МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з модуля 3

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

ДИСЦИПЛІНИ
МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ І БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ

Конспект лекцій розробив:

Бродський Ю. Б. – доцент кафедри комп’ютерної інженерії та кібербезпеки, к.т.н., доцент;

Житомир – 2024

ЛЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

3.1. Похідна та інтеграл в економічних задачах.

Похідна використовується в різних областях науки і визначає миттєву швидкість точки, тобто швидкість точки в момент t_0. Позначається як $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. В соціально-економічних задачах поняття миттєвої швидкості застосовується при визначенні швидкості зростання обсягів продукції, працездатності населення та продуктивності праці, маржинального продукту, маржинальної корисності грошей тощо.

Термін "похідна" ввів у кінці XVIII ст. французький математик Лагранж Жозеф Луї (1736–1813 рр.). Знаходження похідної називається диференціюванням функції. Похідна функції позначається різними символами (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Позначення	Автор
$y'(x)$	Лагранж
$\frac{dy(x)}{dx}$	Лейбніц
$\dot{y}(x)$	Н'ютон
Dy	Коші

Опишемо за допомогою похідної *продуктивність праці* в момент часу t_0. Нехай функція $Q(t)$ визначає кількість виробленої продукції за час t. Тоді, за період часу від t до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $Q(t_0)$ до $Q(t_0 + \Delta t)$, тобто:

$$\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0).$$

Середня продуктивність праці за цей період часу $P_{cp} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Тоді продуктивність праці в момент t_0 – це граничне значення середньої продуктивності праці P_{cp} при $\Delta t \to 0$:

$$P(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} P_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \qquad (3.1)$$

Таким чином, продуктивність праці – це швидкість зростання обсягу продукції.

Аналогічно можна визначити, наприклад, маржинальний продукт $MQ(x_0)$. Якщо функція $Q(x)$ позначає залежність кількості виробленої продукції від величини витрат x, то відношення $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ – це середня величина продукту, що відповідає величині витрат Δx. Тоді маржинальний продукт при витратах x_0 можна записати у вигляді:

$$MQ(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}. \qquad (3.2)$$

Інтеграл в економічних задачах

Історично інтегральне числення виникло як задача визначення площі та об'єму в Давньому Сході, Єгипті, Вавілоні, Давній Греції. Особливо великим є внесок Архімеда (близько 287–212 р. до н.е.), який розрахував площі фігур і об'єми великої кількості тіл на основі уявлення плоскої фігури у вигляді нескінченної множини прямих відрізків, а геометричного тіла у вигляді паралельних плоских перерізів. Систематичного розвитку методи інтегрування набули у XVII–XIX ст. німецьким астрономом Іоганом Кеплером (1571–1630 рр.), італійськими математиками Бонавентурою Кавальєрі (1598–1647 рр.), Еванджеліста Торрічеллі (1608–1647 рр.), французькими математиками П'єром Ферма (1601–1665 рр.), Блезом Паскалем (1623–1662 рр.), Леонардом Ейлером (1707–1783 рр.), Огюстеном Коші (1789–1857 рр.). Н'ютон і Лейбниць незалежно один від одного створили алгоритми диференціального та інтегрального числення.

Лейбніц запропонував позначати інтеграл так:

$$S = \int f(x)dx. \qquad (3.3)$$

Французький математик і фізик Фур'є (1768–1830 рр.) удосконалив позначення Лейбніца і пропонував указувати початкове й кінцеве значення аргументу x у вигляді границь a та b:

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx. \qquad (3.4)$$

Якщо ввести поняття інтегральної суми (рис. 3.1):

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i, \qquad (3.5)$$

то інтеграл (3.4) можна записати :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{s=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \qquad (3.6)$$

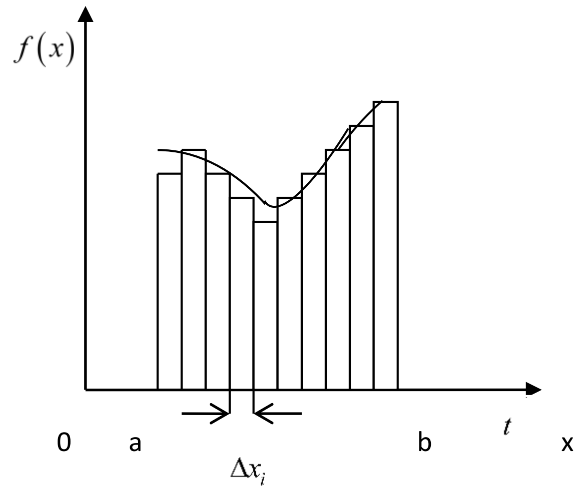

Рис. 3.1.

Доцільно нагадати, що невизначений та визначений інтеграли суттєво різні поняття. Невизначений інтеграл представляє собою функцію (сімейство функцій), а визначений інтеграл – це число.

Приклад 3.1. *Загальна кількість грошей F*, що надходить в банк за визначений термін $[0,T]$ визначається інтегралом :

$$F = \int_0^T f(t)dt, \tag{3.7}$$

де $f(t)$ – кількість грошей, що надходить у банк в момент часу t.

Приклад 3.2. *Обсяг продукції Q* за визначений період часу $[0,T]$:

$$Q = \int_0^T P(t)dt, \tag{3.8}$$

де $P(t)$ – продуктивність праці в момент часу t. Нехай $T = 8$ год., а $P(t)$ описується емпіричною формулою:

$$P(t) = -0,3t^2 + 0,6t + 10.$$

Тоді обсяг продукції за робочий день (3.13) складе:

$$Q = \int_0^8 P(t)dt = \int_0^8 \left(-0,3t^2 + 0,6t + 10\right)dt = \left(-0,1t^3 + 0,3t^2 + 10t\right)\Big|_0^8 = 48 \text{ од. прод}$$

Приклад 3.3. *Розрахунок коефіцієнта Джині* для визначення степені нерівності за кривою Лоренця (рис. 3.2) (Каррадо Джині (1884–1965 рр.) – італійський економіст, статистик, демограф; Макс Лоренц (1876–1959 рр.) – американський економіст і статистик).

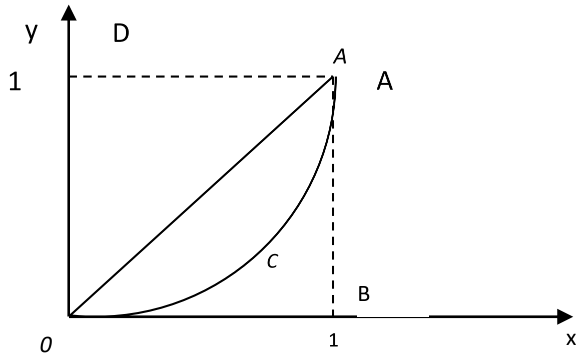

Рис. 3.2.

Вісь Ox позначає долю населення, Oy – долю доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца є лінійною функцією $y = x$ (лінія OA це бісектриса), при нерівномірному – кривою OCA. Коефіцієнт Джині визначається відношенням площ:

$$k_{дж} = \frac{S_{OAC}}{S_{OAB}},$$

і лежить в межах $[0,1]$.

Якщо $k = 0$ – рівність в доходах населення; $0 < k < 0,3$ – незначна нерівність; $0,3 \le k \le 0,7$ – значна нерівність; $0,7 \le k \le 1$ – сильна нерівність.

Нехай крива Лоренца описується рівнянням $y = \frac{3}{4}x^2$, тоді:

$$S_{OAC} = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{ODAB} = \frac{1}{2},$$

$$k = \frac{S_{OAC}}{S_{OAB}} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

Отже, $0,3 \le k \le 0,7$, тому існує значна нерівність доходів населення.

Приклад 3.4. *Дисконтування грошового потоку*, тобто визначення початкової суми (дисконтної суми) S_0 за час t по її кінцевій величині $S(t)$ і процентній ставці P.

Згадаємо формули нарахування процентів. Прості:

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{P}{100} t \right), \tag{3.9}$$

звідки дисконтна сума:

$$S_0 = \frac{S(t)}{1 + \frac{P}{100} t}. \tag{3.9a}$$

Складні проценти:

$$S(t)=S_0\left(1+\frac{P}{100}t\right), \qquad (3.10)$$

де $t\in N$ – ціле число періодів;

$$S_0=\frac{S(t)}{\left(1+\frac{P}{100}\right)^t}. \qquad (3.10а)$$

Неперервне нарахування процентів:

$$S(t)=S_0e^{\frac{P\cdot t}{100}}, \qquad (3.11)$$

Відповідно, дисконтна (початкова) сума до моменту часу t:

$$S_0=S(t)e^{-\frac{P\cdot t}{100}}. \qquad (3.11а)$$

Розглянемо ситуацію грошового потоку, коли гроші надходять в банк не одноразово S_0, а у вигляді неперервного потоку, функція $S_0(t)$. Тоді загальну суму S_d, що покладена в банк за період часу $[0,T]$ можна записати у вигляді:

$$S_d(T)=\int_0^T S_0(t)dt=\int_0^T S(t)e^{-\frac{P\cdot t}{100}}dt, \qquad (3.12)$$

де $S(t)$ – щорічний дохід.

Нехай потрібно визначити, яку суму потрібно внести за період $[0,T]$ в банк під 10% річних, щоб щорічний дохід складав 1 тис. грн. Проценти нараховуються безперервно.

За умовою $S(t)=1$ тис. грн при $t\in[0,T]$ за формулою (3.12) отримаємо:

$$S_d(T)=\int_0^T 1\cdot e^{-\frac{P\cdot t}{100}}dt=\left(-10e^{-\frac{t}{10}}\right)\Bigg|_0^T=-10e^{-\frac{T}{10}}+10 \text{ (тис. грн).}$$

Якщо $T=3$ роки: $S_d(3)\approx 2{,}59$ тис. грн.

Отже, для щорічного доходу 1 тис. грн протягом трьох років (тобто 3 тис. грн за три роки) потрібно зробити внесок на суму 2,59 тис. грн. Прибуток, який отримаємо за три роки: 3 – 2,59 = 0,41 (тис.грн).

3.2. Диференціальні рівняння і процеси природного зростання в економіці

В різноманітних системах: природних, соціальних, економічних тощо, зустрічається велика кількість процесів, в яких деякі величини за однакові проміжки часу Δt змінюють своє значення в одне і теж число разів – це, так звані, процеси природного зростання (ядерна реакція, бактерії, рослини, тварини, населення Землі, грошові вклади та ін.).

Якщо припустити, що проміжок часу Δt наближається до нуля $\Delta t \to 0$ і значення величини, що розглядається (позначимо її $y(t)$) змінюється миттєво, то маємо процес, при якому швидкість $\dot{y}(t)$ зміни величини $y(t)$ в момент часу t пропорційна значенню цієї величини в той самий момент часу:

$$\dot{y}(t) = ky(t) \text{ або } \frac{dy(t)}{dt} = ky(t). \qquad (3.13)$$

Отже, диференціальне рівняння (3.13), яке вперше отримав Я. Бернуллі (1654–1705 рр.), описує процеси природного зростання.

Вплив інвестицій.

Розглянемо задачу впливу інвестицій $u(t)$ на зростання виробництва продукції підприємства $y(t)$ в аналітичному вигляді. Нехай в початковий момент часу $t=0$ інвестиції відсутні, тобто $u(t)=u_0=0$. Тоді виробництво залишається на попередньому рівні $y(t)=y(0)=y_0$ (рис. 3.3).

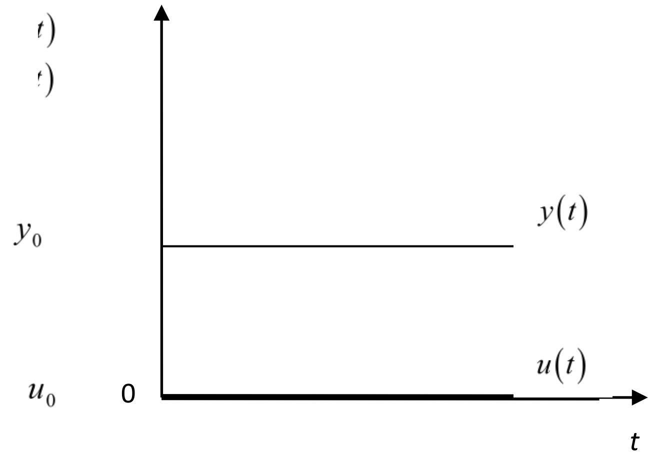

Рис. 3.3.

Якщо підприємство інвестується постійно $u(t)=u_0>0$, то виробництво постійно розвивається і випуск продукції повинен зростати лінійно: $y(t)=y_0+ct$ (рис. 3.4).

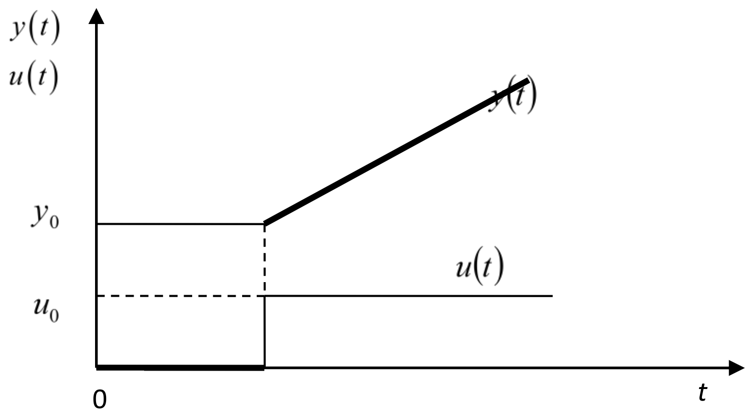

Рис. 3.4.

Опишемо динаміку випуску продукції $y(t)$ за допомогою диференціального рівняння:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \tag{3.14}$$

де k – деяка стала величина.

Проаналізуємо рівняння (3.14). Якщо обсяг інвестицій $u(t)=0$, то із рівняння (3.14) отримаємо:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,$$

а це означає, що обсяг виробленої продукції $y(t) = const = y_0$.

Якщо обсяг інвестицій $u(t) = u_0 > 0$, то:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku_0. \tag{3.15}$$

Після інтегрування диференціального рівняння (3.15) отримаємо:

$$y(t) = y_0 + ku_0 t.$$

Отже, зростання інвестицій призводить не стільки до зростання обсягів продукції, скільки впливає на швидкість цього зростання, яка прямопропорційна збільшенню інвестицій (3.15).

Принцип акселерації.

Однак, в реальній економіці необхідність зростання обсягів продукції підприємства регулюється відповідним попитом $q(t)$. Підприємство повинне випускати обсяг продукції $y(t)$, який співпадатиме за величиною із попитом $q(t)$ на неї:

$$y(t) = q(t). \tag{3.16}$$

Для задоволення даним вимогам із рівнянь (3.3) і (3.5) отримаємо:

$$\frac{dq(t)}{dt} = ku(t). \tag{3.17}$$

Отже, інвестиції повинні задовольняти рівняння:

$$u(t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{dq(t)}{dt}, \tag{3.18}$$

тобто для задоволення попиту і реалізації своєї продукції підприємство повинне збільшувати інвестиції пропорційно швидкості зростання попиту (акселерації).

Коефіцієнт пропорційності $\frac{1}{k}=r$ називають *акселератором*. Виникає питання: чи потрібно збільшувати інвестиції, якщо попит на продукцію зростає? Відповідь дає знак другої похідної від функції попиту $q''(t)$ або $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$:

– якщо $q''(t)>0$, то $\frac{dq(t)}{dt}$ збільшується і повинні зростати інвестиції $u(t)$;

– якщо $q''(t)<0$ зростання попиту уповільнюється, то $\frac{dq(t)}{dt}$ зменшується та інвестиції повинні зменшуватися $u(t)$;

– якщо $q''(t)=0$ попит зростає з постійним темпом $\frac{dq(t)}{dt}=const$, інвестиції потрібно утримувати на рівні, який досягнули в даний момент часу, тобто $const=ku_0$.

Дане положення називають *принципом акселерації*.

ЛЕКЦІЯ 2. МОДЕЛІ ПРИРОДНОГО ЗРОСТАННЯ В ЕКОНОМІЦІ.

1. Лінійні моделі природного зростання.

Приклад 3.5. *Задача про кредитування* (розв’язок Я. Бернуллі). Нехай кредитор отримує p% від суми кредиту S_o за рік. Знайти суму $S(t)$, яку отримує кредитор за кожну одиницю суми кредиту протягом року (або t років), якщо проценти збільшуються безперервно?

Оскільки проценти нарощуються безперервно, то швидкість змінювання величини боргу можна описати рівнянням:

$$\frac{dy(t)}{dt}=kS(t). \qquad (3.19)$$

Розв’яжемо рівняння (3.19) методом розділення змінних:

$$\frac{dS(t)}{St}=kdt;$$

після інтегрування лівої і правої частини

$$S\frac{dS(t)}{St}=Skdt,$$

отримаємо:

$$\ln|S(t)| = k \cdot t + \ln c, \quad c = const;$$

$$S(t) = e^{kt+\ln c} = e^{kt} \cdot e^{\ln c}; \qquad (3.20)$$

$$S(t) = ce^{kt}.$$

За умовою задачі: $S(0) = S_o, K = \frac{P\%}{100}.$

Тоді сума, яку отримає кредитор від наданого кредиту S_o за t років, складає:

$$S(t) = S_0 e^{\frac{P \cdot t}{100}}. \qquad (3.21)$$

Отже, від кожної одиниці S_0 кредитор отримує $S_1(t) = \exp(Pt/100)$. За рік $t = 1$, $S_1(1) = \exp(Pt/100)$ грош. од.

Приклад 3.6. *Зростання грошового вкладу*.

Рівняння (3.21) можна використовувати для наближеної оцінки накопиченої суми грошового вкладу. Нехай початковий вклад 1 грн. під 10%. Скільки отримаємо через 10, 100, 500, 1000 років?

Із (3.21) маємо:

$$S(10) = 1 \cdot \exp(10 \cdot 10/100) \approx 2,72 \text{ грн;}$$
$$S(100) = \exp(10) \approx 22026,47 \text{ грн;}$$
$$S(500) = \exp(50) \approx 5,18 \cdot 10^{21} \text{ грн;}$$
$$S(1000) = \exp(100) \approx 2,69 \cdot 10^{43} \text{ грн.}$$

Останні дві величини набагато перевищують всі грошові запаси Земної кулі. Даний приклад ілюструє одну із причин проведення грошових реформ: борги банків вкладникам зростають достатньо швидко, а збільшення грошової маси для їх погашення призводить до інфляції.

Приклад 3.7. *Темп інфляції та рівень цін*.

Загальний рівень цін можна обчислювати за формулою природного зростання (3.21):

$$Z(t) = Z_0 \exp\left(\frac{P \cdot t}{100}\right).$$

При подвоєнні рівня цін отримаємо:

$$Z(t) = 2Z_0.$$

Прирівняємо ці вирази:

$$2Z_0 = Z_0 \exp(P \cdot t/100);$$

$$2 = \exp(P \cdot t/100),$$

прологарифмуємо останнє рівняння і виразимо t:

$$\ln 2 = \frac{P \cdot t}{100};$$

$$t = \frac{100 \cdot \ln^2}{P}.$$

Оскільки $\ln 2 \approx 0{,}7$, отримаємо "правило величини 70":

$$t \approx \frac{70}{P}.$$

Якщо рівень інфляції $P = 10\%$ – рівень цін подвоїться через 7 років; якщо $P = 20\%$ – $t \approx 3{,}5$ роки.

Приклад 3.8. *Модель природного зростання випуску дефіцитної продукції*.

Позначимо: $x(t)$ – кількість продукції виробленої в момент часу t; c – фіксована ціна реалізації продукції; $c \cdot x(t)$ – дохід в даний момент часу t. Нехай для розширення виробництва використовується частина доходу g_u (інвестиції у виробництво $u(t)$):

$$u(t) = \frac{C}{g_u} x(t).$$

Постійні інвестиції у виробництво приведуть до пропорційного зростання швидкості випуску продукції $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = aU(t) = \frac{ac}{g_u} x(t) = k_u x(t), \qquad (3.22)$$

де a – коефіцієнт пропорційності; $k_u = \frac{ac}{g_u}$.

Розв'язком рівняння (3.22) є функція:

$$x(t) = x_o e^{k_u t}, \qquad (3.23)$$

яка показує процес зростання обсягів виробництва при виділенні частини доходу для розширення виробництва.

Модель природного зростання (3.22) покладена в основу моделі Харрода–Домара (Рой Харрод (1900–1978 рр.) – англійський економіст, Євсей Дейвид Домар (нар. 1914) – американський економіст) про стійкість темпів зростання виробництва, що забезпечується: природним зростанням населення, продуктивності праці, розміром накопичення капіталу (норма накопичення – $const$).

Приклад 3.9. *Зростання населення (модель динаміки популяції Мальтуса)*.

В ідеальних умовах, тобто коли середовище не лімітує розмноження (рівняння Томаса Мальтуса, 1802 р.) – це значить, що є в достатку їжа, життєвий простір, густина розселення достатня для утворення пар, температура оптимальна тощо, можна скористатися рівнянням (3.13):

$$\frac{dN}{dt} = rN, \tag{3.24}$$

де r – коефіцієнт швидкості розмноження популяції (природного зростання).

Розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд експоненти (рис. 3.5):

$$N = N_0 \exp(rt), \tag{3.25}$$

де N_0 – початкова чисельність популяції (населення).

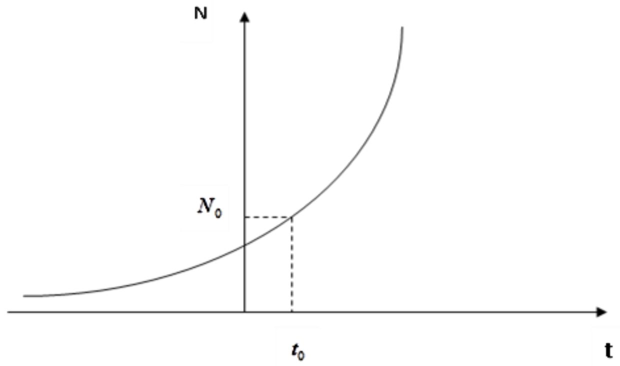

Рис. 3.5.

Якщо вибрати обмежуючі умови для моделі (3.24), що населення не повинно перевищувати $N = 40$ млрд чол., швидкість зростання 1,25 % на рік $(r = 0,0125)$, $N_0(t_0 = 1999\,рік)$ = 6 млрд чол., то можна визначити, коли границя насичення буде досягнута (за моделлю Мальтуса), рівняння (3.25):

$$40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9 \exp(0,0125 \cdot t),$$

звідки знаходимо t:

$$t = \frac{1}{0,0125} \cdot \ln\frac{40}{6} \approx 150 \text{ років.}$$

Приклад 3.10. І*нвестування у виробництво.*

Розглянемо спрощену ситуацію інвестування у виробництво на числовому прикладі. Припущення: початкова умова $y(0) = 0$ – в початковий момент часу $t = 0$ продукція не випускається; в кінцевий момент часу t інвестор робить вклад в сумі $u(t)$, який, в першому наближенні, одразу впроваджується у виробництво (випуск продукції). Тоді кількість випущеної продукції можна записати спрощеним рівнянням:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t). \tag{3.26}$$

Оцінимо перевагу одної із двох схем фінансування (сума інвестиції 20 тис. грн):

1) кожен рік по 10000 грн;

2) в перший рік всі 20000 грн.

Схема 1. Для періоду $0 < t < 2$ інвестиції $u(t) = 10000$ грн. Із (3.26) маємо:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t) = 10000\,. \quad (3.27)$$

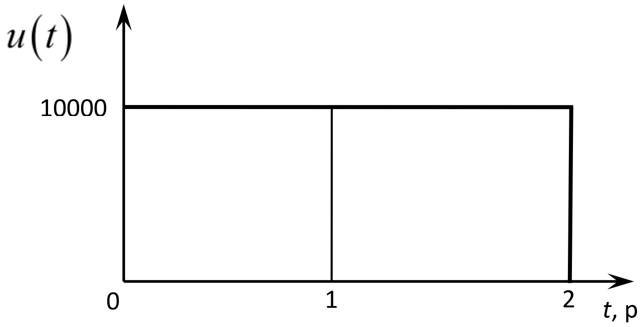

Рис. 3.6.

Тоді при умові $y(0)=0$ отримаємо розв'язок:

$$y(t) = 10000t\,. \quad (3.28)$$

Графічно вираз (3.28) представляє собою лінію (рис. 3.7).

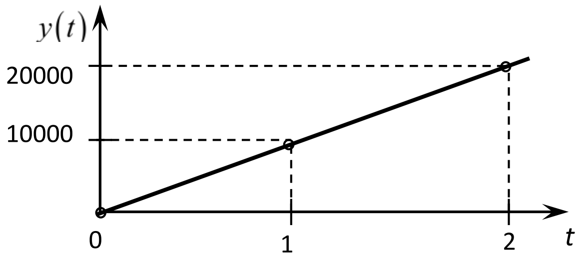

Рис. 3.7.

Об'єм виробленої продукції Vy_1 за два роки дорівнює площі фігури, обмеженої лінією $y(t)$ на рис. 3.7.

$$Vy_1 = \int_0^2 y(t)dt = \int_0^2 10000\,tdt = 10000\int_0^2 tdt = 10000 \cdot \frac{1}{2}t^2\Big|_0^2 = 10000 \cdot \frac{4}{2} = 20000 \text{ грн.} \quad (3.29)$$

Схема 2. Для періоду $0<t<1$ інвестиції $U(t)=20000$ грн, для періоду $1<t<2$ інвестиції $U(t)=0$ грн.

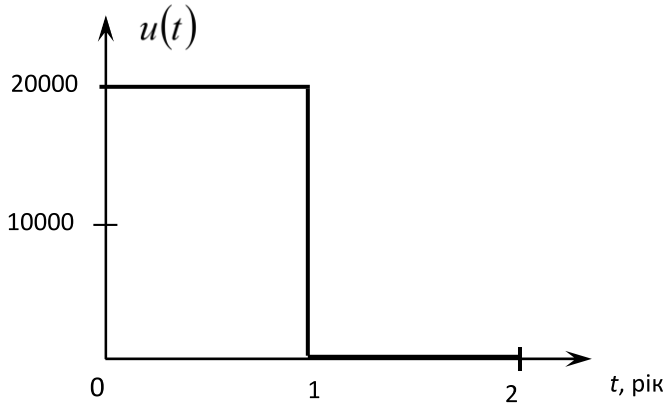

Рис. 3.8.

Тоді при умові $y(0)=0$ отримаємо: для $0<t<1$, $\frac{dy(t)}{dt}=20000$, звідки $y(t)=20000t$; а при умові $y(1)=20000$ для $1<t<2$, $\frac{dy(t)}{dt}=0$, звідки $y(t)=const=y(t)=20000$ (рис. 3.9).

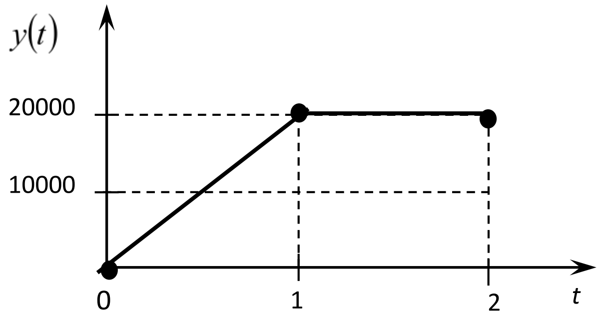

Рис. 3.9.

Об'єм продукції протягом двох років за другою схемою інвестування розраховується аналогічно (4.27):

$$Vy_2=\int_0^1 20000t\,dt+\int_1^2 20000\,dt=20000\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1+20000t\Big|_1^2=10000+20000=30000\textit{грн.}$$

Отже, друга схема інвестування більш вигідна, особливо на початковому етапі.

2. Нелінійні моделі природного зростання.

Розглянуті прості моделі (3.13) – (3.29) лінійні, тому для них справедливий так званий *принцип суперпозиції*, який означає, що будь-яка лінійна комбінація розв'язків (наприклад, їх сума) також є розв'язком задачі. Користуючись принципом суперпозиції можна оцінювати властивості загальної ситуації (випадку, розв'язку) по властивостям частинної – різниця між двома розв'язками характеризується тільки кількісно.

Тобто, в лінійних моделях відгук об'єкта моделювання на змінювання умов буде пропорційним величині даного змінювання. Саме принцип суперпозиції надає лінійним моделям популярність їх використання, а також, в першому наближенні до реальності, обґрунтовує доцільність лінеаризації процесів (об'єктів, систем тощо), які вивчаються.

Однак, більшість реальних процесів, явищ та відповідних їм математичних моделей нелінійні, тобто не підпорядковані принципу суперпозиції. При використанні моделей природного зростання необхідно враховувати механізми насиченості та відповідно скорегувати лінійні моделі, в основі яких лежить рівняння Якоба Бернуллі (3.13):

$$\frac{dy(t)}{dt}=ky(t).$$

Припущення Дж. К'ютелета, що коефіцієнт k рівняння (3.13) повинен бути не сталою, а спадаючою функцією, яка залежить від $y(t)$, перетворює рівняння (3.13) на нелінійне:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k(y(t)) \cdot y(t), \qquad (3.30)$$

що дозволяє описувати механізм насичення в різних прикладних задачах.

Ця ідея була покладена в основу багатьох моделей логістичного типу: модель динаміки популяції (зростання населення) за рівнянням Ферхюльста (учень Дж. К'ютелета), випуск продукції в умовах конкуренції та насиченості ринку, моделі "соціальної дифузії" (поведінки, моди, ринку інформації, рекламної кампанії, новацій тощо), модель росту виробництва з урахуванням інвестицій та ін.

Оскільки саме модель Ферхюльста застосовується при моделюванні не тільки природних, а й соціально-економічних явищ, розглянемо детальніше рівняння, що покладено в її основу (воно суттєво корегує і доповнює Мальтуса (3.24) – модель динаміки популяції).

Отже, у 1836 р. Ферхюльст запропонував використати для опису процесу зростання населення рівняння, яке враховує реальний ефект саморегуляції чисельності N в умовах обмеженості ресурсів, внутрішньої боротьби (конкуренції) в популяції:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{k}N^2, \qquad (3.31)$$

де від'ємний нелінійний елемент $-\frac{r}{k}N^2$ описує ефект саморегуляції; $k = N_{\max}$ – максимально можлива чисельність популяції (угрупування).

Рівняння (3.31) часто записують у вигляді:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right). \qquad (3.32)$$

Знайдемо розв'язок рівняння (3.32). Спочатку розділимо змінні:

$$\frac{dN}{N(1-\frac{N}{k})} = rdt. \qquad (3.33)$$

Врахуємо наступне співвідношення:

$$\frac{1}{N\left(1-\frac{N}{k}\right)} = \frac{1}{N\left(\frac{k-N}{k}\right)} = \frac{k}{N(k-N)} =$$

$$= \frac{k+N-N}{N(k-N)} = \frac{(k-N)+N}{N(k-N)} = \frac{k-N}{N(k-N)} + \frac{N}{N(k-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{k-N},$$

і запишемо (3.33) після інтегрування у вигляді:

$$\int\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{k-N}\right)dN = \int rdt,$$

$$\ln N - \ln(k - N) = rt + \ln a,$$

де $\ln a = \text{const}$.

Звідки отримаємо:

$$\ln\frac{N}{k-N} = rt + \ln a,$$
$$\frac{N}{k-N} = ae^{rt}. \tag{3.34}$$

Якщо відомо, що при $t = 0$ число особин було $N = N_0$, то з (3.34) маємо:

$$a = \frac{N_0}{k - N_0}. \tag{3.35}$$

Розв'яжемо (3.34) для отримання функції $N(t)$:

$$N = (k - N)ae^{rt} = kae^{rt} - Nae^{rt},$$
$$N + Nae^{rt} = ake^{rt},$$
$$N(1 + ae^{rt}) = ake^{rt},$$

$$N = \frac{a \cdot ke^{rt}}{1 + ae^{rt}}. \tag{3.36}$$

Розділимо праву частину (чисельник і знаменник) на e^{rt}, врахуємо (3.35) і позначимо $N = N(t)$. Тоді (4.16) можна переписати у вигляді:

$$N(t) = \frac{ak}{a + e^{rt}} = \frac{k}{1 + e^{-rt} \cdot a^{-1}} = \frac{k}{1 + e^{-rt} \cdot \frac{k - N_0}{N_0}} = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0 e^{-rt})}. \tag{3.37}$$

Властивості отриманого рішення:

1) при малих значеннях чисельності популяції (або біомаси) зростання відбувається за експоненціальним законом (як в ідеальній моделі Мальтуса);

2) при необмеженому зростанні часу чисельність популяції асимптотично наближається до значення $N = k$ ($k -$ ємність середовища).

3) можна показати аналітично, що при $t \to \infty$ величина $N(t) = k$:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{ake^{rt}}{1 + ae^{rt}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to\infty}\frac{\left(ake^{rt}\right)'}{\left(1 + ae^{rt}\right)'} = \lim_{t\to\infty}\frac{akre^{rt}}{are^{rt}} = k,$$

або із (3.33):

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ak}{a + e^{-rt}} = \frac{\infty}{\infty} = \left|e^{-rt} \to 0\right| = \frac{ak}{a} = k = N_{\max}.$$

Розглянута модель Ферхюльста застосовується до інших соціально-економічний явищ. Перепишемо вираз (3.32) в позначеннях рівняння (3.30): $\dot{y}(t) = k(y(t))y(t)$, якщо $r = k_o, K = y_{\max}$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_0 \left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}} \right) y(t), \tag{3.38}$$

де $k(y(t)) = k_0 \left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}} \right)$; k_0 – коефіцієнт пропорційності (швидкості); $y_{\max}$ – максимальне значення $y(t)$, що визначає лінію (границю) насичення.

Далі буде наведено декілька моделей, отриманих на основі рівняння Ферхюльста (3.38), що описують процеси соціально-економічної сфери (моделі "соціальної дифузії", забезпеченість новаціями, новою продукцією, інформацією тощо).

Лекція 3. МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ В СИСТЕМАХ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

1. Модель Харрода – Домара.

Прикладом моделі економічної динаміки з неперервним часом є лінійна модель макроекономічної динаміки запропонована Харродом і Домаром, які вважали, що можна досягнути стійкого зростання не тільки обсягів випуску дефіцитної продукції підприємства, але й світової ринкової економіки. Модель описує динаміку доходу з урахуванням інвестицій:

$$Y(t) = C(t) + U(t), \tag{4.1}$$

де $Y(t)$ – доход, $C(t)$ – споживання, $U(t)$ – інвестиції.

Основні припущення моделі:

- темпи зростання доходу $\frac{dY(t)}{dt}$ пропорційні інвестиціям:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha U(t), \tag{4.2}$$

де α – коефіцієнт капіталовіддачі, відповідно $1/\alpha$ – коефіцієнт капіталоємності приросту доходу;

- інвестиційний лаг нульовий, тобто інвестиції миттєво переходять в приріст капіталу;
- споживання $C(t)$ виступає екзогенною змінною, задається як початкова умова і може дорівнювати нулю, не змінюватись за часом, зростати лінійно або за іншим законом, тобто мати власну динаміку.

Враховуючи рівняння (4.1) перепишемо (4.2) у вигляді лінійного неоднорідного диференційного рівняння

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha(Y(t) - C(t)), \tag{4.3}$$

Проаналізуємо рівняння (4.3) для різних початкових умов.

Нехай споживання $C(t) = 0$. Тоді всі ресурси надходять в інвестиції і досягаються максимальні темпи зростання. Рівняння (4.3) стає однорідним:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha Y(t), \tag{4.4}$$

Відповідно розв'язок рівняння (4.4) має вигляд експоненціальної залежності:

$$Y(t) = Y(0)e^{\alpha t}, \tag{4.5}$$

Що є ідеалізованим (не реальним) рішенням, оскільки при тривалому часі дохід збільшується без границь $(t \to \infty, Y(t) \to \infty)$.

Якщо $C(t) = C = const$, тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.3) є сумою загального і частинного розв'язків рівняння

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha Y(t) - \alpha C = \alpha Y(t)\left(1 - \frac{C}{Y(t)}\right) = \alpha\left(1 - \frac{C}{Y(t)}\right)Y(t), \tag{4.6}$$

а саме

$$Y(t) = (Y(0) - C)e^{\alpha t} + C. \tag{4.7}$$

Величину $\alpha\left(1 - \frac{C}{Y(t)}\right)$ називають безперервним темпом приросту доходу, а вираз у дужках $\left(1 - \frac{C}{Y(t)}\right)$ – нормою накопичення.

Для моделі із постійно зростаючим темпом споживання

$$C(t) = C(0)e^{rt}$$

Рівняння (4.3) має вигляд:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha\left(Y(t) - C(0)e^{rt}\right), \tag{4.8}$$

а його розв'язок:

$$Y(t) = \left(Y(0) - \frac{C(0)}{1 - \frac{r}{\alpha}}\right)e^{\alpha t} + \left(\frac{C(0)}{1 - \frac{r}{\alpha}}\right)e^{rt}. \tag{4.9}$$

Аналіз формули (4.9) показує, що темп приросту споживання *r* не повинен перевищувати коефіцієнт капіталовіддачі α (тобто загального темпу приросту), оскільки тоді споживання займе більшу частину доходу, відповідно зменшаться інвестиції, а потім і дохід: якщо $r > \alpha \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{r}{\alpha}} < o$, множник e^{rt} зростає скоріше за множник $e^{\alpha t}$, а значить з часом друга від'ємна складова переважить першу.

2. Модель прогнозування попиту на основі рівняння Ферхюльста.

Розглянемо задачу забезпечення споживача новою необхідною продукцією протягом певного періоду часу *t* до моменту максимального насичення $t_{\max}$.

Отже, досвід показує, що попит на нову продукцію спочатку зростає досить повільно, далі динаміка змінюється (швидкість процесу зростає), а в період насичення попит уповільнюється (динаміка знижується) і в граничних значеннях може прямувати до нуля. Тому, швидкість змінювання попиту визначається забезпеченістю та насиченістю продукцією.

Якщо позначити насиченість (максимальне значення забезпеченості продуктом) через y_{max}, а швидкість змінювання забезпеченості – диференціалом $\frac{dy(t)}{dt}$ та прийняти, що швидкість пропорційна забезпеченості продукцією $y(t)$ і незабезпеченості: $y_{max} - y(t)$, то структура математичної моделі буде нагадувати рівняння Ферхюльста (3.38).

Таким чином, модель економічної динаміки, що описує забезпечення споживача новим необхідним товаром можна записати у вигляді нелінійного диференційного рівняння першого порядку

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)\left(y_{\max} - y(t)\right), \tag{4.10}$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Коефіцієнт k і насиченість y_{max} визначають у такий спосіб. Нехай є статистичні дані y_t за минулі роки t = 1,2, ... m. Диференціальне рівняння (4.10) перепишемо у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky_{\max}y_t - ky_t^2 \tag{4.11}$$

Приймаючи $\Delta t = 1$ і позначаючи $ky_{max} = b$, одержуємо:

$$\Delta y_t = by_t - ky_t^2. \tag{4.12}$$

Для визначення b і k використовують метод найменших квадратів по точках $t = 1, 2, \dots m$, одержують залежність для

$$L = \sum_{t=1}^{m} (\Delta y_t - by_t + ky_t^2) \to min. \tag{4.13}$$

За необхідною умовою наявності екстремуму похідні від L по b і k повинні дорівнювати нулю, тобто

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 2\sum_{t=1}^{m} (\Delta y_t - by_t + ky_t^2)(-y_t) = 0, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = 2\sum_{t=1}^{m}(\Delta y_t - by_t + ky_t^2)y_t^2 = 0.$$

На основі (4.14) формуємо систему нормальних лінійних рівнянь

$$b\sum_{t=1}^{m} y_t^2 - k\sum_{t=1}^{m} y_t^3 = \sum_{t=1}^{m} y_t \Delta y_t ,$$

$$b\sum_{t=1}^{m} y_t^3 - k\sum_{t=1}^{m} y_t^4 = \sum_{t=1}^{m} y_t^2 \Delta y_t .$$

Розв’язуючи цю систему, визначаємо b і k, а потім знаходимо $y_{max} = b/k$. Для визначення y розв’язуємо рівняння

$$\frac{dy(t)}{y(t)(y_{\max} - y(t))} = kdt .$$

і одержуємо розв’язок у вигляді логістичної функції

$$y(t) = \frac{y_{\max}}{(1 + Ce^{-ky_{\max}t})}, \tag{4.15}$$

у якій y_{max} і k були раніше визначені за методом найменших квадратів.

Для визначення постійної інтегрування C можна у якості початкової умови покласти, щоб функція проходила через останню точку m, тобто виконувалася умова

$$y_m = \frac{y_{\max}}{(1 + Ce^{-ky_{\max}m})}.$$

Розв’язуючи це рівняння відносно C, одержуємо

$$C = \frac{(y_{\max} - y_m)e^{-Ky_{\max}m}}{y_m}.$$

Остаточна залежність попиту від часу приймає вид:

$$y(t) = \frac{y_{\max} y_m}{y_m + (y_{\max} - y_m)e^{-Ky_{\max}(t-m)}} . \tag{4.16}$$

Прогнози попиту одержують при підстановці в цю формулу значень

$t > m$.

3. Моделі "соціальної дифузії".

Найважливішою компонентою в соціально – економічних системах виступає інформація. Ринок інформації (ринок знань) визначається нелінійним законом, тому динаміку інформаційного процесу можна описати моделлю з насиченням. Розглянемо моделі "соціальної дифузії" на прикладі моделювання рекламної кампанії.

Рекламну кампанію можна поділити на три етапи:

1) *початковий етап*, коли витрати на рекламу можуть перевищувати прибуток внаслідок невеликої інформованості потенційних покупців про нові товари – попит маленький;

2) *розвинутий* – етап швидкого збільшення попиту (реалізації продукції);

3) *етап насичення* – попит зменшується, тому рекламувати товари недоцільно.

Отже, весь процес організації реклами можна подати у вигляді логістичної кривої (функції з насиченням).

В основу побудови математичної моделі покладена ідея "насичення", тобто швидкість змінювання (зростання) з часом t будь-якої величини *y(t)* пропорційна добутку поточного значення цієї величини $y(t)$ та різниці граничного (максимального, насиченого) $y_н = y_{\max}$ і поточного $y(t)$ значення:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx y(t) \cdot \left(y_н - y(t)\right). \tag{4.17}$$

В моделі також потрібно врахувати витрати на рекламу в залежності від часу $a(t)$ та степінь контактів (спілкування, взаємодії) потенційних покупців $b(t)$. Причому, коефіцієнт $b(t)$ повинен визначатись кількістю контактів в одиницю часу $k(t)$ та рівнем агітації ξ, який (рівень агітації) буде змінюватись в границях $\xi \in [0;1]$: якщо $\xi = 1$ – агітація має максимальний успіх (100 % покупець, "наш клієнт").

Тоді загальна модель рекламної компанії буде мати вигляд:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left(a(t) + b(t)\right) \cdot \left(y_{\max} - y(t)\right) \cdot y(t)\,, \tag{4.18}$$

або

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left(a(t) + \xi k(t)\right) \cdot \left(y_{\max} - y(t)\right) \cdot y(t)\,. \tag{4.19}$$

4. Лінійні та нелінійні моделі зростання виробництва з урахуванням фондів та інвестицій.

В періоди економічної кризи часто виникає ситуація, коли підприємства не виділяють ресурсів (частки доходу, прибутку) на розвиток виробництва, оновлення обладнання, техніки, технологій тощо. Відповідно, протягом деякого часу на підприємстві відбувається зношення обладнання, втрата фондів.

Для опису даного процесу в лінійному наближенні можна використати модель природного зростання (3.13), рівняння Я. Бернуллі, з доповненням: по-перше, потрібно врахувати зменшення фондів – знак мінус "–", а також динаміку зменшення – залежність коефіцієнта *k* від часу – *k(t).*

В результаті отримаємо *лінійну* динамічну модель виробництва продукції *y(t)* на підприємстві з урахуванням втрати фондів:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t) \cdot y(t)\,. \tag{4.20}$$

Якщо, наприклад, фонди зменшуються постійно *k(t)=C=const* , рівень виробництва спадає, відповідно розв'язок диференційного рівняння (4.20) показує це у вигляді спадаючої експоненціальної функції, рис.4.1 (початковий рівень виробництва $y_0=10$):

$$\frac{dy(t)}{dt} = -C \cdot y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 \cdot e^{-ct}. \tag{4.21}$$

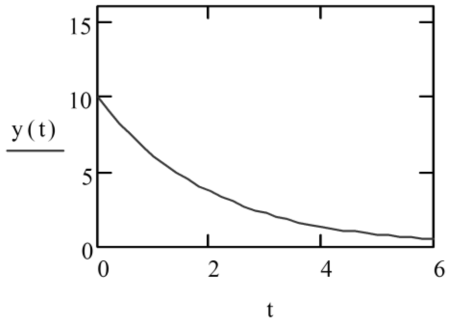

Рис. 4.1

Додавання в рівняння моделі (4.20) ще одної складової *u(t)* може позначати, в залежності від знаку, потік зовнішніх капіталовкладень, інвестиції, або додаткові втрати (наприклад, витрати виробництва, виплати податків, споживчі витрати, тощо). Отримані моделі можна записати у вигляді диференційних рівнянь (4.22), (4.23), а рис. 4.2, 4.3 пояснюють відповідну динаміку:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t) \cdot y(t) + u(t), \tag{4.22}$$

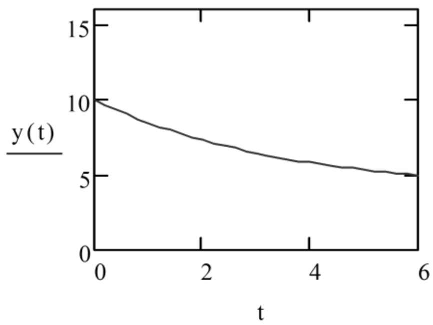

Рис. 4.2

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t) \cdot y(t) - u(t). \tag{4.23}$$

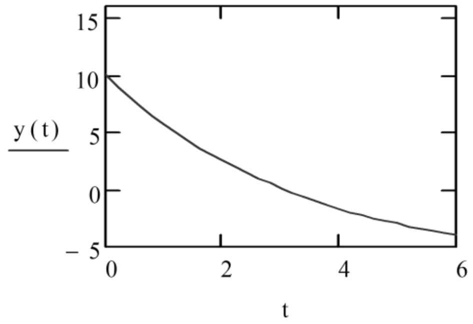

Рис. 4.3

Запишемо *нелінійну* модель зростання виробництва з урахуванням інвестицій, які можуть визначатись і часом, і виробництвом, тобто бути функцією двох змінних при умові $u(t, y(t)) > 0$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_0 y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}}\right) + u\big(t, y(t)\big). \tag{4.24}$$

Якщо для зручності позначити $y(t) = y_t$, де індекс t величини y_t буде визначати залежність випуску продукції від часу t, то рівняння (4.24) можна записати у спрощеному вигляді:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_0 y_t \left(1 - \frac{y_t}{y_{\max}}\right) + u(t, y_t). \tag{4.25}$$

5. Модель Еванса.

Для побудови моделі будемо розглядати спрощену економічну систему як ринок одного товару і агрегування у вигляді об'єднання споживачів в одну групу, а виробників в іншу. Загальна рівновага цієї економічної системи – це стан, при якому всі основні характеристики (параметри) компонентів системи не виходять за рамки визначених норм (правил). Тобто, обсяг виробництва і пропорції обміну є такими, що на ринку досягнуто рівність між попитом та пропозицією, і при цьому жоден з учасників ринкових угод не зацікавлений змінювати свої обсяги покупок або продажів.

На етапі підготовки до прийняття рішень про заходи економічної політики важливо виявити, чи є економічна рівновага стійкою (стабільною) або нестійкою. Для збереження рівноважного стану економічної системи потрібні відповідні дії, які корегують процес відновлення рівноваги, тобто, перевищення ціною рівноважного значення обов’язково породжує дію, що впливає на зниження ціни. В умовах конкуренції це означає, що зростання ціни веде до розширення пропозиції в порівнянні з попитом.

Розглянемо механізм встановлення рівноваги даної економічної системи. Дійсно, якщо ціна на ринку вище рівноважної, то пропозиція перевищує попит і виникає затоварення. У цій ситуації товаровиробники готові зменшувати ціни з метою залучення більшого числа покупців. Отже, при цінах вище рівноважних відбувається тиск на них убік зменшення. Якщо ж ціна на ринку нижче рівноважної, то попит перевищує пропозицію, і товар стає дефіцитним. У цій ситуації споживачі готові заплатити більш високу ціну, але знизити ризик придбання потрібного товару. Таким чином, при значеннях ціни нижче рівноважної відбувається тиск на ціну вбік збільшення. На ринках багатьох видів товарів, як правило, установлюється рівновага, при якій попит дорівнює пропозиції.

Модель Еванса представляє собою лінійну неперервну модель динаміки встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару.

Компоненти моделі: попит $q(t)$, пропозиція $s(t)$, ціна $p(t)$.

Основні припущення моделі:

- попит та пропозиція вважаються лінійними функціями ціни:

$$q(t) = a - b \cdot p(t), \tag{4.26}$$

$$s(t) = \alpha + \beta \cdot p(t), \tag{4.27}$$

де a, $b > 0$ – попит з ростом ціни падає, α, $\beta > 0$, – пропозиція з ростом ціни зростає. Природно вважати, що $a > \alpha$, тобто при нульовій ціні ($p(t)=0$ – благодійність) попит перевищує пропозицію (товар є бажаним);

- ціна змінюється в залежності від співвідношень між попитом та пропозицією:

$$\Delta p(t) = \gamma\big(q(t) - s(t)\big)\Delta t, \tag{4.28}$$

де $\gamma > 0$, Δ – означає приріст. Отже, збільшення ціни прямо пропорційно перевищенню попиту над пропозицією і тривалості Δt цього перевищення.

В процесі граничного переходу ($\Delta t \to 0$) із рівняння (4.28) одержуємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \gamma\big(q(t) - s(t)\big), \tag{4.29}$$

Підставляючи в це рівняння лінійні залежності попиту та пропозиції від ціни, отримаємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з початковою умовою (задача Коші):

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = -\gamma\big(b+\beta\big)p(t) + \gamma\big(a-\alpha\big) \\ p(0) = p_0 \end{cases}, \tag{4.30}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} + \gamma(b+\beta)p(t) = \gamma(a-\alpha) \\ p(0) = p_0 \end{cases}. \qquad (4.31)$$

Розв’язок (4.31) представляє собою суму загального розв’язку відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dp(t)}{dt} + \gamma(b+\beta)p(t) = 0 \qquad (4.32)$$

і частинного розв’язку неоднорідного рівняння (4.31).

Загальний розв'язок рівняння (4.32) має вигляд:

$$p(t) = C \cdot e^{-\gamma(b+\beta)t}. \qquad (4.33)$$

Частинний розв'язок будемо шукати методом варіації довільної сталої при умові, що $C = c(t)$. Підставимо (4.33) в (4.31) та після нескладних перетворень отримаємо:

$$\frac{dc(t)}{dt} e^{-\gamma(b+\beta)t} - \gamma(b+\beta)c(t)\, e^{-\gamma(b+\beta)t} + \gamma(b+\beta)c(t)\, e^{-\gamma(b+\beta)t} = \gamma(a-\alpha),$$

звідки

$$\frac{dc(t)}{dt} = \gamma(a-\alpha)e^{\gamma(b+\beta)t}. \qquad (4.34)$$

Після інтегрування знаходимо *c(t)*:

$$c(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} e^{\gamma(b+\beta)t} + C_0. \qquad (4.35)$$

Підстановка (4.35) в (4.33) дає наступний результат:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + C_0 e^{-\gamma(b+\beta)t}. \qquad (4.36)$$

З урахуванням початкової умови $p(0) = p_0$ визначимо константу C_0:

$$p(0) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + C_0 \quad \Rightarrow \quad C_0 = p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}$$

і в результаті отримаємо розв'язок задачі Коші у вигляді:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + \left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right)e^{-\gamma(b+\beta)t} = p_0\, e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}\left(1 - e^{-\gamma(b+\beta)t}\right). \qquad (4.37)$$

Рівноважну ціну p_r можна визначити при умові граничного наближення $t \to \infty$ із рівняння (4.37):

$$p_r = \frac{a-\alpha}{b+\beta}. \qquad (4.38)$$

Таким чином, отриманий розв'язок (4.37) відображає перехідний процес (динаміку) ціни від початкової p_0 до врівноваженої p_r.

Якщо розглянути ситуацію, що ціна стала врівноваженою, тобто за часом не змінюється ($dp(t)/dt = 0$), то динамічна модель Еванса, як окремий випадок, стає стаціонарною, відповідно, величина (точка) p_r називається стаціонарною точкою рівняння (4.31). Тоді рівноважну ціну можна визначити із умови рівності попиту і пропозиції (без залежності від часу t): $q(p)=s(p)$, що приводить до рівняння (4.38). Графічно результати моделювання можна побачити на рис. 4.4.

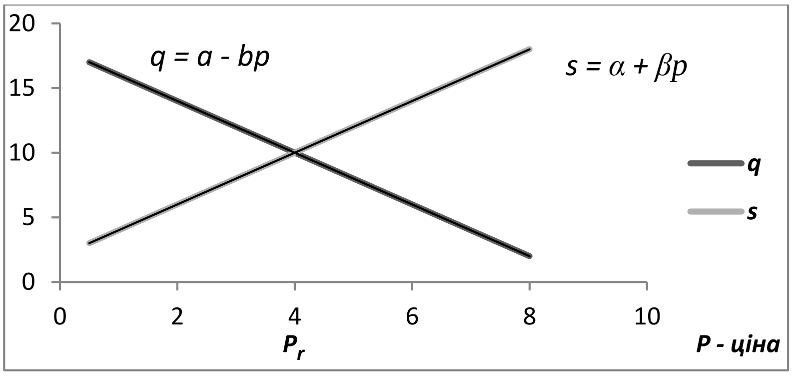

Рис. 4.4

4.6. *Неокласична модель економічного зростання Р. Солоу.*

Модель розроблена лауреатом Нобелівської премії (1987) Робертом Солоу і вперше опублікована у його праці "Внесок до теорії економічного зростання" (1956). За допомогою цієї моделі можна досліджувати вплив основних факторів виробництва (праці, технології, капіталу) на динаміку зміни обсягу виробництва (економічне зростання), коли економічна система перебуває у рівноважному сталому стані.

Розглянемо основні припущення моделі:

- економічна система вважається агрегованою (виробляється єдиний універсальний продукт) і замкненою (відсутність імпорту та експорту);
- стан економіки в моделі Солоу задається п’ятьма змінними: $y(t)$ – випуск або дохід на момент часу t, $K(t)$ – капітал, $L(t)$ – праця (трудові ресурси), $u(t)$ – інвестиції (капіталовкладення), $c(t)$ – споживання;
- частина національного доходу – фонд накопичення $u(t)$ – використовується на збільшення капіталу для розширення

виробництва (інвестування). Інша частина утворює фонд споживання $c(t)$ і задовольняє суспільні потреби;

- розміри випуску продукції визначаються виробничою функцією фондів (капіталу) та праці:

$$y(t) = f\left[K(t), L(t)\right]. \tag{4.39}$$

- функція $f\left[K(t), L(t)\right]$ задовольняє вимоги до виробничих функцій та вважається лінійно–однорідною, тобто

$$f\left[\lambda K(t), \lambda L(t)\right] = \lambda f\left[K(t), L(t)\right],\ \lambda > 0\,;$$

- введемо нові нормовані величини: *f(k)* – продуктивність праці (випуск продукції на одного працівника):

$$f(k) = \frac{f[K(t), L(t)]}{L(t)} = f[\frac{K(t)}{L(t)}, 1] = f(k, 1), \tag{4.40}$$

де $k = K/L$ – фондоозброєність (величина капіталу на одного працівника); $f'(k) > 0,\ f''(k) < 0$ (умова визначення неокласичної виробничої функції).

- випуск, або валовий національний продукт y використовується на споживання c та інвестиції u, тобто баланс виробництва і розподілу національного доходу має вигляд:

$$y = c + u\,;$$

- ρ (ρ = const $0 < \rho < 1$) – норма інвестицій (норма накопичення), тобто

$$u(t) = \rho y(t), \tag{4.41}$$

тоді

$$c(t) = (1 - \rho) y(t). \tag{4.42}$$

Нехай має місце природний приріст трудових ресурсів, тобто

$$\frac{dL(t)}{dt} = \alpha L(t),$$

де α – коефіцієнт пропорційності.

Розв’язуючи це диференціальне рівняння, одержуємо

$$L(t) = L_0\, e^{\alpha t}, \tag{4.43}$$

де $L_0 = L(0)$ – трудові ресурси на початку спостереження. Отже, робоча сила є зростаючою з заданим постійним темпом α.

Повинні виконуватися очевидні умови

$$u(t) \ge 0,\ c(t) \ge 0.$$

Інвестиції використовуються на відновлення (амортизацію) основних фондів та на їх приріст, тобто

$$u(t) = \beta K(t) + \frac{dK(t)}{dt},$$

де β – норма амортизації.

Враховуючи наведені припущення, запишемо

$$\frac{dK(t)}{dt} = \rho y(t) - \beta K(t),\ K(0) = K_0.$$

Отже, динамічна односекторна модель Солоу задається системою рівнянь:

$$c(t) = (1-\rho) y(t), \tag{4.44}$$

$$y(t) = f\left[K(t), L(t)\right], \tag{4.45}$$

$$L(t)=L_0\, e^{\alpha t}, \tag{4.46}$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = \rho y(t) - \beta K(t),\ \ K(0) = K_0. \tag{4.47}$$

Похідна функції фондоозброєності k за часом має вигляд:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{d(K(t)/L(t))}{dt} = \frac{K'(t)L(t) - K(t)L'(t)}{L^2(t)} = \frac{\rho y(t) - \beta K(t)}{L(t)} - \frac{\alpha K(t)}{L(t)} =$$
$$= \rho y(t) - \beta k(t) - \alpha k(t) = \rho y(t) - k(t)(\beta + \alpha).$$

Отже,

$$\frac{dk(t)}{dt} = \rho y(t) - k(t)(\beta + \alpha) \tag{4.48}$$

$$k(0)=k_0=\frac{K_0}{L_0}.$$

Рівняння (4.48) називають **основним рівнянням неокласичної теорії економічного зростання**.

Поведінка макропоказників моделі Солоу повністю визначається рівнянням (4.48) і динамікою (4.46) трудових ресурсів $L(t)=L_0 e^{\alpha t}$.

Рівняння (4.48) – це диференційне рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються, і початковою умовою (задача Коші), тому воно має єдиний розв’язок.

Дослідження стаціонарних траєкторій в моделі Солоу

Дослідимо стаціонарні траєкторії в моделі Солоу. Розглянемо стаціонарну траєкторію, тобто таку, на якій фондоозброєність k є постійною і дорівнює своєму початковому значенню: $k(t)$ = const = k_e.

Таке значення фондоозброєності називається **стаціонарним**. Звичайно, на стаціонарній траєкторії $dk/dt = 0$.

Розглянемо поведінку макропоказників K, L, C, I, Y на стаціонарній траєкторії.

Відповідно до рівняння (16), якщо

$$dk_e/dt=0,$$

то

$$\rho f(k) - k_e(\beta + \alpha)=0,$$

тобто k_e є розв'язком рівняння

$$\rho f(k) - k_e(\beta + \alpha)=0. \qquad (4.49)$$

Доведемо, що це рівняння має розв'язок.

Характеристики виробничої функції: $y=f(k)=F(k,1)$, $f'(k)>0$, але $f'(k) \to 0$ при $k \to \infty$ (это випливає з вимог до виробничої функції – див. вище), отже $f(k)$ – зростаюча функція, але темп її росту сповільнюється. У той же час $k(\beta + \alpha)$ зростає з постійним темпом. Тобто, якщо $\rho f'(k0) > (\beta + \alpha)$, то рівняння (4.49) має єдиний розв'язок k_e при $k > 0$ (рис. 4.5).

Оскільки $L(t)=L_0 e^{\alpha t}$, а $k=\dfrac{K(t)}{L(t)}$, то $K(t) = kL(t) = kL_0e^{\alpha t}$; аналогічно $y(t)=f(k_e)L(t)=f(k_e)L_0e^{\alpha t}$. Далі, $C(t)=(1-\rho)f(k_e)$, $I(t)=\rho f(k_e)L_0e^{\alpha t}$.

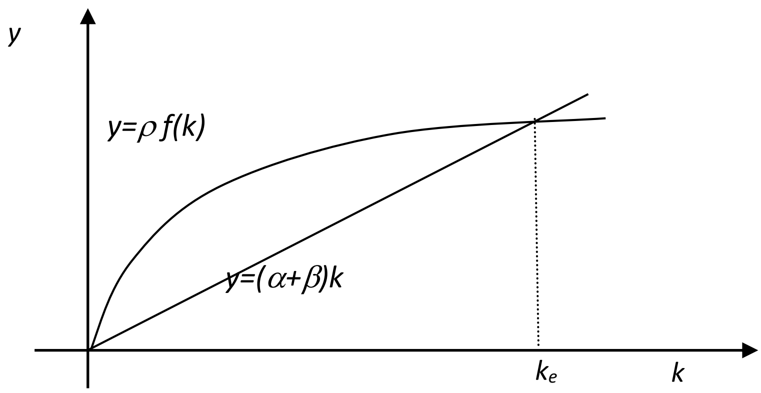

Рис. 4.5.

Запишемо у зручній формі:

$$L(t)=L_0\, e^{\alpha t},$$

$$K(t) = keL(t) = keL0e^{\alpha t},$$

$$Y(t)=f(ke)L(t)=f(ke)L0e^{\alpha t}, \qquad (4.50)$$

$$C(t) = (1-\rho)f(ke)\, L0e^{\alpha t},$$

$$I(t)=\rho f(ke)L0e^{\alpha t}.$$

Отже, на стаціонарній траєкторії всі основні макропоказники зростають пропорційно трудовим ресурсам, за експоненціальним законом.

”Золоте правило зростання” Солоу. Теорема про магістраль

Введемо додаткові змінні $\omega = C/L$, $i = I/L$, що відносять величини C, I до одиниці робочої сили, що затрачується, отже частка накопичення національного доходу $\rho = I/Y = i/y$.

Спочатку розглянемо режими зростання економіки з темпом $\upsilon=(\beta + \alpha)$. На цих режимах величина k постійна, і з (4.49) випливає, що

$$\rho f(k) = \upsilon k,$$

а

$$\omega = (1 - \rho) f(k) = f(k) - \upsilon k.$$

Режим, у якому фонд споживання на одиницю робочої сили максимальний, виділяється умовою $\frac{d\omega}{dk} = 0$, а з нього випливає, що $\frac{df(k)}{dk} = \upsilon$. На цьому режимі а $\omega = f(k) - k\frac{df(k)}{dk}$. Неважко переконатися, що

$$f(k) - x\frac{df(k)}{dk} = \frac{\partial F}{\partial L}.$$

Отже, пропорції суспільного відтворення, при яких фонд споживання на одиницю витраченої робочої сили максимальний, задаються умовою рівності оплати робочої сили граничній продуктивності праці

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial L}.$$

Це знамените "золоте правило зростання" Р.Солоу. Це правило можна інтерпретувати як рівновагу на ринку робочої сили.

З умови випливає, що

$$F = \frac{\partial F}{\partial K}K + \frac{\partial F}{\partial L}L.$$

Отже, за золотим правилом зростання

$$\frac{\partial F}{\partial K}K = F - \omega L.$$

Інтерпретація: нехай за масштаб цін обрано ціну одиниці продукту. Тоді F виражає вартість національного доходу. Величина ωL виражає частину вартості, розподіленої на оплату робочої сили. Тоді $F — \omega L$ виражає частину вартості, розподіленої на оплату капіталу, який використовується. Одиниця капіталу оцінюється нормою відсотка r. Отже, з "золотого правила" можна зробити висновок, що

$$r = \frac{\partial F}{\partial K},$$

тобто норма відсотка дорівнює граничній продуктивності капіталу. Отже, ринок капіталу теж знаходиться в рівновазі.

Процес суспільного відтворення, пропорції якого відповідають "золотому правилу зростання", у математичній економіці називають **магістраллю**. Виникає наступна інтерпретація. Якщо вважати, що в економіці діють ринкові механізми регулювання, то в кожен момент часу на магістралі виконуються умови рівноваги на ринках. Еволюціонуючи на магістралі, економіка майже неперервно переходить з одного стану рівноваги в інше. Однак питання: чи можуть ринкові механізми регулювання зрушити структуру економіки до пропорцій росту по магістралі – залишається відкритим.

Головний результат теорії економічного зростання називається **теоремою про магістралі**. На якісному рівні цей результат формулюється так: можна по-різному визначати критерій якості траєкторії зростання економіки, але на великих інтервалах часу оптимальне зростання практично збігається з магістраллю. Отже, магістраль можна вважати деякою "динамічною" характеристикою економічної системи, що відбиває ефективну структуру системи. Тільки залишається без відповіді питання: які механізми самоорганізації можуть створити в системі таку структуру?

Лекція 4 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВЗАЄМОВІДНОСИН

1. Типи взаємовідносин.

Серед величезного розмаїття взаємовідносин в системах різної природи, в тому числі й економічних системах, можна виділити певні типи відносин.

- \- *хижацтво* **(+,-) –** один вид («хижак») пригнічує розвиток іншого виду («жертви»), а інший вид («жертва») прискорює розвиток першого («хижака»);
- \- *конкуренція* (-,-) – кожен з видів має негативний вплив на розвиток іншого виду, хоча існує і внутрішньовидова конкуренція;
- \- *симбіоз* (+,+) або *коменсалізм* **(**+,0) – кожен з видів прискорює зростання (розвиток) іншого або один вид дістає вигоду, не завдаючи іншому шкоди, але й не приносячи користі.

Економічну динаміку, як розглянуто в попередніх лекціях, можна описати експоненціальним або логістичним рівняннями:

$$\frac{dn}{dt} = rw \quad . \qquad (5.1)$$

$$\frac{dn}{dt} = rn - \frac{r}{k} n^2 \quad . \qquad (5.2)$$

Врахування взаємовідносин між системами (розглянемо на прикладі класичних задач динаміки популяцій) потребує в модель (2) додаткового члена, який визначається типом взаємовідносин.

Отже, нехай маємо дві популяції чисельністю n_1 і n_2, які взаємодіють між собою. Розмноження кожної з цих популяцій будемо описувати логістичним рівнянням, а їхню взаємодію опишемо членом, пропорціональним добутку $n_1 \cdot n_2$. Тоді, у випадку взаємовідносин типу «хижацтво» динаміка популяцій опишеться такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 - \frac{r_1}{k_1} N_1^2 + \chi_1 N_1 N_2 \, ; \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 - \frac{r_2}{k_2} N_2^2 - \chi_2 N_2 N_1 \quad . \end{aligned} \qquad (5.3)$$

У випадку взаємовідносин типу «конкуренція» динаміка популяцій опишеться системою:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 - \frac{r_1}{k_1} N_1^2 - \chi_1 N_1 N_2 ; \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 - \frac{r_2}{k_2} N_2^2 - \chi_2 N_2 N_1 . \end{aligned} \qquad (5.4)$$

При взаємовідносинах типу «симбіоз» динаміка популяцій опишеться системою:

$$
\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 - \frac{r_1}{k_1} N_1^2 + \chi_1 N_1 N_2; \\
\frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 - \frac{r_2}{k_2} N_2^2 + \chi_2 N_2 N_1.
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

2. Модель «хижак-жертва».

Розглянемо антагоністичну пару *хижак – жертва* і простежимо, як може змінюватися з часом чисельність обох взаємодіючих сторін.

Популяція жертви може існувати сама по собі, у той час як популяція хижака — тільки за рахунок жертви.

Позначимо чисельність популяції жертви через x, а чисельність популяції хижака через y.

Під час відсутності хижака жертва розмножується відповідно до рівняння

$$x' = \alpha x,\ \alpha > 0$$

а хижак під час відсутності жертви вимирає за законом

$$y' = -\beta y,\ \beta > 0$$

Хижак "з'їдає" тим більше жертви, чим її більше і чим більш численний він сам. Тому при наявності хижака чисельність жертви змінюється за законом

$$x' = \alpha x - \gamma xy,\ \gamma > 0.$$

"З'їдена" кількість жертви сприяє розмноженню хижака, що можна записати так:

$$y' = -\beta y + \delta xy,\ \delta > 0.$$

Таким чином, ми одержуємо систему рівнянь (модель *хижак – жертва)*

$$
\begin{cases}
x' = \alpha x - \gamma xy, \\
y' = -\beta y + \delta xy,
\end{cases}
\tag{5.6}
$$

причому

$$x \geq 0,\ \ y \geq 0.$$

Система (5.6) - це нелінійна динамічна модель, що задається двома нелінійними автономними диференціальними рівняннями першого порядку.

Система має дві точки рівноваги, координати яких визначаються як розв’язок системи рівнянь

$$
\begin{cases}
\alpha x - \gamma xy = 0, \\
\beta y + \delta xy = 0,
\end{cases}
\tag{5.7}
$$

або

$$x(\alpha-\gamma y)=0, \quad y(-\beta+\delta x)=0.$$

Найбільший інтерес представляє відмінна від нуля точка рівноваги (x^*,y^*)

$$x^* = \frac{\beta}{\delta}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\gamma}$$

3. Моделювання конфлікту.

При моделюванні конфліктних ситуацій можна спиратись на відому модель гонки озброєнь Ричардсона (1918).

Позначимо через $x=x(t)$ витрати на озброєння країни X і через $y= y(t)$ витрати на озброєння країни Y у момент часу $t \geq 0$.

Фактор 1 - загроза. Країна X озброюється, побоюючись потенційної загрози війни з боку країни Y, яка у свою чергу, знаючи про ріст витрат на озброєння країни X, також збільшує свої витрати на озброєння. Кожна країна змінює швидкість зростання озброєнь пропорційно рівню витрат іншої країни:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} = \beta x, \end{cases} \tag{5.8}$$

де α і β – додатні сталі.

Однак рівняння (5.8) мають очевидний недолік — рівень озброєння нічим не лімітується. Тому праві частини цих рівнянь необхідно корегувати.

Фактор 2 – тягар витрат. Потрібно врахувати стримуючий фактор соціального розвитку, який буде приводити до зниження динаміки процесу озброєння (від‘ємні компоненти моделі):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y - \gamma x, \\ \frac{dy}{dt} = \beta x - \delta y, \end{cases}$$

де γ і δ – додатні сталі.

Фактор 3 – рівень ворожості. Кожна країна нарощує озброєння, керуючись своїми державними домаганнями і ворожістю до сусідньої країни, навіть якщо пряма загроза відсутня. Позначимо відповідні претензії через a і b ($a>0, b>0$ – ворожість, $a<0, b<0$ - симпатії) і в результаті одержуємо м*одель гонки озброєнь*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\gamma x + \alpha y + a, \\ \frac{dy}{dt} = \beta x - \delta y + b. \end{cases} \tag{5.9}$$

Система (5.9) – це лінійна неоднорідна система двох диференціальних рівнянь першого порядку, загальний розв'язок якої є сума частинного розв'язку *(x*, y*)* цієї системи і загального розв'язку $(\bar{x}(t,C_1,C_2), \bar{y}(t,C_1,C_2))$ відповідної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\gamma x + \alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - \delta y. \end{cases} \tag{5.10}$$

При відомому початковому стані озброєння можна визначити довільні сталі C_1, C_2 у функціях $x(t)$ та $y(t)$.

Частинний розв'язок *(x*, y*)* системи (5.10) знаходять, припускаючи, що рівні витрат обох країн на озброєння не залежать від часу (є стаціонарними $x'=0$, $y'=0$):

$$\begin{cases} -\gamma x^* + \alpha y^* + a = 0, \\ \beta x^* - \delta y^* + b = 0. \end{cases}$$

Точки рівноваги, відповідно, знаходять із виразу: $x^* = \dfrac{a + \alpha y^*}{\gamma}$.

Характеристичне рівняння однорідної системи (5.10) має вигляд:

$$\lambda^2 - (\gamma + \delta)\lambda + (\gamma\delta - \alpha\beta) = 0. \tag{5.11}$$

В результаті, характеристичні числа визначаються за формулою:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\gamma + \delta) \pm \sqrt{(\gamma + \delta)^2 - 4(\gamma\delta - \alpha\beta)}}{2}. \tag{5.12}$$

В залежності від часу t моделюють різні ситуації:

- нескінченна гонка озброєння: $x(t) \to \infty$, $y(t) \to \infty$;
- взаємне роззброювання: $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$;
- рівновага сторін: $x(t) \to x^*$, $y(t) \to y^*$, де y^* і $x^* > 0$.

Формально ці варіанти визначаються в залежності від величини дискримінанту $(\gamma + \delta)^2 - 4(\gamma\delta - \alpha\beta)$ квадратного рівняння (5.12).

4. Модель регулювання ціни вальрасівського типу.

Моделі вальрасівського типу використовують для опису та дослідження економічних процесів, в тому числі економічної динаміки, у дезагрегованому вигляді, тобто компонентами моделі виступають окремі фігуранти (виробники та споживачі: фірми, підприємства, господарства, приватні особи).

Для побудови моделі приймемо такі припущення:

➢ ціна регулюється при надлишковому попиті відповідно до рівняння (4.29):

$$\frac{dp(t)}{dt} = \gamma(q(t) - s(t))\,, \qquad (5.13)$$

де $\gamma>0$, $q(t) = a + bp(t)$ – функція попиту, $s(t)=kx(t)$ – функція пропозиції, p – ціна, $x(t)$ – кількість підприємств, γ – коефіцієнт швидкості регулювання. Підставимо вирази для функцій попиту і пропозиції у рівняння (5.13), одержимо:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \gamma(a + bp(t) - kx(t))\,; \qquad (5.14)$$

➢ кількість фірм на ринку задовольняє рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(\,p(t) - \bar{c}), \quad \alpha > 0, \qquad (5.15)$$

де $\bar{c}$ – фіксовані середні витрати виробництва. Співвідношення ціни і середніх витрат регулює кількість фірм на ринку $x(t)$.

Рівняння (5.14) і (5.15) складають систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку моделі Вальраса. Перепишемо систему у зручній для аналізу формі:

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = \gamma(bp(t) - kx(t) + a) \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha\left(p(t) - \bar{c}\right) \end{cases} . \qquad (5.16)$$

Запишемо модель у векторній (матричній) формі

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma b & -\gamma k \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma a \\ -\alpha c \end{bmatrix}. \qquad (5.17)$$

Позначимо матрицю коефіцієнтів змінних $p(t)$ та $x(t)$ через A:

$$A = \begin{bmatrix} \gamma b & -\gamma k \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

і проведемо дослідження динаміки регулювання ціни.

Визначник матриці коефіцієнтів системи $\det A = \alpha\gamma k > 0$. Слід матриці коефіцієнтів $\mathrm{Tr(A)} = \gamma\mathrm{b}$.

Характеристичне рівняння системи (5.16)

$$\lambda^2 + \gamma b\lambda - \alpha\gamma k = 0. \qquad (5.18)$$

$$\lambda_{1.2} = \frac{-\gamma b \pm \sqrt{(\gamma b)^2 - 4\alpha\gamma k}}{2}.$$

Оскільки $\gamma > 0$, то умовою стабільності моделі є умова $\gamma b < 0$, а значить функція попиту повинна бути убутною.

Дискримінант *D* характеристичного рівняння (5.18) визначає тип коренів (дійсні *D>0* або комплексні *D<0*), що залежить від чисельних значень параметрів γ,α,b,k. Тому, єдине, що можна сказати про динаміку моделі – кожний розв'язок системи збігається до стаціонарного при *b < 0,* а точка рівноваги системи є стійким вузлом або стійким фокусом у залежності від знака величини *D*.

5. Динамічна модель Кейнса.

Джон Мейнард Кейнс (1883-1946) в своїй основній праці «Загальна теорія зайнятості, відсотків і грошей» (1936) висунув гіпотезу, що система ринкових економічних відносин не є досконалою та саморегульованою, і максимально можливу зайнятість та економічне зростання може забезпечити тільки активне втручання держави.

Розглянемо балансову модель, яка містить в собі основні компоненти динаміки дохідної та витратної частини економіки:

- *y(t)* національний дохід;
- *c(t)* споживання;
- *u(t)* інвестиції;
- *v(t)* державні витрати (державне споживання).

Динамічну модель Кейнса можна записати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} y(t) = c(t) + u(t) + v(t) \\ c(t) = k(t)\,y(t) + b(t) \\ u(t) = a(t)\dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases}, \qquad (5.19)$$

де $k(t) \in (0{,}1)$ – коефіцієнт прихильності до споживання (гранична прихильність до споживання);

b(t) – кінцеве споживання (базовий рівень споживчих витрат, фіксована частина фонду споживання);

a(t) – коефіцієнт акселерації (акселератор показує на скільки збільшаться інвестиції, якщо національний дохід зросте на одиницю).

Всі компоненти (функції) моделі додатні. Перше рівняння системи визначає, що сума всіх витрат повинна дорівнювати (відповідати) національному доходу. Друге рівняння показує, що *c(t)* складається з внутрішнього споживання деякої частини національному доходу *k(t)y(t)* та кінцевого споживання *b(t).* Третє рівняння свідчить, що розмір інвестицій визначається акселератором *a(t)*, який характеризується рівнем технологій та інфраструктури держави, й темпом зростання національного доходу.

Як оцінити динаміку національному доходу *y(t)* за моделлю Кейнса?

Підставимо вирази для *c(t)* і *u(t)* в перше рівняння системи (5.19):

$$y(t) = k(t)\,y(t) + b(t) + a(t)\frac{dy(t)}{dt} + v(t)\,.$$

Перепишемо отримане рівняння у вигляді:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1-k(t)}{a(t)}\,y(t) - \frac{b(t)+v(t)}{a(t)}\,. \qquad (5.20)$$

Якщо прийняти основні параметри моделі як сталі: $a(t) = A$, $k(t) = K$, $b(t) = B$, то рівняння (5.20) спрощується до лінійного диференціального рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1-K}{A}\,y(t) - \frac{B+v(t)}{A}\,. \qquad (5.21)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння являє собою суму частинного та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Частинний розв'язок знайдемо для $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ (стаціонарний розв'язок, лінія рівноваги). Тоді із (5.21) отримаємо:

$$0 = \frac{1-K}{A}\,y_p(t) - \frac{B+v(t)}{A}\text{, звідки отримаємо}$$

$$y_p(t) = \frac{B+v(t)}{1-K} \qquad (5.22).$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння визначається так:

$$y(t) = c \cdot e^{\frac{1-K}{A}t}\,. \qquad (5.23).$$

Відповідно загальний розв'язок рівняння (5.21) буде мати вигляд:

$$y(t) = \frac{B+v(y)}{1-K} + c \cdot e^{\frac{1-K}{A}t} \qquad (5.24).$$

Інтегральні криві рівняння приведені на рис. 5.1.

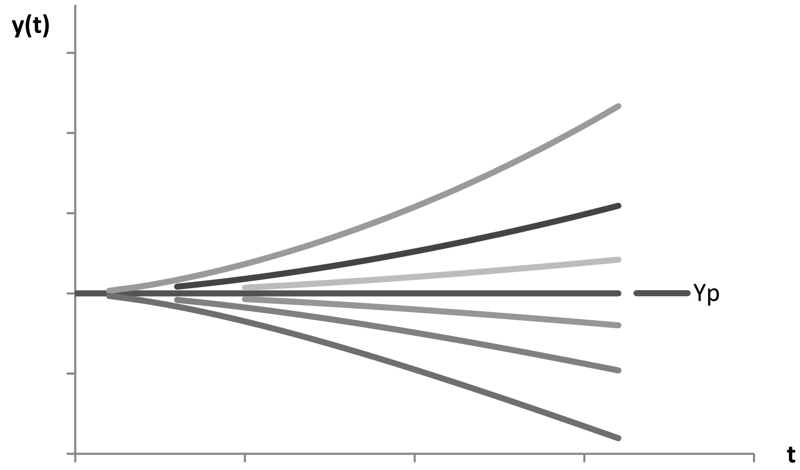

Рис. 5.1

Якщо в початковий момент $y_0<y_p$, тоді $c=y_0-y_p<0$, область нижче лінії рівноваги $y_p=\dfrac{B+v}{1-K}$, тобто національний дохід зменшується. За зворотної умови $y_0>y_p, c>0$, відповідно, національний дохід зростає (область зверху лінії рівноваги, рис. 5.1).

Потрібно зауважити, що в даному випадку точка рівноваги y_p нестійка.

5. ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

1. Поняття дискретної системи. Різницеві рівняння.

При моделюванні економічної динаміки часто виникає потреба визначати стан економічної системи в певні дискретні моменти часу, тобто економічну систему (об'єкт, процес) можна розглядати у вигляді дискретної системи.

Для дискретних за часом систем змінну безперервного часу *x(t)* заміняють лічильними послідовностями $x(t) \equiv x[n]$, де квадратні дужки показують, що змінна *n* являє собою дискретний час і може приймати тільки цілочисельні значення: $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Вивчення динаміки економічного процесу (системи) передбачає операцію визначення стану системи в певний момент часу через її стан в попередній момент за допомогою відповідного еволюційного оператора.

Математичну модель такої динамічної дискретної системи запишемо у вигляді еволюційного операторного рівняння з початковою умовою:

$$\begin{cases} x[n+1] = F(x[n]) \\ x[0] = x_0 \end{cases}. \qquad (6.1)$$

У спрощеній формі запису використовують заміну: $x[n+1] = x_{n+1}$, $x[0] = x(0) = x_0$, $F(x[n]) = F(x_n)$.

Рівняння (6.1) можна отримати з диференційного рівняння $\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)]$ способом переходу до різницевого рівняння шляхом заміни неперервних компонентів дискретними ($dx(t) \equiv x_{n+1} - x_n$, $dt \equiv \Delta t$, $f[x(t)] \equiv F(x_n)$):

$$x_{n+1} = x_n + F(x_n) \cdot \Delta t, \qquad (6.2)$$

де x_n – значення параметрів системи в дискретні моменти часу t_n, $n = 1,2,3,\ldots$;

$\Delta t = t_{n+1} - t_n$ - інтервал часу (дискрета) передбачається незмінним ($\Delta t = const$).

Математичні вирази різниці першого та другого порядку мають вигляд:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,$$

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} + \Delta x_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.$$

Для зворотного перетворення дискретної системи в неперервну виконують граничний перехід при $\Delta t \to 0$.

Різницеве рівняння *k*-го порядку можна записати у такій формі:

$$F(n, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+k}) = 0. \qquad (6.3)$$

Розв'язати різницеве рівняння означає знайти всі послідовності $x_n = x(n)$, що задовольняють рівнянню (6.3). Різницеві рівняння часто використовуються не тільки в моделях економічної динаміки з дискретним часом, а також для наближеного розв'язку диференціальних рівнянь.

Різницеве рівняння вигляду

$$a_0 x_n + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_k x_{n+k} = b, \qquad (6.4)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_k$ та b - деякі функції від n, називається лінійним неоднорідним різницевим рівнянням k-го порядку. При $b=0$ рівняння стає однорідним.

Якщо коефіцієнти a_0, $a_1, \ldots a_k$ прийняти за константи, то методи розв'язання різницевих рівнянь багато в чому аналогічні методам розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

$$a_0 x_n + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_k x_{n+k} = 0. \qquad (6.5)$$

Знайдемо розв'язок (6.5) у вигляді: $x_n = \lambda^n$ ($\lambda \neq 0$ - деяка константа).

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n+1} + \ldots + a_k \lambda^{n+k} = 0. \qquad (6.6)$$

Поділимо на λ^n та отримаємо характеристичне рівняння

$$a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_k \lambda^k = 0,$$

або в більш зручній формі

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \qquad (6.7)$$

Знаходження коренів характеристичного рівняння дозволить отримати відповідний загальний розв'язок.

Розглянемо приклад рівняння другого порядку:

$$a_2 x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

В залежності від значення дискримінанта ($D = a_1^2 - 4a_0 a_2$) розглядають три випадки:

- $D>0$ – обидва корені дійсні і не дорівнюють один одному ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n,$$

де C_1, і C_2 – довільні константи;

- $D=0$ – обидва корені дійсні і дорівнюють один одному $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$, тому

$$x_n = (C_1 + nC_2)\lambda^n;$$

- $D<0$ – у випадку комплексно-спряжених коренів $\lambda_{12} = r\,(\cos\varphi \pm j\,\sin\varphi)$

$$x_n = r^n\,(C_1 \cos\varphi n + C_2 \sin\varphi n).$$

2 Павутиноподібна модель.

Розглянуті різницеві рівняння надають можливість трактувати процеси збіжності та розбіжності в моделях ринкової динаміки .

Дискретну динамічну модель ринкової рівноваги, яка враховує запізнювання у часі (лаг) одного з компонентів і дозволяє досліджувати стійкість цін та обсягів продукції на ринку називають павутиноподібною моделлю. Цю назву модель отримала завдяки графічному поданню відповідного ітераційного процесу у вигляді «павутини», що обертається навколо кривих попиту і пропозиції.

Нагадаємо, що динамічні нерівноважні моделі ринку використовуються для аналізу поведінки ціни, попиту та пропозиції у часі, коли ціна в початковий момент відрізняється від рівноважної (модель Еванса (4.29), яка відноситься до класу неперервних моделей економічної динаміки). Функції попиту та пропозиції є основними складовими моделі. Перетинання графіків попиту та пропозиції відбувається в точці рівноваги $p = p_r$.

Павутиноподібна модель ринкової рівноваги є однією з відомих класичних математичних моделей економічної динаміки.

Основні припущення моделі:

- виробники визначають пропозицію у поточному періоді на основі ціни попереднього, тобто пропозиція реагує на ціни з деяким лагом $s(n) = f\left[p(n-1)\right]$. Дійсно, прийняття рішення про обсяг виробництва приймається з урахуванням поточних цін, але виробничий цикл має певний термін, а значить відповідна пропозиція з'являється на ринку по закінченню даного циклу (періоду). Ціна, яка установлена на початку поточного періоду, не змінюється протягом цього періоду і є основою для вибору обсягів виробництва в майбутньому періоді;
- поточний попит визначається ціною поточного періоду $q(n) = f\left[p(n)\right]$;
- ціни кожного періоду $p(n)$ установлюються на такому рівні, щоб зрівняти попит та пропозицію $q(n) = s(n)$. Дане припущення моделі представляє так зване очищення ринку, тобто у кожному періоді *n* ринок установлює таку ціну, при якій попит *q(n)* поглинає в точності весь обсяг пропозиції *s(n)*, вся продукція постачальників розподіляється і повністю задовольняє попит споживачів;
- умова стабільності моделі полягає в тому, що зростання ціни призводить до розширення пропозиції в порівнянні з попитом, а

зменшення ціни – більшому розширенню попиту в порівнянні з пропозицією.

Таким чином, оскільки пропозиція *s(n)* реагує на зміну ціни *p(n-1)* з лагом в один період, попит *q(n)* визначається ціною *p(n)* та обидві залежності лінійні, то динаміку ціни можна описати рівняннями:

$$s(n) = \alpha + \beta \cdot p(n-1)\,, \tag{6.8}$$

$$q(n) = a - b \cdot p(n) \quad , \tag{6.9}$$

де $\beta > 0$, – пропозиція з ростом ціни зростає;

$b > 0$ – попит з ростом ціни падає;

$a > \alpha > 0$, тобто при нульовій ціні (*p(n)=0* – благодійність) попит перевищує пропозицію (товар є бажаним).

Враховуючи припущення, що попит дорівнює пропозиції $q(n) = s(n)$, із (6.8) та (6.9) отримаємо лінійне різницеве неоднорідне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$b\,p(n) + \beta\,p(n-1) = a - \alpha\,. \tag{6.10}$$

У вигляді частинного розв'язку рівняння (6.10) можна прийняти зрівноважене рішення

$$p(n) = p_r = const\,. \tag{6.11}$$

Після підстановки (6.11) в (6.10) отримаємо:

$$p_r = \frac{a-\alpha}{b+\beta}\,. \tag{6.12}$$

Для отримання загального розв‘язку (6.10), перепишемо його у вигляді однорідного характеристичного рівняння, врахувавши $p(n) = \lambda$:

$$b\lambda + \beta = 0 \quad , \tag{6.13}$$

звідки знаходимо його корінь:

$$\lambda = -\frac{\beta}{b}\,. \tag{6.14}$$

Тоді загальний розв‘язок різницевого рівняння запишемо у вигляді:

$$p(n) = C\left(-\frac{\beta}{b}\right)^n + \frac{a-\alpha}{b+\beta}\,. \tag{6.15}$$

Проведемо аналіз (6.15) і переконаємось, що динаміка цін носить коливальний характер. Дійсно, співвідношення коефіцієнтів $\frac{\beta}{b}$ дає можливість оцінити врівноваженість цін.

Якщо $\frac{\beta}{b}<1 \Rightarrow \beta<b$ – послідовність цін збігається до врівноваженого стану (рис. 6.1а), оскільки в даному випадку маємо:

$$\left(-\frac{\beta}{b}\right)^n \to 0, \left(n \in \mathbf{N}\right) \Rightarrow p(n) \to \frac{a-\alpha}{b+\beta} = p_r, \tag{6.16}$$

де $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множина натуральних чисел.

Якщо $\frac{\beta}{b}=1 \Rightarrow \beta=b$ – виникають циклічні коливання ціни відносно рівноважного стану (рис. 6.1б):

$$p(n) = \begin{cases} p_r - C, & n = 2m+1 \\ p_r + C, & n = 2m, \; m \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{6.17}$$

Якщо $\frac{\beta}{b}>1 \Rightarrow \beta>b$ – спостерігається розбіжність цін (рівновага нестійка) $\left(-\frac{\beta}{b}\right)^n \to \infty$, протягом часу послідовність цін буде відхилятись від рівноважної ціни p_r і лінійна модель стає неадекватною (рис. 6.1в), система переходить до нелінійних співвідношень (нелінійної моделі).

Таким чином, частинний розв’язок (6.12) інтерпретується як статична ціна рівноваги. Загальний розв’язок однорідного різницевого рівняння (6.15) визначає динаміку розвитку економічної системи (характер поведінки ціни у часі).

Отже, у павутиноподібній моделі точка рівноваги є стабільною, якщо кутовий коефіцієнт нахилу кривої попиту $q(n)$ більше, ніж кутовий коефіцієнт нахилу кривої пропозиції $s(n)$: $b>\beta$. Іншими словами, величина еластичності визначає стійкість рівноваги ринку. Якщо крива попиту має більшу еластичність, ніж крива пропозиції, то рівновага на такому ринку буде стійкою (рис. 6.1 а). Якщо крива попиту має меншу еластичність, ніж крива пропозиції, то рівновага на такому ринку буде нестійкою (рис.6.1в). При однаковій еластичності кривих попиту та пропозиції ціни на ринку будуть регулярно коливатися з постійною амплітудою (рис.6.1б).

Лекція 6. Моделі із врахуванням економічного циклу.

При моделюванні динаміки в реальних економічних системах слід враховувати, що економічні умови ніколи не залишаються сталими. Об'єктивна реальність свідчить про циклічність процесів, які в різних формах повторюються через деякі інтервали часу. В природничих науках часто використовують термін «коливальний процес», оскільки моделі динаміки в цій галузі знань з'явились раніше за економіку.

Коливальний процес, або просто коливання бувають різноманітних типів: вільні, змушені, параметричні, автоколивання, гармонійні, згасаючі, наростаючі та ін. Наприклад, змушені коливання виникають внаслідок впливу зовнішніх факторів на економічну систему (кліматичних, соціальних, економічних, тощо). Однак, в економіці частіше використовують поняття циклу, оскільки економічні явища у вигляді коливального процесу (що повторюються у часі) не завжди є періодичними.

Характерною рисою ринкової економіки є економічний цикл, або цикл ділової активності, який являє собою процес підйому або спаду реального ВВП (валовий внутрішній продукт) на фоні загальної тенденції до зростання.

Причини виникнення коливань (циклів) можна навести різні: науково-технічний прогрес, що впливає на інвестиції, споживчі витрати та, відповідно, на виробництво, рівень цін, зайнятість; кредитно-грошова політика (коливання грошової маси); зміни світових цін на енергоносії; соціально-політичні, природничі та інші події (коливання, кризисні ситуації, катастрофи тощо).

Економічний цикл характеризується безперервністю протікання процесів, самовідтворенням, хвилеподібною динамікою показників і складається з фази піднесення (експансії - зростання виробництва, зайнятості) та фази спаду (рецесії – скорочення виробництва і зайнятості; тривалість цієї фази приводить до депресії), а також їх екстремальних точок: найвища – пік, найнижча – дно, рис. 6.2.

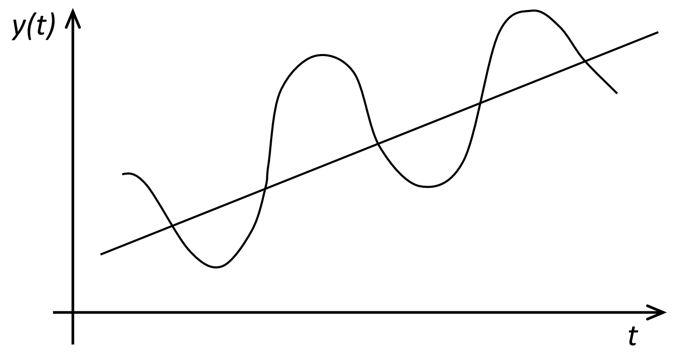

Рис. 6.2.

Економічні цикли відрізняються між собою за тривалістю та інтенсивністю. За тривалістю цикли ділової активності поділяються на короткі (3-4 роки), середні (7-10 років) та великі, або довгохвильові (45-55 років).

Модель Самуельсона-Хікса.

Модель Самуельсона-Хікса являє собою модель ділового циклу, яка базується на кейнсіанській концепції (моделі Кейнса), принципі акселерації, припущенні, що обсяги інвестування прямо пропорціональні приросту національного доходу та мультиплікаторі. Акселератор та мультиплікатор, як елементи нульового порядку, часто використовують в практичних додатках.

Мультиплікатор – підсилююча лінійна статична ланка, що задається рівнянням:

$$\beta y = \alpha x \quad \Rightarrow \quad y = mx, \quad m = \frac{\alpha}{\beta} \quad . \qquad (6.18)$$

Відповідно, акселератор – диференціююча ланка, дивись (3.18), яка в моделі, що розглядається, визначає відношення приросту індуційованих інвестицій до приросту національного доходу.

Отже, модель Самуельсона-Хікса враховує часовий лаг, реальні умови затримання попиту $q(n)$ (рівня споживання $q_c(n)$) відносно рівня зростання національного доходу на попередньому етапі $y(n-1)$, тобто з лагом в один період, $y(n-2)$ – з лагом в два періоди. Дане припущення запишемо у вигляді різницевого рівняння:

$$q_c(n) = m_c y(n-1) + C_a \quad , \qquad (6.19)$$

де, m_c – гранична (маржинальна) схильність до споживання – коефіцієнт, що показує як зростає споживання при збільшенні поточного доходу на одиницю, мультиплікатор:

$$m_c = \frac{\Delta q_c}{\Delta y} \quad ; \qquad (6.20)$$

C_a – автономне споживання.

Принцип акселерації в дискретній формі можна записати:

$$u(n) = r\big(y(n-1) - y(n-2)\big), \qquad (6.21)$$

де r – коефіцієнт акселерації, $u(n)$ – величина інвестицій в n -ий період, обсяг якої залежить від приросту національного доходу в попередніх періодах $(n-1;\ n-2)$.

Враховуючи умову рівності попиту та пропозиції

$$y(n) = q_c(n) + u(n) \quad , \qquad (6.22),$$

підставляємо (6.19) та (6.21) в (6.22), відповідно маємо:

$$y(n) = (m_c + r)y(n-1) - r\,y(n-2) + C_a \quad . \qquad (6.23),$$

Отримане рівняння (6.23) називають іменем відомого англійського економіста, лауреата Нобелівської премії (1972) Джона Хікса (1904-1989).

Якщо величини m_c, r, C_a – сталі протягом періодів, що розглядаються, то (6.23) являє собою лінійне неоднорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Зауважимо, що на практиці, в реальній економіці, на значення коефіцієнтів акселератора та мультиплікатора накладаються певні обмеження:

$$r > 0, \quad 0 < m_c < 1.$$

В залежності від значень акселератора і мультиплікатора змінюється характер траєкторії доходу (динаміка). Він може мати спадаючу або зростаючу тенденцію за наявності або відсутності коливальної динаміки, а також за певних умов носити лавиноподібний (вибуховий) характер динаміки. Тому, для практичного застосування в модель вводять граничні умови (обмеження у вигляді верхньої та нижньої границі), які відповідно визначаються: верхня границя – ресурсами, максимально можливим рівнем виробництва (максимально можливий випуск продукції, рівень повної зайнятості), нижня границя – виробничими потужностями, їх надлишком, що не використовується, величиною амортизаційних відрахувань. Управління динамікою в таких ситуаціях (згладжування циклічності) реалізується через механізм акселератора.

Загальний розв’язок отриманого рівняння (6.23) будемо шукати як суму частинного та загального розв’язку відповідного однорідного рівняння.

Рівноважний розв’язок у вигляді частинного розв’язку рівняння Хікса (6.23) можна знайти з умови

$$y(n) = y(n-1) = y(n-2) = y_p = const.$$

Після підстановки в (6.23) отримаємо

$$y_p = (m_c + r)y_p - r\,y_p + C_a,$$

звідки

$$y_p = \frac{C_a}{1-m_c} \ , \qquad (6.24)$$

де множник $\dfrac{1}{1-m_c}$ називають мультиплікатор Кейнса.

Знайдемо загальний розв’язок однорідного рівняння

$$y(n) - (m_c + r)\,y(n-1) + r\,y(n-2) = 0. \qquad (6.25)$$

Відповідне характеристичне рівняння запишемо у вигляді:

$$\lambda^2 - (m_c + r)\lambda + r = 0\,. \qquad (6.26)$$

Тоді розв’язок рівняння (6.26) маємо:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(m_c + r) \pm \sqrt{(m_c r)^2 - 4r}}{2} = \frac{m_c + r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_c + r}{2}\right)^2 - r}\,. \qquad (6.27)$$

Отже, загальний розв’язок неоднорідного рівняння Хікса буде мати вигляд:

$$y(n) = \frac{C_a}{1 - m_c} + \frac{m_c + r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_c + r}{2}\right)^2 - r}\,. \qquad (6.28).$$

Таким чином, характер траєкторії доходу – динаміка – визначається властивостями коренів характеристичного рівняння, які залежать від значень коефіцієнтів акселератора r та мультиплікатора m_c і, відповідно співвідношення величин підкореневого виразу:

$$r > \left(\frac{m_c + r}{2}\right)^2, \text{ або } \; r < \left(\frac{m_c + r}{2}\right)^2.$$

Дійсні корені визначають зростаючий ($\lambda > 1$) або спадаючий ($\lambda < 1$) характер динаміки. Комплексно-спряжені корені рівняння $(\lambda = \varepsilon \pm j\xi)$ свідчать про коливальну динаміку. Тут величини ε та ξ визначаються:

$$\varepsilon = \frac{m_c + r}{2}\,;$$

$$\xi = \sqrt{r - \left(\frac{m_c + r}{2}\right)^2}\,.$$

При цьому, частота (ω) та період (τ) коливань розраховуються відповідно:

$$\omega = arctg\,\frac{\xi}{\varepsilon}\,;$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

В тригонометричній формі запису корені рівняння матимуть вигляд:

$$\lambda = \varepsilon \pm j\xi = \rho(\cos\varphi \pm j\sin\varphi),$$

$$\rho = \sqrt{\varepsilon^2 + \xi^2} = \sqrt{r} \ge 0\,;$$

$$\cos\varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \xi^2}} = \frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{m_c + r}{2\sqrt{r}}\,;$$

$$\sin\varphi = \frac{\xi}{\rho} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_c + r}{2\sqrt{r}}\right)^2}\,.$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння приймає вигляд:

$$\tilde{y}(n) = \rho^n (C_1 \cos\varphi n + C_2 \sin\varphi n), \quad C_1, C_2 = const.$$

Розглянемо приклад моделі Самуельсона–Хікса для умови, що значення мультиплікатора $m_c = 0{,}5$; акселератора $r = 0{,}5$; автономне споживання $C_a = 2$. Тоді рівняння Хікса у числовому вигляді має вигляд:

$$y(n) = y(n-1) - 0{,}5y(n-2) + 2\,.$$

Частинний розв’язок:

$$y_p = \frac{2}{1-0{,}5} = 4\,.$$

Корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - \lambda + 0{,}5 = 0: \; \lambda_{1,2} = 0{,}5 \pm j0{,}5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння матиме вигляд:

$$\tilde{y}(n) = (\sqrt{2})^{-n}\left(C_1 \cos n\frac{\pi}{4} + C_2 \sin n\frac{\pi}{4}\right), \quad C_1, C_2 = const$$

Відповідно, загальний розв'язок неоднорідного рівняння отримаємо:

$$y(n) = 4 + (\sqrt{2})^{-n}\left(C_1 \cos n\frac{\pi}{4} + C_2 \sin n\frac{\pi}{4}\right)$$

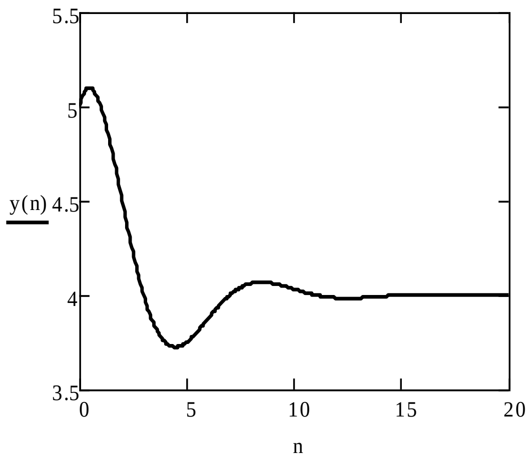

Рис. 6.3

Отже, в прикладі, що розглядається, динаміка представляє собою згасаючі коливання, які з часом ($n > 15$) наближаються до рівноважного значення y_p, рис. 6.3.

Основним теоретичним значенням цієї моделі є спроба ендогенного пояснення природи циклічних коливань в економічних системах. Внаслідок введення додаткових автономних інвестицій збільшуються обсяги виробництва та підвищуються доходи, що призводить до зростання індукованих інвестицій та споживання. Цей процес відбувається доки економічна система не наближається до граничних можливостей (граничних значень параметрів системи), які визначаються ресурсами та виробничими потужностями.