + 4y^3\left(e^{x^4+y^4}\right)'_y =$$

$$= 12y^2e^{x^4+y^4} + 4y^3 4y^3 e^{x^4+y^4} = 4y^2e^{x^4+y^4}(3+4y^4)\,.$$

За формулою (2.6) маємо

$$d^2z = 4e^{x^4+y^4}[x^2(3+4x^4)\,dx^2 + 8x^3y^3\,dxdy + y^2(3+4y^4)\,dy^2]\,.$$

2.4. Диференціювання неявної функції.

Нехай задано рівняння

$$F(x, y) = 0, \qquad (2.7)$$

де $F(x, y)$ — функція двох змінних.

Теорема. Нехай функція $F(x, y)$ і її похідні $F'_x(x_{0,}\, y_0)$ та $F'_y(x_{0,}\, y_0)$ визначені та неперервні в якому-небудь околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і $F(x_0; y_0) = 0$, а $F'_y(x_{0,}\, y_0) \neq 0$; тоді існує окіл точки M_0, в якому рівняння $F(x, y) = 0$ визначає єдину неявну функцію $y = \varphi(x)$, неперервну та диференційовну в околі точки x_0 і таку, що $\varphi(x_0) = y_0$.

Тоді

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}\,. \qquad (2.8)$$

Приклад. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції y, заданої рівнянням

$$\sin y + \cos x + 3x^2 y - 5x + 4 = 0\,.$$

Розв'язання: У нашому випадку $F(x, y) = \sin y + \cos x + 3x^2\, y - 5x + 4$, тоді

$$F'_x = (\sin y + \cos x + 3x^2 y - 5x + 4)'_x = -\sin x + 6xy - 5\,,$$

$$F'_y = (\sin y + \cos x + 3x^2 y - 5x + 4)'_y = \cos y + 3x^2\,,$$

отже за формулою (2.8) маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-\sin x + 6xy - 5}{\cos y + 3x^2} = \frac{\sin x - 6xy + 5}{\cos y + 3x^2}\,.$$

§ 3. Деякі застосування частинних похідних.

3.1. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних.

Нехай задано поверхню

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (3.1)$$

Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить цій поверхні і функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці M_0, причому не всі частинні похідні в точці M_0 дорівнюють нулю, тобто

$$\left(F'_x(M_0)\right)^2 + \left(F'_y(M_0)\right)^2 + \left(F'_z(M_0)\right)^2 \neq 0\,.$$

Розглянемо довільну криву L, яка проходить через точку M_0, лежить на поверхні (3.1) і задається рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, де точці M_0 відповідає параметр t_0.

Оскільки крива лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівняння (3.1):

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0. \qquad (3.2)$$

Диференціюючи рівність (3.2), маємо

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0\,. \quad (3.3)$$

Ця рівність показує, що вектори $\vec{n} = \{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\}$, $\vec{s} = \{x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)\}$ ортогональні (рис. 3.6), причому другий з них є напрямним вектором дотичної до кривої L у точці M_0.

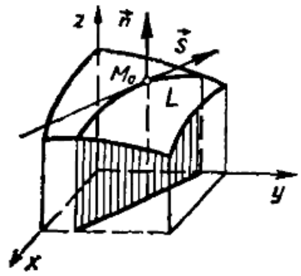


Рис. 3.6.

Крім того, з рівності (3.3) випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (3.1), ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{n}$. Тоді всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається дотичною площиною до поверхні в точці M_0.

Знайдемо рівняння дотичної площини. Оскільки ця площина проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, то її рівняння має вигляд

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (3.4)$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{n}$, то канонічні рівняння нормалі мають такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}\,. \qquad (3.5)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x, y)$, то, поклавши $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, дістанемо

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0),\ F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0),\ F'_z(M_0) = -1,$$

тоді рівняння (3.4) і (3.5) наберуть вигляду

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0; \qquad (3.6)$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}\,. \qquad (3.7)$$

Приклади.

1. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до еліпсоїда $4x^2+3y^2+5z^2=25$ в точці $M_0(2;-3;1)$.

Розв'язання. Скористаємось рівняннями (3.4) і (3.5). Маємо

$F(x,y,z)=4x^2+3y^2+5z^2-25$; $F'_x=8x$; $F'_y=6y$; $F'_z=10z$;

$F'_x(M_0)=16$; $F'_y(M_0)=-18$; $F'_z(M_0)=10$.

Отже, шукані рівняння нормалі та дотичної площини мають вигляд

$$\frac{x-2}{16}=\frac{y+3}{-18}=\frac{z-1}{10} \text{ або } \frac{x-2}{8}=\frac{y+3}{-9}=\frac{z-1}{5},$$

$16(x-2)-18(y+3)+10(z-1)=0$, або $8(x-2)-9(y+3)+5(z-1)=0$,

або остаточно маємо $8x-9y+5z-48=0$.

2. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z=2x^2+4y^2$ в точці $M_0(2;-1;12)$.

Розв'язання. Скористаємося формулами (3.6) та (3.7). В нашому випадку маємо

$f(x,y)=2x^2+4y^2$; $f'_x(x,y)=4x$; $f'_y(x,y)=8y$;

$f'_x(2,-1)=8$; $f'_y(2,-1)=-8$.

Звідси $\frac{x-2}{8}=\frac{y+1}{-8}=\frac{z-12}{-1}$ — рівняння нормалі, $8x-8y-z-12=0$ — рівняння дотичної площини (в рівнянні $8(x-2)-8(y+1)-1(z-12)=0$ ми розкрили дужки).

3.2. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, називають скалярним полем. Інакше кажучи, скалярне поле— це скалярна функція $u(M)$ разом з областю її визначення.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Для того щоб задати скалярне поле, досить задати скалярну функцію $u(M)$ точки M і область її визначення.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають стаціонарним, а скалярне поле, яке змінюється з часом,— нестаціонарним. Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.

Якщо в просторі ввести прямокутну систему координат $Oxyz$, то точка M в цій системі матиме певні координати $(x;y;z)$ і скалярне поле u стане функцією цих координат:

$$u=u(M)=u(x,y,z)\,.$$

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад x і y, то відповідне скалярне поле $u(x,y)$ називають плоским; якщо ж функція $u(M)$ залежить від трьох змінних: x, y і z, то скалярне поле $u(x,y,z)$ називають просторовим.

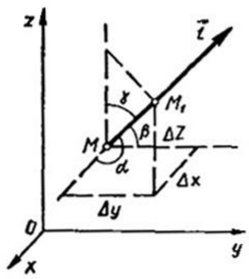


Рис. 3.7.

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові — за допомогою поверхонь рівня (п. 1.1). Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x; y; z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$.

Тоді

$$\Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Обчислимо тепер приріст $\Delta_l u$ функції $u(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$:

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, то цю границю називають похідною функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (3.8)$$

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $u(x, y)$, то напрям вектора $\vec{l}$ цілком визначається кутом $\alpha = \angle(\vec{l}, Ox)$. Тому, поклавши в формулі (8) $\gamma = \frac{\pi}{2}$ та $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

Приклад. Знайти похідну функції $u = 4x^2 - 5xy + z^2$ в точці $A(2; 2; -3)$ за напрямом від точки A до точки $B(4; 3; -5)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі.

Розв'язання. Знаходимо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси:

$$\vec{l} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}, \cos\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{1}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Тепер обчислимо значення частинних похідних у точці A і скористаємося формулою (3.8):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = (8x - 5y)|_A = 6, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = -5x|_A = -10, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = 2z|_A = -6$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = 6 \cdot \frac{2}{3} - 10 \cdot \frac{1}{3} - 6\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3}.$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то задана функція в даному напрямі зростає.

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$, називають градієнтом функції в цій точці і позначають $grad\, u$. Отже,

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (3.9)$$

Зв'язок між градієнтом і похідною в даній точці за довільним напрямом показує така теорема.

Теорема. Похідна функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x;y;z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{пр}_{\vec{l}}\, grad\, u\,.$$

Приклад. Знайти значення і напрям градієнта функції $u = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xyz$ в точці $M_0(1;2;0)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції в точці M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (4x - 4yz)|_{M_0} = 4;\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (4y - 4xz)|_{M_0} = 8;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (4z - 4xy)|_{M_0} = -8.$$

Тоді за відповідною формулою маємо

$$grad\, u|_{M_0} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Отже, $|grad\, u|_{M_0} = \sqrt{4^2 + 8^2 + (-8)^2} = \sqrt{144} = 12;$

$\cos\alpha = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$.

3.3. Локальні екстремуми функції двох змінних.

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в області D, а точка $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Означення. Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ $\big(f(M) > f(M_0)\big)$, то точку M_0 називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x,y)$, а число $f(M_0)$ — локальним максимумом (мінімумом) цієї функції (рис. 3.8.). Точки максимуму та мінімуму функції називають її точками екстремуму.

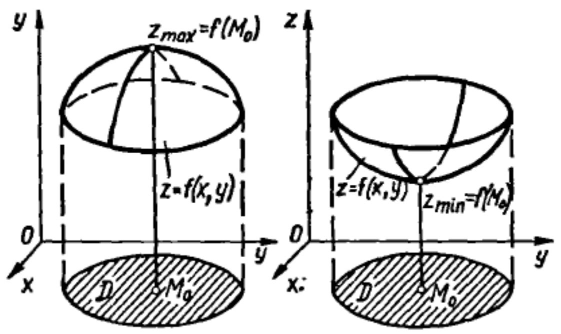


Рис. 3.8.

Теорема 1 (необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x,y)$ має в точці (x_0, y_0) локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних x та y дорівнюють нулю або не існують.

Подібна теорема справедлива для функції n змінних.

Означення. Точку (x_0, y_0), в якій частинні похідні першого порядку функції $f(x,y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x = f'_y = 0$, називають стаціонарною точкою функції $f(x,y)$.

Означення. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називаються критичними точками.

Таким чином, якщо функція в якій-небудь точці досягає екстремуму, то це може статися лише в критичній точці. Проте не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 1 встановлює лише необхідні, але не достатні умови екстремуму.

Теорема 2. (достатні умови екстремуму). Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ і деякому її околі функція $f(x, y)$має неперервні частинні похідні другого порядку. Якщо

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0\,,$$

то функція $f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точці M_0 функція $f(x, y)$ екстремуму не має.

На основі теорем 1 і 2 дістанемо правило дослідження диференційовних функцій двох змінних на екстремум. Щоб знайти екстремум диференційовної функції $z = f(x, y)$, необхідно:

1) знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) = 0; \end{cases}$$

2) у кожній стаціонарній точці (x_0, y_0) обчислити вираз

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2;$$

якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то (x_0, y_0) — точка екстремуму функції, причому точка максимуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$; якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то точка (x_0, y_0) не є точкою екстремуму функції;

3) обчислити значення функції $f(x, y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

Приклад. Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Розв’язання. Знаходимо частинні похідні

$$z'_x = 4(x^3 - x + y), z'_y = 4(y^3 + x - y)\,.$$

Стаціонарні точки функції визначимо із системи:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0; \\ y^3 + x - y = 0; \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, знайдемо $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$. Підставляючи $y = -x$ в перше рівняння дістанемо $x^3 - 2x = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, тоді $y_1 = 0$, $y_2 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$.

Наша функція має три стаціонарні точки: $M_1(0{,}0)$, $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Знайдемо величину $\Delta(x, y)$. Оскільки

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4,\ f''_{xy}(x, y) = 4,\ f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4\,,$$

то $\Delta(x, y) = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - 4^2 = 16(9x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2)$.

Обчислимо величину $\Delta(x, y)$ в кожній стаціонарній точці:

$$\Delta(M_1) = 0,\ \Delta(M_2) = \Delta(M_3) = 384 > 0,\ f''_{xx}(M_2) = f''_{xx}(M_3) = 20 > 0.$$

Таким чином, точки M_2 та M_3 — точки мінімуму. В цих точках $z_{min} = -8$.

У точці M_1 значення $\Delta(M_1) = 0$, тому теорему 2 застосувати не можна. Переконаємось, що в цій точці екстремум відсутній. Дійсно, якщо $y = 0$, то

$z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ в околі точки M_1. Якщо $y = x$, то $z = 2x^4 > 0$. Отже, в околі точки M_1 значення z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка M_1 не є екстремальною. Відзначимо, що інших екстремумів задана функція не має, оскільки точки, в яких похідні z'_x і z'_y не існують, відсутні.

3.4. Найбільше та найменше значення функції.

Відомо, що функція $z = f(x, y)$ задана і неперервна в замкненій та обмеженій області D, досягає в цій області найбільшого і найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму. Тому треба знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області D, розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, і обчислити значення функції в цих точках. Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області D. Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної. Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше та найменше значення.

Загального методу знаходження найбільшого та найменшого значень для довільної неперервної функції в замкненій обмеженій області D немає.

Приклад.

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy^2(4 - 2x - y)$ в замкненій області D, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 4$ (рис. 3.9).

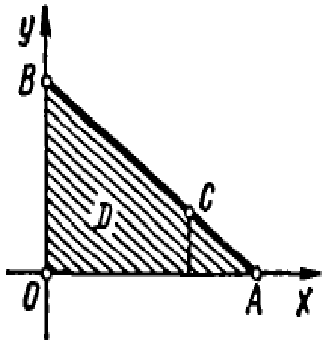


Рис. 3.9.

Розв’язання. Знаходимо стаціонарні точки. Маємо

$$z'_x = y^2(4 - 4x - y),\ \ z'_y = xy(8 - 4x - 3y).$$

Прирівнюючи похідні до нуля і скорочуючи їх на xy та x^2 (всередині трикутника OAB $x \neq 0$, $y \neq 0$), дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4 - 4x - y = 0; \\ 8 - 4x - 3y = 0, \end{cases}$$

звідки $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$.

Стаціонарна точка $M\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ належить області D, тому обчислюємо значення

$$z(M) = 2\,.$$

Рівняннями сторін OB та OA трикутника є $x = 0$, та $y = 0$, тому значення функції $z = 0$ в усіх точках відрізків OBі OA, зокрема $z(O) = z(A) = z(B) = 0$.

Знайдемо стаціонарні точки на стороні AB трикутника OAB. Рівняння цієї сторони $y = 4 - x$, тому $z = x(4 - x)^2(4 - 2x - 4 + x) = -x^2(4 - x)^2 = -x^4 + 8x^3 - 16x^2$, $0 \leq x \leq 4$. Далі дістанемо $z'_x = -4x^3 + 24x^2 - 32x = -4x(x^2 - 6x + 8) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. Оскільки $y = 4 - x$, то $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$. Знаходимо точки $B(0;\ 4)$, $C(2;\ 2)$ і $A(4;\ 0)$ і обчислюємо значення $z(C) = -16$.

Порівнюючи значення заданої функції в точках A, B, C, O, M, знаходимо найбільше та найменше значення:

$$\max_{(x;y)\in D} z = 2\,,\ \min_{(x;y)\in D} z = -16\,.$$

3.5. Умовний екстремум.

Нехай в області D задано функцію $z = f(x, y)$ і лінію L, яка визначається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ та лежить в цій області.

Задача полягає в тому, щоб на лінії L знайти таку точку $M(x; y)$, в якій значення функції $f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках лінії L. Такі точки M називають *точками умовного екстремуму* функції $f(x, y)$ на лінії L. На відміну від звичайного екстремуму значення функції в точці умовного екстремуму порівнюється із значеннями цієї функції не в усіх точках області D (чи δ-околу точки M), а лише в точках, які лежать на лінії L.

Назва «умовний екстремум» пов'язана з тим, що змінні x та y мають додаткову умову: $\varphi(x, y) = 0$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається рівнянням зв'язку; якщо це рівняння можна розв'язати відносно однієї змінної, наприклад y: $y = \psi(x)$, то, підставляючи замість y значення $\psi(x)$ у функцію $z = f(x, y)$, дістаємо функцію однієї змінної $z = f\big(x, \psi(x)\big)$. Оскільки додаткова умова врахована, то задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної (вивчали раніше).

Проте не завжди можна розв'язати рівняння зв'язку відносно y чи x. Тоді розв'язують поставлену задачу так.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, де $y = \psi(x)$, як складену функцію. З необхідної умови екстремуму випливає, що в точках екстремуму

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

У цьому випадку $\frac{dy}{dx}$ означає похідну неявної функції y, заданої рівняннями зв'язку $\varphi(x, y) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\,, \text{тому } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) = 0\,,$$

тобто

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}\,.$$

Позначивши останні відношення через $(-\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ (знак мінус взято для зручності, а саме число λ може мати довільний знак), знайдемо, що в точці умовного екстремуму виконуються умови

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda\,, \text{тобто } f'_x + \lambda\varphi'_x = 0\,, f'_y + \lambda\varphi'_y = 0\,.$$

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму мають задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad (3.10) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Аналізуючи цю систему, помічаємо, що знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ звелось до знаходження звичайного екстремуму функції

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y). \qquad (3.11)$$

Функція (3.11) називається функцією Лагранжа, а число λ — множником Лагранжа.

Умови (3.10) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. З теореми 2 (про достатні умови екстремуму функції однієї змінної) випливає, що характер умовного екстремуму (достатні умови) можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: якщо в стаціонарній точці $d^2F>0$ ($d^2F<0$), то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).

Для функції $u=f(x,y,z)$ з рівняннями зв'язку $\varphi_1(x,y,z)=0$, $\varphi_2(x,y,z)=0$ функція Лагранжа записується у вигляді

$$\Phi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z).$$

Стаціонарні точки умовного екстремуму знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z)=0; \\ \varphi_2(x,y,z)=0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}=0, \end{cases}$$

а достатні умови існування умовного екстремуму в цих точках можна визначити за знаком диференціала $d^2\Phi$.

Розглянутий метод можна поширити на дослідження умовного екстремуму функції довільного числа змінних.

Приклад. Знайти найбільше значення функції $z=xy$, якщо x та y додатні і задовольняють рівняння зв'язку $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}-1=0$.

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа (3.11):

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left(\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}-1\right).$$

Користуючись системою (3.10), знаходимо стаціонарні точки цієї функції:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{8}-1=0; \\ y+\lambda\dfrac{x}{16}=0; \\ x+\lambda\dfrac{y}{4}=0; \\ x>0, y>0, \end{cases}$$

звідки $x=4$, $y=2$, $\lambda=-8$. Отже, маємо одну стаціонарну точку $M(4;2;-8)$.

Щоб визначити характер умовного екстремуму в цій точці, знайдемо за допомогою формули другого диференціала функції двох змінних другий диференціал функції Лагранжа при $\lambda=-8$: $d^2F=-\frac{1}{2}dx^2+2dxdy-2dy^2+\left(y-\frac{x}{2}\right)d^2x+(x-2y)d^2y$.

Знайшовши з рівняння зв'язку $dy(4;2)=-\frac{1}{2}dx$, дістанемо

$$d^2F(M) = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dx\left(-\frac{1}{2}dx\right) - 2\left(-\frac{1}{2}dx\right)^2 = -2dx^2 < 0\,,$$

тому точка $(4;2)$ є точкою умовного максимуму функції $z = xy$. При цьому $z_{max} = 8$.

Цей результат легко перевірити, знайшовши звичайний екстремум функції:

$$z = x\sqrt{8 - \frac{x^2}{4}}\,.$$

ЗМІСТ