

Лабораторна робота № 1

ЗАСТОСОВУВАННЯ МЕТОДІВ ВИКЛЮЧЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ З ГРУБИМИ ПОХИБКАМИ

Мета роботи:

Ознайомитися з методами виключення спостережень, що містять грубі похибки. Вирішити задачу виключення результатів з грубими похибками для конкретних чисельних прикладів за допомогою програми МАТЛАБ.

1.1. Основні теоретичні відомості

1.1.1. Завдання попередньої обробки експериментальних даних

Загальним завданням попередньої обробки експериментальних даних є виключення спостережень, що містять грубі похибки, а також зменшення впливу систематичної складової похибок вимірювання. При однократному виробничому вимірюванні така попередня обробка ускладнена. Багатократні вимірювання дають деяку сукупність результатів, яка має бути оброблена для отримання найбільш достовірного значення вимірюваної величини і оцінки його точності.

Перш за все, з сукупності експериментальних даних слід виключити результати спостережень, що в явному вигляді містять грубі похибки і тому помітно відрізняються від інших результатів. Якщо повної упевненості в наявності грубої похибки немає, то такий результат слід залишити у вибірці, а потім перевірити правомірність його віднесення до неї (за допомогою відповідних статистичних критеріїв).

1.1.2. Методи виключення результатів з грубими похибками

Для виключення грубих похибок застосовують апарат перевірки статистичних гіпотез. У метрології використовуються статистичні гіпотези, під якими розуміють гіпотези про вид невідомого розподілу, або про параметри відомих розподілів.

Разом з висунутою гіпотезою розглядають і гіпотезу, що суперечить їй. Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу. А конкуруючою (альтернативною) називають ту, яка суперечить нульовій.

При висуненні і прийнятті гіпотези можуть мати місце наступні чотири випадки:

- 1) гіпотеза приймається, причому й насправді вона правильна;
- 2) гіпотеза вірна, але помилково відкидається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою першого роду, а ймовірність її появи позначають рівнем значущості q ;
- 3) гіпотеза відкидається, причому насправді вона невірна;
- 4) гіпотеза невірна, але помилково приймається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою другого роду, а ймовірність її появи позначають β .
- 5) Величину $1-\beta$, тобто ймовірність, що гіпотеза буде знехтувана, коли вона помилкова, називають потужністю критерію.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають сукупність значення критерію, при яких гіпотезу приймають. Критичною називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають. Область прийняття гіпотези і критична область розділені критичними точками, що дорівнюють табличним значенням критеріїв.

Перевірку статистичної гіпотези проводять для прийнятого рівня значущості q (приймається рівним 0,1; 0,05; 0,01 тощо). Так, прийнятий рівень значущості $q=0,05$ означає, що висунута нульова статистична гіпотеза може бути прийнята з довірчою ймовірністю $p=0,95$. Або є ймовірність відкинути цю гіпотезу (зробити помилку першого роду), що дорівнює $p = 0,95$.

Нульова статистична гіпотеза підтверджує належність "підозрілого" результату вимірювання (спостереження) даній групі вимірювань, що перевіряється. Формальним критерієм аномальності результату спостережень (підставою для ухвалення конкуруючої гіпотези: "підозрілий" результат не належить даній групі вимірювань) при цьому служить межа, що відстоїть від центру розподілу на величину tS , тобто:

$$|x_{in} - \bar{x}| \geq tS, \quad (1.1)$$

де x_{in} – результат спостереження, що перевіряється на наявність грубої похибки; t – коефіцієнт, що залежить від закону розподілу, об'єму вибірки, рівня значущості.

Таким чином, межі похибок залежать від виду розподілу, об'єму вибірки і вибраної довірчої ймовірності.

При обробці вже наявних результатів спостережень довільно відкидати окремі результати не слід, оскільки це може привести до фіктивного підвищення точності результату вимірювань. Група вимірювань (вибірка) може містити декілька грубих похибок і їх виключення проводять послідовно, тобто поодиночі.

Всі методи виключення грубих похибок (промахів) можуть бути розділені на два основні типи:

- а) методи виключення при відомому генеральному СКВ;
- б) методи виключення при невідомому генеральному СКВ.

У першому випадку СКВ обчислюється за результатами всієї вибірки результатів спостережень. Після вилучення грубих похибок обчислення СКВ потрібно повторити.

Оскільки на практиці частіше зустрічаються вимірювання при невідомому СКВ (обмежене число спостережень), далі розглянуті такі критерії перевірки "підозрілих" (з точки зору похибок) результатів спостережень: Ірвіна, Романовського, Діксону, Смирнова, Шовене, "3 σ ".

Так як вимоги, що визначають межу, за якою знаходяться "грубі" результати спостережень, для різних критеріїв різні, то перевірку слід виконувати по декількох критеріях (рекомендується використовувати не менше трьох критеріїв з тих, що розглядаються далі). Остаточний висновок про приналежність "підозрілих" результатів даної сукупності спостережень слід робити по більшості критеріїв.

1.1.3. Критерій Ірвіна

Для отриманих експериментальних даних визначають коефіцієнт по формулі:

$$\lambda = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{S}, \quad (1.2)$$

де x_{n+1} , x_n – найбільші значення випадкової величини; S – середнє квадратичне відхилення, обчислене по всіх значеннях вибірки. Потім цей коефіцієнт порівнюється з табличним значенням λ_q , можливі значення якого наведені в табл.1.1

Таблиця 1.1

Число	Рівень значущості	
	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
1	2	3
2	2.8	3.7
3	2.2	2.9
10	1.5	2.0
20	1.3	1.8
30	1.2	1.7
50	1.1	1.6
100	1.0	1.5
400	0.9	1.3
1000	0.8	1.2

Якщо $\lambda > \lambda_q$, то нульова гіпотеза не підтверджується, тобто результат – помилковий, і він має бути виключений при подальшій обробці результатів спостережень.

1.1.4. Критерій Романовського

Конкуруюча гіпотеза про наявність грубих похибок в “підозрілих” результатах підтверджується, якщо виконується нерівність:

$$|x_{\bar{n}} - \bar{x}| \geq t_p S, \quad (1.3)$$

де t_p – квантиль розподілу Стьюдента при заданій довірчій ймовірності з числом міль свободи $k = n - k_n$ (k_n – число “підозрілих” результатів спостережень). Значення квантилів для розподілу Стьюдента представлені в додатку 1.

Точкові оцінки розподілу \bar{x} і СКВ результатів спостережень обчислюється без урахування k_n “підозрілих” результатів спостережень.

1.1.5. Критерій Діксону

Критерій заснований на припущенні, що похибки вимірювань мають нормальний закон розподілу (заздалегідь необхідна побудова гістограми результатів спостережень і перевірка гіпотези про приналежність нормальному закону розподілу). При використанні критерію обчислюють коефіцієнт Діксону (спостережуване значення критерію) для перевірки найбільшого або найменшого екстремального значення залежно від числа вимірювань. У табл.1.2 приведені формули коефіцієнтів Діксону. Коефіцієнти r_{10} , r_{11} застосовують, коли є один викид, а r_{21} , r_{22} – коли два викиди. При цьому потрібне первинне впорядкування результатів вимірювань (об'єму вибірки). Критерій застосовується, коли вибірка може містити більш, ніж одну грубу похибку.

Таблиця 1.2

Число вимірювань n (обсяг вибірки)	Коефіцієнт Діксону	Для найменшого експериментального значення параметра	Для найбільшого експериментального значення параметра
3-7	r_{10}	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
8-10	r_{11}	$\frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$
11-13	r_{21}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
14-25	r_{22}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

Обчислені для вибірки по формулах значення коефіцієнтів Діксону r порівнюють з табличним значенням коефіцієнтів Діксону r_q (табл. 1.3).

Нульова гіпотеза про відсутність грубої похибки виконується, якщо виконується нерівність $r < r_q$. Якщо $r > r_q$, то результат визнається грубою похибкою і виключається з подальшої обробки.

Таблиця 1.3

Статистика	Число вимірювань	r_q при рівні значущості q			
		0,1	0,05	0,02	0,01
r_{01}	3	0,886	0,941	0,976	0,988
	4	0,679	0,765	0,846	0,899
	5	0,557	0,642	0,729	0,780
	6	0,482	0,560	0,644	0,698
	7	0,434	0,507	0,586	0,637
r_{11}	8	0,479	0,554	0,631	0,683
	9	0,441	0,512	0,587	0,636
	10	0,409	0,477	0,551	0,597
r_{21}	11	0,517	0,576	0,538	0,679
	12	0,490	0,546	0,605	0,642
	13	0,467	0,521	0,578	0,615
r_{22}	14	0,462	0,546	0,602	0,641
	15	0,472	0,525	0,579	0,616
	16	0,452	0,507	0,559	0,595
	17	0,438	0,490	0,542	0,577
	18	0,424	0,475	0,527	0,561
	19	0,412	0,462	0,514	0,547
	20	0,401	0,450	0,502	0,535
	21	0,391	0,440	0,491	0,524
	22	0,382	0,430	0,481	0,514
	23	0,374	0,421	0,472	0,505
	24	0,367	0,413	0,464	0,497

1.1.6. Критерії «Зс», Райта

Критерій «правило трьох сигм» є одним з простих способів перевірки результатів, що мають нормальний закон розподілу. Суть правила трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевершує потрійного середнього квадратичного відхилення.

На практиці правило трьох сигм застосовують так: якщо розподіл досліджуваної випадкової величини невідомий, але умова, вказана в приведеному правилі, виконується, то є підстави припускати, що ця величина розподілена нормально; інакше вона не розподілена нормально. З цією метою для вибірки (включаючи підозрілий результат) обчислюється \bar{x} і оцінка СКВ результату спостережень.

Результат, який задовольняє умові $x_{in} - \bar{x} \geq 3S$, вважається за той, що має грубу похибку і вилучається, а раніше обчислені характеристики розподілу уточнюються.

Цьому критерію аналогічний критерій Райта, заснований на тому, що якщо залишкова похибка більше чотирьох сигм, то цей результат вимірювання є грубою похибкою і має бути виключений при подальшій обробці. Обидва критерії надійні при числі вимірювань більше 20...50.

Може статися, що при нових значеннях \bar{x} і S інші результати потраплять в категорію аномальних. Однак, двічі використовувати критерії грубої похибки не рекомендується.

1.1.7. Критерій Смирнова

Критерій Смирнова використовується при об'ємах вибірки $n \geq 25$. Він встановлює менш жорсткі межі грубої похибки. Для реалізації цього критерію обчислюються дійсні значення квантилів розподілу (спостережуване значення критерію) по формулі:

$$\beta = \frac{\max |x_{ii} - \bar{x}|}{S}. \quad (1.4)$$

Знайдене значення порівнюється з критерієм β_k , наведеним в табл.1.4.

Таблиця 1.4.

Об'єм вибірки	Граничне значення β_k при рівні значущості q				
	0,100	0,050	0,010	0,005	0,001
1	2	3	4	5	6
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890
25	2,635	2,870	3,351	3,539	3,944
30	2,696	2,928	3,402	3,587	3,988
40	2,792	3,015	3,480	3,662	4,054
50	2,860	3,082	3,541	3,716	4,108
100	3,076	3,285	3,723	3,892	4,263
250	3,339	3,534	3,946	4,108	4,465
500	3,528	3,703	4,108	4,263	4,607

1.1.8. Критерій Шовене

Критерій Шовене застосовується для законів, що не суперечать нормальному, і будується на визначенні числа очікуваних результатів спостережень n_{oc} , які мають такі ж великі похибки, як і “підозрілий” результат. Гіпотеза про наявність грубої похибки приймається, якщо виконується умова:

$$n_{oc} \leq 0,5. \quad (1.5)$$

Порядок перевірки гіпотези наступний:

1) обчислюється середнє арифметичне \bar{x} і СКВ результатів спостережень для всієї вибірки;

2) з таблиці інтегральної функції нормованого нормального розподілу (додаток 2) по величині $z = \frac{|x_{in} - \bar{x}|}{S}$ визначається ймовірність появи “підозрілого” результату в генеральній сукупності чисел n :

$$P(zS < x_{in} - \bar{x}). \quad (1.6)$$

Таблица 1.5

№	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈	X ₁₉	X ₂₀	
В																					
1	216	133	312	283	185	419	418	296	332	317	281	372	241	518	286	311	406	605	290	216	
2	229	566	271	362	130	285	325	41	56	257	160	269	281	271	329	266	319	79	198	184	
3	239	325	224	441	219	352	321	607	183	294	298	361	350	4.9	359	235	338	299	298	298	
4	200	168	309	126	242	289	273	257	204	267	256	174	162	170	52	176	511	231	344	164	
5	362	379	394	601	321	323	199	225	408	286	338	308	236	244	344	205	378	356	217	273	
6	281	79	498	348	432	423	402	299	305	362	281	294	547	405	278	395	287	265	373	495	
7	512	565	183	453	473	378	368	593	501	435	580	523	401	633	528	647	613	431	370	492	
8	366	315	449	548	353	315	75	466	314	279	388	393	448	340	385	356	392	553	339	265	
9	346	209	303	237	353	355	279	94	313	459	501	141	292	231	197	176	328	257	305	263	
10	153	237	272	4112	64	97	513	161	61	231	355	270	395	250	386	166	86	178	319	88	
11	363	239	355	290	308	199	250	346	267	423	236	167	276	605	288	337	394	187	235	229	
12	98	181	352	196	322	130	501	121	258	174	248	266	192	288	430	252	198	291	205	89	
13	348	299	272	427	486	247	610	219	368	63	399	321	326	421	272	286	172	133	229	328	
14	345	266	507	328	398	399	375	439	373	233	97	424	274	365	305	282	297	359	417	388	
15	606	475	348	500	507	531	549	627	445	526	498	441	713	474	359	677	532	188	562	626	
16	510	613	586	483	718	298	653	528	534	631	610	784	572	821	750	405	431	542	581	601	
17	583	427	427	479	197	527	605	562	324	569	581	563	631	532	432	485	255	547	511	440	
18	334	291	395	437	366	350	96	382	304	529	444	528	350	288	480	404	324	391	199	508	
19	201	231	433	209	258	249	461	608	191	187	473	493	463	174	278	280	330	242	202	255	
20	308	437	222	173	270	151	386	310	77	133	334	238	239	29	222	268	136	499	181	94	
21	256	133	312	328	185	419	418	296	332	317	281	372	241	518	286	311	606	305	290	216	
22	429	266	471	562	330	485	525	240	255	457	360	469	481	471	529	466	519	279	98	384	
23	339	525	394	641	419	552	521	407	282	494	398	561	550	669	559	435	538	399	198	495	
24	601	568	709	412	642	289	673	657	604	667	656	574	562	570	452	576	611	631	744	744	
25	762	779	394	601	7212	723	599	625	808	686	738	708	636	644	744	605	778	756	617	673	

3) число очікуваних результатів $n_{оч}$ визначається по формулі:

$$n_{оч} = nP. \quad (1.7)$$

1.2. Порядок виконання лабораторної роботи

1. Виконати перевірку для контрольної вибірки у відповідності з варіантом завдання по табл. 1.5. на наявність грубих похибок по критеріям Ірвіна, Романовського та " 3σ ", для непарних варіантів завдань і по критеріям Діксона, Смірнова та Шовене для парних варіантів завдань при рівні значущості $q=0,05$.

2. Зробити остаточний висновок про приналежність "підозрілих" результатів даної сукупності спостережень по більшості критеріїв.

1.3. Контрольні запитання

1. Яка необхідність в попередній обробці експериментальних даних?
2. Що таке грубі похибки?
3. Що таке статистичні гіпотези?
4. Які існують методи виключення грубих похибок?
5. Як визначається СКВ?
6. Як визначається квантиль розподілу?
7. По скількох критеріях рекомендується виявляти грубі похибки?