Державний університет
“Житомирська політехніка”
Кафедра робототехніки, електроенергетики та автоматизації
імені проф. Б.Б. Самотокіна

Теорія автоматичного керування

Конспект лекцій

Богдановський М.В.

Теорія автоматичного управління. Лінійні системи. Вступ

Лекція №1

Основні визначення

Теорія автоматичного управління (ТАУ) - наука про управління, що вивчає завдання аналізу і синтезу систем автоматичного управління (САУ), як одного з класів кібернетичних систем.

Сучасна теорія управління займає одне з провідних місць в технічних науках і в той же час відноситься до однієї з галузей прикладної математики. З іншого боку, теорія і практика автоматичного управління пов'язані з обчислювальною технікою.

ТАУ є теоретичною базою в циклі спеціальних дісціплин, що розкривають теоретичні основи і методи розрахунку, аналізу і синтезу засобів і систем автоматизації управління технічними системами.

Основні задачі

Основні задачі теорії автоматичного управління:

1) Аналіз САУ. Дослідження стійкості, структурних властивостей, динамічних показників якості, точності і т.д .;

2) Синтез САУ. Синтез алгоритмів або аналітичних виразів, що описують блоки системи і їх зв'язок і забезпечують задану (оптимальну) якість управління.

Слід зазначити, що дослідження САУ включає наступні найважливіші етапи:

- моделювання з використанням комп'ютерів і універсальних (математичних) або спеціалізованих (предметно орієнтованих) прикладних програм;
- синтез САУ із залученням сучасного математичного апарату - методів лінійної алгебри, чисельних методів, теорії оптимізації і машинних методів розрахунку;
- проектування САУ з використанням апаратних засобів обчислювальної техніки і їх програмного забезпечення - операційних систем реального часу, засобів автоматизації програмування і т.д.

Основні поняття

Управління - це процес впливу на об'єкт з метою забезпечення необхідного перебігу процесів в самому продукті або необхідного його стану. Основою управління є отримання і обробка інформації про стан об'єкта, зовнішніх умовах його роботи, для визначення впливів, які необхідно вжити до об'єкта, щоб забезпечити досягнення мети управління.

Об'єкт управління (ОУ) може належати як до неживої природі - може бути технічним пристроєм (двигун, літак, верстат і т.д.), так і до живої (тварина, колектив людей і т.д.).

Управління може здійснюватися людиною, в цьому випадку говорят про ручне управління, якщо управління здійснюється технічним пристроєм, воно називається автоматичним.

Фізичні величини, що визначають хід технологічного процесу, називаються параметрами технологічного процесу . Наприклад, параметрами технологічного процесу можуть бути температура, тиск, витрата, швидкість, напруга і т.д.

Основні поняття

Автоматичне управління - автоматична підтримка сталості будь-якої фізичної величини (температури, тиску, рівня рідини і т. д.), що характеризує технологічний процес, або її зміну по заданому закону, або зміна її в

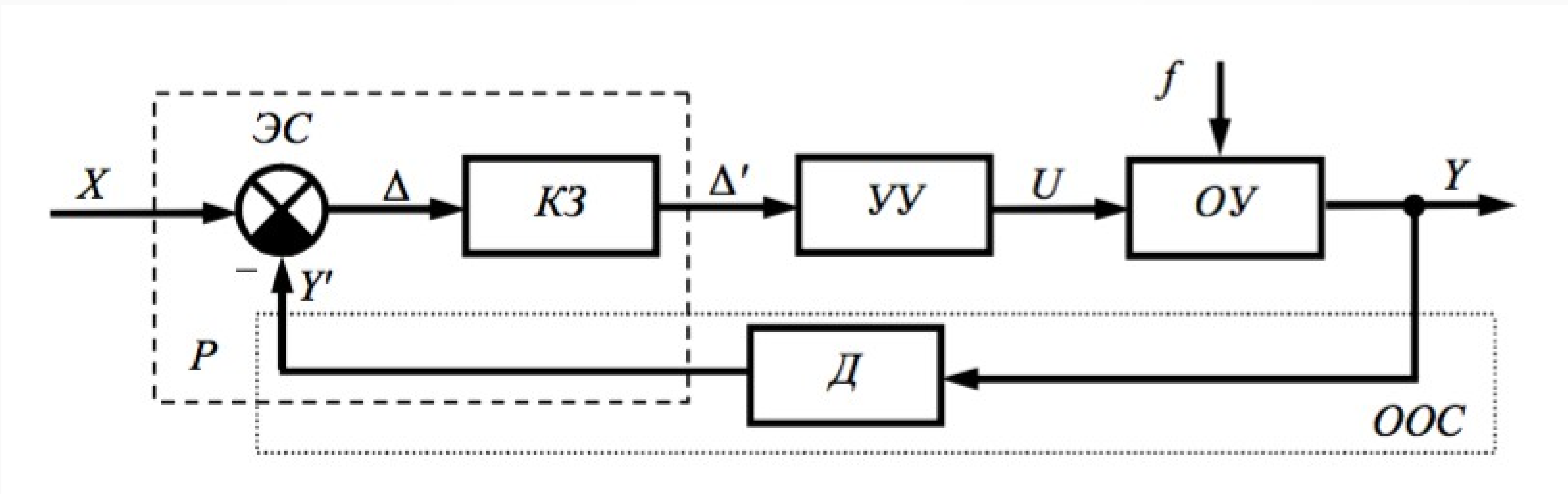
відповідно до що вимірюється зовнішнім процесом (слідкуюче регулювання).

Алгоритм управління - послідовність операцій, які повинні бути реалізовані технічними засобами відповідно до отриманої інформації із результатами проміжних обчислень, щоб забезпечити протікання технологічного процесу в потрібному напрямку.

Регулювання - вид управління, коли завданням є забезпечення зміни будь-якого параметра системи по визначеному наперед заданому закону. Автоматичне регулювання виконується пристроєм керуючого впливу до регулюючого органу об'єкта управління.

Для здійснення автоматичного регулювання в систему вводиться регулятор, що виробляє спільно з керуючим пристроєм (КП) керуючий вплив. Об'єкт управління, автоматичний регулятор і керуючий пристрій разом утворюють автоматичну систему регулювання (АСР).

Структурна схема типової САК



Розтлумачення

Вхідний задає вплив X - вплив, що подається навхід системи або пристрою і визначальне необхідний закон з трансформаційних змін регульованої величини Y.

Вихідна регульована величина Y - вихідний параметр тех-технологічного процесу, який необхідно підтримувати постійним або змінювати за певним законом.

Значення регульованої величини Y ' , отримане в конкретний момент часу на підставі даних деякого вимірювального приладу - датчика Д , називається її виміряним значенням.

Керуючий вплив U - вплив керуючого пристрою на об'єкт управління.

Зовнішнє рівноваги вплив f - вплив зовнішнього середовища на об'єкт управління, що виводить систему зі стану дівноваги і прагне порушити функціональний зв'язок між заданою дією і регульованою величиною.

Автоматична система регулювання - автоматична система з замкнутим ланцюгом, в якій сигнал управління U виробляється регулятором Р в результаті порівняння виміряного датчиком Д значення вихідної величини Y ' з заданим значенням X.

Розтлумачення

Регулятор Р - комплекс пристроїв, призначених для формування керуючого впливу на систему і забезпечують автоматичну підтримку заданого значення регульованої вели чини Y або автоматичну зміну її за певним законом.

Керуючий пристрій УУ - пристрій, що здійснює вплив на об'єкт управління з метою забезпечення необхідного режиму роботи.

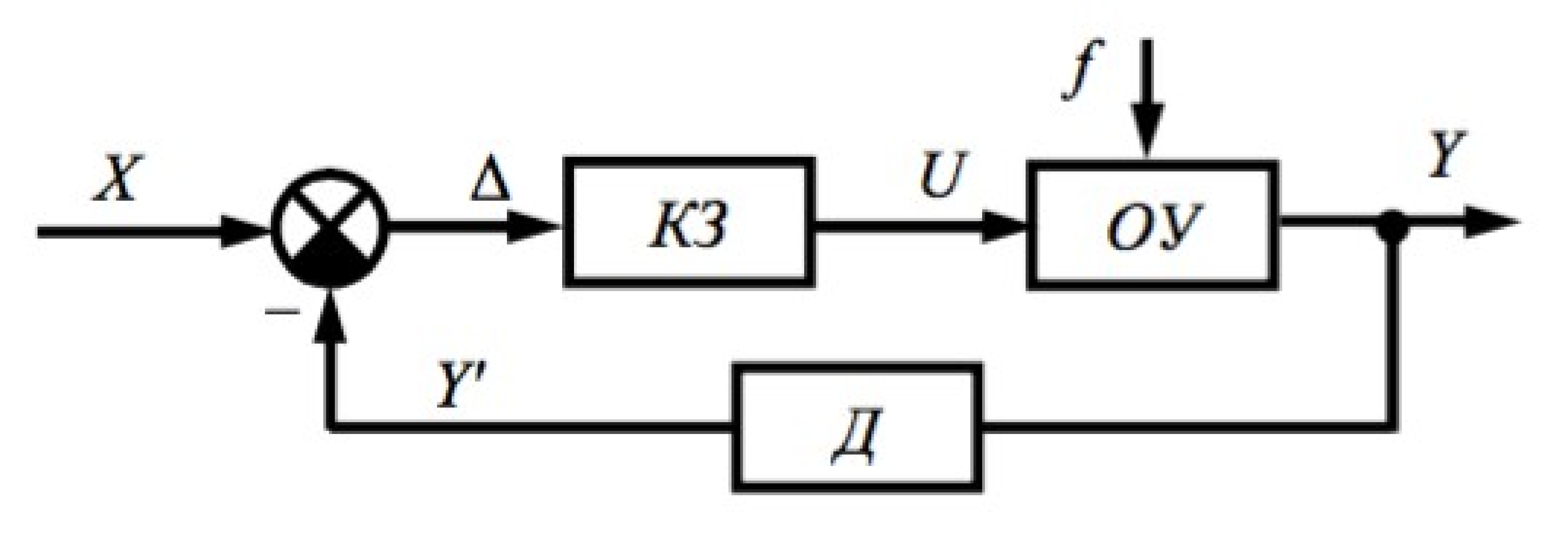
Об'єкт управління ОУ - пристрій, необхідний режим роботи якого повинен підтримуватися ззовні спеціально організованими керуючими впливами.

У певні моменти часу в регуляторі відбувається порівняння заданого X з виміряним значенням регульованої вели чини Y ' , далі відбувається обробка помилки регулювання Δ коректуючою ланкою КЗ регулятора і видача керуючим устрой- ством керуючих впливів U на об'єкт управління ОУ.

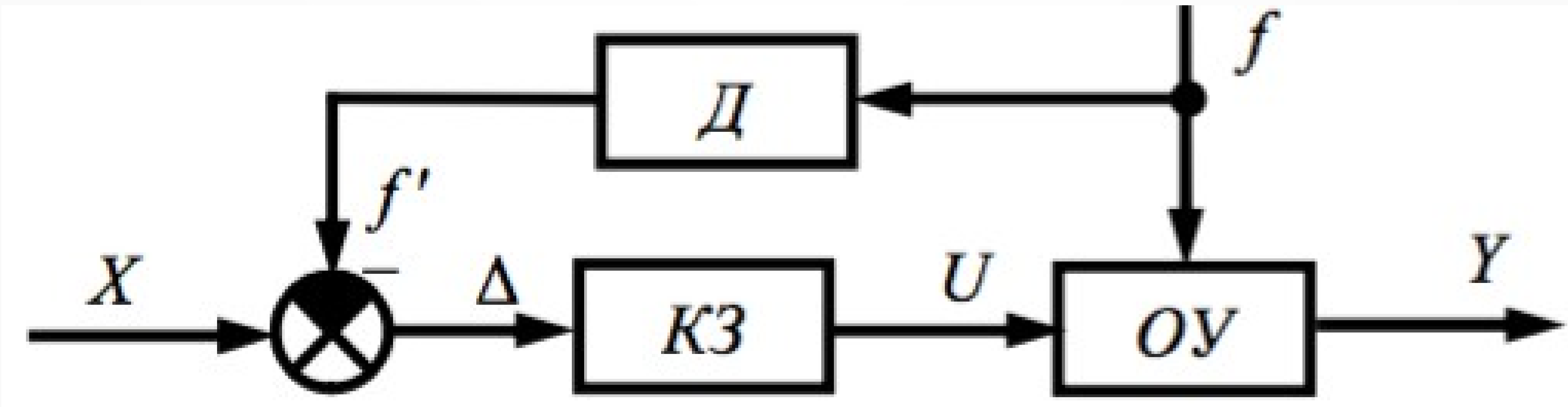
Помилка регулювання Δ - різниця між заданим X і виміреним (дійсним) Y ' значенням регульованої величини.

Зв'язок в структурній схемі АСР, спрямована від виходу Y до входу елемента порівняння ЕС регулятора розглянутого ділянки ланцюга впливів, називається зворотним зв'язком ОС (див. п. 5.5). для отримання помилки регулювання Δ необхідна наявність від’ємного зворотного зв'язку ООС.

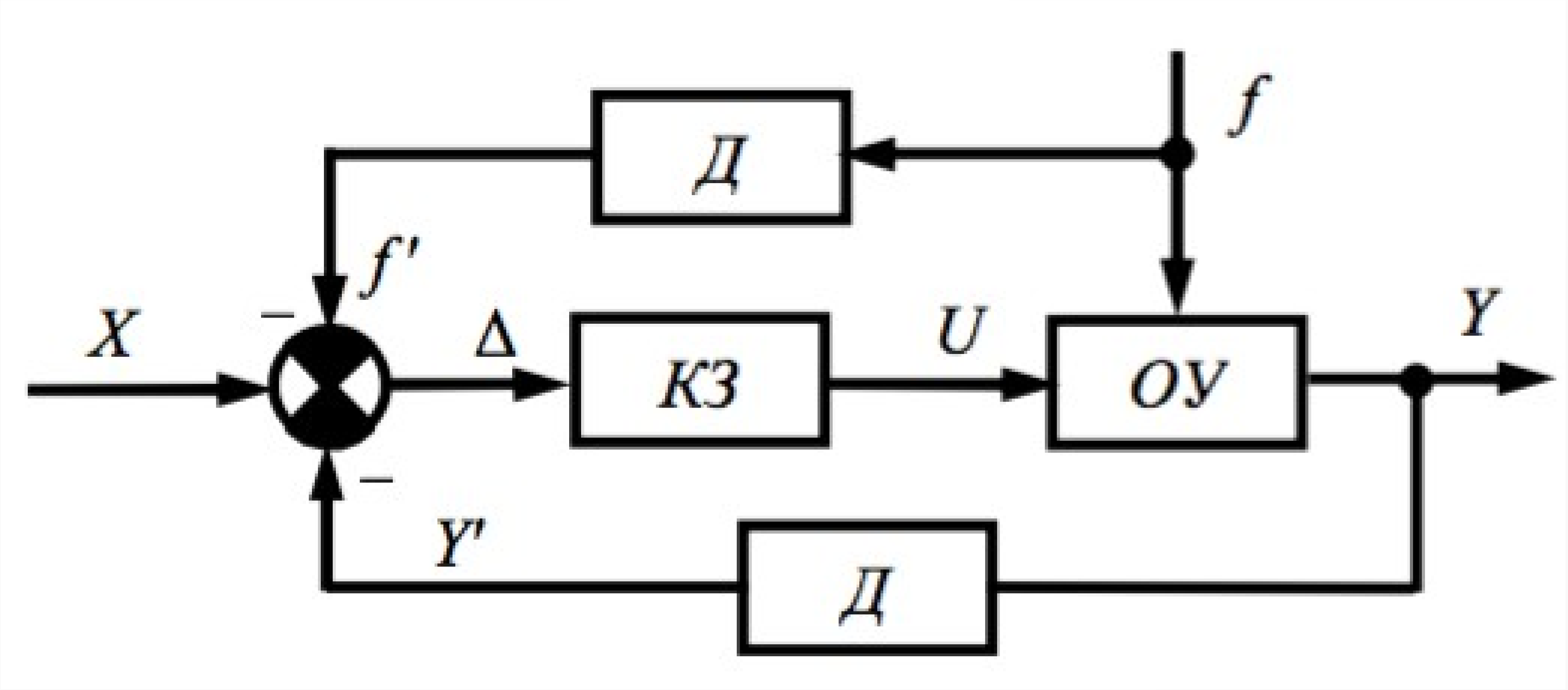
Керування за відхиленням



Керування за збуренням



Комбінована схема



Класифікація АСР

1. За принципом управління:

• по відхиленню ;

• по обуренню ;

• комбіновані .

2. За локальним завданням управління:

• стабілізуюча АСР - система, алгоритм функціонування якої містить припис підтримувати регульовану величину на постійному значенні (X = const);

• програмна АСР - система, алгоритм функціонування якої містить припис змінювати регульовану величину відповідно до заздалегідь заданої функції (X змінюється програмно);

• стежить АСР - система, алгоритм функціонування котрої містить припис змінювати регульовану величину в залежності від заздалегідь невідомої величини на вході АСР (X = var).

Класифікація АСР

3. По поведінці в сталому режимі:

• статичні - вихідна величина встановлюється в постійний стан після припинення зміни керуючого впливу;

• астатичні - вихідна величина продовжує змінюватися після припинення зміни керуючого впливу.

4. За кількістю контурів:

• одноконтурні - містять один контур регулювання;

• багатоконтурні - містять кілька контурів.

5. За кількістю регульованих величин:

• одномірні - системи з однією регульованою величиною;

• багатовимірні - системи з декількома регульованими величинами.

Багатовимірні АСР в свою чергу діляться на системи:

а) незалежного регулювання , в яких регулятори безпосередньо не пов'язані і можуть взаємодіяти тільки через загальний для них об'єкт управління;

б) підпорядкованого регулювання, в яких регулятори різних параметрів одного і того ж технологічного процесу пов'язані між собою поза об'єктом управління.

Класифікація АСР

6. За характером використовуваних для управління сигналів:

• неперервні - видача керуючих впливів на об'єкт управління відбувається безперервно в будь-який момент часу;

• дискретні (релейні, імпульсні, цифрові) - видача керуючих впливів на об'єкт управління відбувається в строго певні моменти часу або за певних значеннях параметрів системи.

7. По виду використовуваної для регулювання енергії:

• пневматичні;

• гідравлічні;

• електричні;

• механічні та ін.

8. За характером математичних співвідношень:

• лінійні;

• нелінійні.

9. За характером зовнішніх впливів:

• детерміновані;

• стохастичні.

Математичні моделі систем управління

Лекція №2

Види мат. моделей САК

Математична модель - наближене опис якогось явища бо класу явищ зовнішнього світу, виражене за допомогою математичної символіки. Математична модель може бути представлена аналітично рівняннями, передавальними функціями, графічно (перехідними або частотними характеристиками) або в табличній формі.

Математичною моделлю динамічної системи прийнято називати сукупність математичних символів, однозначно визначаючих розвиток процесів в системі, тобто її рух.

При цьому в залежності від використовуваних символів розрізняють аналітичні і графоаналитичні моделі. Аналітичні моделі будуються за допомогою літерних символів, в той час як графоаналітичні допускають застосування графічних позначень.

Залежно від використовуваних операторів лінійні неперервні моделі ділять на часові і частотні . До часових моделей відносяться ті, у яких аргументом є час, де диференціальні і різницеві рівняння, записані в явному вигляді або в операторніій формі. Частотні моделі передбачають використання операторів, аргументом яких є частота відповідно сигналу, тобто оператори Лапласа, Фур'є і т. д.

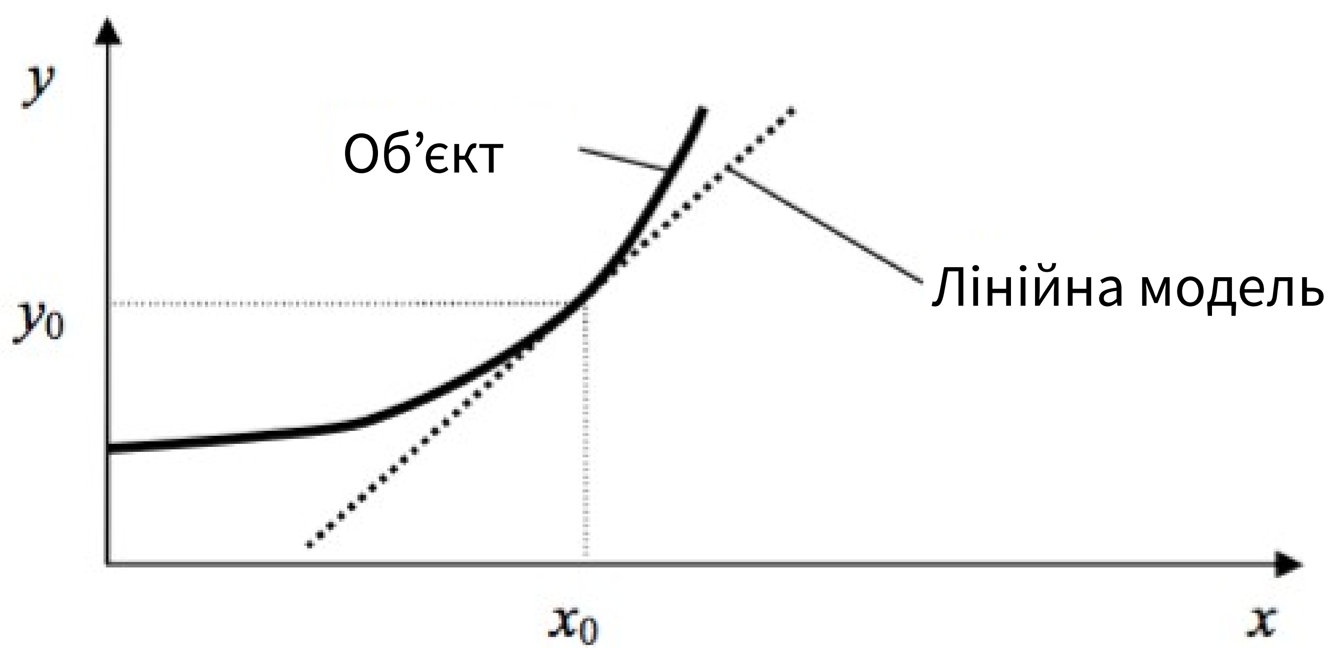
Графоаналітична модель “вхід-вихід”

X — вхідний сигнал (); Y — вихідний сигнал (реакція); f — сигнал збурення

Модель в диференційній формі

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots\ldots, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots\ldots) = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y = 0.$$



Лінеаризація моделі

Розклад в ряд Тейлора до першого порядку в околі (x0, y0)

$$y \approx f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 (x - x_0)$$

Підстановка x=x0

$$y - f(x_0) = k \cdot \Delta x;$$

$$\Delta y = k \cdot \Delta x.$$

Лінеаризація нелінійного диф. рівняння

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \ldots = 0$$

Основні правила диференціювання

Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$
$C \cdot g(x)$	$C \cdot g'(x)$
$g(x) \pm q(x)$	$g'(x) \pm q'(x)$
$g(x) \cdot q(x)$	$g'(x) \cdot q(x) + g(x) \cdot q'(x)$
$\dfrac{g(x)}{q(x)}$	$\dfrac{g'(x)q(x) - g(x)q'(x)}{q^2(x)}, q(x) \neq 0$
$\dfrac{C}{q(x)}, C = \text{const}$	$-\dfrac{Cq'(x)}{q^2(x)}, q(x) \neq 0$
$g(x)^{q(x)}$	$g(x)^{q(x)}\left(g'(x)\dfrac{q(x)}{g(x)} + q'(x)\ln g(x)\right), g(x) > 0$
$C = \text{const}$	0
$C \cdot x$	C
x^C	$C \cdot x^{C-1}$
C^x	$C^x \cdot \ln C$
$\log_c x$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln C}, x \neq 0, C \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$- \sin x$

Приклад лінеаризації

$$F = 3xy - 4x^2 + 1{,}5\dot{x}y - 5\dot{y} - y = 0 \qquad x_0 = 1,\ \dot{x}_0 = 0,\ \dot{y}_0 = 0$$

Визначення y0

$$3y_0 - 4 + 0 = 0 + y_0 \Rightarrow y_0 = 2$$

Часні похідні

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 = (3y - 8x)|_0 = 3 \cdot 2 - 8 \cdot 1 = -2;$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 = (3x + 1{,}5\dot{x} - 1)|_0 = 3 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 0 - 1 = 2;$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_0 = (1{,}5y)|_0 = 1{,}5 \cdot 2 = 3;$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_0 = -5.$$

$$-5\Delta\dot{y} + 2\Delta y + 3\Delta\dot{x} - 2\Delta x = 0$$

Перетворення Лапласа

Застосовується для опису лінійних систем

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 \frac{dx}{dt} + b_1 x$$

Інтегрування по комплексній змінній p

$$X(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt \text{ и } Y(p) = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt$$

$$a_0 p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_2 Y(p) = b_0 p X(p) + b_1 X(p);$$

$$p \equiv \frac{d}{dt}.$$

Зображення $L[x(t)] = X(p)$

Оригінал $x(t) = L^{-1}[X(p)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(p) e^{pt} dt$

Вирази перетворень Лапласа

Назва функції	$x(t) \leftrightarrow X(p)$
ідеальне запізнення	$\delta(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-\tau p}$
одинична функція із запізненням	$1(t)(t-\tau) \longleftrightarrow \frac{e^{-\tau p}}{p}$
дельта-функція	$\delta \longleftrightarrow 1$
ступенева функкія часу	$t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$
одинична функція	$1(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p}$
одинична функція швидкості	$1(t)t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2}$
квадратична часу	$1(t) \cdot t^2 \longleftrightarrow \frac{2}{p^3}$
кубічна часу	$1(t) \cdot t^3 \longleftrightarrow \frac{6}{p^4}$
експоненційне загасання	$Me^{-\alpha t} \longleftrightarrow \frac{M}{(p+\alpha)}$
добуток константи	$\alpha \cdot x(t) \longleftrightarrow \alpha \cdot X(p)$

Вирази перетворень Лапласа

Назва функції	$x(t) \leftrightarrow X(p)$
додавання функцій	$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i(p)$
диференціювання функцій	$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow p^n \cdot X(p)$
інтегрування функцій	$\int_0^t x(t)dt \longleftrightarrow \frac{X(p)}{p}$
синус функції	$\sin(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
косинус функції	$\cos(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2}$

Приклад перетворення Лапласа

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=2\frac{dx}{dt}+12x$$

При одиничній східчастій дії

$x(t) = 1(t)$, $X(p) = 1/p$

$$p^2 \cdot Y(p) + 5 \cdot p \cdot Y(p) + 6 \cdot Y(p) = 2 \cdot p \cdot X(p) + 12 \cdot X(p),$$

$$p^2 \cdot Y(p) + 5 \cdot p \cdot Y(p) + 6 \cdot Y(p) = 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p} + 12 \cdot \frac{1}{p},$$

$$Y(p) \cdot (p^3 + 5 \cdot p^2 + 6 \cdot p) = 2 \cdot p + 12.$$

Визначення зображення вихідного сигналу

$$Y(p)=\frac{2p+12}{p^3+5p^2+6p}$$

Приклад перетворення Лапласа

Визначення оригіналу сигналу потребує спрощення на елементарні дроби

$$Y(p) = \frac{2p+12}{p^3+5p^2+6p} = \frac{2p+12}{p(p+2)(p+3)} = \frac{2}{p} - \frac{4}{p+2} + \frac{2}{p+3}$$

Знаходження за таблицею перетворень Лапласа оригіналу

$$y(t) = 2 - 4 \cdot e^{-2t} + 2 \cdot e^{-3t}$$

Передатна функція

Передатною функцією моделі “вхід-вихід” називається відношення вихідного сигналу до вхідного в операторній формі (перетворені за Лапласом) за нульових початкових умов (x0 = 0, y0 = 0). Інші сигнали приймаються рівними 0

$$Wx(p) = Y(p) \div X(p) \qquad Wf(p) = Y(p) \div f(p)$$

Режими та характеристики САК

Лекція №3

Режими роботи АСР

Системи можуть перебувати в одному з двох режимів: стаціонарному (сталому) і перехідному .

- **Перехідний режим** - режим зміни в часі різних змінних системи (фазові або вихідні параметри, швидкість або прискорення), в ході якого система змінює свій стан і прагне перейти в новий або повернутися в старий стаціонарний режим.
- **Стаціонарний режим** - режим, при якому розбіжність між істинним значенням регульованої величини і її заданим значенням буде постійним у часі.

Стаціонарний режим роботи системи може бути двох видів: статичний і динамічний .

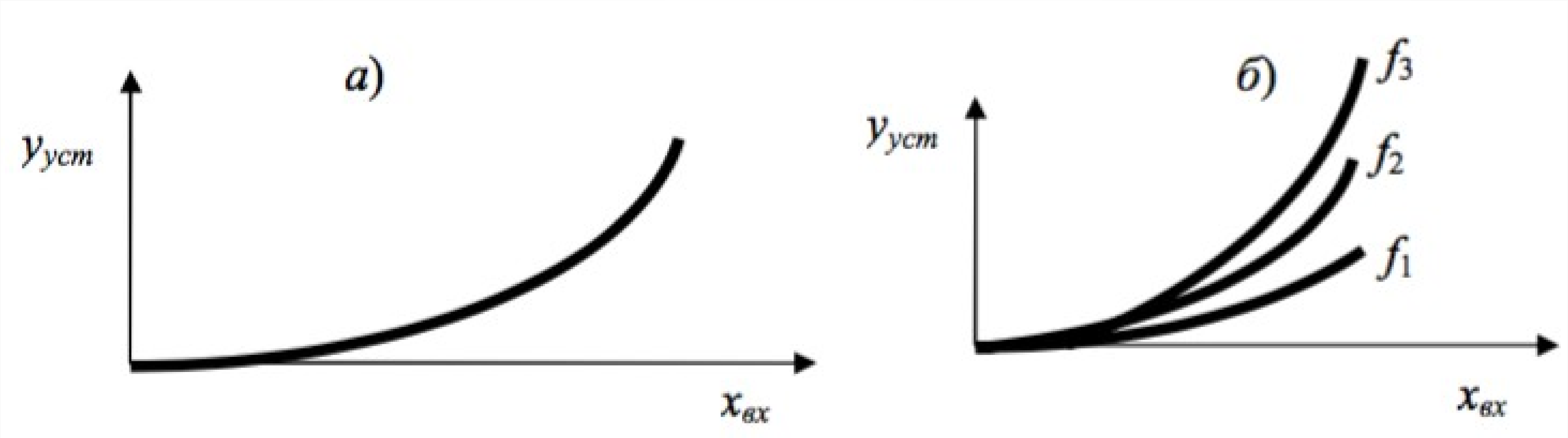
- **Статичний режим** - це режим, при якому система знаходиться в стані спокою внаслідок того, що всі зовнішні впливи і параметри системи не змінюються в часі, тобто швидкість трансформаційних змін вихідного параметра системи дорівнює нулю.
- **Динамічний режим** - це режим, при якому прикладені до системи зовнішні впливи змінюються за будь-якою закону, що встановився. В результаті чого система переходить в режим вимушеного руху, тобто швидкість або прискорення вихідного параметра системи постійні в часі.

Режими роботи та види АСР

- Стаціонарні динамічні режими бувають двох типів
- **детермінований стаціонарний режим** - це режим, при якому на систему діють детерміновані (регулярні) стаціонарні впливи. Наприклад, гармонійні коливання.
- **випадковий стаціонарний режим** - це режим, при якому на систему діють випадкові, але стаціонарні функції.
- Система називається **статичною**, якщо при постійній вхідній дії помилка управління прагне до постійного значення, залежно від величини впливу. Статична АСР - це автоматична система із замкнутим ланцюгом, яка після приведення до одноконтурной схеми містить тільки статичні елементи.
- Система, в якій величина сталої помилки залежить від величини збурення при постійному завданні, називається статичною по збуренню . Якщо стала помилка не залежить від величини збурення, то система є астатичною 1-го по рядка. Якщо стала помилка не залежить від першої похідної збурення, то система є астатичной 2 го порядку. Крім того, розрізняють статизм і астатизм по задаючому впливу
- Система називається **астатичною** , якщо при постійній вхідній дії помилка управління прагне до нуля незалежно від величини впливу. Астатична АСР - це система з замкнутим ланцюгом, яка після приведення до одноконтурній схеми містить хоча б один астатичний елемент.

Статичні характеристики АСР

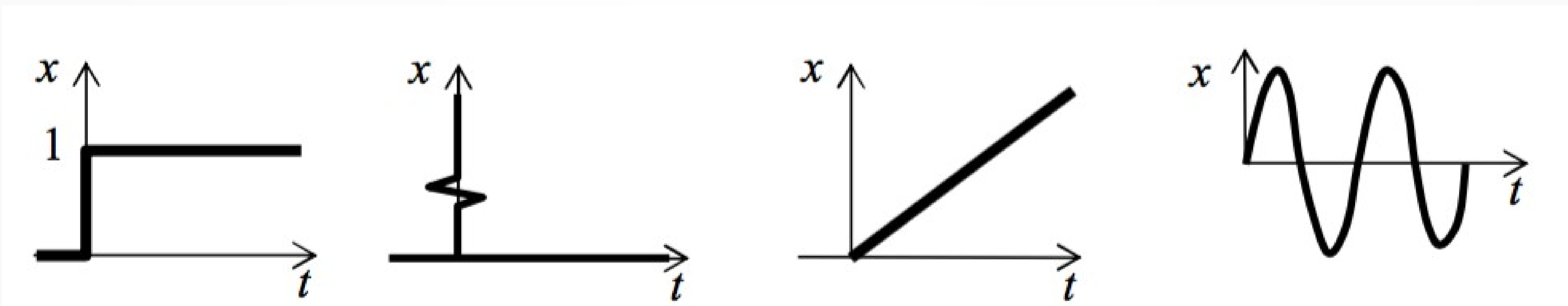
$$y_{уст} = F(x_{вх})$$



а) у випадку відсутності збурення; б) у випадку стаціонарних збурень

Часові характеристики АСР

Види вхідних функцій сигналів



Одинична східчаста Дельта Лінійна Гармонійна

$$1(t) = \begin{cases} 0, \text{ при } t < 0; \\ 1, \text{ при } t \geq 0. \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, \text{ при } t = 0; \\ 0, \text{ при } t \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1(t) \text{ или } \delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$$

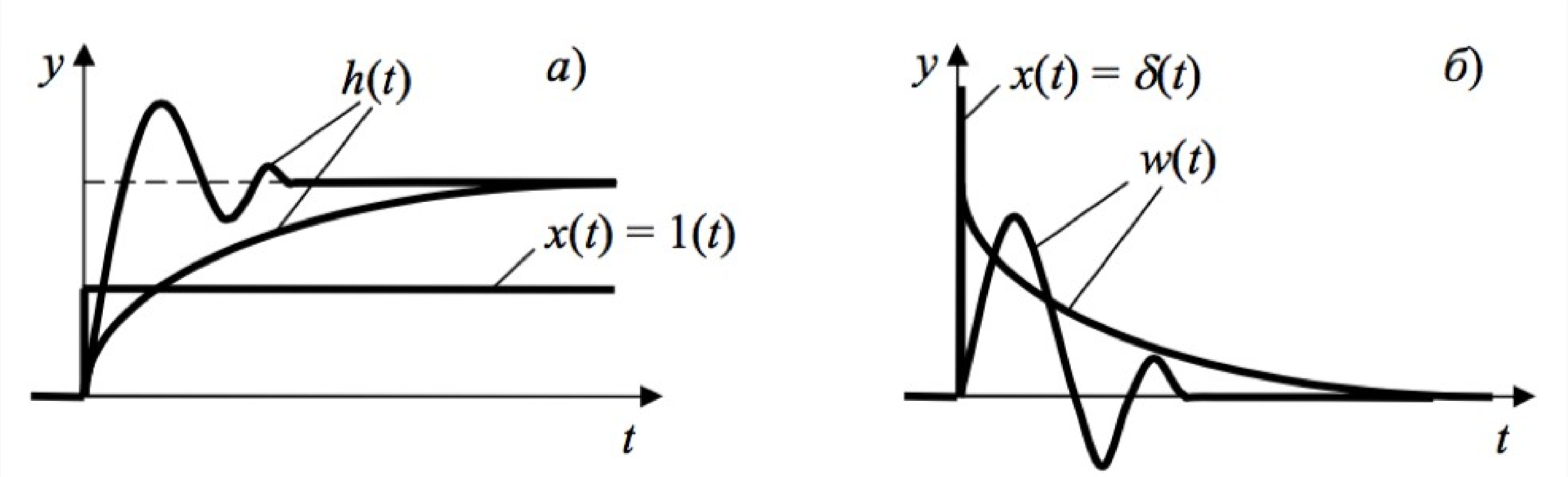
$$X(t) = K * t$$

$$X(t) = A * \sin(t)$$

Перехідна та імпульсна характеристики САК

Перехідною часовою характеристикою h (t) називається залежність вихідної величини системи в часі при одиничному східчастому впливі або вираз y (t) за умови x (t) = 1 (t) при нульових початкових умовах, тобто при x (0) = 0 і y (0) = 0

Перехідною імпульсною характеристикою w (t) називається залежність вихідної величини системи в часі при вхідній дії у вигляді δ -функції при нульових початкових умовах, тобто при x (0) = 0 і y (0) = 0



Частотні характеристики САК

Частотною характеристикою називаються вимушені коливання на виході ланки y (t), викликані гармонійним впливом на його виході x (t).

$$\begin{cases} x(t) = x_{\max} \sin \omega t; \\ y(t) = y_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

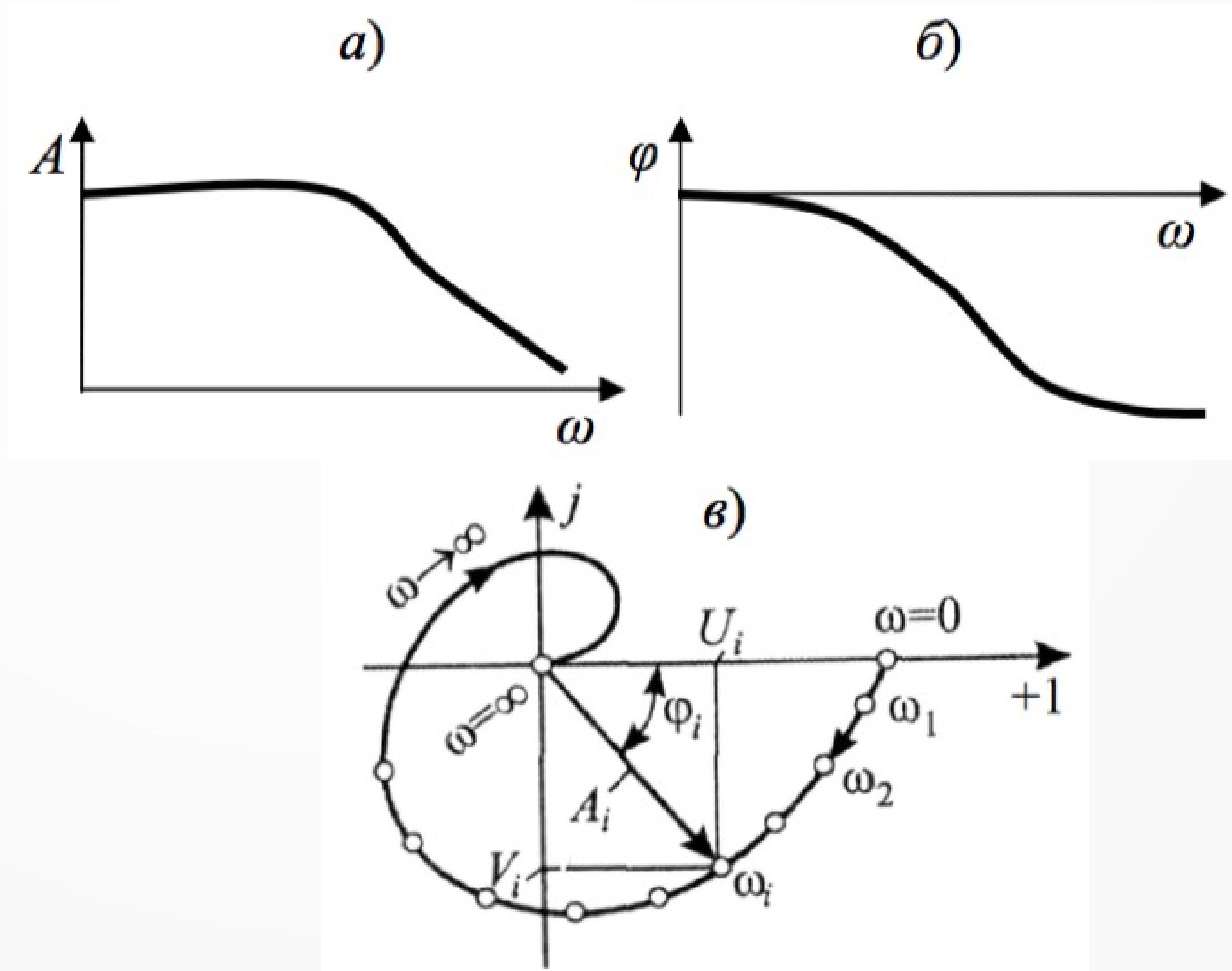
де x max , y max - амплітуда на вході і виході, ω - частота сигналу, ф - фаза.

- **Амплітудна частотна характеристика (АЧХ)** - це залежність амплітуди сигналу на виході ланки до амплітуди на вході A = y max / x max від частоти вхідного сигналу ω. Фазова частотна характеристика (ФЧХ) - залежність кута зсуву по фазі ф сигналу на виході ланки від частоти вхідного сигналу ω.
- **Амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ)** - це годограф, побудований на комплексній площині [+ 1; j] або в полярній системі координат, причому кожній точці годографа відповідає певне значення частоти ω.

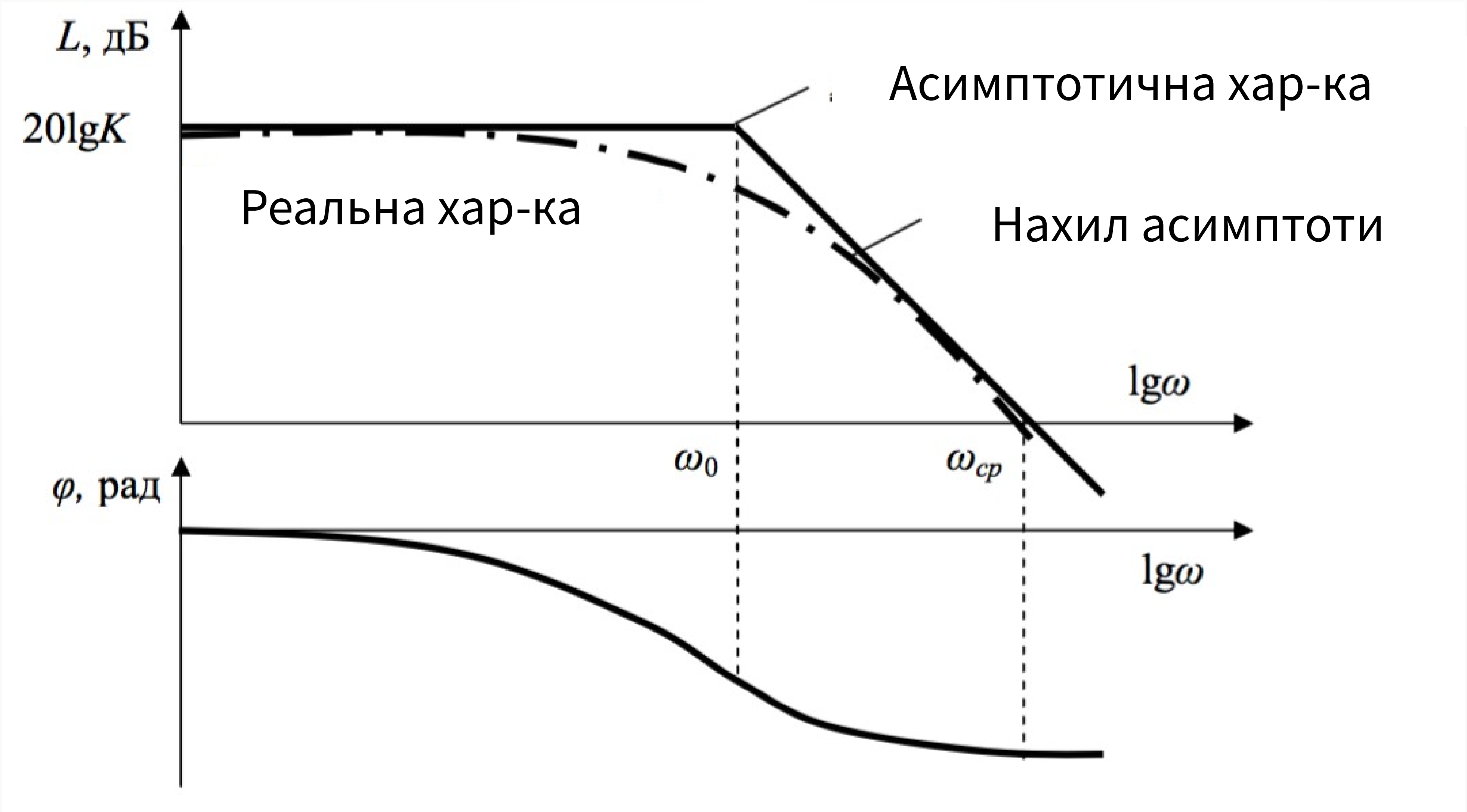
Частотні характеристики САК

АЧХ, ФЧХ

АФЧХ



Логарифмічні частотні характеристики САК



Логарифмічні частотні характеристики САК

- Ордината ЛАХ (L) вимірюється в децибелах [дБ], lg20 A . Децибел (L) - логарифмічна одиниця рівнів затухання чи підсилення. 1 Б = 10 дБ - визначає збільшення потужності сигналу в 10 разів.
- Абсциса ЛАХ і ЛФХ (lg ω) вимірюється в декадах. Декада - логарифмічна одиниця частот, відповідна зміни частоти ω в 10 разів.
- Для спрощення аналізу логарифмічних характеристик використовують асимптотичне спрощення графічного представлення ЛАХ. **Асимптотична ЛАХ** - це ідеалізована ЛАХ, що складається з асимптот (відрізків горизонтальних і похилих прямих, дотичних до реальноі ЛАХ). Асимптотична ЛАХ характеризується наступними параметрами:
- L = 20lg K і lg ω = 0 (ω = 1) - початкова точка побудови, де K - загальний коефіцієнт передачі системи; ω0 - частота сполучення, на якій спостерігається зміна нахилу асимптотичної ЛАХ; ωср - частота зрізу - перехід L в негативну область; нахил ЛАХ вимірюється в децибелах на декаду [дБ / дек].

Характеристики елементарних ланок САК

Лекція №4

Елементарні динамічні ланки

Елементарною динамічною ланкою АСР є складова частина моделі системи, яка описується диференціальним рівнянням не вище другого порядку. За динамічними властивостям елементарні ланки діляться на наступні різновиди:

- позиційні;
- диференційні;
- інтегруючі.

Позиційними ланками є такі ланки, у яких в сталому режимі спостерігається лінійна залежність між вхідними та вихідними сигналами. При постійному рівні вхідного сигналу сигнал на виході також прагне до постійного значення.

Диференціюючими є такі ланки, у яких в усталеному режимі вихідний сигнал пропорційний похідній по часу від вхідного сигналу.

Елементарні динамічні ланки

Інтегруючими є такі ланки, у яких вихідний сигнал пропорційний інтегралу за часом від вхідного сигналу.

Елементарні динамічні ланки:

- ідеальна підсилююча;
- чистого запізнення;
- інтегруюча;
- диференціююча і реальна диференціююча;
- апериодчна;
- коливальна;
- форсуюча.

Ідеальна підсилююча ланка

Рівняння ланки

$$y = K \cdot x.$$

Передатна функція

$$W(p) = K.$$

Перехідна функція

$$h(t) = K \cdot 1(t).$$

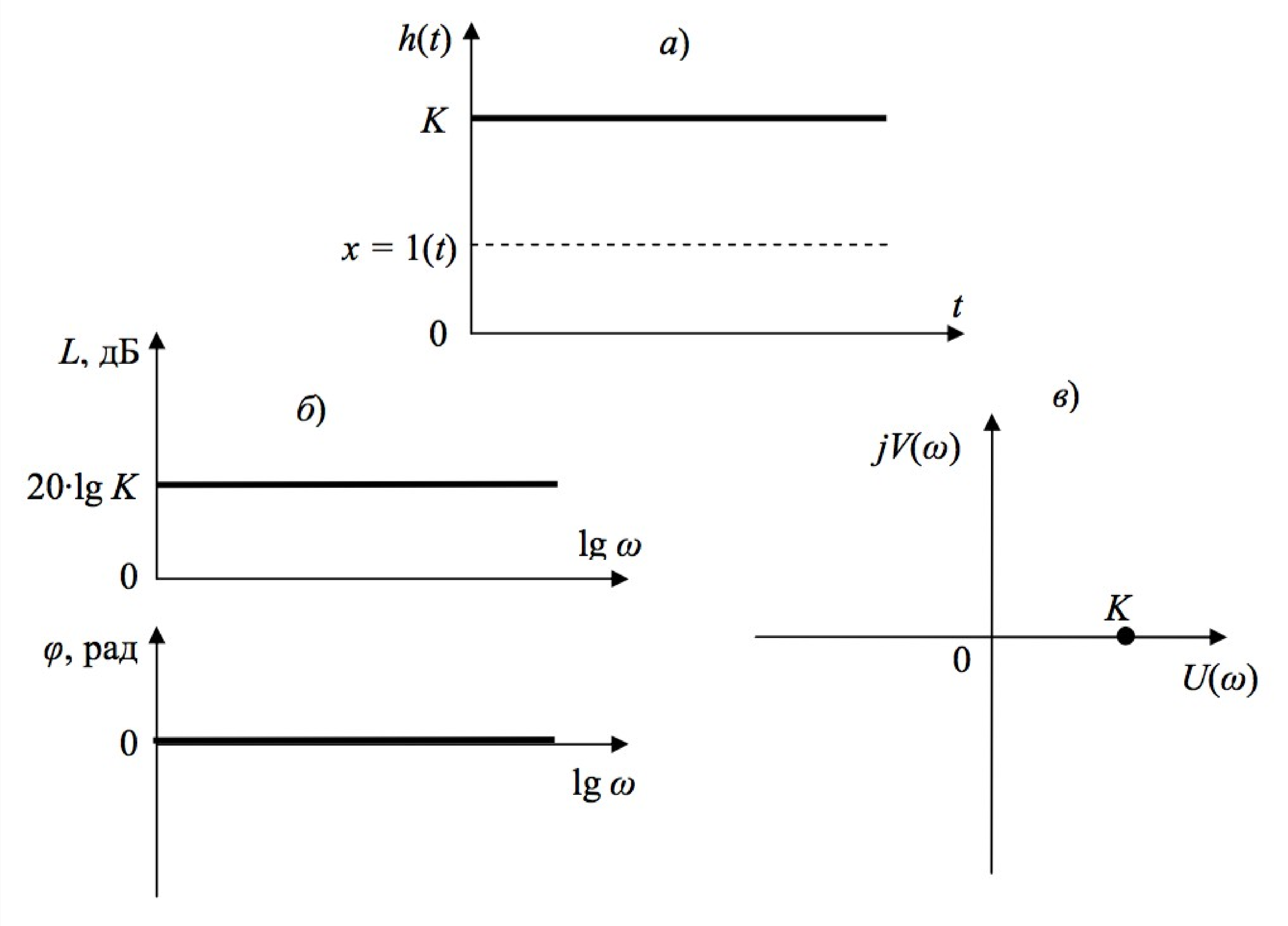
Функції частотних характеристик

$$A(\omega) = K\,;$$

$$L(\omega) = 20\lg K\,;$$

$$\varphi(\omega) = 0\,.$$

Ідеальна підсилююча ланка



Ланка чистого запізнення

Рівняння ланки

$$y(t) = x(t - \tau).$$

Передатна функція

$$W(p) = e^{-\tau p}.$$

Перехідна функція

$$h(t) = 1(t - \tau).$$

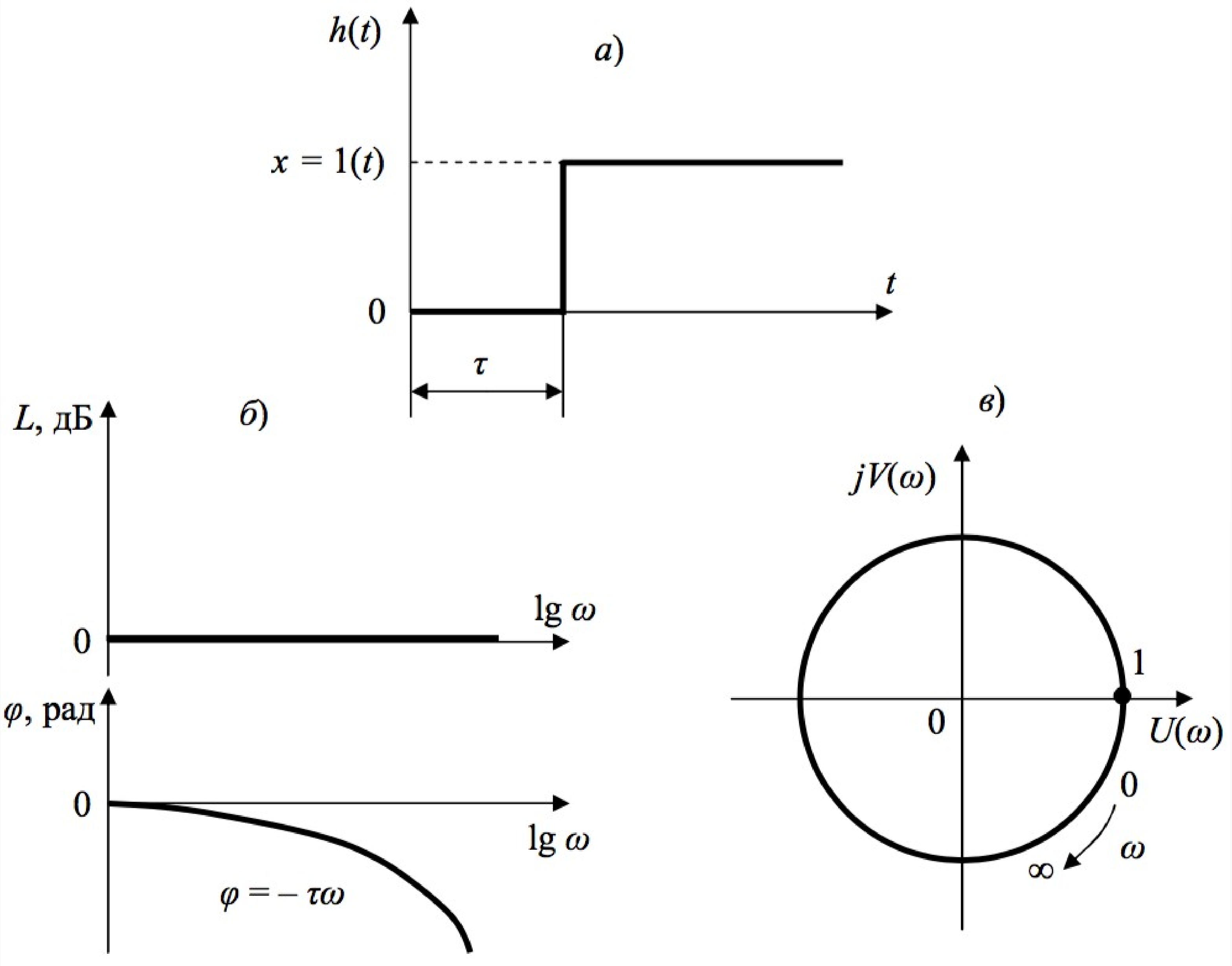
Функції частотних характеристик

$$A(\omega) = 1;$$

$$L(\omega) = 0;$$

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

Ланка чистого запізнення



Ідеальна інтегруюча ланка

Рівняння ланки

$$y = K\int_0^t x dt .$$

Передатна функція

$$W(p) = \frac{K}{p} .$$

Перехідна функція

$$h(t) = K \cdot t .$$

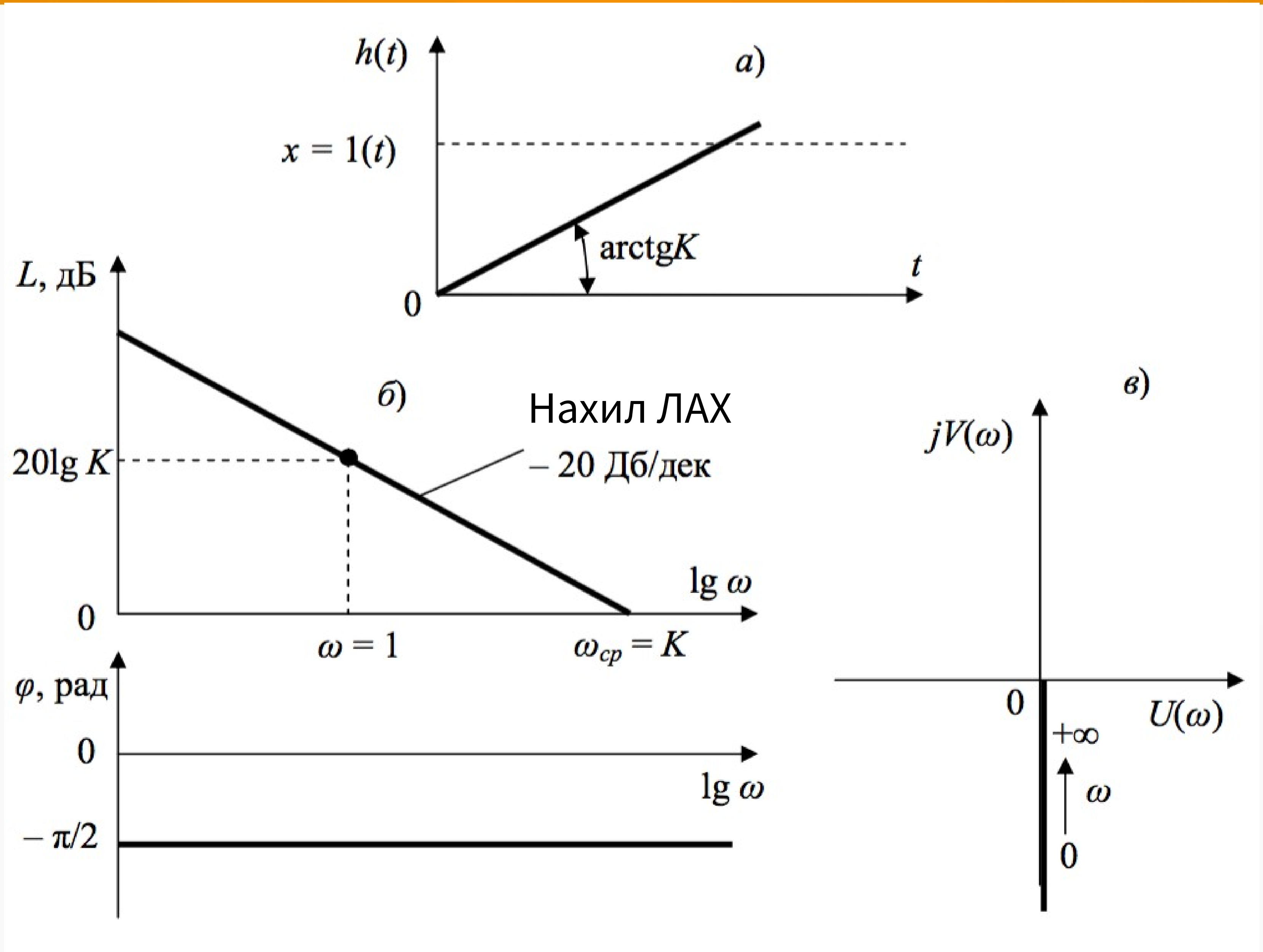
Функції частотних характеристик

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega} ;$$

$$L(\omega) = 20\lg\frac{K}{\omega} = 20\lg K - 20\lg\omega ;$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(-\frac{K/\omega}{0}) = -\frac{\pi}{2} .$$

Ідеальна інтегруюча ланка



Ідеальна диференціююча

Рівняння ланки

$$y = K\frac{dx}{dt}.$$

Передатна функція

$$W(p) = Kp.$$

Перехідна функція

$$h(t) = K\delta(t).$$

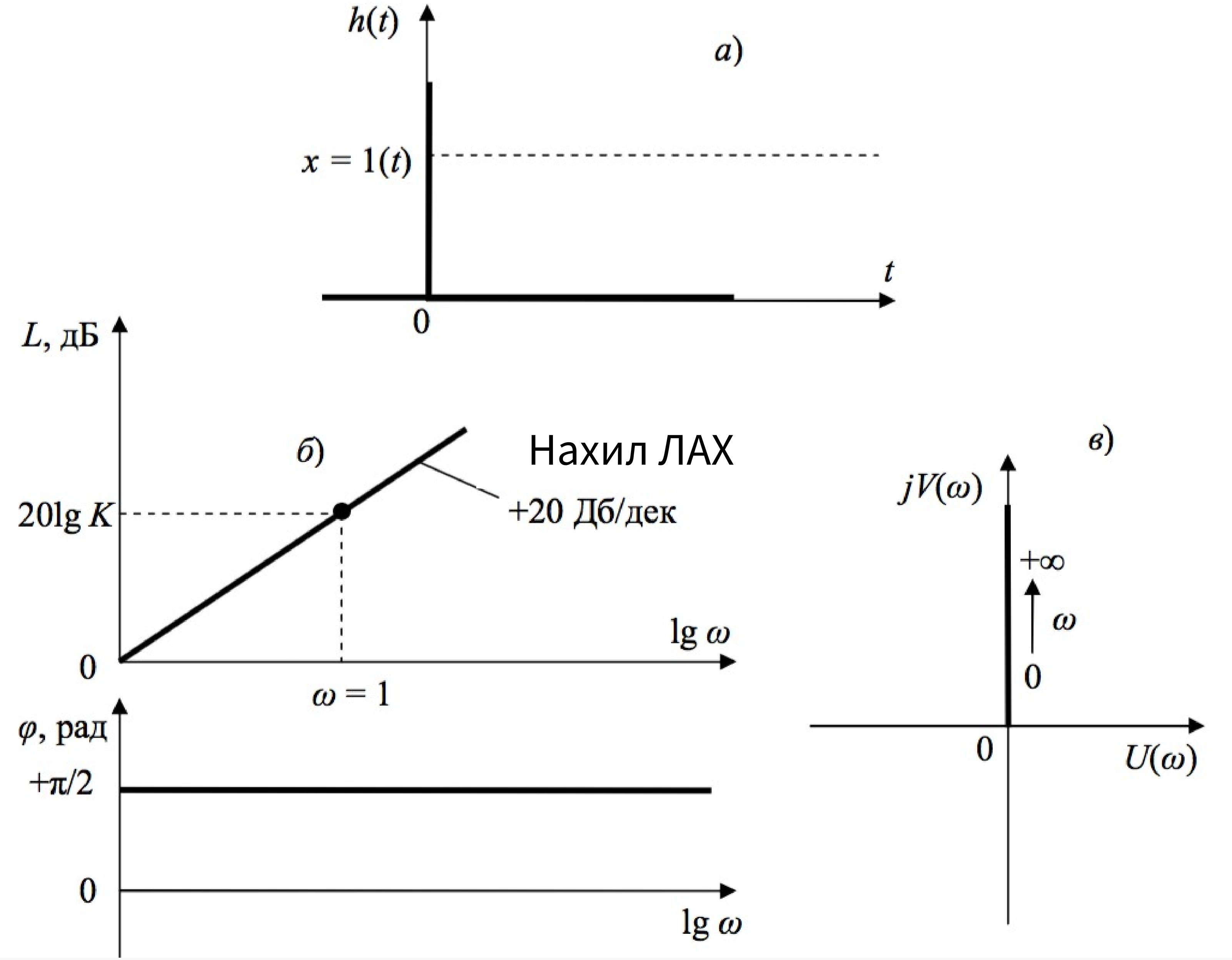
Функції частотних характеристик

$$A(\omega) = K\omega;$$

$$L(\omega) = 20\lg K\omega = 20\lg K + 20\lg \omega;$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{K\omega}{0}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Ідеальна диференціююча



Реальна диференціююча

$$h(t) = \frac{K}{T}\left(e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Функції частотних характеристик

$$A(\omega) = \frac{K\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}};$$

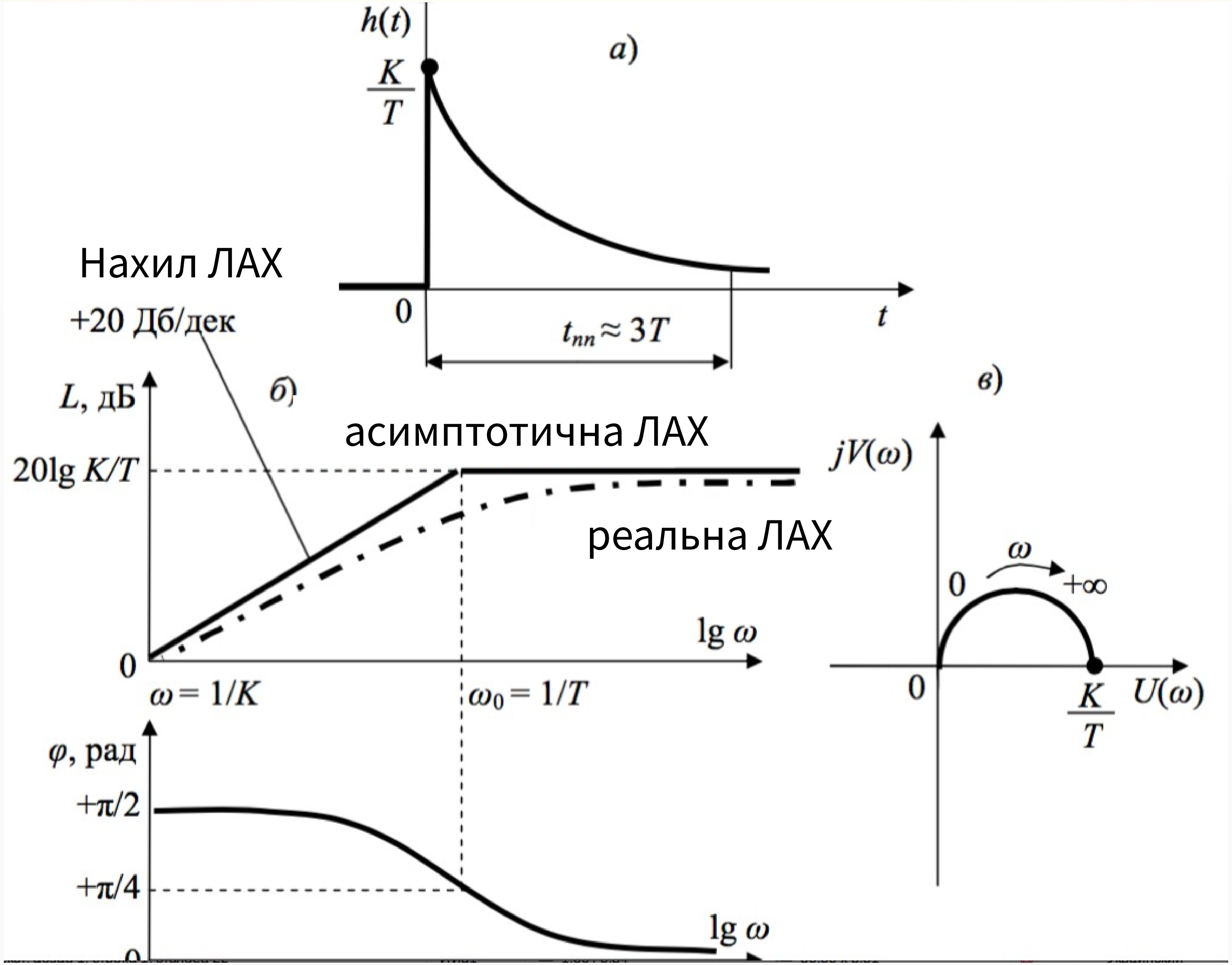
$$L(\omega) = 20\lg K\omega - 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1};$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{T\omega}\right).$$

АФЧХ реальної ланки

$$W(j\omega) = \frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} + j\frac{K\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Реальна диференціююча



Аперіодична ланка

Рівняння ланки

$$T\frac{dy}{dt}+y=Kx.$$

Передатна функція

$$W(p)=\frac{K}{Tp+1}.$$

Перехідна функція

$$h(t)=K(1-e^{-\frac{t}{T}}).$$

Функції частотних характеристик

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}};$$

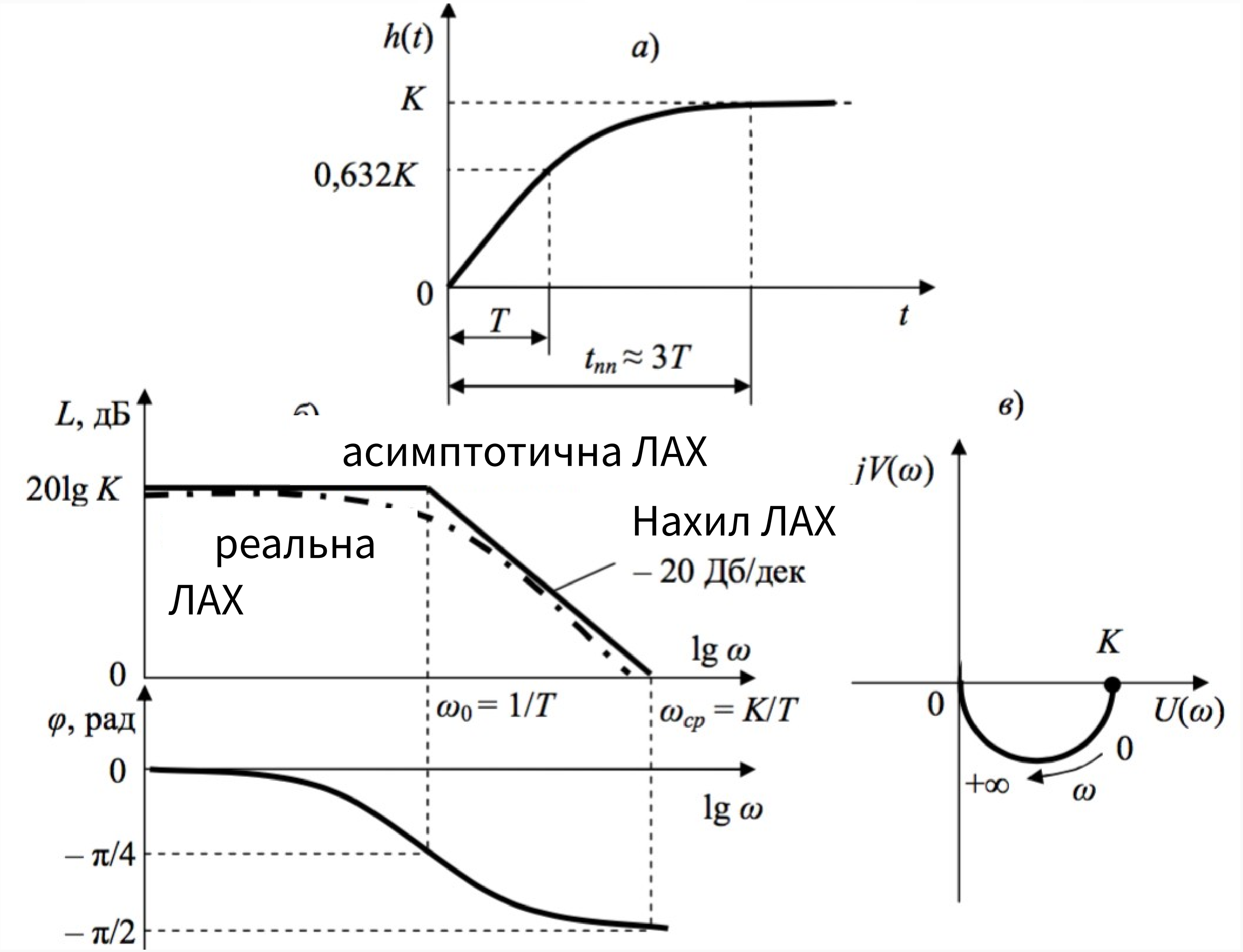
$$L(\omega)=20\lg K-20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2};$$

$$\varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}(T\omega).$$

АФЧХ реальної ланки

$$W(j\omega)=\frac{K}{T^2\omega^2+1}-j\frac{KT\omega}{T^2\omega^2+1}.$$

Аперіодична ланка



Форсуюча ланка

$$\frac{y}{T} = K\frac{dx}{dt} + \frac{K}{T}.$$

Передатна функція

$$W(p) = K(Tp + 1).$$

Перехідна функція

$$h(t) = K(T\delta(t) + 1).$$

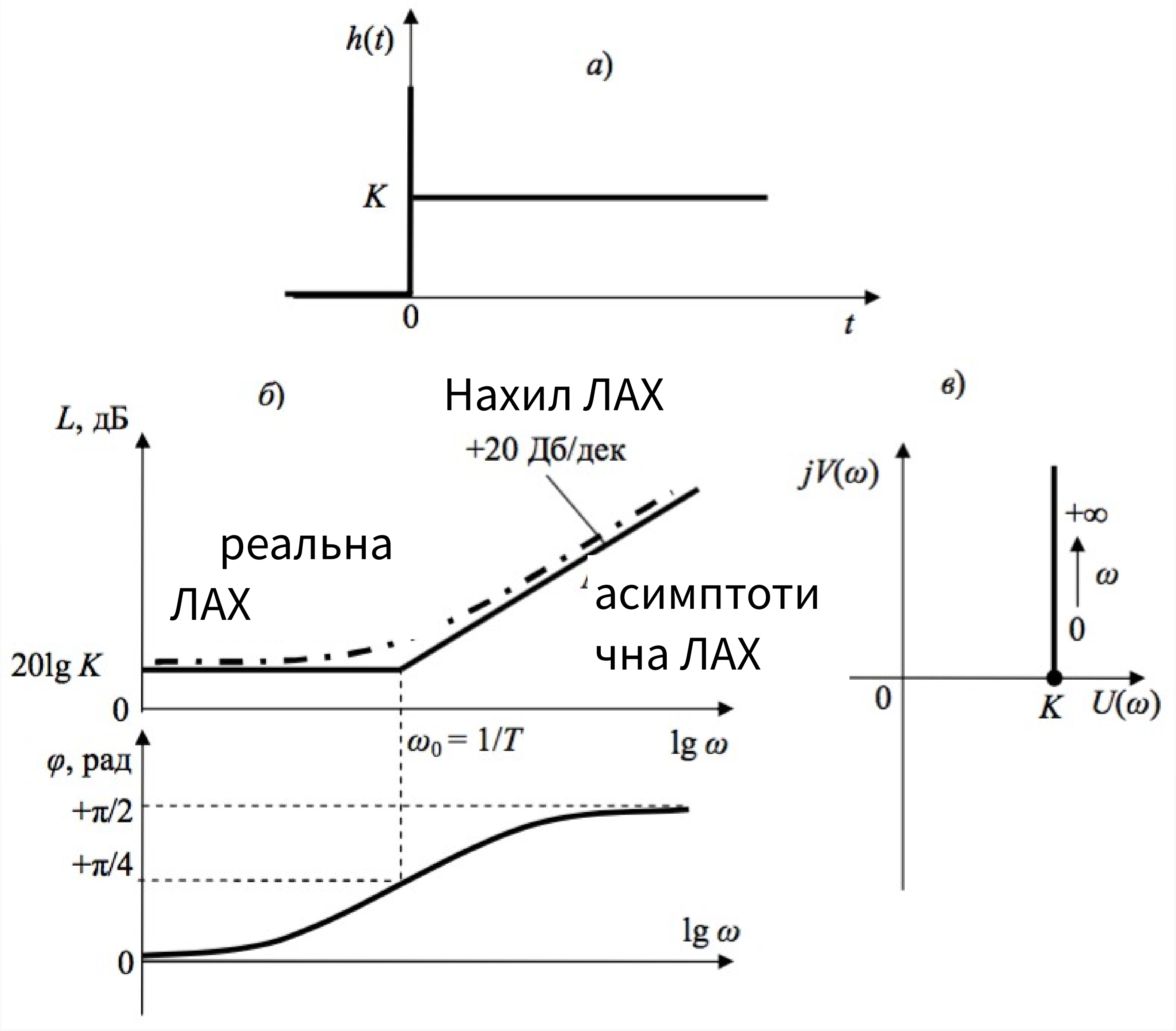
Функції частотних характеристик

$$A(\omega) = K\sqrt{T^2\omega^2 + 1};$$

$$L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} T\omega.$$

Форсуюча ланка



Структурні моделі та схеми структурних перетворень САК

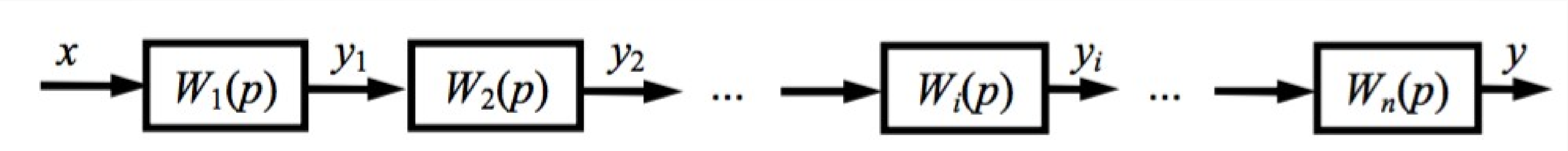
Лекція №5

Визначення та характеристика структурних схем

Структурна схема моделі системи - це графічне зображення математичної моделі системи як сукупності елементарних динамічних ланок та зв'язків між ними. Ланки не відбивають конструктивні і функціональні ознаки АСР, а відображають її динамічні властивості.

Ланки структурної схеми можуть не збігатися з її реальними складовими частинами тому основна вимога до структурної схеми полягає в тому, щоб її результуючий алгоритм збігався з алгоритмом функціонування реальної АСР. За структурною схемою АСР, знаючи передатну функцію окремих ланок, можна отримати передавальну функцію або характеристики АСР в цілому.

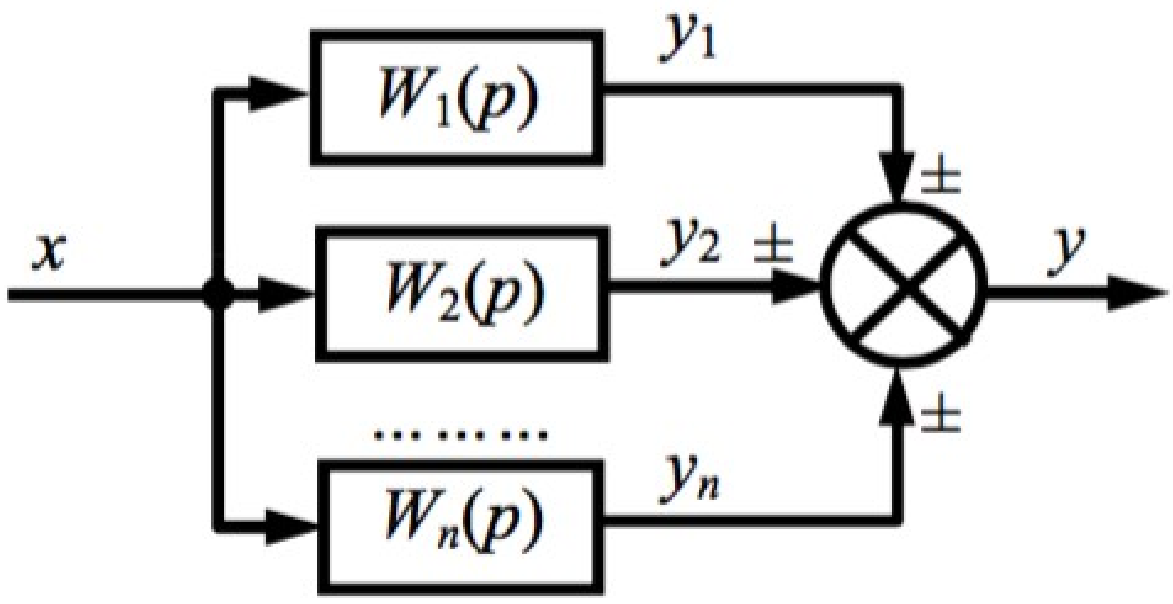
Послідовне з’єднання ланок



$$\begin{cases} y_1 = W_1(p) \cdot x; \\ y_2 = W_2(p) \cdot y_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y = W_n(p) \cdot y_{n-1}. \end{cases}$$

$$W_{ПОСЛ}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \ldots \cdot W_n(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p).$$

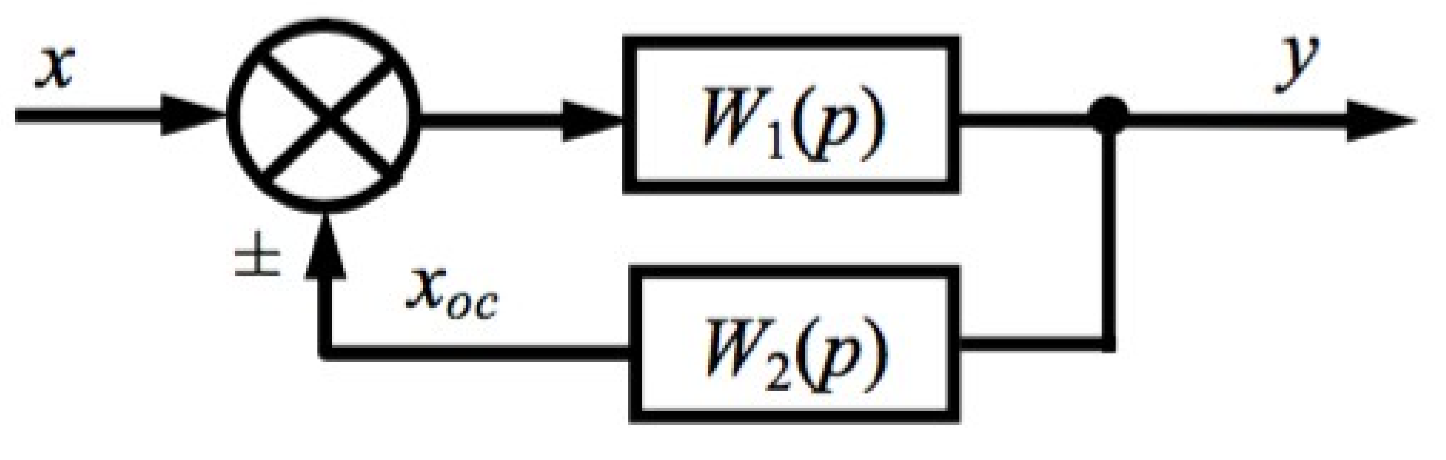
Паралельне з'єднання ланок



$$y = y_1 \pm y_2 \pm \ldots \pm y_n.$$

$$W_{ПАР}(p) = W_1(p) \pm W_2(p) \pm \ldots \pm W_n(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p).$$

САК із зворотнім зв'язком



$$\begin{cases} y = W_1(p)\cdot(x \pm x_{oc}); \\ x_{oc} = W_2(p)\cdot y. \end{cases}$$

$$y = W_1(p)\cdot\left(x \pm W_2(p)\cdot y\right);$$

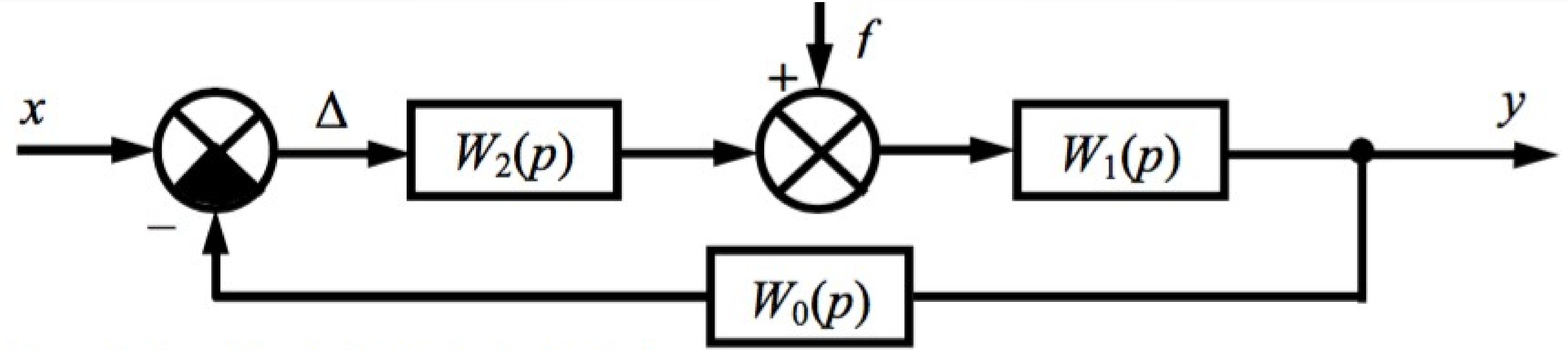
$$y = W_1(p)\cdot x \pm W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot y;$$

$$y\left(1 \mp W_1(p)\cdot W_2(p)\right) = W_1(p)\cdot x.$$

$$W_{ЗАМ}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}$$

$$W_1(p)\cdot W_2(p) = W_{РАЗ}(p).$$

Структурна схема одноконтурної АСР



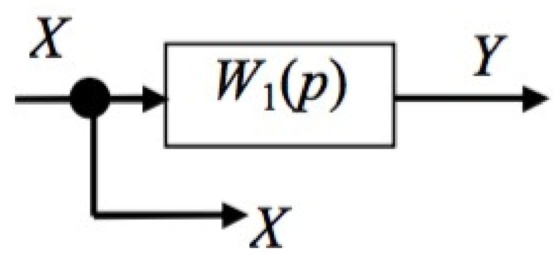
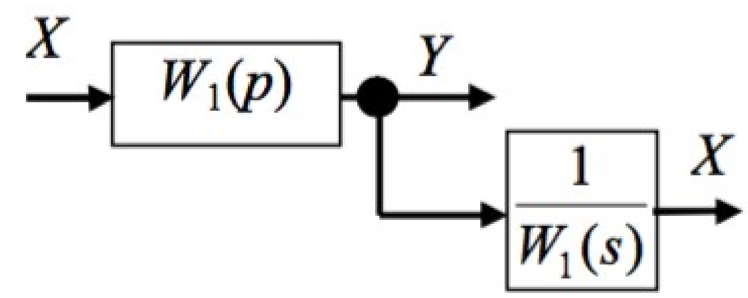
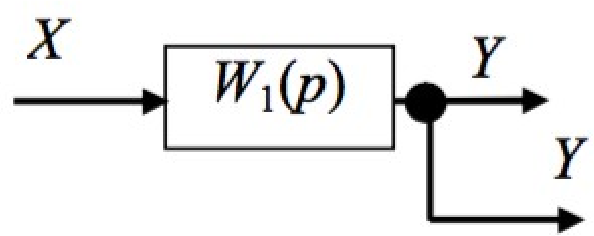
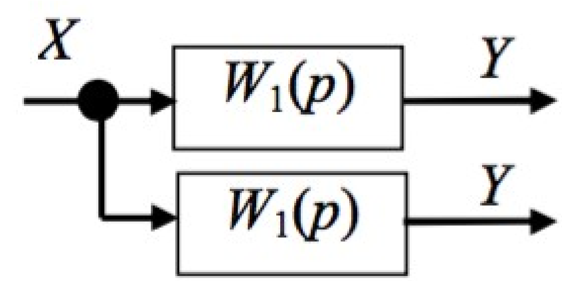
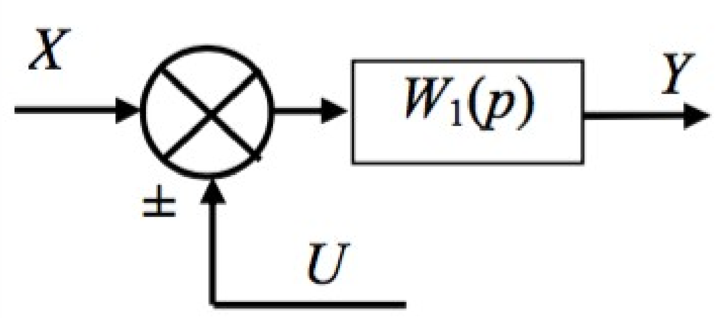
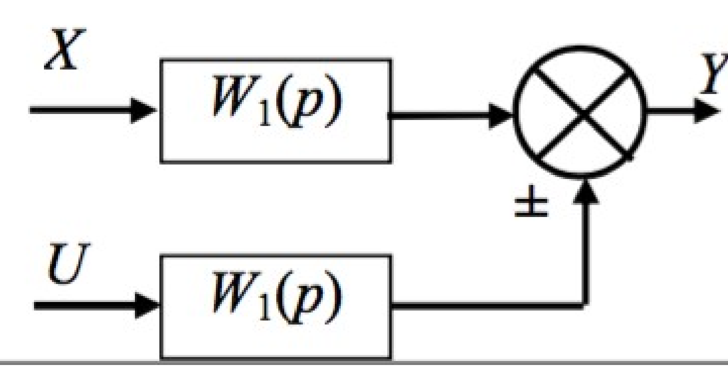
$$W_{PA3}(p) = W_0(p) \cdot W_1(p) \cdot W_2(p)$$

За керуючим впливом $$W_X(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_{PA3}(p)}$$

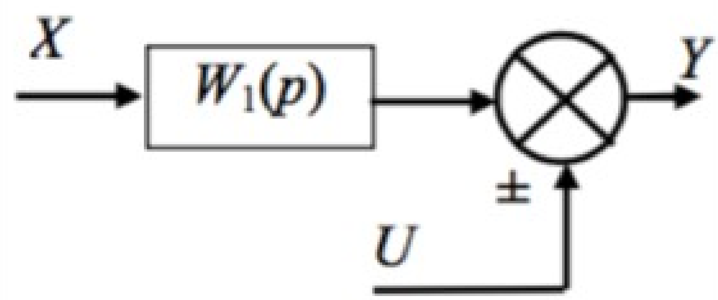
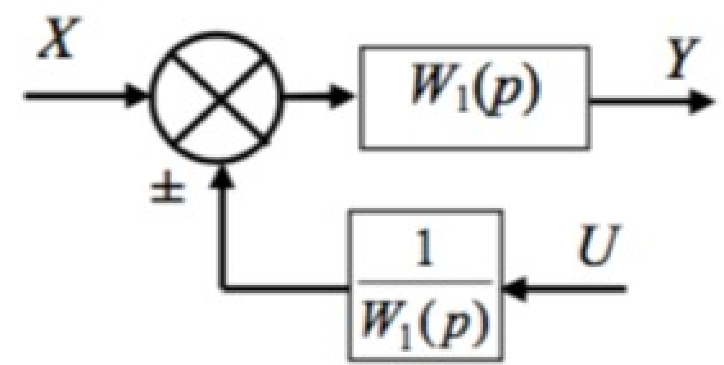
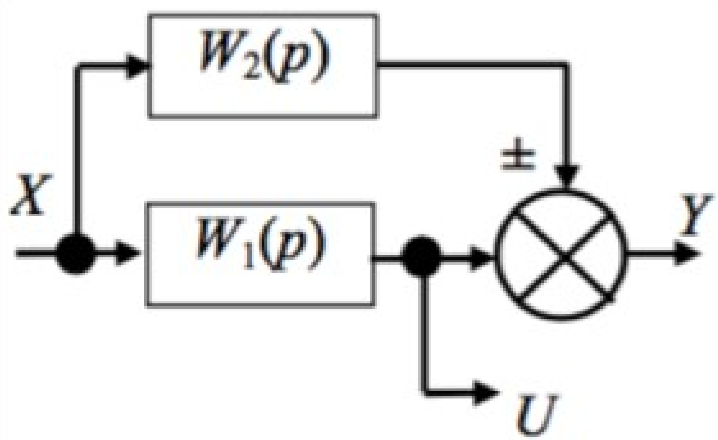
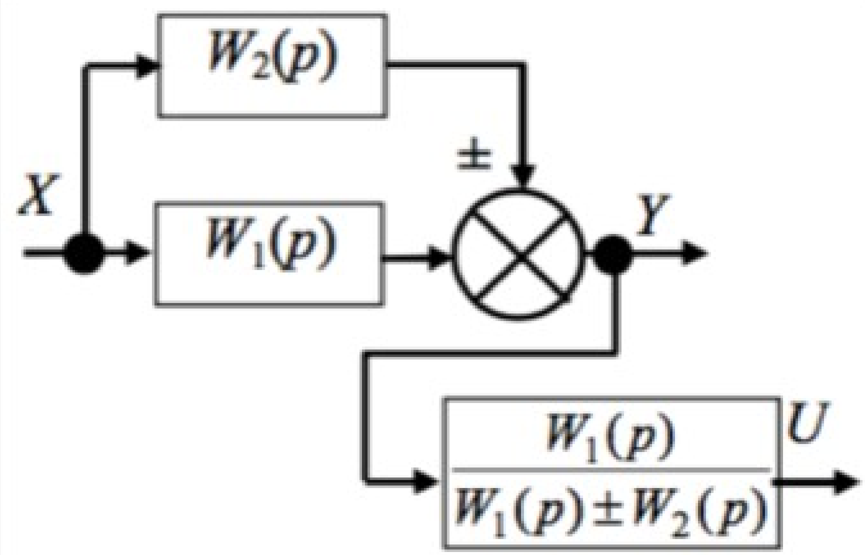
За збуренням $$W_F(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_{PA3}(p)}$$

За сигналом похибки $$W_\Delta(p) = \frac{\Delta(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + W_{PA3}(p)}$$

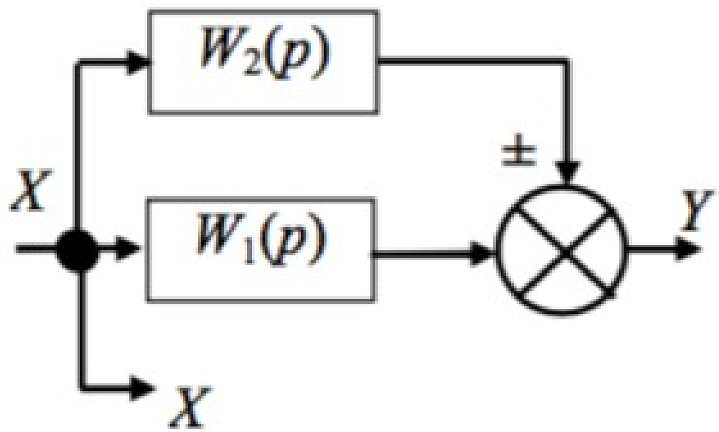
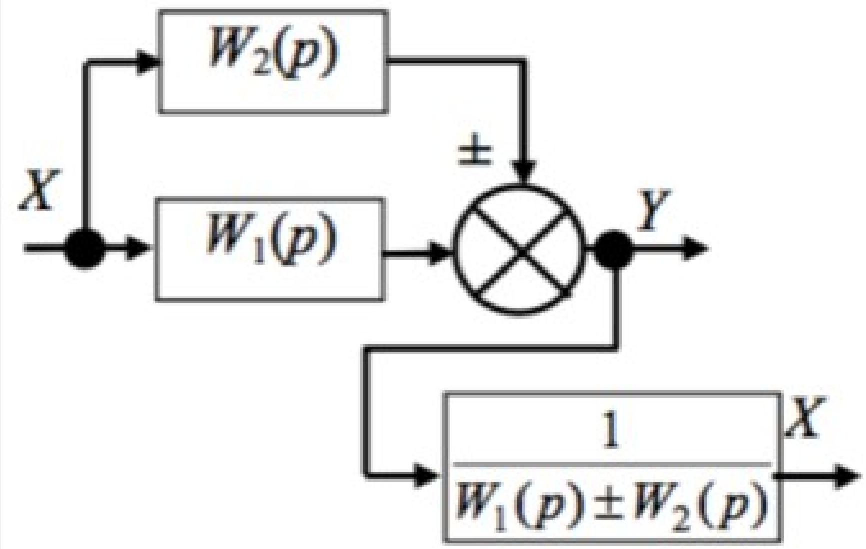
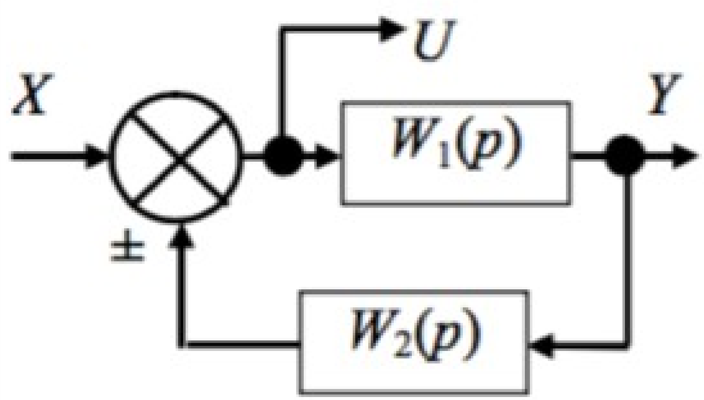
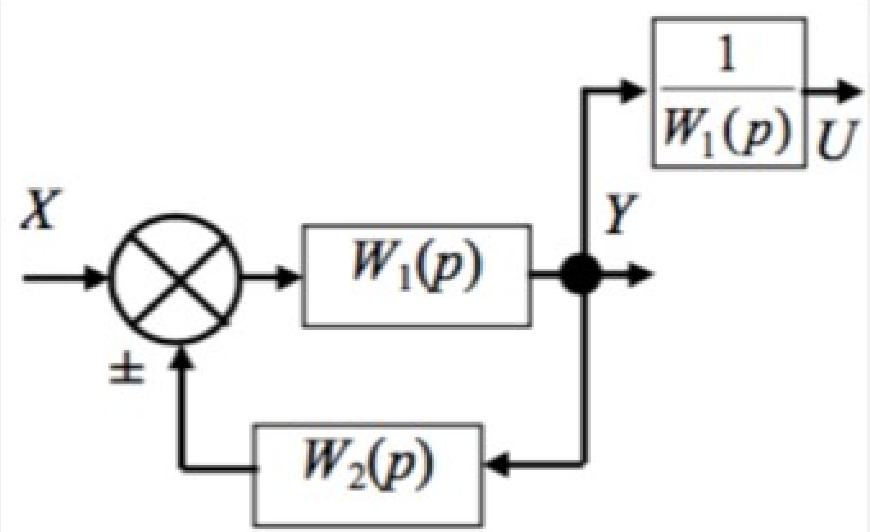
Перетворення структурних схем

Перетворення	Структурна схема: Вихідна	Структурна схема: Еквівалентна
Перенесення точки розгалудження вперед		
Перенесення точки розгалудження назад		
Перенесення суматора вперед		

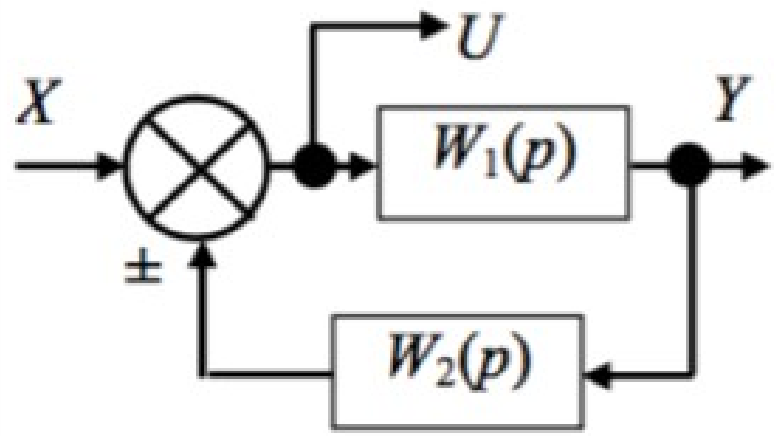
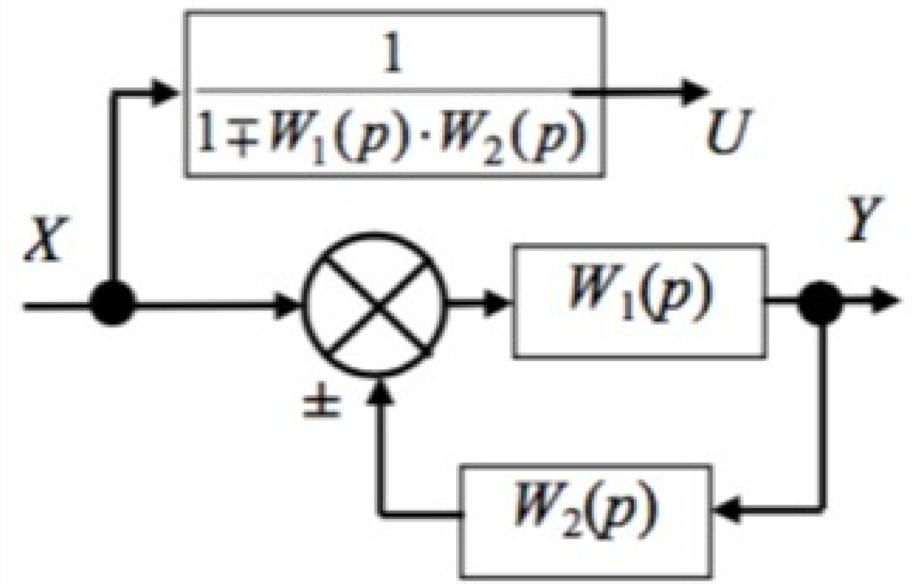
Перетворення структурних схем

Перетворення	Структурна схема	
	Вихідна	Еквівалентна
Перенесення суматора назад		
Винос вузла розгалудження за паралельне з’єднання		

Перетворення структурних схем

Перенесення вузла за паралельне з’єднання		
Винесення вузла за замкнений контур вперед		

Перетворення структурних схем

Винесення вузла за замкнений контур назад		

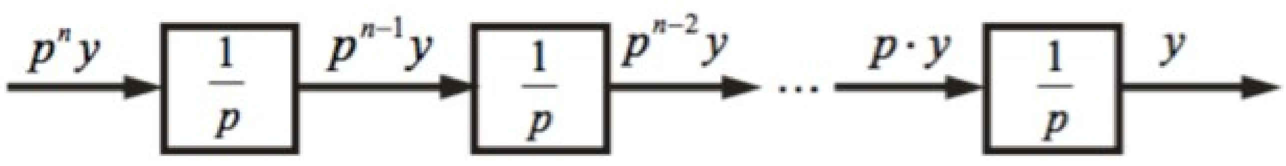
Структурна модель систем

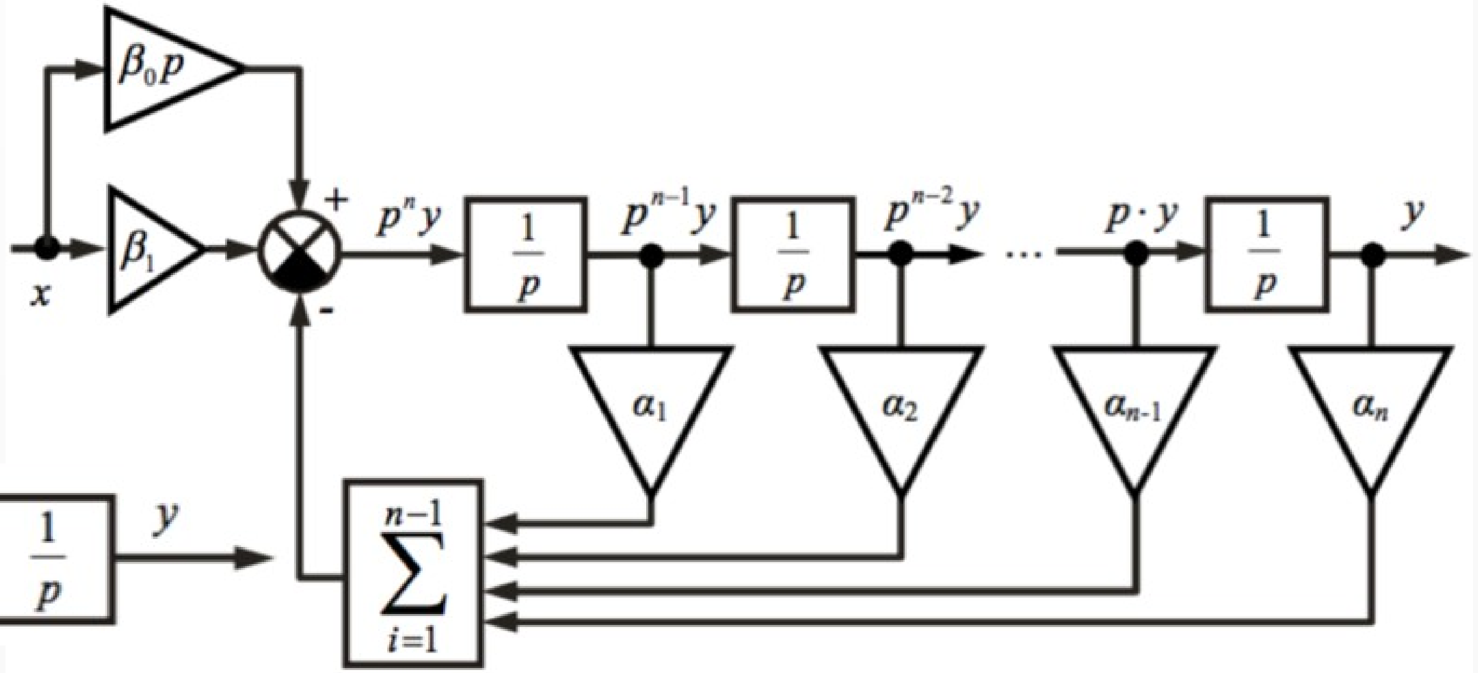
$$W(p)=\frac{b_0p+b_1}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}$$

$$a_0p^ny+a_1p^{n-1}y+a_2p^{n-2}y+\ldots+a_{n-1}p\cdot y+a_ny=(b_0p+b_1)x$$

$$p^ny=\frac{1}{a_0}\left((b_0p+b_1)x-a_1p^{n-1}y-a_2p^{n-2}y-\ldots-a_{n-1}p\cdot y-a_ny\right)$$

$$\beta_0=\frac{b_0}{a_0},\ \beta_1=\frac{b_1}{a_0},\ \alpha_1=\frac{a_1}{a_0},\ \alpha_2=\frac{a_2}{a_0},\ldots,\ \alpha_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{a_0},\ \alpha_n=\frac{a_n}{a_0}$$





Аналіз стійкості лінійних систем

Лекція №6

Визначення стійкості АСР

Стійкість системи - це властивість системи повертатися в печатковий стан після припинення дії, що вивела її з цього стану.

Оцінка стійкості являє собою рішення однорідного диференціального рівняння при заданих початкових умовах

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) y = 0 \text{ при } t \to \infty$$

- Якщо вільна складова вихідного параметра об'єкта управління після припинення зовнішнього впливу прагне до нулю, то така система є **стійкою**.
- Якщо вільна складова прагне до кінцевого значення або має вигляд гармонійних коливань з постійною амплітудою, то система вважається **нейтральною**.
- якщо вільна складова необмежено зростає або має вигляд гармонійних коливань зі зростаючою амплітудою, то система вважається **нестійкою**.

Види критеріїв стійкост

- Алгебраїчні

  Кореневий критерій, критерій Стодоли, критерій Гурвіца, критерій Рауса. Перші два критерії є необхідними критеріями стійкості окремих ланок і розімкнутих систем. Критерій Гурвіца алгебраїчним і розроблений для визначення стійкості замкнутих систем без запізнення.

- Частотні

  Критерій Михайлова, критерій Найквіста. Частотні критерії визначають стійкість замкнутих систем по їх частотним характеристикам. Їх особливістю є можливість застосування до замкнутим системам з запізненням, якими є переважна більшість систем управління.

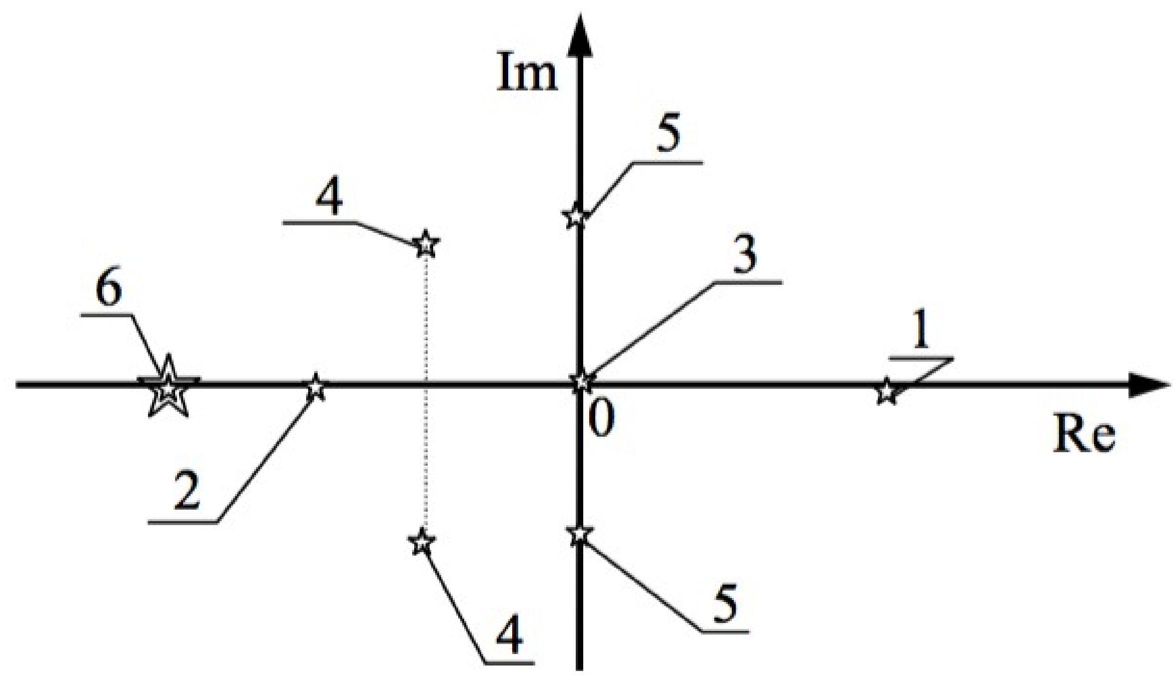
Характеристичне рівняння

$$W(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+b_2p^{m-2}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_n}$$

Характеристичне рівняння $a_0p^n+a_1p^{n\text{-}1}+a_2p^{n\text{-}2}+\ldots+a_n=0.$

$$p_i=\alpha\pm j\beta=\mathrm{Re}(p_i)\pm j\mathrm{Im}(p_i).$$

Корені (полюса) характеристичного рівняння



Формулювання кореневого критерію

Для стійкості лінійної системи необхідно, щоб всі корені характеристичного рівняння лежали в лівій напівплощині, тобто $\alpha < 0$. В такому випадку система має затухаючі коливання перехідного процесу.

- Якщо хоча б один корінь знаходиться на уявної вісі ($\alpha = 0$), система знаходиться на межі стійкості, перехідний процес буде незатухающим з постійною амплітудою.
- Якщо хоча б один корінь знаходиться в правій півплощині ($\alpha > 0$), то система є нестійкою і має розбіжний перехідний процес.

Приклад застосування кореневого критерію

$$W(p) = \frac{3p+4}{p^3 + 2p^2 + 2{,}25p + 1{,}25}$$

Характеристичне рівняння $p^3 + 2p^2 + 2{,}25p + 1{,}25 = 0$

Корені характеристичного рівняння $p_1 = -1;\ p_2 = -0{,}5 + j;\ p_3 = -0{,}5 - j$

Всі дійсні частини коренів негативні, отже система стійка

Критерій необхідності Стодоли

Для стійкості лінійної системи необхідно, щоб всі коефіцієнти характеристичного рівняння були позитивні.

Тобто досліджувана система за критерієм Стодоли може бути стійкою при виконанні умови, проте якщо критерій не виконується, то система точно не стійка.

Матриця Рауса

- 1) в першому рядку через один записуються коефіцієнти рівняння, починаючи з коефіцієнта при найвищому ступені n :

$$C_{k,1} = a_0, a_2, a_4, \ldots$$

- 2) у другому рядку через один записуються коефіцієнти рівняння, починаючи з коефіцієнта при ступені n -1

$$C_{k,2} = a_1, a_3, a_5, \ldots$$

- 3) інші елементи таблиці визначається з коефіцієнтів рівняння за формулою

$$C_{k,i} = C_{k+1,i\text{-}2} - r_i \cdot C_{k+1,i\text{-}1} \qquad r_i = C_{1,i\text{-}2} / C_{1,i\text{-}1}$$

Матриця Рауса

r_i	$i \setminus k$	1	2	3	4
$-$	1	$C_{11} = a_0$	$C_{21} = a_2$	$C_{31} = a_4$	...
$-$	2	$C_{12} = a_1$	$C_{22} = a_3$	$C_{32} = a_5$	...
$r_3 = C_{11}/C_{12}$	3	$C_{13} = C_{21} - r_3 C_{22}$	$C_{23} = C_{31} - r_3 C_{32}$	$C_{33} = C_{41} - r_3 C_{42}$	...
$r_4 = C_{12}/C_{13}$	4	$C_{14} = C_{22} - r_4 C_{23}$	$C_{24} = C_{32} - r_4 C_{33}$	$C_{34} = C_{42} - r_4 C_{43}$	...
...	...	...	...	...	...

Критерій Рауса

Для стійкості системи необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса C 11 , C 12 , C 13 , ... були одного знаку. Якщо це не виконується, то система нестійка, а кількість правих коренів дорівнює числу змін знака в першому стовпці

Перевага критерію в простоті використання незалежно від порядку характеристичного полінома системи. Він зручний для використування на ЕОМ. Недолік - слабка наглядність, важко судити про ступінь стійкості системи, наскільки далеко знаходиться вона від межі стійкості.

Критерій Гурвіца

Критерій А. Гурвіца є достатньою умовою для визначення стійкості системи з негативним зворотним зв'язком за коефіцієнтами характеристичного полінома.

$$W_{ЗАМ}(p) = \frac{W_{РАЗ}(p)}{1 + 1 \cdot W_{РАЗ}(p)} = \frac{\dfrac{B(p)}{A(p)}}{1 + \dfrac{B(p)}{A(p)}} = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)}$$

Характеристичний поліном $A(p) + B(p) = d_0 p^n + d_1 p^{n\text{-}1} + \ldots + d_{n\text{-}1} p + d_n$

Матриця Гурвіца

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & d_3 & d_5 & \dots & 0 \\ d_0 & d_2 & d_4 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Формулювання критерію Гурвіца

Для стійкої замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб все n головних діагональних мінорів матриці були додатніми:

$$\Delta_1 = d_1 > 0; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{vmatrix} > 0$$

І т.д… до Δn

- Якщо хоча б один визначник дорівнюватиме нулю, то система буде знаходиться на межі стійкості.
- Якщо хоча б один визнахуbr буде від'ємний, то система нестійка, не залежно від числа позитивних або нульових визначників.

Частотні методи аналізу стійкості лінійних АСР

Лекція №7

Обмеження алгебраїчних критеріїв

Алгебраїчні критерії не працюють, якщо передавальна функція розімкнутої системи має запізнювання, тобто записана у вигляді

$$W_{PAЗ}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} e^{-\tau p}$$

Характеристичний поліном

$$A(p) + B(p) \cdot e^{-\tau p}$$

- де τ - час запізнювання.
- В цьому випадку характеристичне рівняння замкнутої системи не є полиномом та його корені визначити неможливо. Для визначення стійкості в даному випадку використовуються частотні критерії А. В. Михайлова і Г. Найквіста.

Формування частотного хар. полінома замкненої системи

- Частотний годограф D3 (j ω) формується шляхом переведення характеристичного полінома системи в частотну область, для цього замість оператора диференціювання p підставляється частотна комплексна змінна j ω

$$D_3(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n +$$
$$+ b_0(j\omega)^m \cdot e^{-\tau(j\omega)} + b_1(j\omega)^{m-1} \cdot e^{-\tau(j\omega)} + \ldots + b_m \cdot e^{-\tau(j\omega)}$$

$$e^{\pm j\tau\omega} = \cos\tau\omega \pm j\sin\tau\omega$$

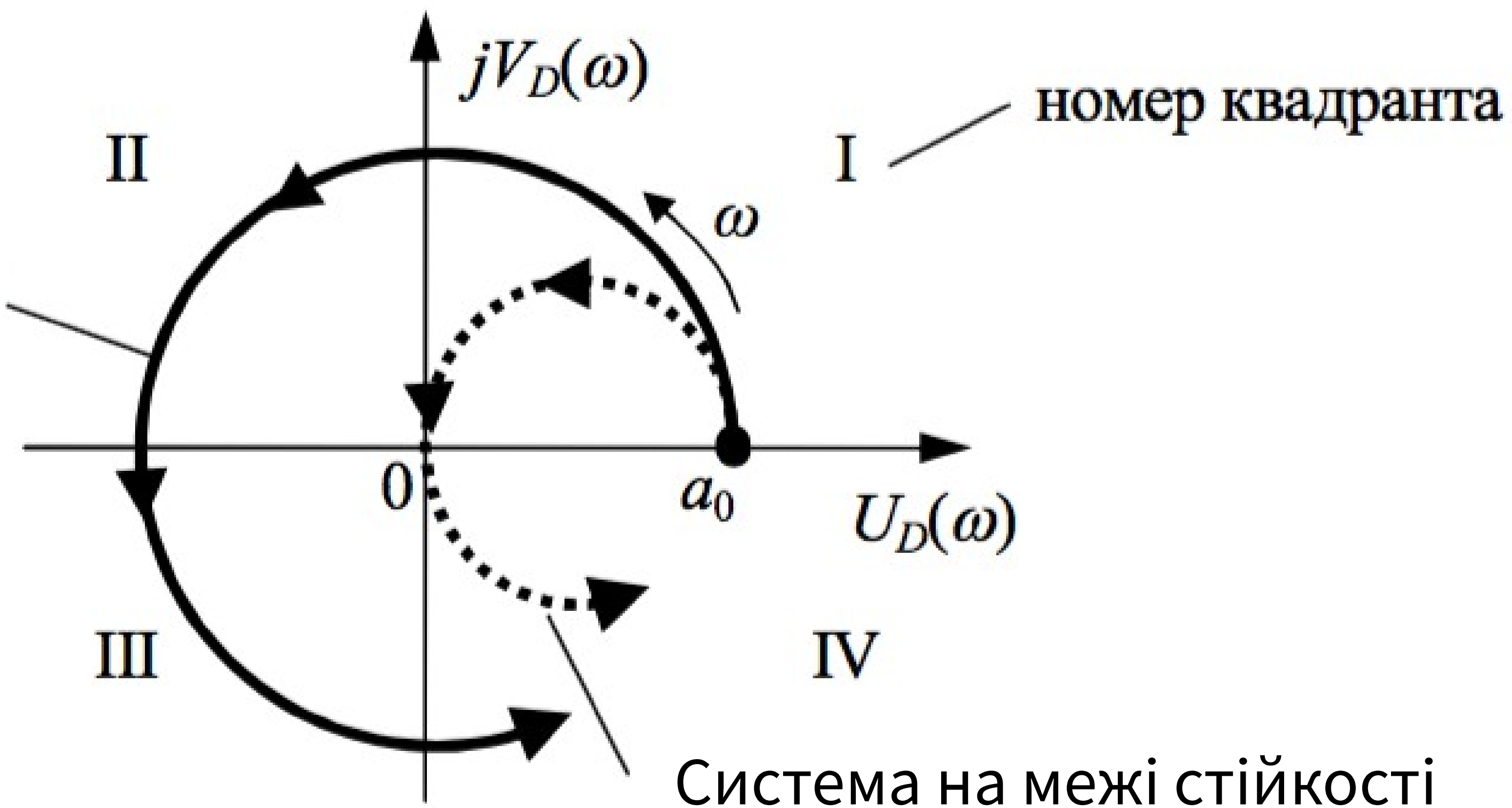
$$D_3(j\omega) = U_D(\omega) + j \cdot V_D(\omega)$$

Формулювання критерію Міхайлова

Для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова починався на позитивній дійсній піввісі комплексної площини [+ 1; j] і огинав проти годинникової стрілки початок системи координат, проходячи послідовно n квадрантів, де n - старший показник ступеня характеристичного полінома замкнутої системи.

Годограф Міхайлова

Стійка система 4 порядку



Система на межі стійкості

Критерій Найквіста

Критерій Г. Найквіста дозволяє по амплітудно-фазовій частотній характеристиці розімкненої системи оцінити стійкість замкнутої системи з негативним зворотним зв'язком. АФЧХ може бути отримана експериментально або аналітично.

$$A_{PA3}(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot A_3(\omega) \cdot A_4(\omega);$$

$$\varphi_{PA3}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega).$$

Приклад формування частотної передатної функції (для побудови АФЧХ)

$$W(j\omega) = \frac{K}{1+T(j\omega)} = \frac{K}{(1+jT\omega)}\frac{(1-jT\omega)}{(1-jT\omega)} = \frac{K - j\omega KT}{1+\omega^2 T^2} =$$

$$= \frac{K}{1+\omega^2 T^2} + j\frac{-\omega KT}{1+\omega^2 T^2} = U(\omega) + j\cdot V(\omega).$$

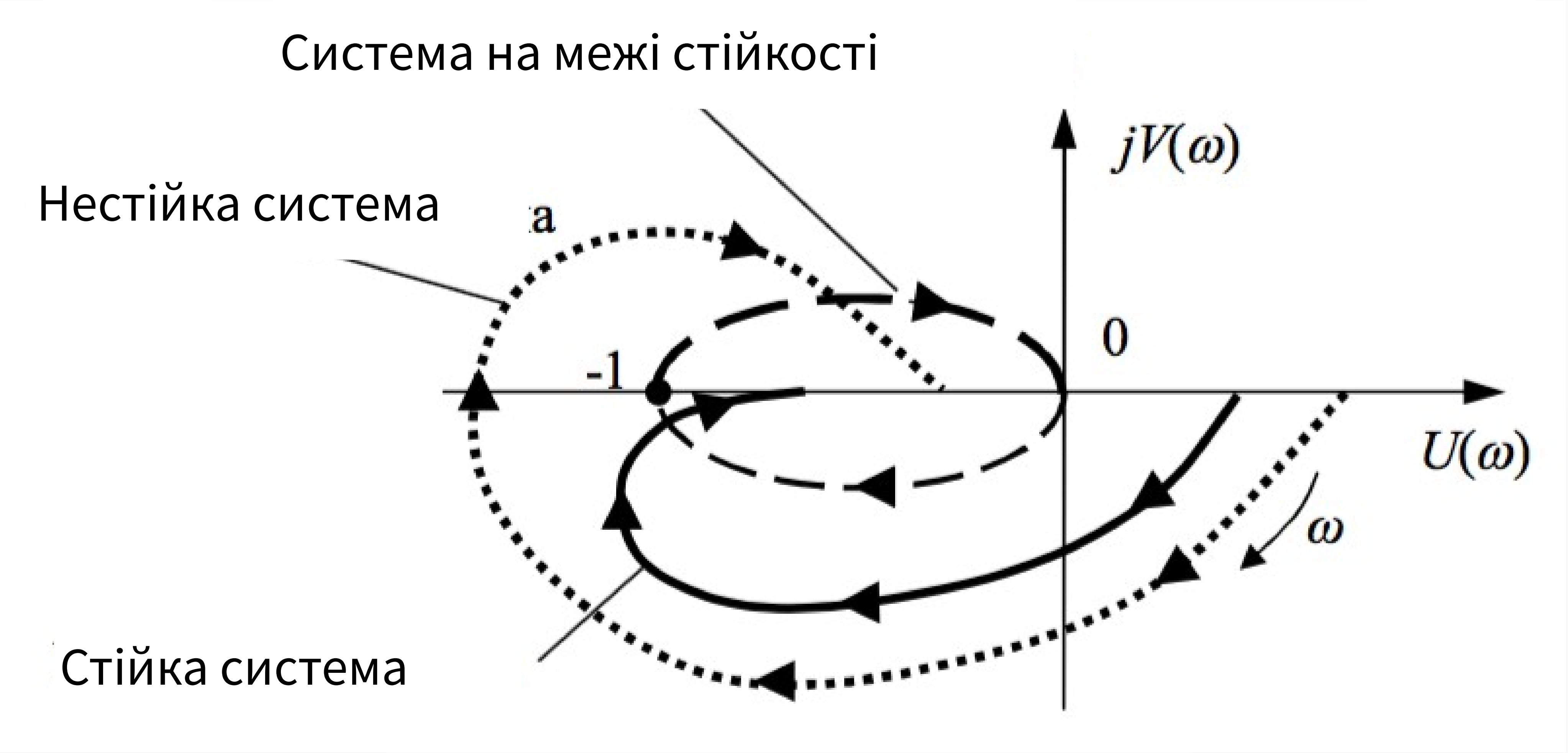
$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Формулювання критерію Найквіста

Якщо розімкнена система стійка , то для стійкості системи в замкнутому стані необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкнутої системи на комплексній площині [+ 1; j] при зміні частоти від 0 до ∞ не охоплювала точку з координатами (-1; j 0). Якщо АФЧХ розімкнутої системи проходить через точку з координатами (-1; j 0), то система знаходиться на межі стійкості.

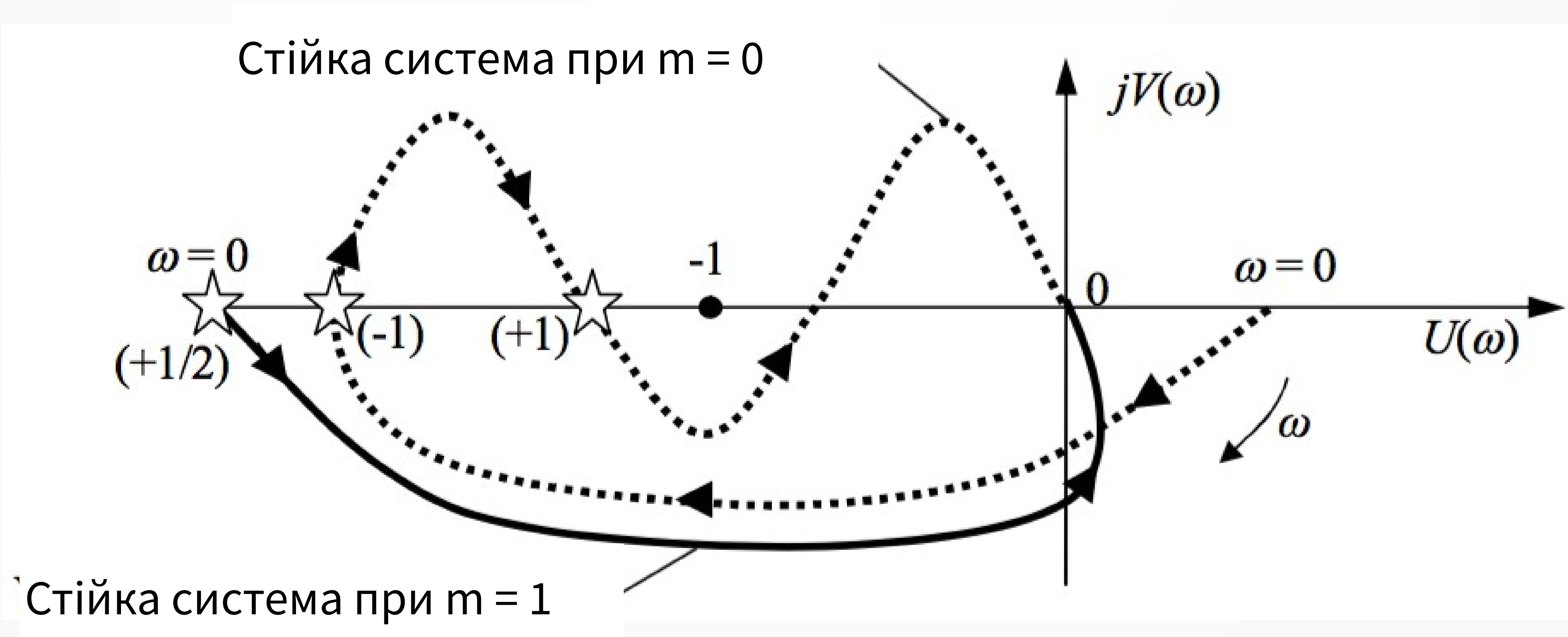
Годограф Найквіста (АФЧХ)



Формулювання критерію для нестійкої розімкненої САК

Якщо система в розімкнутому стані нестійка , то для стійкості системи в замкнутому стані необхідно щоб частотний годограф розімкнутої системи W (jω) при зміні частоти від 0 до ∞ охоплював би m / 2 раз в позитивному напрямку точку з координатами (-1; j 0), або здійснював m / 2 переходів через вісь дійсних значень +1 лівіше точки з координатами (-1; j 0). При цьому перехід осі +1 зверху вниз вважається позитивним, а від низу до верху - негативним. Якщо при ω = 0 частотний годограф розімкнутої системи W (jω) починається на вісь дійсних значень +1 лівіше точки з координатами (-1; j 0), то вважається, що система здійснює 1/2 переходу з відповідним знаком. Число m вирізняється кількістю коренів з позитивною дійсною частиною при вирішенні характеристичного рівняння розімкнутої системи.

Годограф Найквіста (АФЧХ) 2-й випадок



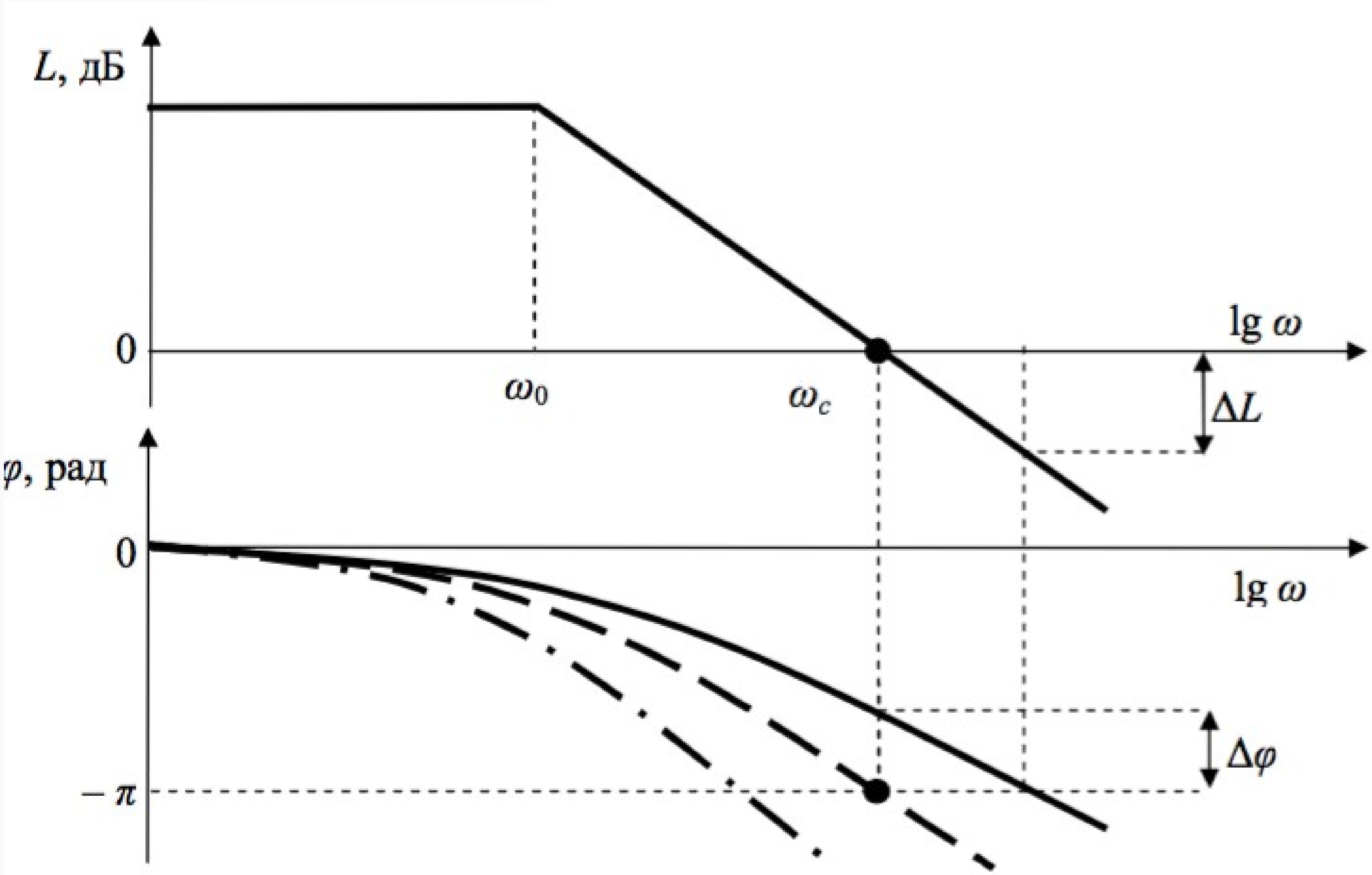
Визначення стійкості за логарифмічними частотними характеристиками САК. Області стійкості САК

Лекція №8

Критерій стійкості Найквіста до ЛЧХ

- Якщо разімкнена система стійка, то для стійкості системи в замкнутому стані, ЛАХ розімкненої системи повинна перетинати вісь абсцис раніше, ніж ЛФХ, спадаючи остаточно, перейде через значення - π. Тобто, на частоті зрізу ωср величина фази φ повинна бути менше значення | - π |.
- Якщо система в розімкненому стані не стійка , то для стійкості системи в замкнутому стані необхідно щоб при позитивний ЛАХ розімкненої системи число перетинів ЛФХ через рівень - π знизу-вгору повинно бути на m / 2 разів більше числа перетинів рівня - π в зворотному напрямку. Число m визначається кількістю правих коренів характеристичного рівняння розімкненої системи.

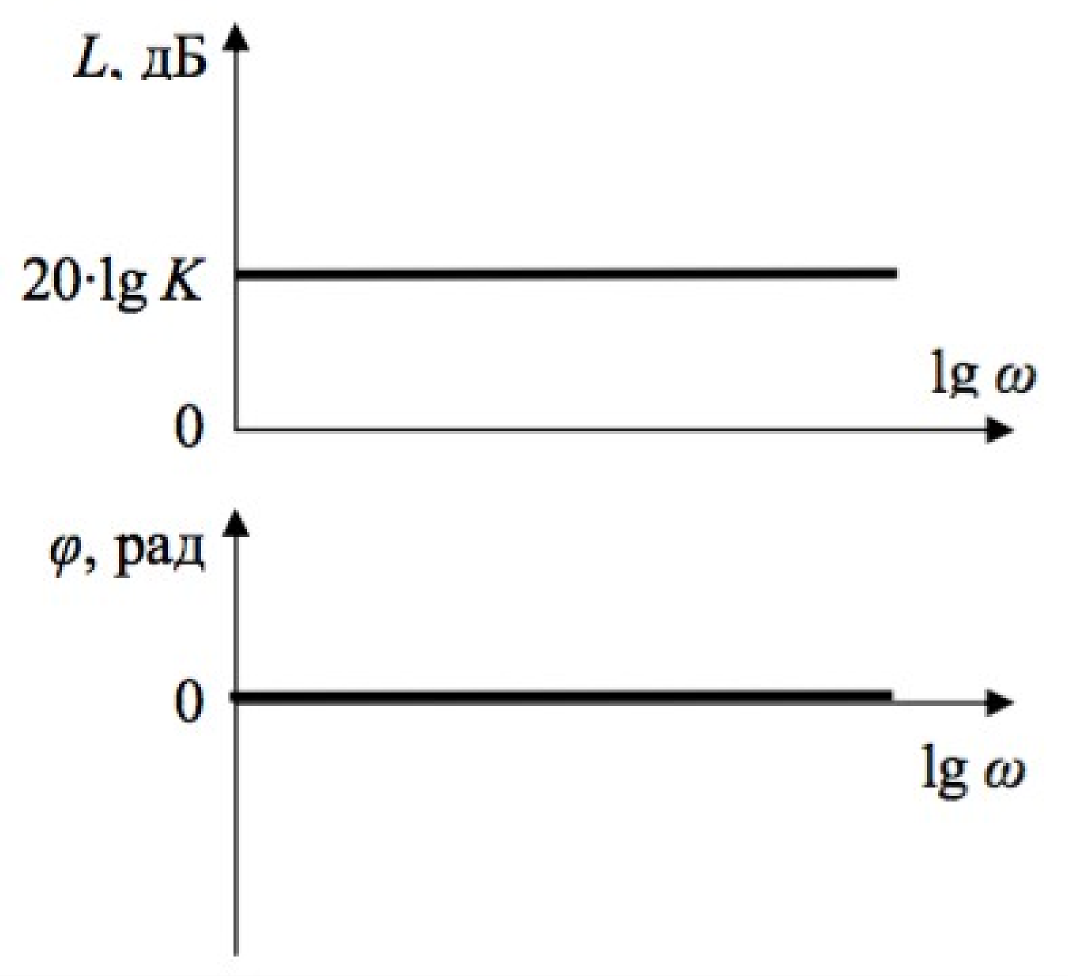
Графічна інтерпретація стійкості за асимптотичними ЛАЧХ та ЛФЧХ



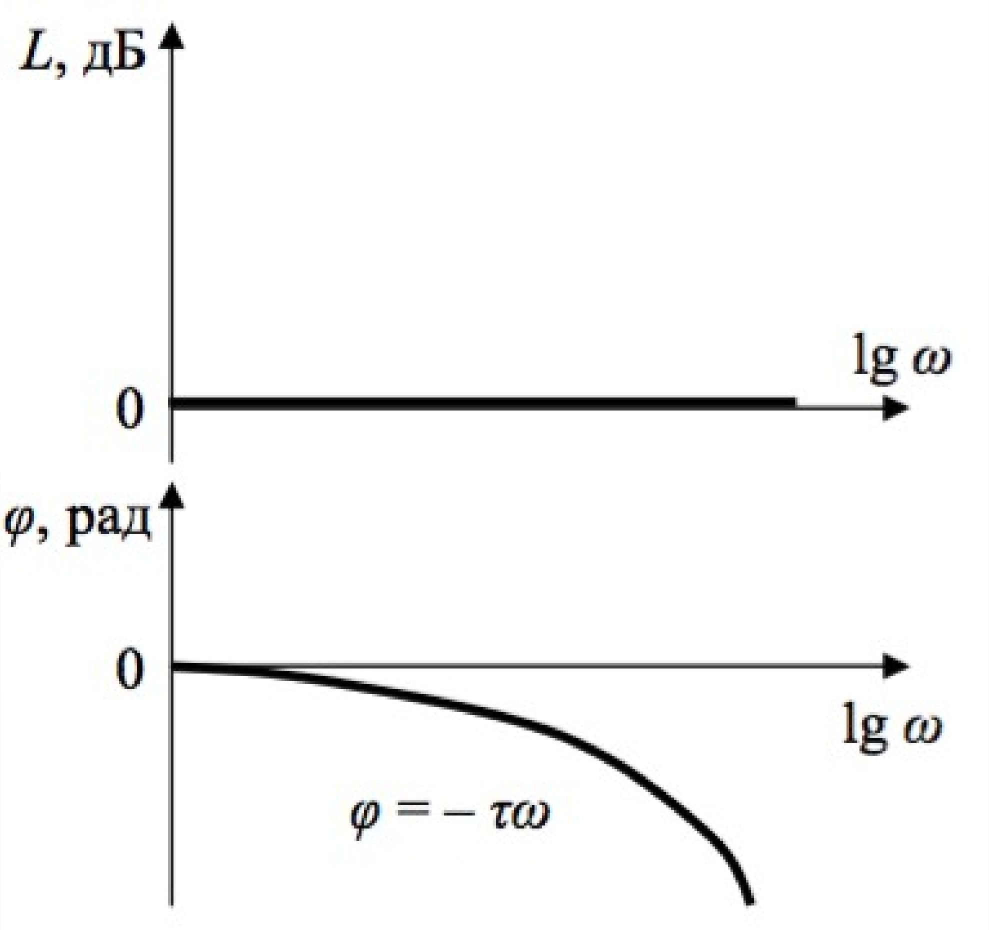
Запас стійкості по амплітуді Δ L - це величина допустимого збільшення загального коефіцієнта підсилення розімкненої системи, при якому замкнена система виявиться на межі стійкості. Запас стійкості по фазі Δ ф - це величина допустимого збільшення запізнення по фазі розімкненої системи на частоті зрізу ω ср , при якому замкнена система виявиться на кордоні стійкості.

Асимптотичні характеристики типових ланок

$W(p) = K$

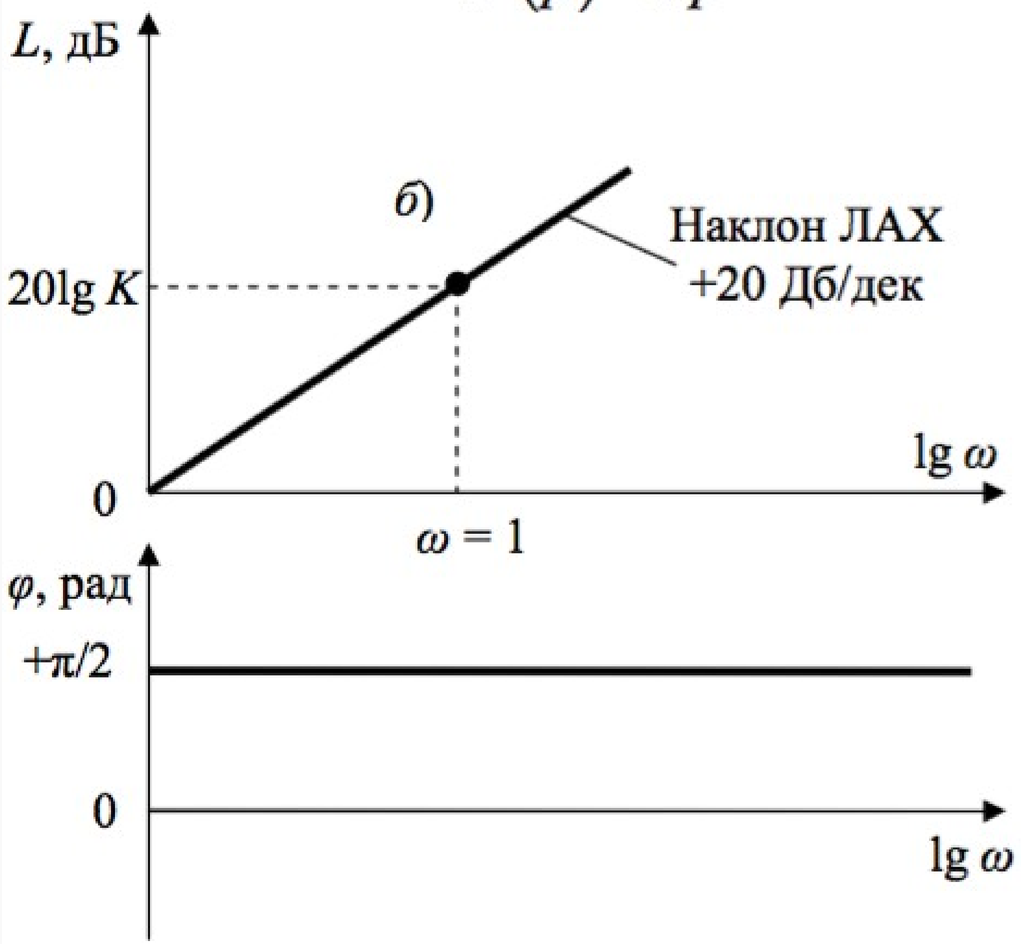


$W(p) = e^{-\tau p}$

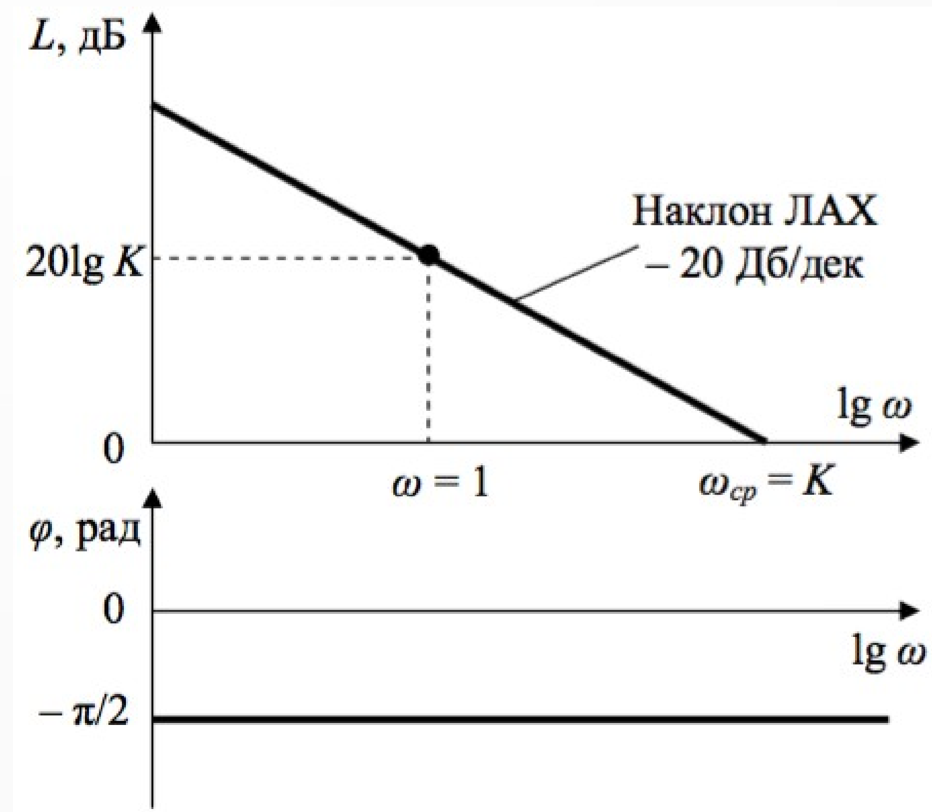


Асимптотичні характеристики типових ланок

$$W(p) = Kp$$

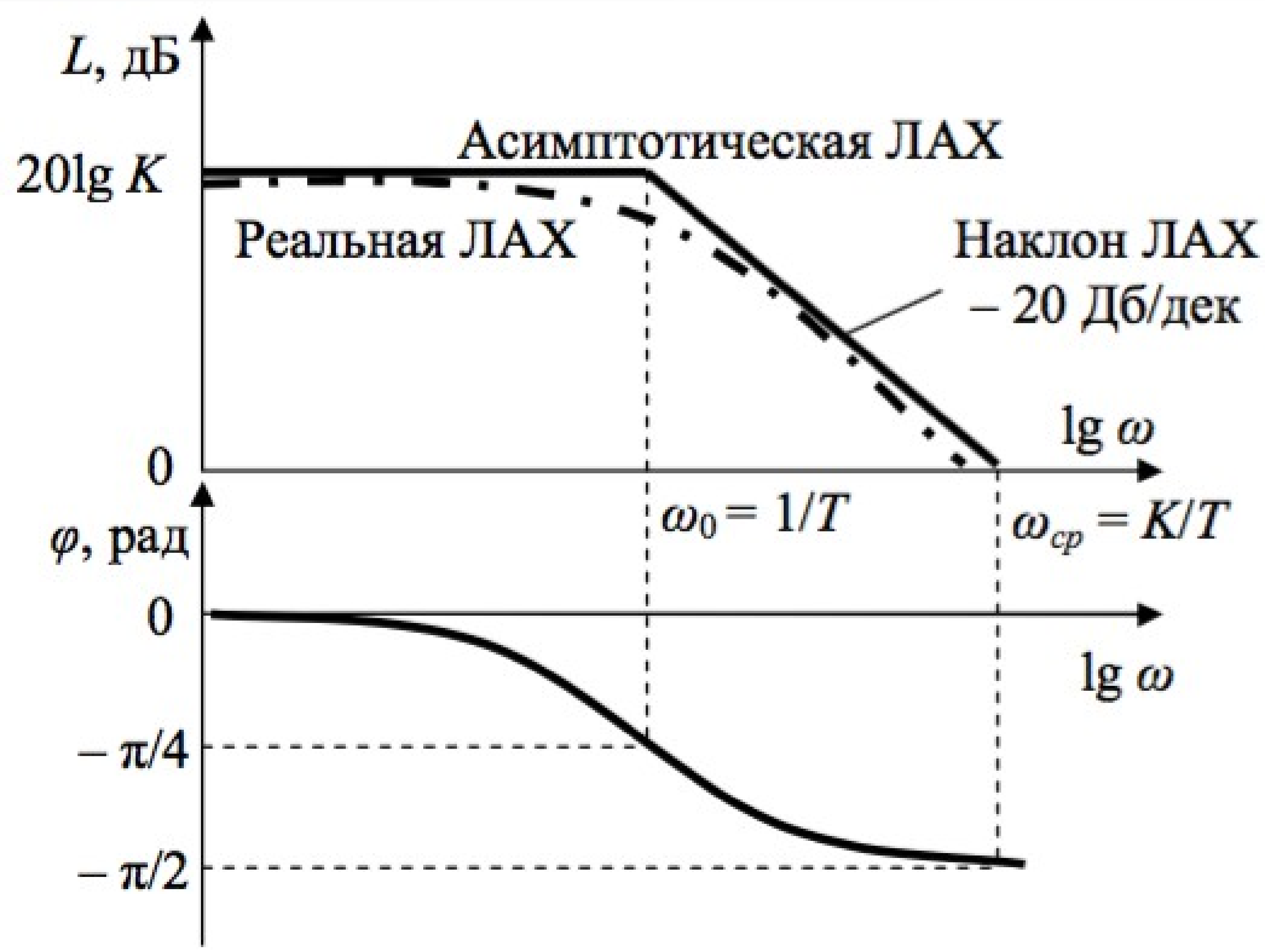


$$W(p) = \frac{K}{p}$$

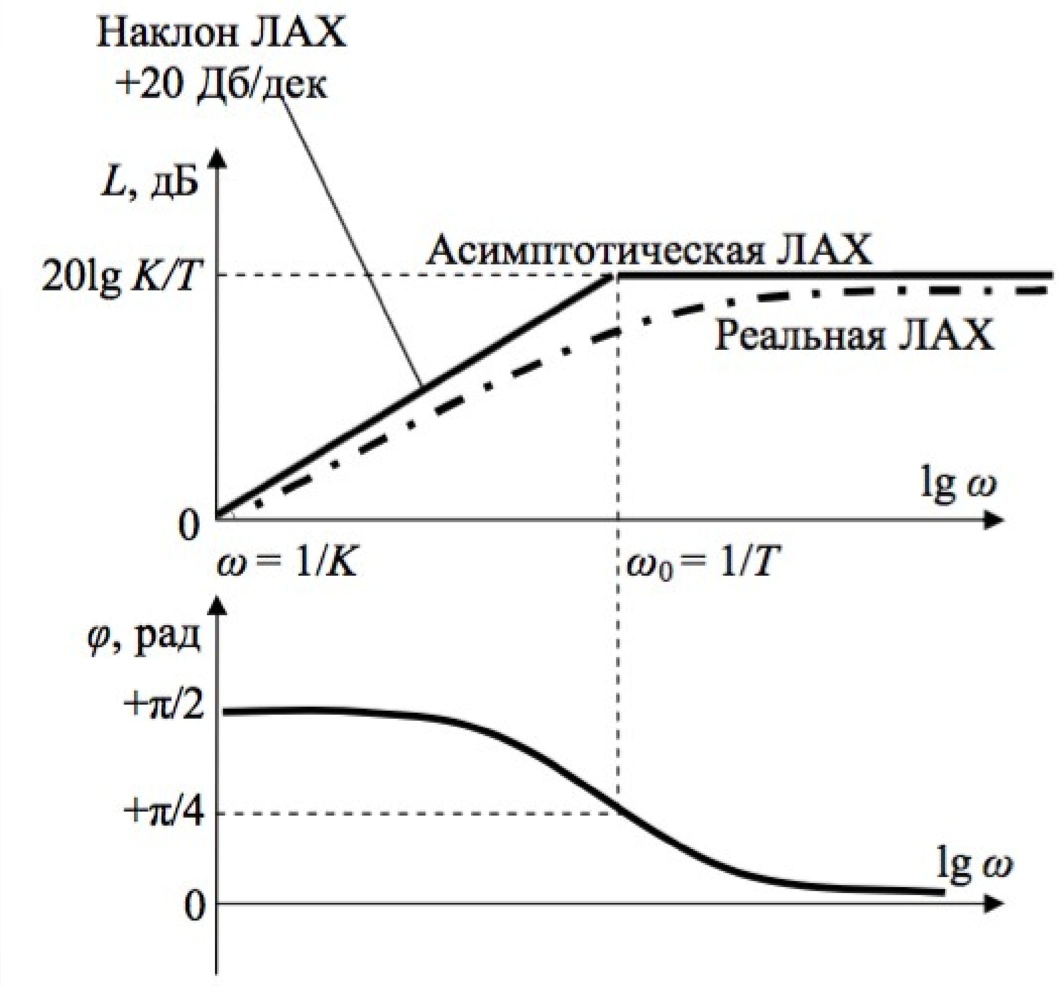


Асимптотичні характеристики типових ланок

$$W(p)=\frac{K}{Tp+1}$$



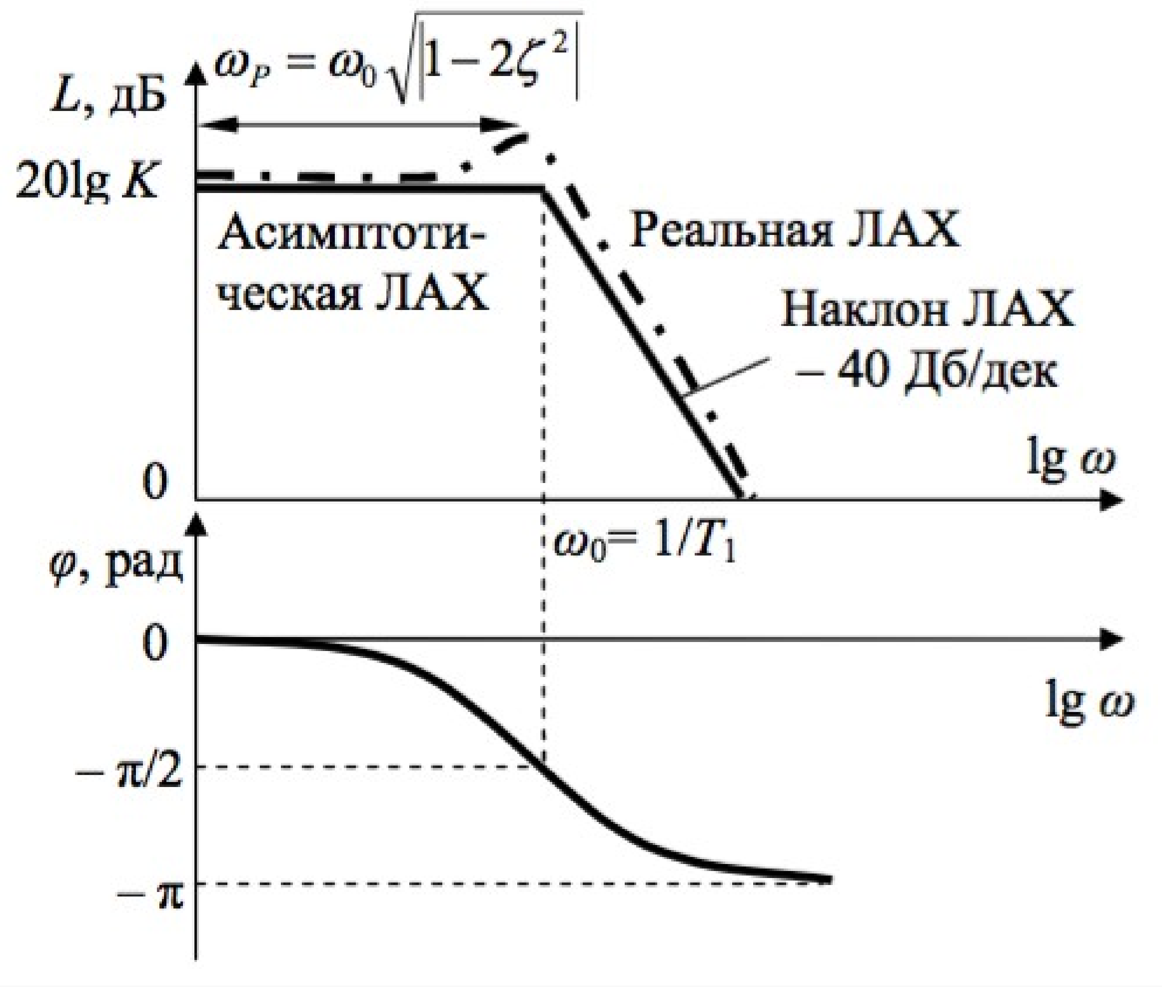
$$W(p)=\frac{Kp}{Tp+1}$$

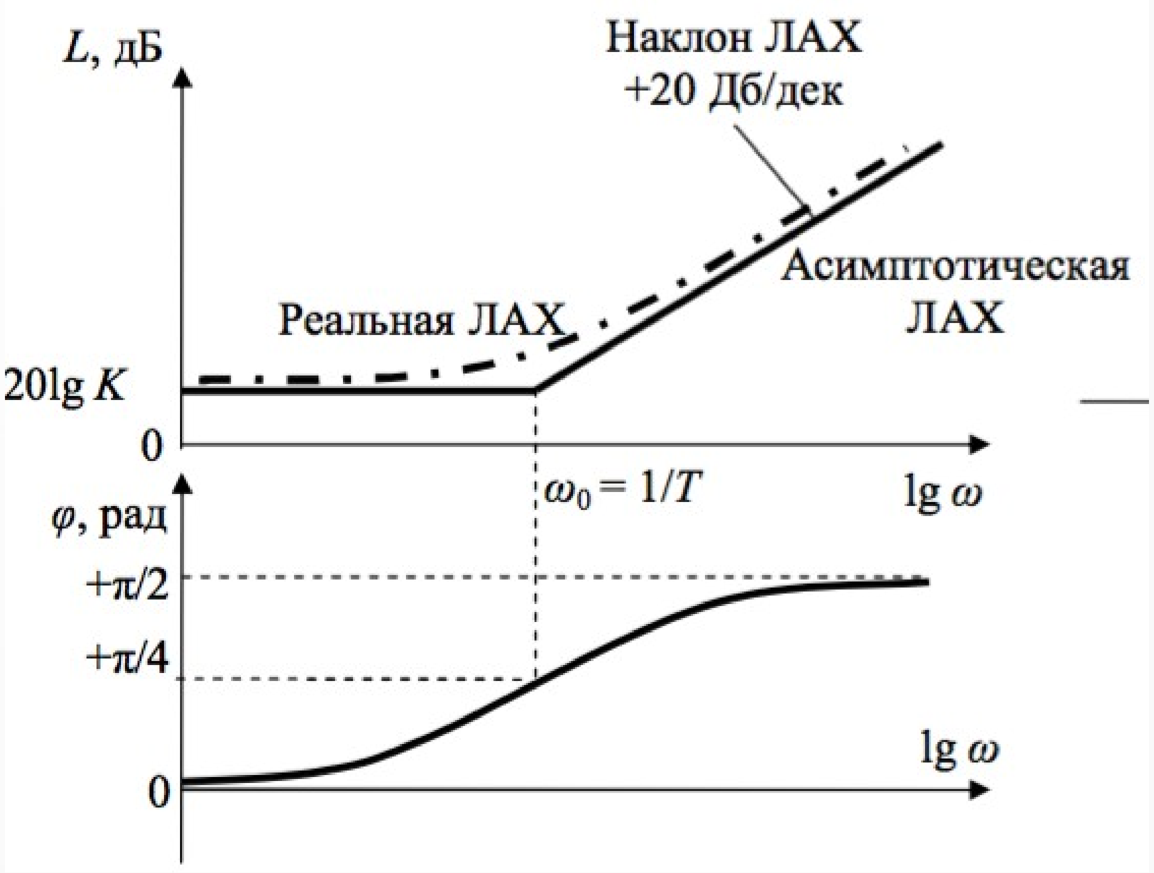


Асимптотичні характеристики типових ланок

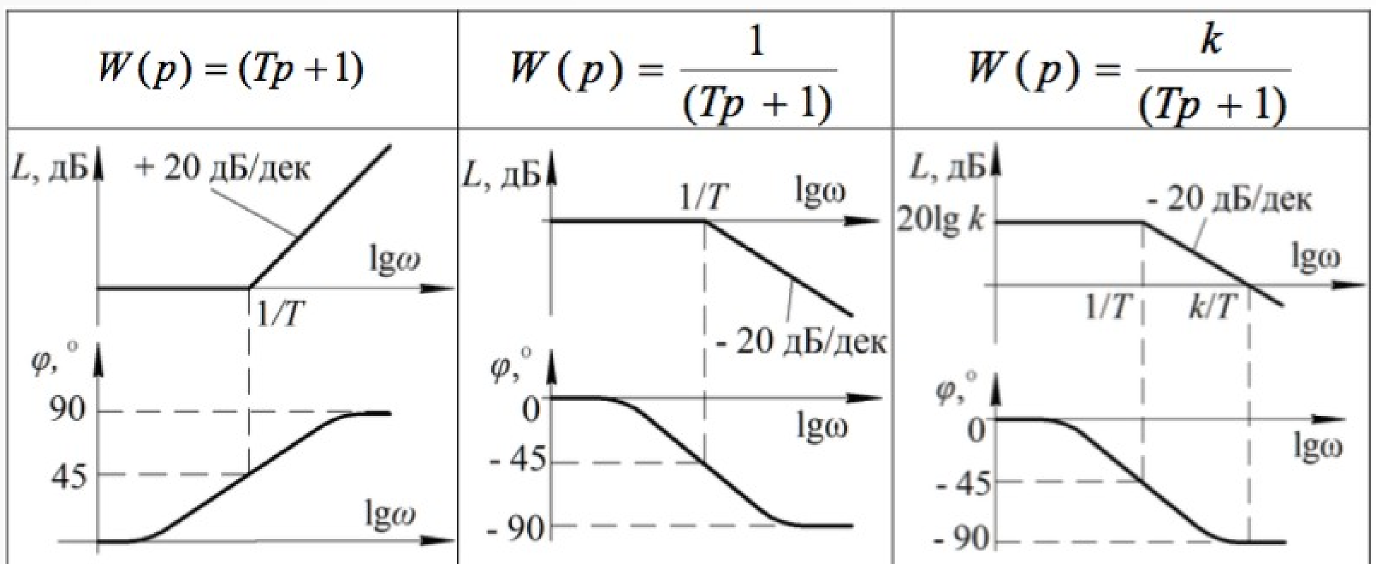
$$W(p)=\frac{K}{T_1^2p^2+T_2p+1}=\frac{K}{T_1^2p^2+2\zeta T_1p+1}$$

$$W(p)=K(Tp+1)$$



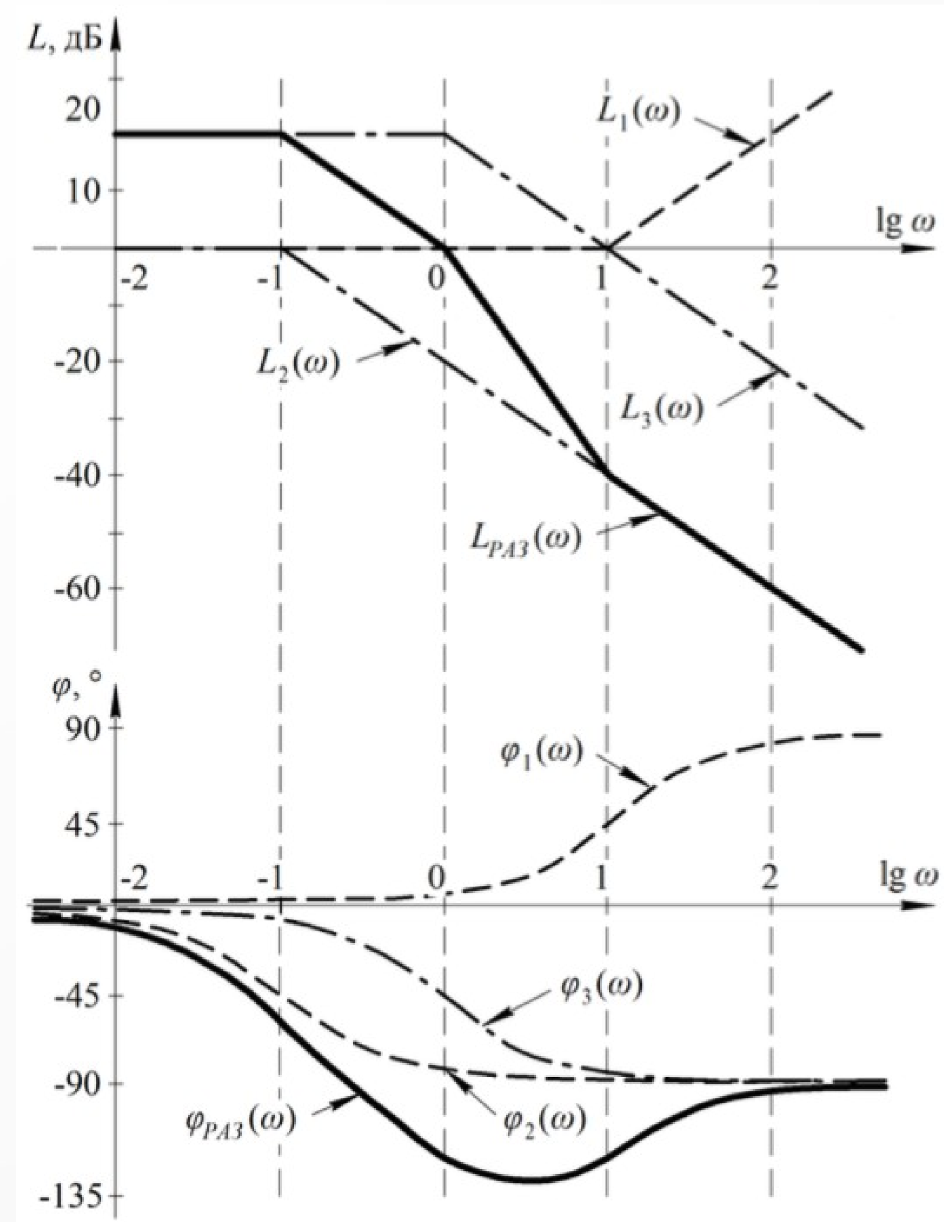


Для побудови ЛАХ і ЛФХ системи необхідно розкласти передавальну функцію розімкненої системи на елементарні ланки та виразити асимптотичні криві амплітуди А (ω) і фази φ (ω)



$$L_{PAЗ}(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega)$$

$$\varphi_{PAЗ}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)$$



Приклад

Метод Наймарка (D-розбиття)

$$A(p) = N(p) + DM(p) = 0$$

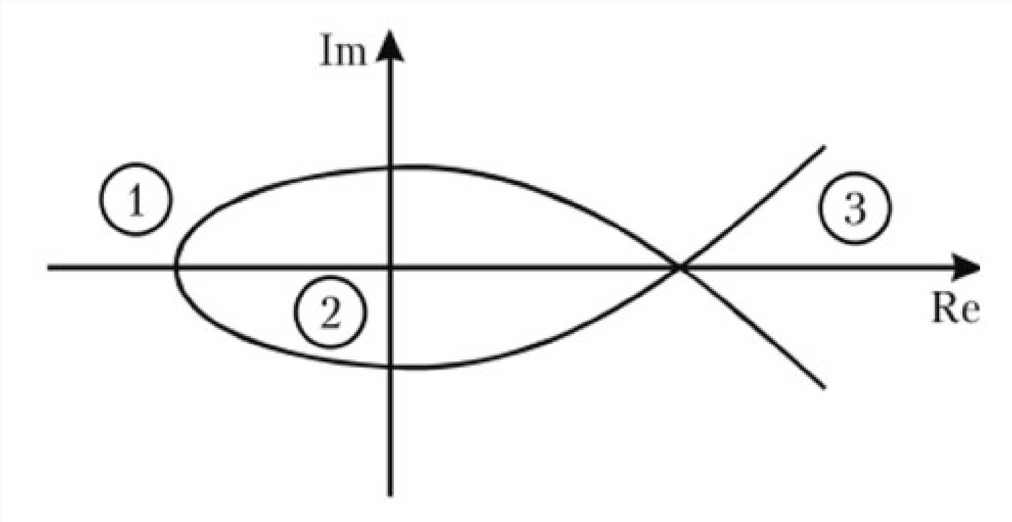
Характеристичне рівняння з невизначеним параметром D

$$A(j\omega) = N(j\omega) + DM(j\omega) = 0,$$

Заміна p на iw, w — загальна частота

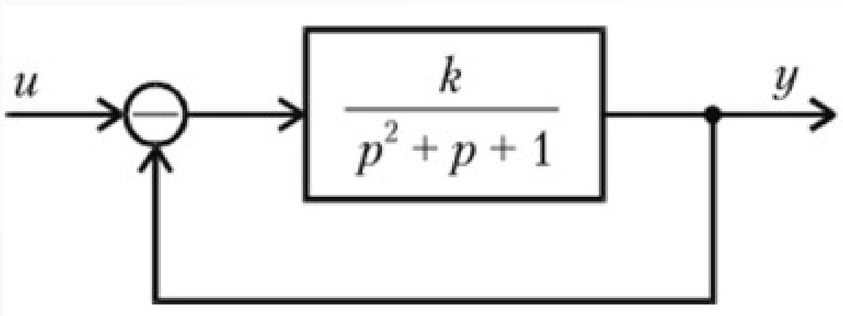
$$D(j\omega) = -\frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} = R_D(\omega) + jI_D(\omega)$$

Вираження параметру D в комплексному вигляді



Побудова області стійкості

Приклад побудови області стійкості



$$F(p) = p^2 + p + 1 + k = 0$$

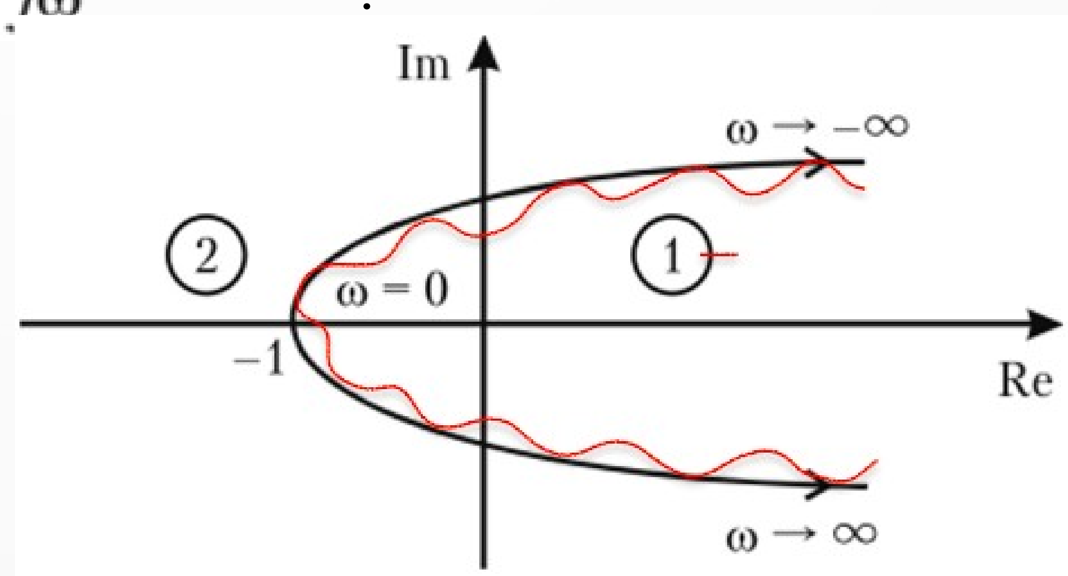
Характеристичне рівняння з невизначеним параметром D: k — к-т передачі САК

$$D(j\omega) = \omega^2 - j\omega - 1 = (\omega^2 - 1) - j\omega$$

Вираження параметру D в комплексному

0)	0	1	2		00
Re_D(w)	-1	0	3		00
Im_0((o)	0	-1	-2		-00

Табуляція функції від 0 до 00



Спостережуваність, керованість та структурна стійкість АСР

Лекція №9

Означення властивостей

- Спостережуваність та керованість потребуються при визначенні властивостей керування в залежності від параметрів системи на рівні математичної моделі (те тільки від похибки керування)
- Спостережуваність та керованість є властивостями не фізичних об'єктів а математичних їх моделей та алгоритмів управління.
- Структурна стійкість визначає апріорі досяжний стійкий стан об’єктів за параметрами структурних елементів системи, як математичної моделі

Простір стану АСР

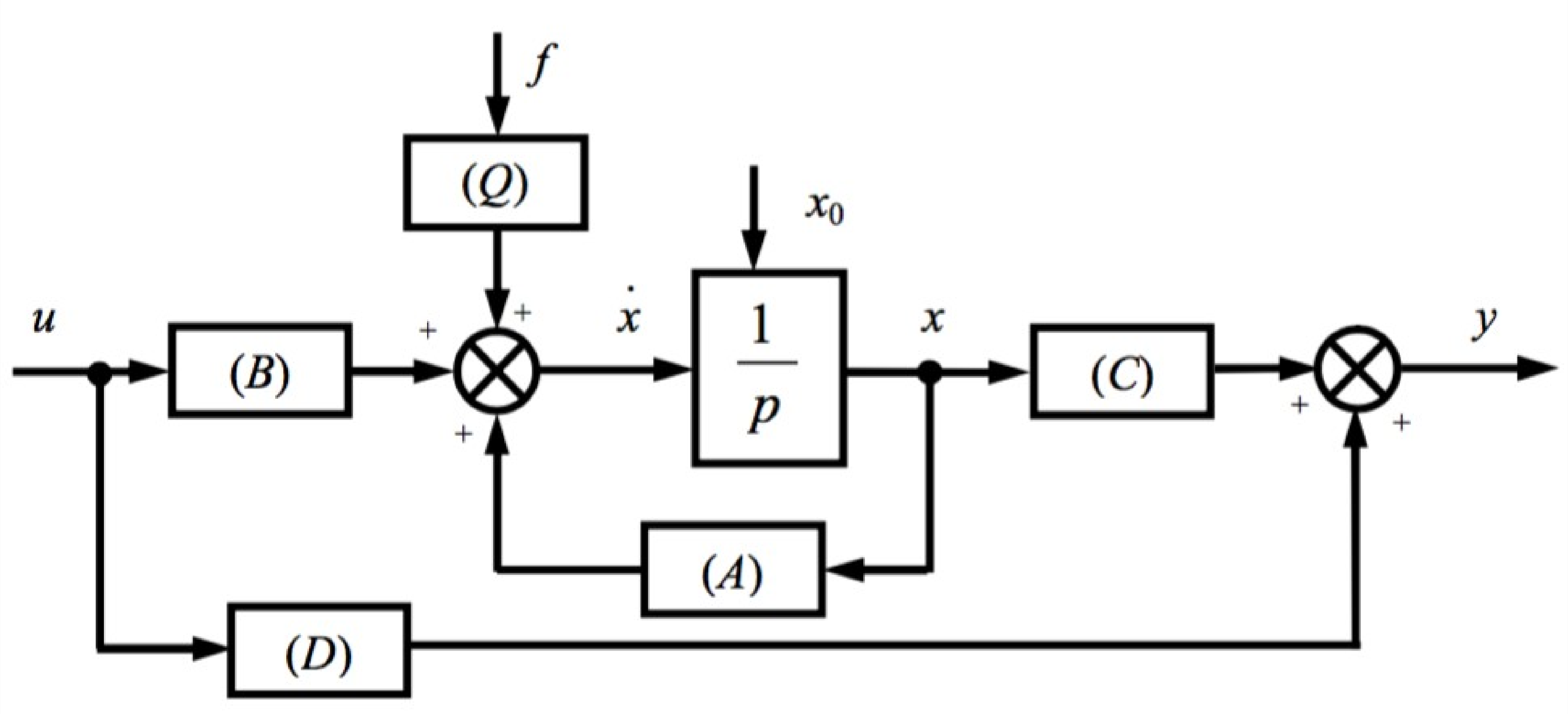
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u + b_{12}u + \ldots + b_{1m}u + q_{11}f + \ldots + q_{1l}f; \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u + b_{22}u + \ldots + b_{2m}u + q_{21}f + \ldots + q_{2l}f; \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u + b_{n2}u + \ldots + b_{nm}u + q_{n1}f + \ldots + q_{nl}f; \\ y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}u + d_{12}u + \ldots + d_{1m}u; \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + d_{21}u + d_{22}u + \ldots + d_{2m}u; \\ \ldots \\ y_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n + d_{k1}u + d_{k2}u + \ldots + d_{km}u. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Qf; \\ y = Cx + Du, \end{cases}$$

Для простої САР з 1 ВЗЗ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, C = (c_1 \;\; c_2 \ldots c_n), D = (0), Q = (0).$$

Представлення простору стану АСР структурною схемою

- A — матриця стану; B — матриця управління; Q — матриця збурення; C — матриця виходу; D — матриця прямого зв'язку



Приклад представлення простору стану АСР

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = bu$$

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = bu - a_1\dot{y} - a_2 y = bu - a_1 x_2 - a_2 x_1$$

Форма Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + bu; \\ y = x_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u; \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x. \end{cases}$$

Визначення керованості системи

- Керованість системи - властивість системи управління і об'єкта управління, яка описує можливість перевести систему з одного стану в інший. Дослідження системи управління на керованість є одним з важливих кроків у синтезі управляючих контролерів.
- Система називається повністю керованою , якщо існує такий керуючий вплив u(t), який переводить її з будь-якого початкового стану x(t0) в один єдиний заданий кінцевий стан x(tk) за кінцевий інтервал часу (t0-tk)

Формулювання критерію керованості Калмана

- Система є повністю керованою, якщо матриця керованості K є невиродженою, тобто ранг матриці дорівнює n

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

$$K_y = \left(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right)$$

Визначення спостережуваності системи

- Спостережуваність системи - властивість системи управління і об'єкта управління, що дозволяє по виходу системи судити про процеси, що відбуваються всередині неї. З огляду на те, що стану системи грають важливу роль в управлінні за допомогою зворотних зв'язків, важливо, щоб вони були спостережувані.
- Система називається повністю спостережуваною, якщо по виходу системи y(tk) в кінці інтервалу часу (t0 -tK) при відомій керуючій дії u(t) можна визначити всі єдині початкові компоненти вектора стану x(t0), тобто всі змінні стану системи xi(t) входять у вираз для керованої величини y(t).

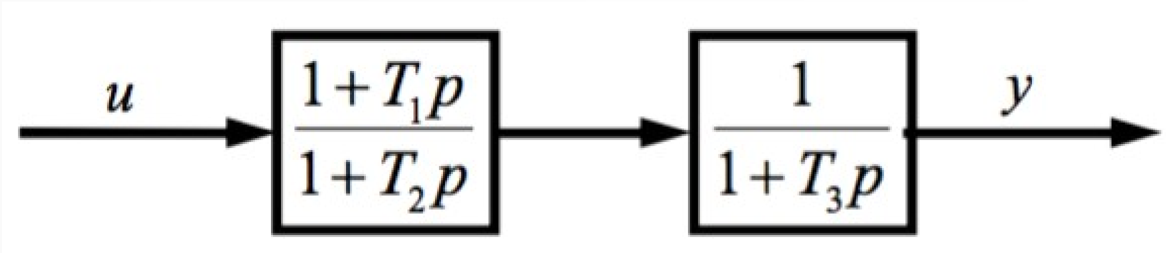
Формулювання критерію спостережуваності Калмана

- Система є повністю спостережуваною, якщо матриця спостережуваності Кн є невиродженою, тобто ранг матриці дорівнює n

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

$$K_H = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

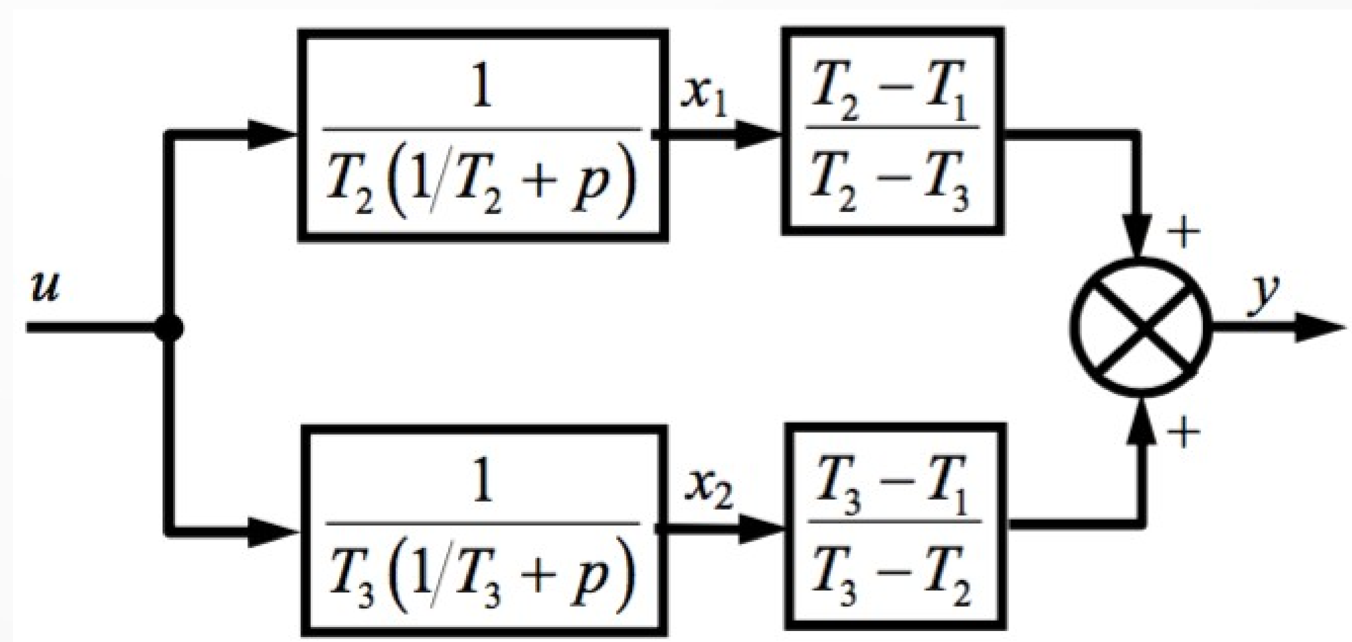
Приклад оцінки керованості та спостережуваності АСР



При T1=T3 САР стає частково спостережуваною

$$T_2 T_3 p^2 y + T_2 p \cdot y + T_3 p \cdot y + y = T_1 p \cdot u + u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{T_2} x_1 + \dfrac{1}{T_2} u; \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{T_3} x_2 + \dfrac{1}{T_3} u; \\ y = \dfrac{T_2 - T_1}{(T_2 - T_3)} x_1 + \dfrac{T_3 - T_1}{(T_3 - T_2)} x_2. \end{cases}$$



Приклад оцінки керованості та спостережуваності АСР

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = u \end{cases}$$

$$y = x_2$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}; \ \mathbf{A}^T\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

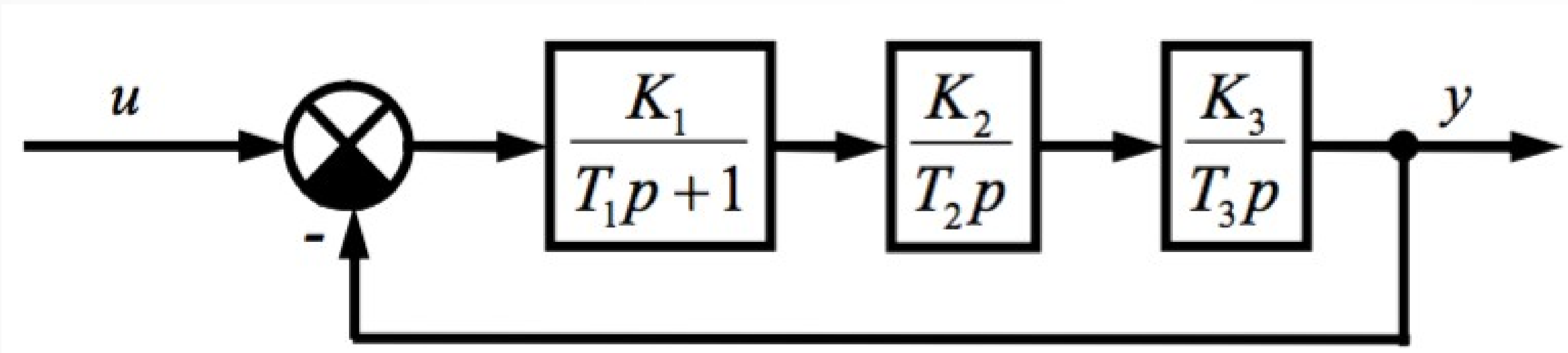
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank = 1 система — 2 — частково спостережувана

Визначення структурної стійкості

- Система може бути нестійкою з двох причин: неприйнятний склад динамічних ланок та невідповідні значення параметрів даних ланок.
- Структурно-стійкими системами називаються такі, які можна перевести в стійкий стан за допомогою зміни значень параметрів системи (наприклад, коефіцієнта підсилення, часу запізнення або постійних часу окремих ланок).
- Структурно нестійкі системами - це системи, які не можуть бути стійкими при будь-якому поєднанні значень параметрів в даній структурі.

Приклад визначення структурної стійкості АСР 1



За критерієм Гурвіца

$$\Delta_1 = T_2 T_3$$

$$W_{PA3}(p) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 p + 1)\cdot T_2 p \cdot T_3 p}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} T_2T_3 & K_1K_2K_3 & 0 \\ T_1T_2T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_2T_3 & K_1K_2K_3 \end{vmatrix} = K_1K_2K_3 \cdot \Delta_2 = -(K_1K_2K_3)^2 \cdot T_1T_2T_3$$

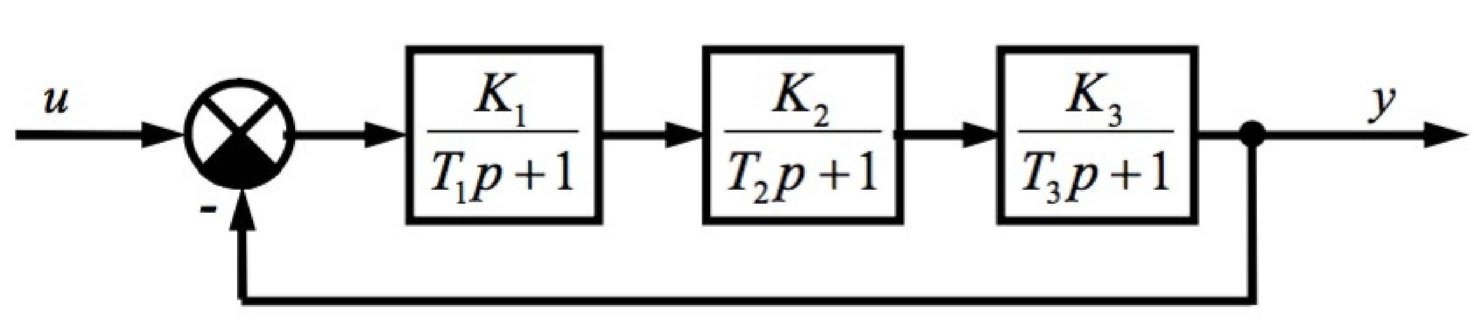
$$W_{3AM}(p) = \frac{K_1K_2K_3}{(T_1p+1)\cdot T_2p \cdot T_3p + K_1K_2K_3}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_2T_3 & K_1K_2K_3 \\ T_1T_2T_3 & 0 \end{vmatrix} = -T_1T_2T_3 \cdot K_1K_2K_3$$

$$T_1T_2T_3p^3 + T_2T_3p^2 + 0p + K_1K_2K_3 = 0$$

Структурно не стійка

Приклад визначення структурної стійкості АСР 2



$$W_{РАЗ}(p) = \frac{K_1K_2K_3}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$$

$$W_{ЗАМ}(p) = \frac{K_1K_2K_3}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+K_1K_2K_3}$$

За критерієм Гурвіца

$$\Delta_1 = T_1T_2 + T_2T_3 + T_1T_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3 & K_1K_2K_3+1 \\ T_1T_2T_3 & T_1+T_2+T_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3)\cdot(T_1+T_2+T_3) - T_1T_2T_3\cdot(K_1K_2K_3+1);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3 & K_1K_2K_3+1 & 0 \\ T_1T_2T_3 & T_1+T_2+T_3 & 0 \\ 0 & T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3 & K_1K_2K_3+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (K_1K_2K_3+1)\cdot\Delta_2.$$

$$T_1T_2T_3p^3 + (T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3)p^2 + (T_1+T_2+T_3)p + K_1K_2K_3 + 1 = 0$$

Структурно стійка

Аналіз якості регулювання лінійних АСР

Лекція №10

Показники якості регулювання

Якість регулювання - сукупність показників точності в сталому режимі і виду перехідних процесів.

При дослідженні якості перехідного процесу прийнято розглядати кілька типових впливів на АСР:

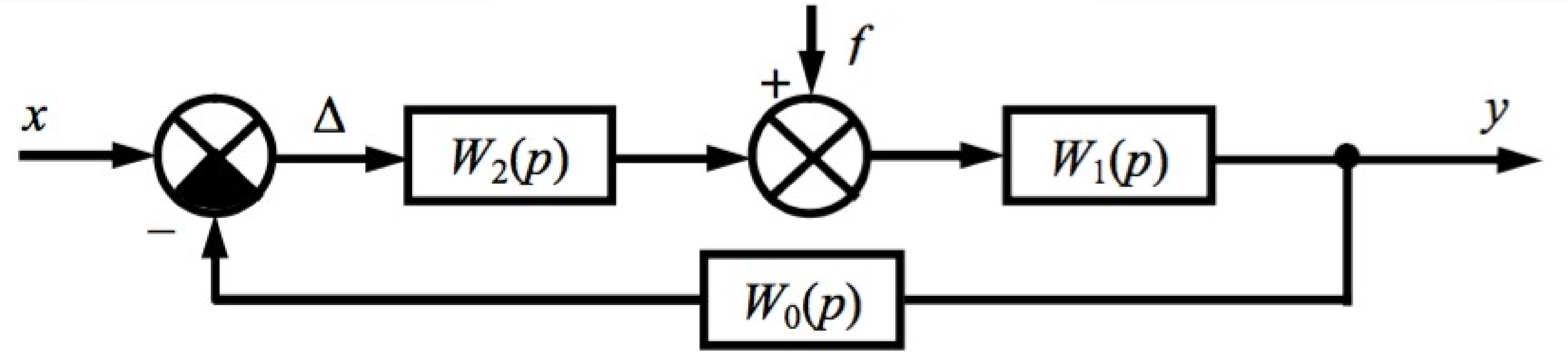
- одиничний східчастий 1 (t);
- імпульсний δ (t);
- гармонійний x (t).

В результаті оцінки якості регулювання точними чисельними методами отримують параметри перехідного процесу, що називаються **показниками якості** .

Показники якості можуть бути **прямими і непрямими** . В свою чергу вони можуть бути статичними і динамічними .

Динамічні показники характеризують перехідний процес, а статичні - сталий режим.

Статичні показники якості (статизм)



$$W_{РАЗ}(p) = W_0(p) \cdot W_1(p) \cdot W_2(p)$$

$$W_X(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_{РАЗ}(p)}$$

$$W_F(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_{РАЗ}(p)}$$

$$W_\Delta(p) = \frac{\Delta(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + W_{РАЗ}(p)}$$

$$K_{РАЗ} = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3$$

$$W_X(0) = \delta_x = \frac{Y_{СТ}}{X_{СТ}} = \frac{K_1 K_2}{1 + K_{РАЗ}}$$

$$W_F(0) = \delta_f = \frac{Y_{СТ}}{F_{СТ}} = \frac{K_1}{1 + K_{РС}}$$

$$W_\Delta(0) = \delta_\Delta = \frac{\Delta_{СТ}}{X_{СТ}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{K_{РАЗ}}{p}\right]_{p \to 0}} = 0$$

Вплив астатизму ланок на похибку

W1 та W2 — астатичні, f — сталий: статична помилка АСР по збуренню самоусувається, якщо порядок астатизму передатної функції по управлінню Wx(p) вище порядку астатизму передтної функції по збуренню Wf(p)

$$\delta_f = \left[\frac{\frac{K_1}{p}}{1 + \frac{K_{PA3}}{p^2}} \right]_{p \to 0} = \left[\frac{p \cdot K_1}{p^2 + K_{PA3}} \right]_{p \to 0} = 0$$

W1 та W2 — астатичні, f = v*t: статична помилка АСР по збуренню самоусувається, якщо різниця порядків астатизмі передатної функції управління Wx(p) і передатної функції по збуренню Wf(p) вище порядку похідної збурюючого впливу f.

$$W_F(0) = \delta_f = \frac{Y_{CT}}{F_{CT}} = \left[\frac{\frac{K_1}{p}}{\left(1 + \frac{K_{PA3}}{p^2}\right) p} \right]_{p \to 0} =$$

$$= \left[\frac{K_1}{p^2 + K_{PA3}} \right]_{p \to 0} = \frac{K_1}{K_{PA3}}$$

Показник добротності управління АСР

- Добротність по швидкості
- Добротність по прискоренню

$$k_v = \frac{v}{Y_{CT}} = \frac{K_{PA3}}{K_1}$$

$$k_a = \frac{a}{Y_{CT}} = \frac{K_{PA3}}{K_1}$$

Прямі показники якості управління АСР

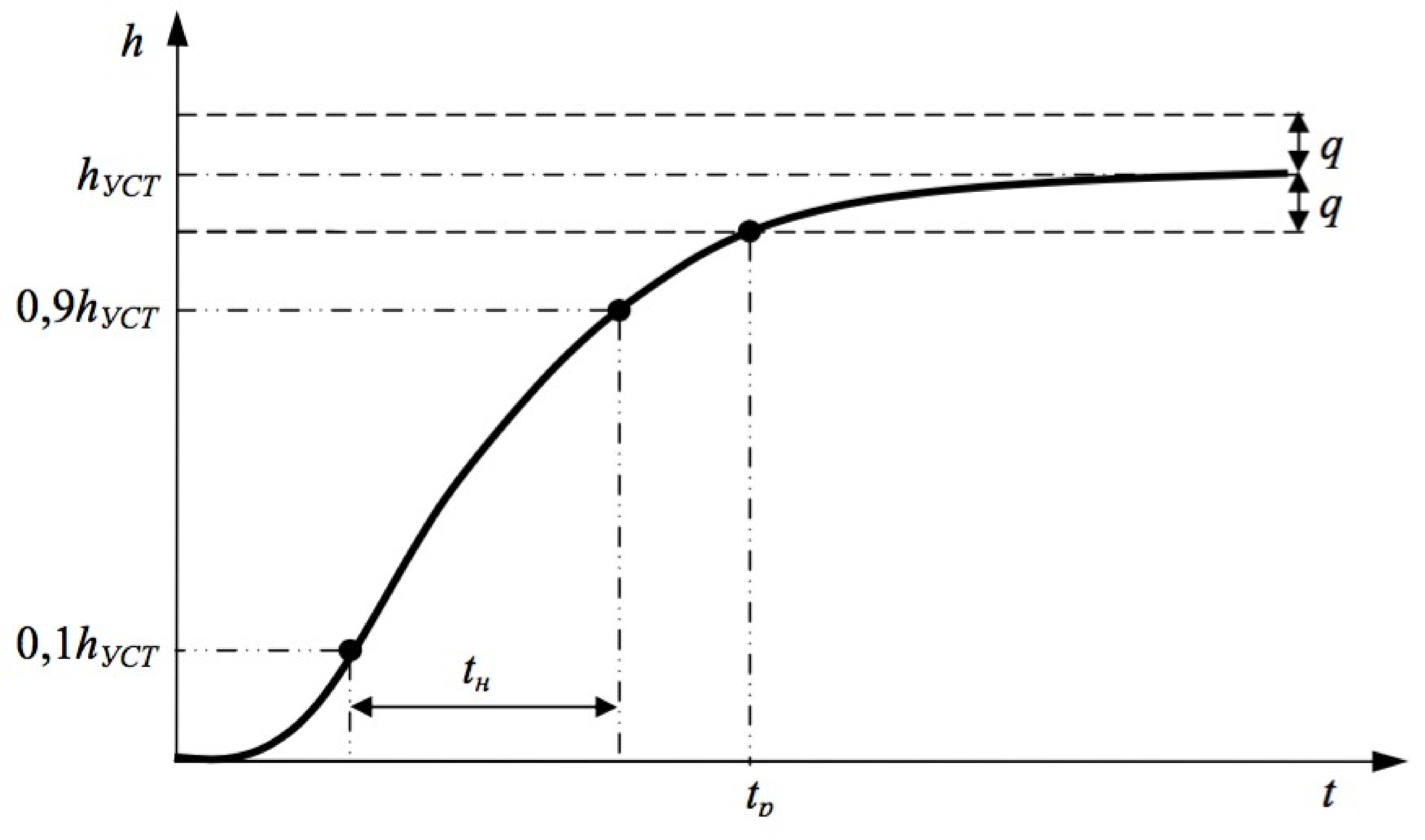
- Прямі показники визначаються безпосередньо по перехідній характеристиці за каналом управління або збурення. Якщо перехідна характеристика являє собою затухаючі коливання, то система вважається стійкою. При цьому допускається не більше 2-3-х коливань.
- До основних прямими показниками якості ставляться:
  - tр - час регулювання;
  - tн - час наростання;
  - σ - перерегулювання;
  - μ - коливальність;
  - ψ - ступінь загасання;
  - ΔСТ - статична помилка.

Час регулювання та час наростання

Час регулювання - інтервал часу від подачі одиничного східчастого впливу x(t) = 1(t) на вхід системи до моменту, коли відхилення перехідної характеристики h(t) від усталеного значення hуст не перевищує деякої заданої величини q . Значення інтервалу q вибирають зазвичай рівне 2% або 5% від величини hуст.

Час наростання - інтервал часу, за який перехідна характеристика h(t) при подачі одиничного східчастого впливу x(t) = 1(t) на вхід системи наростає від 10 до 90% від значення hуст.

Показники на перехідному процесі



Коливальність

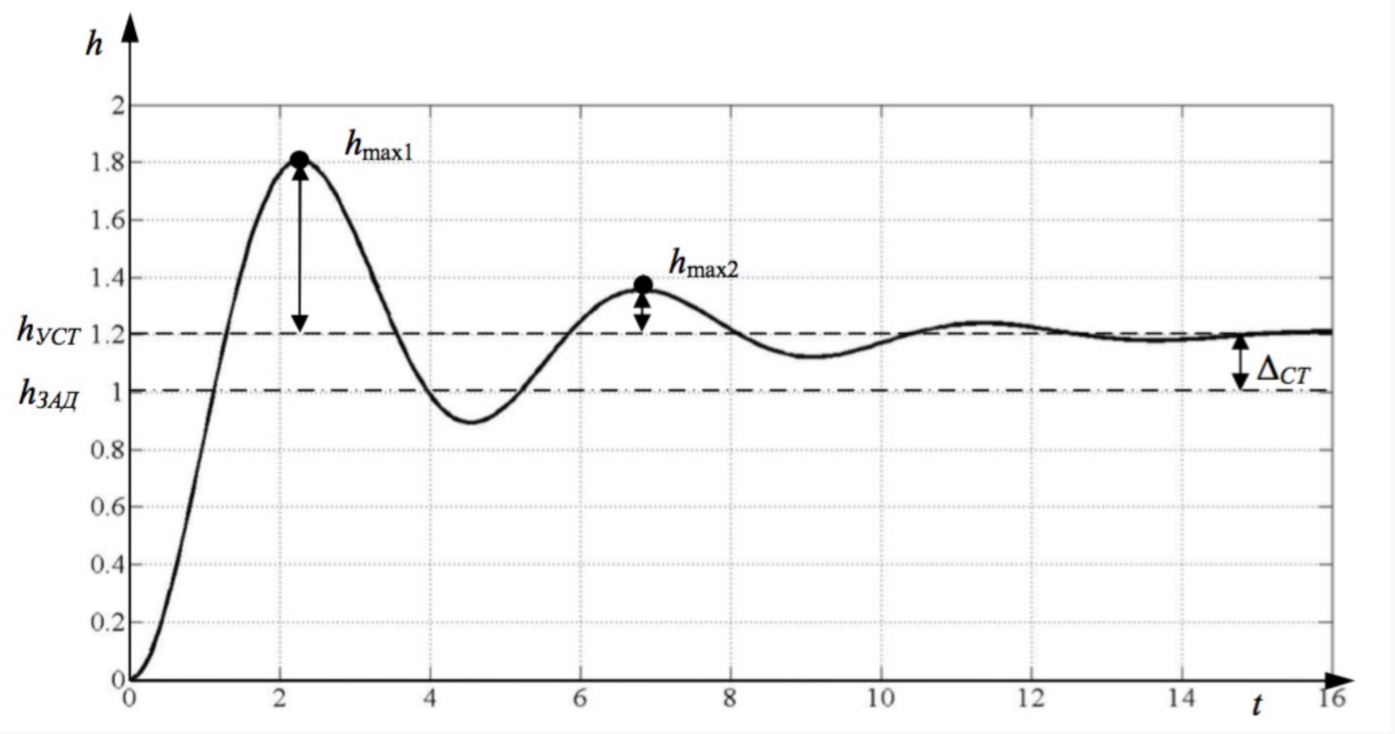
Коливальність - відношення двох сусідніх максимальних позитивних відхилень перехідної характеристики від hуст або заданого h, що зазвичай виражається в відсотках

$$\mu = \frac{h_{\max 2} - h_{УСТ}}{h_{\max 1} - h_{УСТ}} \cdot 100\,\%$$

Перерегулювання

Перерегулювання - це відношення першого максимального позитивного відхилення перехідної характеристики від hуст або заданого h до сталого або заданого значення, виражене у відсотках

$$\sigma = \frac{h_{\max 1} - h_{УСТ}}{h_{УСТ}} \cdot 100\,\%$$



Ступінь загасання та статична похибка

Ступінь загасання - показує наскільки коливальність μ менше одиниці, т. е. різницю одиниці і відношення двох сусідніх максимальних позитивних відхилень перехідної характеристіки від усталеного hуст або заданого h значення.

Статична помилка - різниця між заданим і значенням регульованої величини і тим, що встановилось

$$\Psi = 1 - \mu = 1 - \frac{h_{\max 2} - h_{УСТ}}{h_{\max 1} - h_{УСТ}}$$

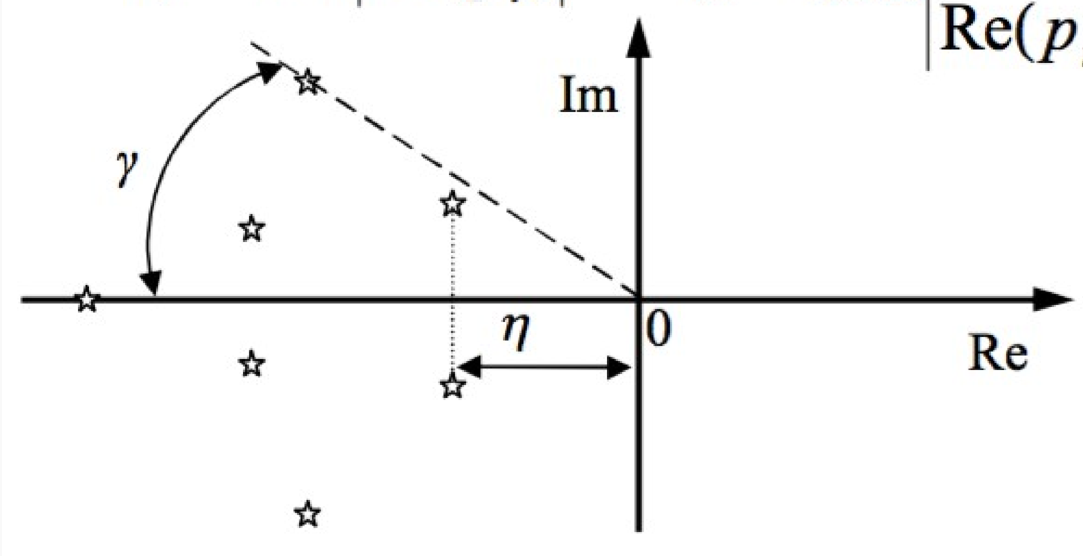
$$\Delta_{СТ} = h_{ЗАД} - h_{УСТ}$$

Непрямі показники якості

- • η - ступінь стійкості - показник тривалості перехідного процесу;
- • m - ступінь коливальності - показник коливальности перехідного процесу

$$\eta = \min\left|\mathrm{Re}(p_i)\right|$$

$$m = \max\left|\frac{\mathrm{Im}(p_i)}{\mathrm{Re}(p_i)}\right|$$



$$\mu = \frac{A_{3\max}}{A_3(0)}$$