Лекція 13. Математичний апарат моделювання економічної динаміки

1. Похідна та інтеграл в економічних задачах.
2. Диференціальні рівняння в соціально–економічній сфері

1. Похідна та інтеграл в економічних задачах.

Похідна ($\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$) використовується в різних областях науки і визначає миттєву швидкість (швидкість точки в момент t_0). В соціально–економічних задачах поняття миттєвої швидкості застосовується при визначенні швидкості зростання обсягів продукції, працездатності населення та продуктивності праці, маржинального продукту, маржинальної корисності грошей тощо.

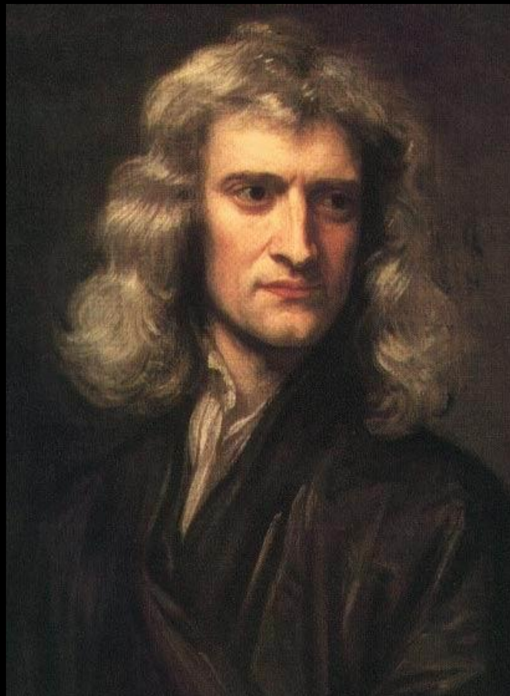
Термін «похідна» ввів (кінець XVIII ст.) французький математик Лагранж (Lagrange) Жозеф Луї (1736-1813).

Знаходження похідної називається диференціюванням функції.

y' – позначення Лагранжа

$\frac{dy}{dx}$ – позначення Лейбниця

(Leibniz) Готфрід Вільгельм (1646-1716) – німецький філософ, математик, фізик, винахідник, мовознавець, засновник Берлінської академії наук, член Лондонського королівського товариства та Паризької академії наук)



$\dot{y}$ – позначення Н‘ютона (Н‘ютон Newton) Ісаак (1643-1727) - англійський фізик і математик, президент Лондонського королівського товариства;

Dy – позначення Коши

Коши (Cauchy) Огюстен Луї (1789-1857),
французький математик,
член Паризької академії наук

Опишемо за допомогою похідної продуктивність праці в момент часу t_0

Нехай функція $Q(t)$ визначає кількість виробленої продукції за час t .

Тоді, за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $Q(t_0)$ до $Q(t_0 + \Delta t)$, тобто

$$\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0).$$

Середня продуктивність праці за цей період часу $Pcp = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Тоді продуктивність праці в момент t_0 – це граничне значення середньої продуктивності праці Pcp при $\Delta t \to 0$:

$$P(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} P_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Отже, продуктивність праці – це швидкість зростання обсягу продукції.

Аналогічно можна визначити, наприклад, маржинальний продукт $MQ(x_0)$.

Якщо функція $Q(x)$ позначає залежність кількості виробленої продукції від величини витрат x,

то відношення $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ – це середня величина виробленого продукту.

Тоді маржинальний продукт при витратах x_0 можна записати у вигляді:

$$MQ(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}$$

Інтеграл в економічних задачах

Історично інтегральне числення виникло як задача визначення площі та об'єму: Давній Схід, Єгипет, Вавілон, Давня Греція; особливо відмічають внесок **Архімеда** (близько 287-212 р. до н.е).
Систематичний розвиток методи інтегрування дістали у XVII – XIX столітті: німецький астроном **Іоган Кеплер** (1571-1630); італійські математики **Бонавентура Кавальєрі** (1598-1647), **Еванджеліста Торрічеллі** (1608-1647); французькі математики : **П'єр Ферма** (1601-1665), **Блез Паскаль** (1623-1662), **Леонард Ейлер** (1707-1783), **Огюстен Коши** (1789-1857). **Н'ютон і Лейбниць** незалежно один від одного створили алгоритми диференціального та інтегрального числення.

Лейбниць пропонував позначати інтеграл так:

$$S = \int f(x)\,dx \qquad (8)$$

Фур'є (Жан Батист Жозеф Фур'є (1768-1830), французький математик і фізик) удосконалив позначення Лейбниця і пропонував указувати початкове та кінцеве значення x у вигляді границь a та b:

$$S = \int_a^b f(x)\cdot dx \qquad (9)$$

Якщо ввести поняття інтегральної суми

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad (10)$$

то інтеграл (9) можна записати :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad (11)$$

Невизначений інтеграл представляє собою функцію (сімейство функцій), а визначений інтеграл – це число.

Приклади

Приклад 1: загальна кількість грошей F, що надходить в банк за певний термін $[O,T]$ визначається інтегралом :

$$F = \int_{O}^{T} f(t)dt, \qquad (12)$$

де $f(t)$ - кількість грошей, що надходить у банк в момент часу t.

Приклад 2: обсяг продукції Q за визначений період часу $[O,T]$:

$$Q = \int_{o}^{T} P(t)dt, \qquad (13)$$

де $P(t)$ - продуктивність праці в момент часу t. Нехай T = 8 годин, а $P(t)$ описується емпіричною формулою:

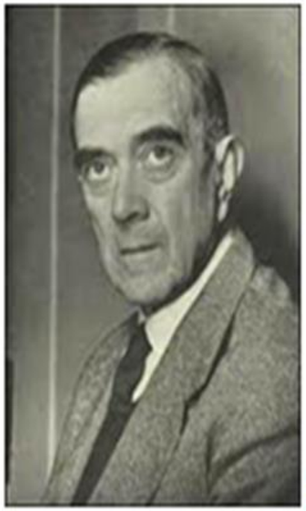
$$P(t) = -0{,}3t^2 + 0{,}6t + 10.$$

Тоді обсяг продукції за робочий день (13) складе:

$$Q = \int_0^8 P(t)dt = \int_0^8 \left(-0{,}3t^2 + 0{,}6t + 10\right)dt = \left(-0{,}1t^3 + 0{,}3t^2 + 10t\right)\Big|_0^8 = 48$$ одиниць продукції.

Приклад 3

Приклад 3: розрахунок коефіцієнта Джині для визначення степені нерівності за кривою Лоренця (Коррадо Джині (1884-1965) – італійський економіст, статистик, демограф; Макс Лоренц (1876-1959) - американський економіст і статистик), рис. 4.



Коррадо Джині

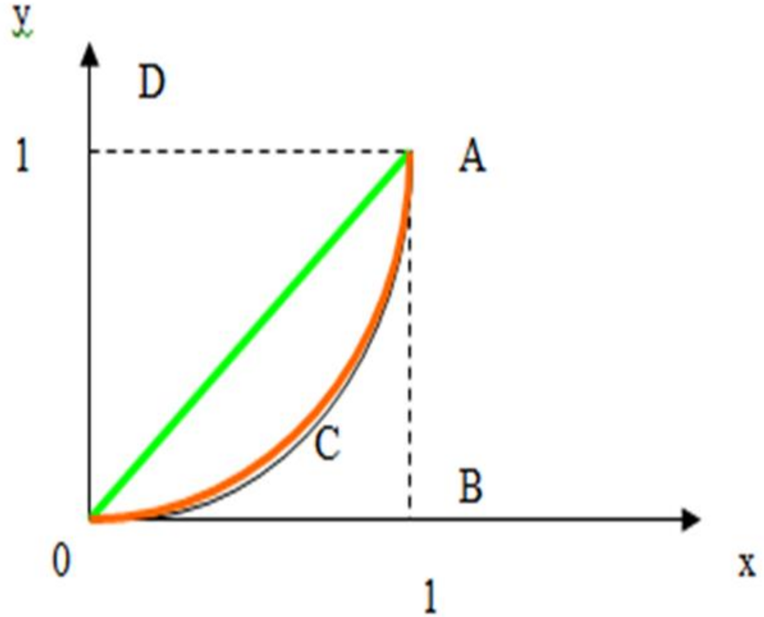


Рис.4

Вісь Ox – доля доходів для визначеної долі населення, Oy – доля населення, що має визначений дохід. При рівномірному розподілу доходів крива Лоренця є лінійною функцією $y = x$ (т.б. лінія OA – бісектриса), при нерівномірному – кривою OCA.

Коефіцієнт Джині визначається відношенням площин: $k_{дж} = \frac{S_{OAC}}{S_{OAB}}$ і лежить в межах $[0,1]$.

Якщо $k = 0$ - рівність в доходах населення;

$0 \langle k \langle 0,3$ - незначна нерівність;

$0,3 \le k \le 0,7$ - значна нерівність;

$0,7 \le k \le 1$ - сильна нерівність.

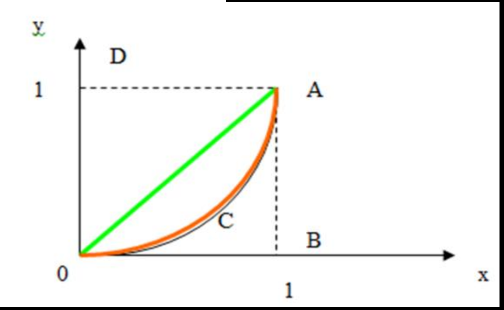
Нехай, наприклад, крива Лоренця описується рівнянням $y = \frac{3}{4}x^2$. Тоді

$$S_{OAC} = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}S_{ODAB} = \frac{1}{2}.$$

$$k = \frac{S_{OAC}}{S_{OAB}} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

тобто $0,3 \le k \le 0,7$ робимо висновок про значну нерівність доходів населення.



Приклад4.

Дисконтування грошового потоку

Приклад 4: дисконтування грошового потоку, тобто визначення початкової суми (дисконтної суми) S_0 за час t по її кінцевій величині $S(t)$ і процентній ставці P.

Згадаємо формули нарахування процентів.

Прості: $S(t)=S_0\left(1+\frac{P}{100}t\right)$, (14)

звідки дисконтна сума
$$S_0=\frac{S(t)}{1+\frac{P}{100}t}. \qquad (14а)$$

Складні:

$$S(t)=S_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^t, \quad t\in N$$ - ціле число періодів (15)

$$S_0=\frac{S(t)}{(1+\frac{P}{100})^t} \qquad (15а)$$

Безперервне нарахування процентів :

$$S(t)=S_0e^{\frac{Pt}{100}}, \qquad (16)$$

Відповідно, дисконтна (початкова) сума до моменту часу t:

$$S_0=S(t)e^{-\frac{Pt}{100}}. \qquad (16а)$$

продовження

Розглянемо ситуацію грошового потоку, коли гроші надходять в банк не одноразово S_0, а у вигляді безперервного потоку, функція $S_0(t)$. Тоді загальну суму S_d, що покладена в банк за період часу $[O,T]$ можна записати у вигляді (12):

$$S_d(T)=\int_O^T S_0(t)dt=\int_O^T S(t)\,e^{-\frac{Pt}{100}}dt,$$ де $S(t)$ – щорічний дохід. (17)

Нехай потрібно визначити: яку суму треба внести за період $[O,T]$ в банк під 10% річних, щоб щорічний дохід складав 1 тис. грн. Проценти нараховуються безперервно.

За умовою $S(t)=1$ тис. грн. при $t\in(O,T)$, за формулою (17) отримаємо:

$$S_d(T)=\int_O^T 1\cdot e^{-\frac{Pt}{100}}dt=\left(-10e^{-\frac{t}{10}}\right)\Big|_O^T=-10e^{-\frac{T}{10}}+10$$ (тис.грн.)

Якщо $T=3$ роки: $S_d(3)\approx 2{,}59$ (тис. грн.)

Отже, для щорічного доходу 1 тис. грн. протягом трьох років (тобто 3 тис. грн. за три роки), потрібно зробити внески на суму **2,59** тис. грн. Прибуток за три роки отримаємо: **3 – 2,59 = 0,41** тис. грн.

2. Диференціальні рівняння в соціально–економічній сфері

- **2.1.** Лінійні рівняння. Процеси природного зростання.
- **2.2.** Нелінійні рівняння. Механізм насичення.

2.1. Лінійні рівняння. Процеси природного зростання

В різноманітних системах, природних, соціальних, економічних зустрічаються процеси природного зростання (ядерна реакція, бактерії, рослини, тварини, населення Землі, грошові вклади та ін.) - коли величини за однакові проміжки часу Δt змінюють своє значення в одне і теж число разів.

Якщо припустити, що проміжок часу Δt наближається до нуля $\Delta t \to 0$ і значення величини, що розглядається (позначимо $y(t)$) змінюється миттєво, то отримаємо процес, при якому швидкість $\dot{y}(t)$ змінювання величини $y(t)$ в момент часу t пропорційна значенню цієї величини в той же момент часу:

$$\dot{y}(t) = ky(t), \text{ або } \frac{dy(t)}{dt} = ky(t). \qquad (1)$$

Отже, диференційне рівняння (1), яке вперше отримав Якоб Бернуллі (1654-1705), описує процеси природного зростання.

Вплив інвестицій. Принцип акселерації.

Вплив інвестицій

Вплив інвестицій $u(t)$ на зростання продукції підприємства $y(t)$

Нехай в початковий момент часу $t = 0$ інвестиції відсутні $u(t) = u_0 = 0$; тоді виробництво залишається на попередньому рівні $y(t) = y(0) = y_0$.

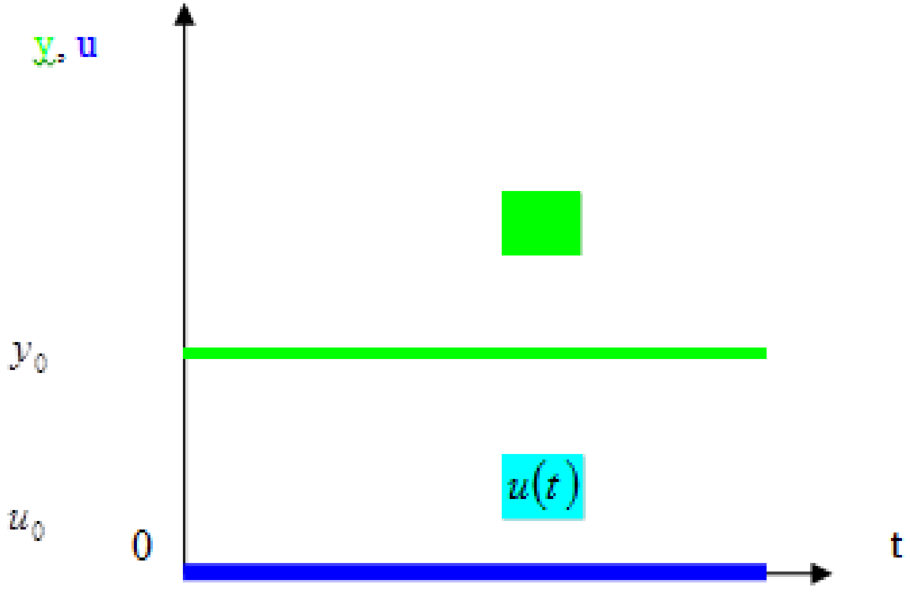


Рис.1

Якщо підприємство інвестується постійно $u(t) = u_0 \rangle 0$, то виробництво постійно розвивається і випуск продукції повинен зростати лінійно: $y(t) = y_0 + ct$, рис.2.

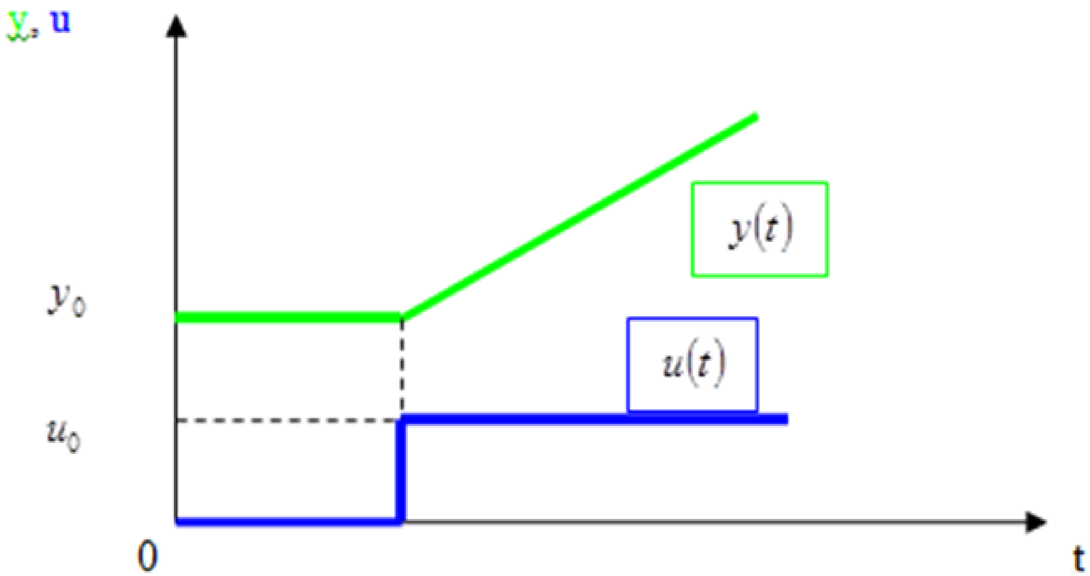


Рис.2

Опишемо дану ситуацію (змінювання випуску продукції $y(t)$) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \quad \text{де - } k - const \qquad (3)$$

.

Якщо $u(t) = 0$, то з (3) отримаємо: $\frac{dy(t)}{dt} = 0$, а це значить, що $y(t) = const = y_0$.

Якщо $u(t) = u_0 \rangle 0$, то $\frac{dy(t)}{dt} = ku_0$. (4)

Після інтегрування рівняння (4) отримаємо:

$$y(t) = y_0 + ku_0 t.$$

Отже, зростання інвестицій призводить не стільки до зростання продукції, скільки впливає на швидкість зростання, яка прямо пропорційна збільшенню інвестицій **(4).**

Однак, в реальній економіці необхідність зростання продукції підприємства регулюється відповідним попитом $q(t)$, тобто підприємство повинно випускати продукцію $y(t)$, яка співпадатиме по величині із попитом $q(t)$ на неї:

$$y(t) = q(t).$$

Для задоволення даним вимогам із рівнянь (3) і (5) отримаємо:

$$\frac{dq(t)}{dt} = ku(t) \qquad (6)$$

Отже, інвестиції повинні задовольняти рівнянню

$$u(t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{dq(t)}{dt}, \qquad (7)$$

тобто для задоволення попиту та реалізації своєї продукції підприємство повинно збільшувати інвестиції пропорційно швидкості зростання попиту (акселерації).

Коефіцієнт пропорційності $\frac{1}{k} = a$ називають акселератом.

Принцип акселерації

Поставимо питання: чи потрібно збільшувати інвестиції, якщо попит на продукцію зростає?

Відповідь надає знак другої похідної від функції попиту $q''(t)$ або $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$:

- якщо $q''(t) > 0$, то $\frac{dq(t)}{dt}$ збільшується, і відповідно повинні зростати інвестиції $u(t)\uparrow$;
- якщо $q''(t) < 0$ (зростання попиту уповільнюється), то $\frac{dq(t)}{dt}$ зменшується, а значить повинні зменшуватись інвестиції $u(t)\downarrow$;
- якщо $q''(t) = 0$, тобто попит зростає з постійним темпом ($\frac{dq(t)}{dt} = const$), то інвестиції повинно утримувати на рівні, що досягнули в даний момент часу, т.б. $const = ku_0$.

Задача про кредитування (розв’язання Якоба Бернуллі)

Нехай кредитор отримує $p\%$ процентів від суми кредиту S_o за рік. Знайти суму $S(t)$, яку отримує кредитор за кожну одиницю суми кредиту протягом року (t років) , якщо проценти збільшуються безперервно.

Розв‘язок задачі:

Оскільки проценти нарощуються безперервно, то швидкість змінювання величини боргу можна описати рівнянням (1):

$$\frac{dS(t)}{dt} = kS(t). \qquad (2)$$

Розв’язок рівняння (2):

Розв'язок рівняння (2): виконаємо розділення змінних

$$\frac{dS(t)}{dt} = kS(t). \longrightarrow \frac{dS(t)}{S(t)} = kdt,$$

після інтегрування лівої і правої частини

$$\int \frac{dS(t)}{S(t)} = \int kdt,$$

отримаємо

$$\ln\left|S(t)\right| = kt + \ln c, \quad c = const, \longrightarrow S(t) = e^{kt+\ln c} = e^{kt} \cdot e^{\ln c} \tag{3}$$

$$S(t) = ce^{kt}.$$

За умовою задачі: $S(0) = S_o, \quad K = \frac{P\%}{100}.$

Тоді сума, яку отримає кредитор від наданого кредиту S_o за t років, складе

$$S(t) = S_o e^{\frac{Pt}{100}}. \tag{4}$$

Отже, від кожної одиниці S_o кредитор отримує $S_1(t) = \exp(Pt/100)$.

За рік, $t = 1$, $S_1(1) = \exp(P/100)$ грошових одиниць.

Зростання грошового вкладу

Рівняння (4) можна використовувати для наближеної оцінки накопиченої суми грошового вкладу.

Нехай початковий вклад 1 грн під 10%. Скільки отримаємо через 10, 100, 500, 1000 років?

Із (4) маємо:

$$S(10) = 1 \cdot \exp(10 \cdot 10/100) \approx 2{,}72 \text{ грн}$$
$$S(100) = \exp(10) \approx 22026{,}47 \text{ грн}$$
$$S(500) = \exp(50) \approx 5{,}18 \cdot 10^{21} \text{ грн}$$
$$S(1000) = \exp(100) \approx 2{,}69 \cdot 10^{43} \text{ грн.}$$

Останні дві величини набагато перевищують всі грошові запаси Земної кулі. Даний приклад ілюструє одну із причин проведення грошових реформ: борги банків вкладникам зростають достатньо швидко, а збільшення грошової маси для їх погашення призводить до інфляції.

Темп інфляції та рівень цін

Загальний рівень цін можна обчислювати за формулою природного зростання (4):
$$Z(t) = Z_o \exp\left(\frac{Pt}{100}\right)$$

.

При подвоєнні рівня цін отримаємо: $Z(t) = 2Z_o$.

Підставимо у формулу: $2Z_o = Z_o \exp(Pt/100)$, $2 = \exp(Pt/100)$.

Прологарифмуємо останнє рівняння і виразимо t: $\ln 2 = \frac{Pt}{100}$,

$$t = \frac{100 \cdot \ln 2}{P}.$$

Оскільки $\ln 2 \approx 0{,}7$, отримаємо «правило величини 70»: $t \approx \frac{70}{P}$.

Якщо рівень інфляції $P = 10\%$ – рівень цін подвоїться через 7 років;

якщо $P = 20\%$ – $t \approx 3{,}5$ роки.

Модель природного зростання випуску дефіцитної продукції

Рой Харрод

Євсей Дейвид Домар

Модель природного зростання (5) покладена в основу моделі Харрода – Домара (Рой Харрод (1900-1978) – англійський економіст. Євсей Дейвид Домар (р. 1914) – американський економіст) про стійкість темпів зростання виробництва, що забезпечується: природним зростанням населення, продуктивністю праці, розміром накопичення капіталу (норма накопичення – *const*).

Позначимо: $x(t)$ – кількість продукції виробленої в момент часу t;

c – фіксована ціна реалізації продукції;

$c \cdot x(t)$ – дохід в даний момент часу t.

Нехай для розширення виробництва використовується g_u– та частина доходу (інвестиції у виробництво $u(t)$):

$$u(t) = \frac{C}{g_u} x(t).$$

Постійні інвестиції у виробництво приведуть до пропорційного зростання швидкості випуску продукції $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = au(t) = \frac{ac}{g_u} x(t) = k_u x(t), \qquad (5)$$

де a – коефіцієнт пропорційності; $k_u = \dfrac{ac}{g_u}$.

Розв'язком рівняння (5) є функція:

$$x(t) = x_o e^{k_u t}, \qquad (6)$$

яка показує процес зростання обсягів виробництва при виділенні частини доходу для розширення виробництва.

Зростання населення (модель динаміки популяції Мальтуса)

В ідеальних умовах, тобто коли середовище не лімітує розмноження (рівняння Томаса Мальтуса, 1802 рік) – це значить, що є в достатку їжа, життєвий простір, густина розселення достатня для утворення пар, температура оптимальна тощо, можна скористатися рівнянням (1):

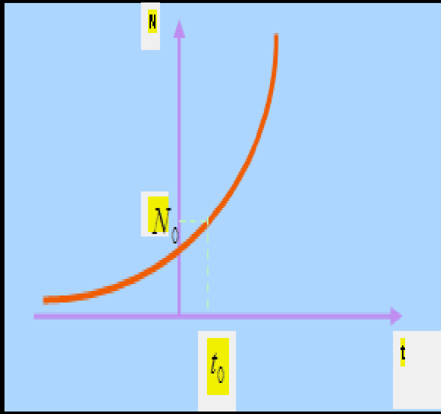
$$\frac{dN}{dt} = rN, \qquad (7)$$

де r – коефіцієнт швидкості розмноження популяції (природного зростання).

Розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд експоненти (рис. 1):

$$N = N_0 \exp(rt), \qquad (8)$$

де N_0 – початкова чисельність популяції (населення).



Якщо вибрати обмежуючі умови для моделі (7), що населення не повинно перевищувати $N = 40$ млрд. чол., швидкість зростання 1,25 % на рік $(r = 0{,}0125)$ $N_o(t_o = 1999 рік) = 6$ млрд. чол., то можна визначити, коли границя насичення буде досягнута (за моделлю Мальтуса), рівняння (8):

$$40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9 \exp(0{,}0125 \cdot t),$$

звідки знаходимо t:

$$t = \frac{1}{0{,}0125} \cdot \ln\frac{40}{6} \approx 150 \text{ років.}$$

Інвестування у виробництво

Припущення:

- початкова умова $y(0)=0$ - в початковий момент часу $t = 0$ продукція не випускається;
- в кінцевий момент часу t інвестор робить вклад в сумі $u(t)$, який, в першому наближенні, одразу впроваджується у виробництво (випуск продукції).

Тоді кількість випущеної продукції можна записати спрощеним рівнянням:

$$\frac{dy(t)}{dt}=u(t). \qquad (24)$$

Оцінимо перевагу одної із двох схем фінансування (сума інвестиції 20 тис. грн.):

1). Кожен рік по 10000 грн;

2). В перший рік всі 20000 грн.

Схема 1 u(t)

Схема *1*:

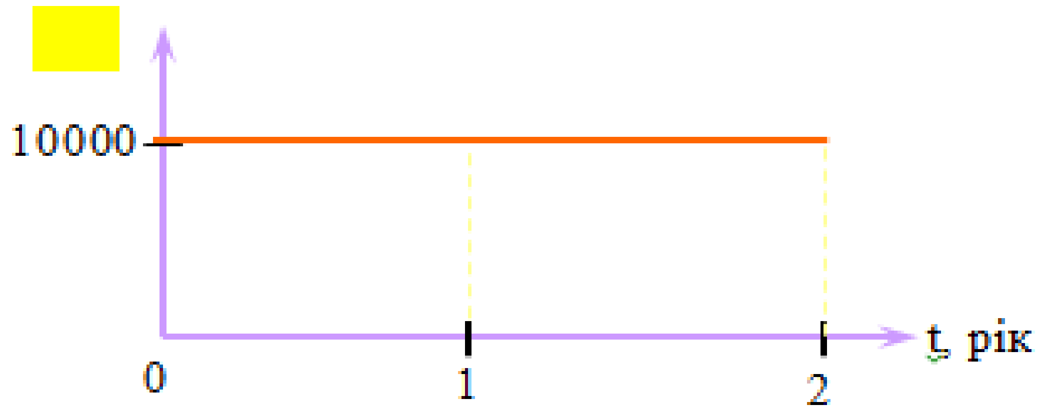


Рис. 4

Для періоду $0 < t < 2$ інвестиції $u(t) = 10000$ грн.

Із (24) маємо:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t) = 10000 . \qquad (25)$$

Тоді при умові $y(0) = 0$ отримаємо розв'язок

$$y(t) = 10000\,t . \qquad (26)$$

Графік y(t)

Графічно вираз (26) представляє собою лінію, рис.5.

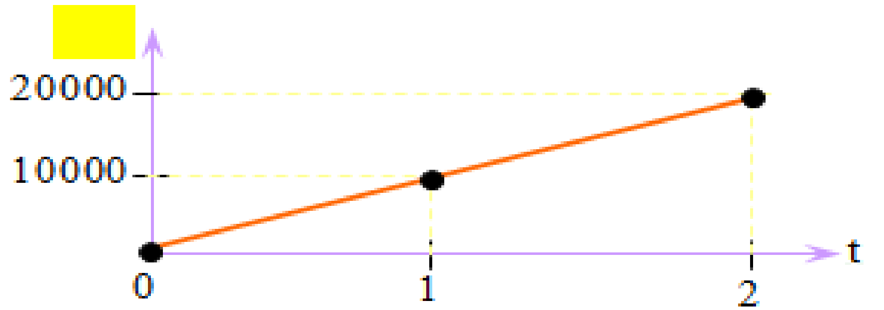


Рис. 5

Об'єм виробленої продукції Vy_1 за два роки дорівнює площі фігури, обмеженої лінією $y(t)$ на рис. 5.

$$Vy_1 = \int_0^2 y(t)dt = \int_0^2 10000\, tdt = 10000\int_0^2 tdt = 10000 \cdot \frac{1}{2}t^2\Big|_0^2 = 10000 \cdot \frac{4}{2} = 20000 \text{ грн.} \qquad (27)$$

Схема 2 u(t)

Схема 2:

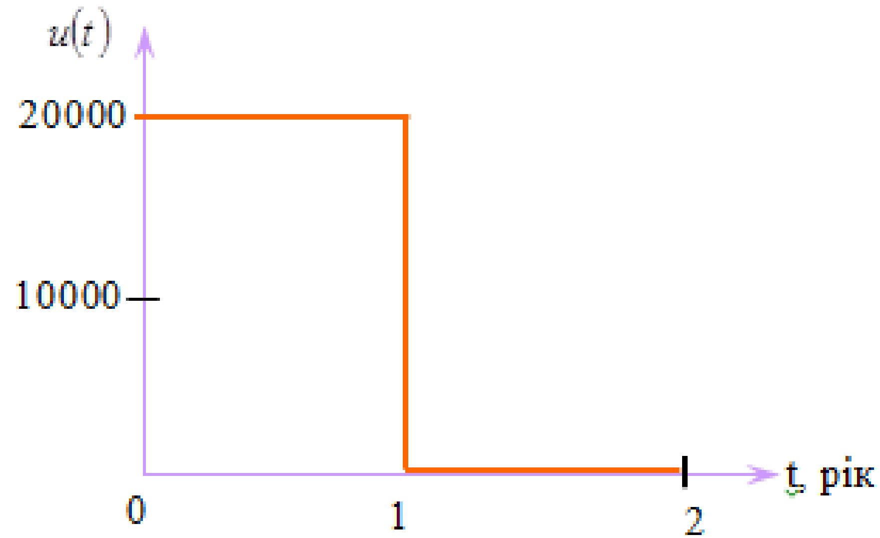


Рис. 6

Для періоду $0 < t < 1$ інвестиції $U(t) = 20000$ грн., для періоду $1 < t < 2$ інвестиції $U(t) = 0$ грн. Тоді при умові $y(0) = 0$ отримаємо: для $0 < t < 1$, $\frac{dy(t)}{dt} = 20000$, звідки $y(t) = 20000\ t$; а при умові $y(1) = 20000$ для $1 < t < 2$, $\frac{dy(t)}{dt} = 0$, звідки $y(t) = const = y(t) = 20000$, рис. 7.

Рис. 7

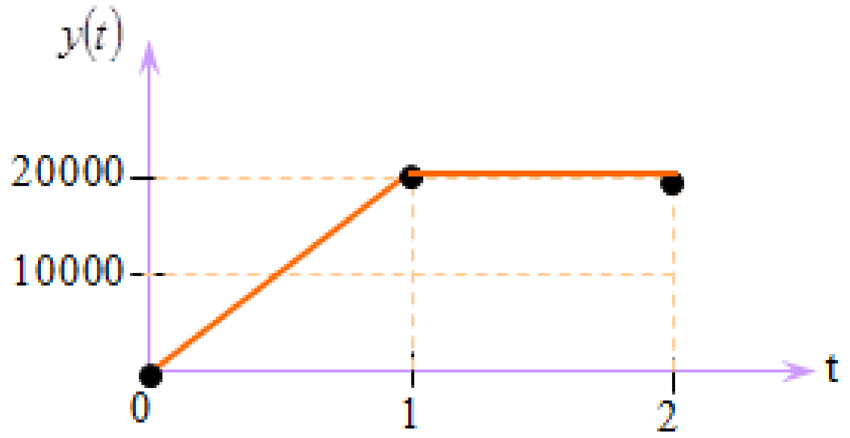


Рис. 7

Об'єм продукції протягом двох років за другою схемою інвестування розраховується аналогічно (27):

$$Vy_2 = \int_0^1 20000\,t\,dt + \int_1^2 20000\,dt = 20000 \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 + 20000\,t \Big|_1^2 = 10000 + 20000 = 30000 \text{ грн.} \qquad (28)$$

Отже, друга схема інвестування більш вигідна, особливо на початковому етапі.

2.2. Нелінійні рівняння. Механізм насичення

При використанні моделей природного зростання необхідно враховувати механізми насиченості та відповідно скорегувати лінійні моделі, в основі яких лежить рівняння Якоба Бернуллі (1):

$$\dot{y}(t) = ky(t)$$

Припущення Дж. К'ютелета, що коефіцієнт k рівняння (1) повинен бути не сталою, а спадаючою функцією, яка залежить від y(t), перетворює рівняння (1) на нелінійне:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k(y(t)) \cdot y(t) \qquad (9)$$

Рівняння (9) дозволяє описувати механізм насичення в різних прикладних задачах. Ця ідея була покладена в основу багатьох моделей логістичного типу: модель динаміки популяції (зростання населення) за рівнянням Ферхюльста (учень Дж. К'ютелета), випуск продукції в умовах конкуренції та насиченості ринку, моделі «соціальної дифузії» (поведінки, моди, ринку інформації, рекламної кампанії, новацій тощо), модель росту виробництва з урахуванням інвестицій та ін.

П'єр Ферхюльст

Отже, у 1836 році Ферхюльст пропонував використати для опису процесу зростання населення рівняння, яке враховує реальний ефект саморегуляції чисельності N в умовах обмеженості ресурсів, внутрішньої боротьби (конкуренції) в популяції:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{k}N^2, \qquad (10)$$

де від'ємний нелінійний елемент $-\frac{r}{k}N^2$ описує ефект саморегуляції;

$k = N_{max}$ – максимально можлива чисельність популяції (угрупування).

Рівняння (10) часто записують у вигляді:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{k}) \qquad (11)$$

Розв'язок рівняння (11)

Знайдемо розв'язок рівняння (11). Спочатку розділимо змінні:

$$\frac{dN}{N(1-\frac{N}{k})} = rdt. \tag{12}$$

Врахуємо наступне співвідношення:

$$\frac{1}{N(1-\frac{N}{k})} = \frac{1}{N(\frac{k-N}{k})} = \frac{k}{N(k-N)} = \left|\ \text{у чисельник додати і відняти } N: +N-N\ \right| =$$

$$\frac{k+N-N}{N(k-N)} = \frac{(k-N)+N}{N(k-N)} = \frac{k-N}{N(k-N)} + \frac{N}{N(k-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{k-N}$$

і запишемо (12) після інтегрування у вигляді:

$$\int\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{k-N}\right)dN = \int rdt, \tag{13}$$

$$\ln\ N - \ln(k-N) = rt + \ln\ a,$$

де $\ln\ a = \text{const}$.

Звідки отримаємо:

$$\ln\frac{N}{k-N} = rt + \ln\ a,$$
$$\frac{N}{k-N} = ae^{rt}. \tag{14}$$

Якщо відомо, що при $t=0$ число особин було $N = N_0$, то з (14) маємо:

$$a = \frac{N_0}{k-N_0}. \tag{15}$$

Розв'яжемо (14) для отримання функції $N(t)$:

$$N = (k - N)ae^{rt} = kae^{rt} - Nae^{rt},$$

$$N + Nae^{rt} = ake^{rt},$$

$$N(1 + ae^{rt}) = ake^{rt},$$

$$N = \frac{a \cdot ke^{rt}}{1 + ae^{rt}}. \qquad (16)$$

Розділимо праву частину (чисельник і знаменник) на e^{rt}, врахуємо (15) і позначимо $N = N(t)$. Тоді (16) можна переписати у вигляді:

$$N(t) = \frac{ak}{a + e^{rt}} = \frac{k}{1 + e^{-rt} \cdot a^{-1}} = \frac{k}{1 + e^{-rt} \cdot \frac{k - N_0}{N_0}} = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0 e^{-rt})}. \qquad (17)$$

аналітично

$$\lim_{t \to \infty} \frac{ak}{a + e^{-rt}} = \left| e^{-rt} \to 0 \right| = \frac{ak}{a} = k = N_{\max}.$$

Властивості отриманого рішення:

При малих значеннях чисельності популяції (або біомаси) зростання відбувається за експоненціальним законом (як в ідеальній моделі Мальтуса);

При необмеженому зростанні часу чисельність популяції асимптотично наближається до значення $N=k$ (k-ємність середовища), рис. 2.

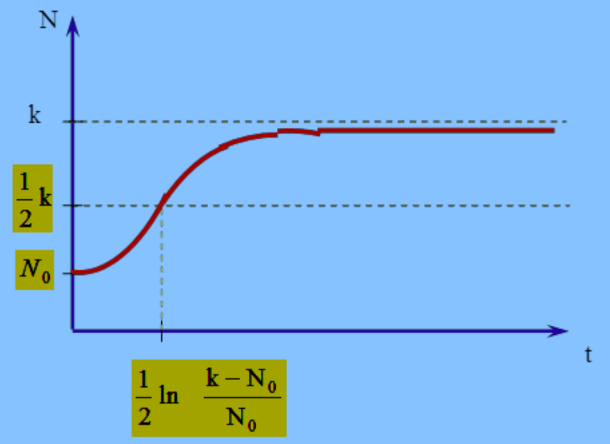


Рис.2

Розглянута модель Ферхюльста застосовується до інших соціально-економічних явищ.

Перепишемо вираз (11) в позначеннях рівняння (9): $\dot{y}(t) = k(y(t))\,y(t)$, якщо $r = k_o,\ K = y_{\max}$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_o\left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}}\right)y(t), \qquad (18)$$

де $k(y(t)) = k_o\left(1 - \frac{y(t)}{y_{\max}}\right)$;

k_o - коефіцієнт пропорційності (швидкості);

$y_{\max}$ - максимальне значення $y(t)$, що визначає лінію (границю) насичення.

Приклади моделей в наступній лекції