Диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Основні поняття.

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

або

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

якщо воно розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$.

Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку). Якщо в диференціальному рівнянні (2) функція $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ і її частинні похідні за аргументами $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ неперервні в деякій області Д, що містить точку $(x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., y_0^{(n-1)})$, то рівняння має єдиний розв'язок $y = y(x)$,

що задовольняє початковим умовам

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \qquad (3)$$

Задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку полягає в тому, щоб знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (1) чи (2), який задовольняє початковим умовам (3).

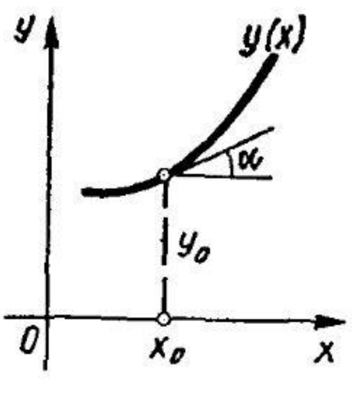
Якщо розглядати рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (4)$$

то початкові умови розв'язку $y = y(x)$ слідуючи:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0 \qquad (5)$$

Єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння (4) з початковими умовами (5) треба розуміти так, що через задану точку площини $(x_0; y_0)$ проходить єдина інтегральна крива цього рівняння, дотична до якої в точці $(x_0; y_0)$ складає з додатнім напрямом осі 0x кут α_0, тангенс якого $tg\alpha_0 = y'_0$. Таким чином, існує нескінченна множина інтегральних кривих рівняння (4), що проходить через точку $(x_0; y_0)$, і тільки одна з них нахилена до осі 0x під кутом, тангенс якого дорівнює заданому числу y'_0.



Означення 1. Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (6)$$

яка залежить від n довільних сталих і задовольняє умовам:

1) вона є розв'язком рівняння (2) при будь-яких допустимих значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) які б початкові умови (3) не були задані, можна знайти такі значення сталих $C_i (i = 1, 2, ..., n)$, при яких ці умови будуть задовільнені, тобто

$\varphi(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y_0$, $\varphi'(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y'_0$, ...,

$\varphi^{(n-1)}(x_0, C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}) = y_0^{(n-1)}$.

Загальний розв'язок, отриманий в неявній формі:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2).

Розв'язок, який отримали з загального розв'язку (6) при конкретних значеннях сталих C_i, називається частинним розв'язком диференціального рівняння (2).

Диференціальні рівняння *n*-го порядку, які інтегруються в квадратурах

Рівняння *n*-го порядку інтегруються в квадратурах дуже рідко. Розглянемо деякі класи таких рівнянь.

1°. *Рівняння виду*

$$y^{(n)} = f(x),$$

де $f(x)$ — задана неперервна функція, інтегрується в квадратурах.

Загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ шукаємо шляхом послідовного інтегрування

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx + C_1 = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int (\int f(x) dx + C_1) dx + C_2,$$

і т. д.

Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} = \cos 2x$.

$$y''' = \int \cos 2x dx + C_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1;$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1\right) dx + C_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2\right) dx + C_3 = -\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3\right) dx + C_4 =$$

$$= \frac{1}{16} \cos 2x + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку

Одним з методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків є *метод пониження порядку*. Суть його полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку.

Розглянемо два типи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку.

1) Рівняння виду

$$y'' = f(x, y') \qquad (1)$$

Права частина цього рівняння не містить шуканої функції y. За допомогою підстановки $y' = p(x)$ зводиться до рівняння першого порядку:

$$p' = f(x, p)$$

Приклад Розв'язати рівняння $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$

Маємо диференціальне рівняння виду $y'' = f(x, y')$, яке не містить y.

Нехай $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'(x)$.

Отже, після заміни рівняння перетворилось у диференціальне рівняння першого порядку: $p' + \dfrac{1}{x} \cdot p = x$.

Це лінійне диференціальне рівняння.

Покладаючи $p = uv$, знаходимо $p' = u'v + uv'$. Дістаємо

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = x,$$

$$v' + \frac{1}{x}v = 0 \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \qquad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x} \quad \ln|v| = -\ln|x| \qquad v = \frac{1}{x}$$

$$u'v = x \qquad \frac{du}{dx}v = x \qquad \int du = \int x^2 dx \qquad u = \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$p = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)\frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x},$$

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{9} + C_1\ln|x| + C_2$$ – загальний розв'язок

2) Рівняння виду

$$y'' = f(y, y') \tag{2}$$

Права частина цього рівняння не містить явно незалежну змінну x. Зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p(y)$, де, на відміну від переднього випадку, p вважається функцією від y. Тоді, використовуючи правило диференціювання складної функції, дістаємо $y'' = p_y' \cdot y_x' = p'p$. Рівняння (2) матиме вигляд $p'p = f(y, p)$.

Приклад Розв'язати рівняння $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Маємо диференціальне рівняння виду $y'' = f(y, y')$, яке не містить явно x.

Нехай $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p'p$. Отже, маємо $2yp'p + p^2 = 0$ – диференціальне рівняння першого порядку відносно p з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо:

$$2y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = -p^2,$$

$$2y\,dp = -p\,dy, \quad p \neq 0$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} + \ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$\ln|p| = \ln\left|\frac{C_1}{\sqrt{y}}\right|,$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Підставляючи замість p його значення, матимемо

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}},$$

$$\int \sqrt{y}\,dy = \int C_1 dx$$

$$\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} = C_1 x + C_2$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9(C_1 x + C_2)^2}{4}}$$ – загальний розв'язок

Досліджуємо розв'язок p = 0: $p = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow y = C$.

Розв'язок y = C не є особливим, тому що отримується з загального при $C_1 = 0$.