Практикум з модуля 3.

Моделювання економічної динаміки

<u>Лабораторна робота 7-8</u>

Тема: Моделювання лінійних та нелінійних бізнес-процесів

Мета: отримати практичні навички моделювання темпів зростання виробництва. Дослідження динаміки бізнес-процесів.

Час: 8 годин.

Завдання

Теоретичні:

- повторити матеріал лекцій [*Конспект лекцій з модуля 3: Моделювання економічної динаміки, http://surl.li/tniaw*]
- повторити [*Основи використання системи MathCad (до модуля 1 і 3)*]

Практичні:

1. Витрати на перевезення двома видами транспорту виражаються функціями:

$y_1(x) = 50x + 150$ і $y_2(x) = 25x + 250$,

де x – відстань перевезень (від 3 до 5 км); y_1 і y_2 – транспортні витрати першим і другим видами транспорту (грош. од.).

Побудувати графіки для визначення, при яких відстанях економніше користуватися тим чи іншим видом транспорту.

Методичні рекомендації. Необхідно побудувати графіки функцій витрат в одній системі координат.

2. Визначити обсяг продукції, виробленої робітником за другу половину робочого дня, якщо продуктивність праці характеризується функцією $f(t)$, а тривалість робочого дня складає 8 год.: $f(t) = \frac{2}{3t+4} + 3$.

Методичні рекомендації. Якщо *f(t)* – продуктивність праці в момент *t*, то обсяг продукції, що випускається за часовий проміжок [t_1, t_2]:

$$U = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

3. За даними досліджень з розподілу прибутків у одній з країн, крива Лоренца може бути задана рівнянням $y(x)=1-\sqrt{1-x^2}$, де x – частка населення, y – частка прибутків населення. Обчислити коефіцієнт Джинні.

Методичні рекомендації. Крива Лоренца характеризує ступінь нерівності в розподілі прибутків серед населення і показує залежність відсотка прибутків від відсотка населення, що їх має. При рівномірному розподілі прибутків крива Лоренца вироджується в пряму – бісектрису *OA* (рис. 1).

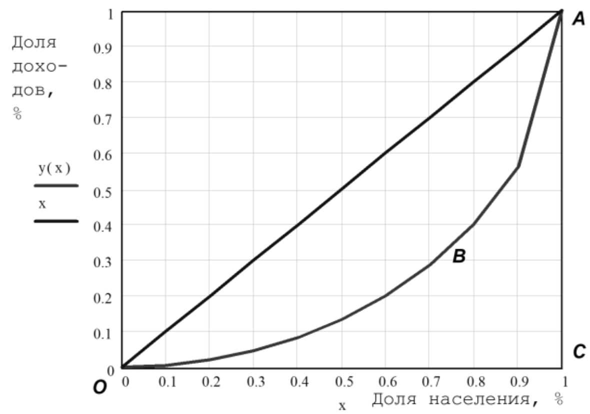

Рис. 1.

Коефіцієнт Джинні характеризує ступінь нерівності в розподілі прибутків серед населення і чисельно дорівнює:

$$K=\frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAB}}.$$

Площа під графіком функції чисельно дорівнює інтегралу від цієї функції, тому коефіцієнт Джинні дорівнює:

$$\frac{\int_0^1 x dx-\int_0^1 y(x) dx}{\int_0^1 x dx}$$

4. Визначити дисконтний прибуток за 5 років при процентній ставці 10%, якщо базові капіталовкладення становили 10 млн грн, а очікуване зростання капіталу 2 млн грн в рік.

Методичні рекомендації. Визначення вихідної суми за її кінцевим значенням, отриманим через t років при річному відсотку i, називається дисконтуванням. Задачі такого класу зустрічаються при визначенні ефективності капіталовкладень. Якщо річний прибуток змінюється в часі й описується функцією $F(t)$, то дисконтний прибуток за T років визначається виразом [29]:

$$K = \int_0^T F(t) e^{-it} dt.$$

5. Потрібно знайти середній час, витрачений на освоєння випуску одного виробу в період освоєння від 10 до 20 виробів, якщо $t(x)=\alpha x^{-\beta}$, де α – витрати часу на один виріб, α = 200 хв., β – показник виробничого процесу, β = 0,5.

Методичні рекомендації. Нехай відома функція $t=t(x)$, що задає зміну витрат t на виготовлення продукції в залежності від ступеня освоєння виробництва, де x – порядковий номер виробу в партії товару. Середній час $t_{сер}$ на виготовлення одного виробу в період освоєння від a до b виробів, обчислюється за теоремою про середнє визначеного інтеграла:

$$t_{sr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b t(x)dx.$$

6. Нехай випуск продукції підприємством $y(t)$ описується диференціальним рівнянням $\frac{dy(t)}{dt} = kU(t)$, де $U(t)$ – обсяг інвестування, k – коефіцієнт пропорційності. Оцінити вплив інвестицій на виробництво, якщо:

– коефіцієнт $k=5$;

– початковий рівень виробництва (випуск продукції) $y(0)=10$;

– інвестиції:

а) відсутні: $U(t)=0$;

б) постійні: $U(t)=8$;

в) зростають за лінійним законом: $U(t)=2+0{,}8t$.

Результати подати в числовому і графічному вигляді. Зробити висновки.

7. Процес зміни доходів від впровадження інвестиційного проекту описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(t)\left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}}\right)y(t)$$

де $y_{\max}$ – максимальний обсяг прибутку, який може отримати підприємство; $a(t)$ – поточний рівень рентабельності інвестицій; $y(t)$ – поточний розмір прибутку від впровадження інвестицій.

Початковий обсяг прибутку становить 1 млн. грн. Максимальний обсяг прибутку, який може отримати підприємство складає 20 млн. грн. Відобразити графічно і здійснити аналіз динаміки прибутку протягом наступних 50 періодів, якщо зміни рівня рентабельності інвестиційних витрат:

1) становлять 20 %;
2) описуються лінійною функцією $a(t) = 0,01 + 0,07t$;
3) описуються функцією $a(t) = 0,02 - 0,07t + 0,007t^2$.

8. За допомогою моделей Мальтуса і Ферхюльста оцінити період часу, за який буде досягнутий рівень максимального граничного значення населення Землі (40 млрд. чол.), якщо приріст чисельності населення 1,18% на рік, а початкове значення кількості населення на 2016 рік прийняти 7,5 млрд чол. Порівняти результати моделювання, зробити висновки. Використати офіційну статистику та оцінити динаміку народонаселення в Україні за останні 20 років. Порівняти отримані результати з іншими державами (Європи, Азії, Північної та Південної Америки).

9. Виконати моделювання динаміки макроекономічних процесів для галузі сільського господарства протягом наступних 30 періодів, використовуючи модель Харрода - Домара $\frac{dY(t)}{dt} = \alpha(Y(t) - C(t))$. Відомо, що коефіцієнт капіталовіддачі для галузі $\alpha = 15\%$, початковий рівень доходів $Y(0) = 10$ млн грн, а рівень споживання $C(t)$:

а) відсутній $C(t) = 0$;

б) сталий $C(t)=8$ ум. од. Встановити, як зміниться рівень доходів при зростанні рівня споживання до 10 ум. од.

в) постійно зростає за законом $C(t)=C_0e^{rt}$, причому початковий рівень споживання $C_0=0,3$ ум. од., коефіцієнт швидкості зростання $r=0,1$. Проаналізувати зміну рівня доходів від галузі при $r=0,26$.

10. Підприємство вийшло на ринок збуту мінеральних добрив з новою продукцією, яка рекламувалася протягом 8 міс. Відомо, що витрати на кампанію склали $a=0,03$ млн грн, ступінь контактів засобами реклами з майбутнім покупцями становив $b=0,01$. Маркетингові дослідження ринку цієї продукції показали, що його гранична ємність складає 35 тис. од., а початковий рівень попиту становить 500 од. Встановити часові інтервали, які визначають початковий, розвинутий і етап насичення рекламної кампанії. Модель рекламної кампанії описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left(a(t)+b(t)\right)\left(y_{\max}-y(t)\right)y(t).$$

Як зміниться тривалість етапів рекламної кампанії, якщо витрати лінійно зростатимуть $a(t)=0,003+0,015t$, а ступінь контактів зростатиме як $b(t)=0,0002+0,0018t$?

11. Відомо, що граничний обсяг забезпеченості споживачів органічним м'ясом в межах м. Житомира складає 20 т. Оцінити динаміку попиту на органічне м'ясо протягом 30 міс., використовуючи прогнозування на основі рівняння Ферхюльста, якщо початковий рівень попиту складає 5 т, а коефіцієнт пропорційності приймає значення 0,01; 0,02 і 0,03. Розв'язки представити графічно в одній системі координат.

12. Сільськогосподарське підприємство вирощує новий сорт пшениці, попит на який складав 15 ц і зростає на 2%. Потреба фермерських господарств Черняхівського р-ну складає 35 ц. Визначити, коли досліджуване підприємство зможе задовольнити попит на новий сорт пшениці в межах даного району і вийти на нові ринки збуту. Розрахунки виконати на основі диференціального рівняння Ферхюльста.

13. Нелінійна модель зростання виробництва з урахуванням інвестицій описується диференціальним рівнянням $\frac{dy(t)}{dt} = k_0 y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}}\right) + u(t, y(t)).$ Для спрощення позначимо інвестиції функцією $u(t)$.

Відомо, що початковий рівень виробництва підприємства дорівнює 1 тис. од., коефіцієнт $k_0 = 0,5$, а рівень насиченості ринку $y_{\max} = 20$ тис. од. Оцінити вплив інвестицій $u(t)$ на ріст виробництва для наступних випадків:

- інвестиції відсутні;
- рівень інвестицій постійний і дорівнює 4 тис. од.;
- інвестиції лінійно зростають і описуються функцією $u(t) = a + bt$, параметри якої обрати самостійно, $a \in [0,1; 1]$, $b \in [0,1; 0,5]$;
- рівень інвестицій пропорційний обсягу виробництва $u(t) = \gamma y(t),$ коефіцієнт $\gamma \in [0,1; 0,3]$;
- інвестиції нелінійно залежать від обсягу виробництва $u(t) = \gamma(t) y(t),$ $\gamma(t) = ct,$ а коефіцієнт $c \in [0,01; 0,04]$.

14. Залежність попиту $D(p)$ від ціни p на деякий товар визначається функцією $D(p) = 75 - 7p$, а пропозиція виробників $S(p) = 10 + 4p$. Знайти рівноважну ціну, при якій попит буде рівний пропозиції на ринку одного товару. Використати графічний метод. Розрахувати значення попиту і пропозиції, для яких досягається рівноважна ціна.

15. Розрахувати рівноважну ціну аналітично, якщо попит $D(p)$ від ціни $p(t)$ на деякий товар визначається функцією $D(p) = 38 - 2p(t)$, а пропозиція виробників $S(p) = 8 + 3p(t)$. Проаналізувати, чи є бажаним такий товар.

16. Диференціальне рівняння, яке описує зміну ціни залежно від співвідношення між попитом і пропозицією має вигляд

$$\frac{dp(t)}{dt} = \gamma\left((b + \beta)\, p(t) - a + \alpha\right),$$

параметри якого приймають значення

$\gamma = 0,15$, $b = 10$, $\beta = 8$, $a = 25$, $\alpha = 10$.

Визначити динаміку ціни на ринку одного товару за час $t = 1$ рік, якщо на початку року вона становила 6 грн.

17. У ринкових умовах ціна товару є функцією від часу *p(t)*. Попит на товар визначається рівнянням

$$D(t) = 60 - p(t) + 3\frac{dp(t)}{dt},$$

а пропозиція

$$S(t) = 2p(t) - 15 + 25\frac{dp(t)}{dt}.$$

Побудувати сімейство кривих рівноваги цін для періоду 10 міс., якщо в початковий момент часу ціна товару $p(0)$ була рівна 20, 60, 120 грн.

Методичні рекомендації. Для рівноважної ціни $D = S$, тому:

$$60 - p(t) + 3\frac{dp(t)}{dt} = 2p(t) - 15 + 25\frac{dp(t)}{dt}.$$

Звідси отримаємо рівняння:

$$22\frac{dp(t)}{dt} + 3p(t) - 75 = 0.$$

Розділяючи змінні, отримаємо:

$$22\frac{dp(t)}{dt} = 3p(t) - 75, \quad \frac{22}{3}\frac{dp}{25 - p(t)} = dt,$$

$$\int\frac{dp}{25 - p(t)} = \int\frac{3}{22}dt, \quad \ln\left|25 - p(t)\right| = \frac{3}{22}t + \ln C,$$

$$25 - p(t) = e^{\frac{3}{22}t + \ln C},$$

за умовою задачі $p(0) = p_0$, тому

$$20 - Ce^0 = p_0 \Rightarrow C = p_0, \quad C = 25 - p_0,$$

$$p(t) = 25 - (25 - p_0)e^{\frac{3}{22}t}.$$

Висновки з практикуму.

Зробити узагальнюючі висновки відповідно до мети і результатів виконання поставлених завдань.

Оформити звіт з практикуму, де указати: № лабораторної роботи, тему, мету, ім'я та прізвище виконавця, шифр групи студента, завдання та їх виконання з обґрунтуванням, пропозиціями та формулами для розрахунків і результати моделювання у вигляді лістингу програми, висновки по роботі.