МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРОЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра комп'ютерних технологій і моделювання систем

Бродський Ю.Б., Малютіна В.П.

К о н с п е к т л е к ц і й
з дисципліни

«Економіко – математичне моделювання»

Житомир 2010

Конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей

- схвалено методичною комісією економічного факультету, протокол № від .2010 р.
- рекомендовано до друку Вченою радою економічного факультету університету, протокол № від.2010 р.

Рецензенти:

декан економічного факультету Житомирського національного агроекологічного університету, кандидат економічних наук, доцент **Суліменко Л.А.**, доцент кафедри комп'ютерних технологій і моделювання систем **Тимонін Ю. О.**

Бродський Ю.Б., Малютіна В.П.
Економіко–математичне моделювання. Конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей. - Житомир: ЖНАЕУ, 2010. - 115с.

Економіко-математичне моделювання (ЕММ) є одним із головних напрямків розвитку економічної науки та її практичних застосувань. Це самостійний напрям в науці, який об'єднує в єдине ціле окремі аспекти математики, економіки і кібернетики. ЕММ є комплексним методом дослідження, синтезом економічних та математичних знань.

Використання ЕММ в економічних дослідженнях – необхідна умова для успішного розв'язування задач, які виникають в процесі перетворень в ринковій економіці. Економіко-математичні моделі є основою для реального врахування різноманітних варіантів розвитку фінансових процесів, а в поєднанні з сучасними комп'ютерними технологіями - найбільш ефективним засобом їх реалізації.

Конспект лекцій складається з двох частин: перша присвячена методології та інструментарію моделювання, друга – моделям економічних процесів і систем. Частина 1 підготовлена Ю.Б. Бродським, частина 2 – В.П. Малютіною.

Частина 1.
Методологія та інструментарій моделювання

“…Не тільки результат дослідження, але й шлях,
що веде до нього, повинен бути істинним”
Гегель

1. Системний підхід. Основні принципи та аспекти.

1.1. Економічна система.

Економічна система – це деяка сукупність (комплекс) відомостей про економічні об’єкти або процеси, яка необхідна для розв’язання задачі управління цим об’єктом.

Проникнення математики в економічну науку пов’язано з подоланням значних труднощів. В цьому винна вища математика, структура якої протягом декількох століть пристосовувалася в основному до потреб фізики та технічного розвитку. Однак, головні причини все ж таки лежать в природі економічних процесів, в специфіці економічної науки. Більшість об’єктів економіки з точки зору кібернетики – це складні системи.

Найбільш розповсюджене сприймання системи, як сукупності елементів, які знаходяться у взаємодії та утворюють деяку цілісність, єдність. Важлива властивість будь-якої системи є емерджентність- наявність таких властивостей, які не належать жодному елементу, які входять в систему.

Тому, при вивченні системи недостатньо (а часто і неможливо) користуватися методом роздрібнення її на окремі елементи з наступним вивченням цих елементів окремо.

- одна з труднощів економічних досліджень в тому, що практично не існує економічних об’єктів, які можна розглядати як окремі (несистемні) елементи;
- економічні системи володіють усіма ознаками складних систем. Вони поєднують велику кількість елементів, які відрізняються багатостатністю внутрішніх зв’язків та зв’язків з іншими системами (соціальними, технологічними, природними). А всі ці процеси: технологічні, біологічні та соціальні, керовані та стихійні носять динамічний характер. Особливістю внутрішньої організації такої складної динамічної системи як економіка є поліструктурність – взаємо переплітання різноякісних підсистем, які утворюють декілька зв’язаних між собою ієрархічних структур (виробничо-технологічних, територіальних, соціальних та інших). Труднощі вивчення економічних систем методами моделювання визначаються не тільки їх об’єктивними властивостями, але й особливостями взаємодії об’єктів та суб’єктів дослідження.

В кібернетичному аспекті Економічну систему (E) можна представити як перетин двох систем більш високого рівня: суперсистеми Суспільство (S) та суперсистеми Ресурси (Q). З точки зору суспільства в цілому економіка виступає у якості “блока живлення” – функціональної підсистеми, яка перетворює зовнішні, природні ресурси (N) в придатні до споживання блага, які доводяться до споживачів (C).

При розгляданні економіки як суспільної підсистеми ($E \subset S$) визначаючими є соціально-економічні аспекти її аналізу. При вивченні економіки як підсистеми ресурсів ($E \subset Q$) на перший план виступають виробничо-технологічні аспекти її аналізу. Відповідно цим двом початковим позиціям люди виступають у двоякій ролі – як споживачі, які задають виробництву його кінцеву ціль, і як трудові ресурси, які е важливішим функціональним елементом самого виробництва. Економіка може вивчатись і як відносно обумовлена система перетворювач потоку $N \to C$**,** пов’язаний своїми входами та виходами з природою і соціальним середовищем.

Аналогічно можна вивчати і кожну окрему комірку економіки, або господарський комплекс як часткові перетворювачі. При такому аналізі виявляється внутрішня структура економіки і її елементів, їх взаємозв'язки, які визначаються накладанням соціально-економічних та виробничо-технологічних факторів.

Внаслідок великої кількості факторів, які впливають на економічні процеси, необхідні і суттєві зв'язки в них не проявляються у чистому вигляді в кожному окремому випадку. І хоча у плановій економіці процеси перестають бути стихійними, але зберігають характер масових процесів, які обов'язково містять випадкові компоненти. Непередбачені випадковості можуть викликатись природними явищами, змінами міжнародної обстановки, науково-технічними відкриттями, різними суб'єктивними факторами. Тому, економічні закономірності носять стохастичний характер.

Для моделювання економіки важливе значення має поняття невизначеності економічного розвитку, яка обумовлена властивостями економічного процесу та пов'язана з неповнотою та неточністю інформації про ці процеси.

1.2. Елементи системології і кібернетика

Оскільки концептуальною основою системних наук є метод системного підходу, доцільно буде розглянути його основні принципи:

- принцип системності – розглядання об'єктів дослідження як систем;
- принцип *кінцевої цілі* (мети): абсолютний пріоритет кінцевої (глобальної) цілі (мети), тобто всі процеси в системі підпорядковані глобальній цілі (головному призначенню), що накладає особисту відповідальність на вибір цілі та її трактування. Не повністю визначені кінцеві цілі або не однозначне їх трактування ушкоджує структуру та процеси в системі і взагалі управління системою;
- принцип *ієрархічності пізнання*, який потребує трирівневого вивчення об'єкта: вивчення самого об'єкта – „<u>власний</u>" рівень; вивчення об'єкта як елемента більшої системи – „<u>зовнішній</u>" рівень та вивчення об'єкта у відношенні з його складовими - „<u>нижній</u>" рівень;
- принцип *інтеграції*: відображається саме та особливість системного підходу, яка спрямована на вивчення інтегративних властивостей і закономірностей системи, розкриття базисних механізмів інтеграції цілого;
- принцип *функціональності*: сумісний розгляд структури й функцій з пріоритетом функцій над структурою. Цей принцип стверджує, що будь-яка структура тісно зв'язана з функціями системи та її елементів, тому досліджувати та створювати структуру необхідно після з'ясування (розуміння, точно визначення) функцій в системі. Зокрема, на практиці принцип функціональності означає те, що у випадку додавання системі нових функцій доцільно буде переглянути її структуру, а не намагатись впровадити нову функцію в стару схему.

Основні проблеми системного підходу зв'язані з розвитком методів практичної реалізації указаних принципів, зокрема, з виявленням законів об'єднання частин в ціле, законів, що визначають характер структури, функціонування і розвитку, зв'язки з умовами та середовищем існування, граничних характеристик систем; з розробкою змістовних та формальних засобів подання об'єктів, які досліджуються, з дослідженням методологічних основ різних системних теорій і.т.д.

Всебічне вивчення будь-якої системи передбачає установлення складу її компонентів, структури та функцій як системи в цілому, так і її складових частин, а також факторів, які забезпечують цілісність та відносну самостійність системи. Відповідно розрізнюють декілька аспектів системного підходу.

<u>Системно – історичний</u> аспект: розглядання процесу виникнення системи, її розвитку (еволюції), передбачення історичної перспективи.

<u>Системно – компонентний</u> аспект: вивчення елементного складу системи, тобто із яких компонентів утворено ціле (система).

<u>Системно – структурний</u> аспект: вивчення внутрішньої організації системи, способів взаємодії елементів та підсистем, типів між елементних зв'язків системи.

Структура системи відіграє велику роль. Вона зв'язує компоненти системи, що надає їй цілісність та виникнення нових властивостей, які не має жоден компонент. Для збереження системи особливого значення набуває стійкість структури, яка визначається стійкістю зв'язків її компонентів.

Системно – функціональний аспект: зв'язки з вивченням поведінки окремих частин системи та функціонування системи в цілому. Кожна реальна система виконує певні функції, які представляють деякий інтегративний результат функціонування її компонентів. Функції компонентів відносно системи несе доцільний (цільовий) характер, інакше компонент випадає із системи. Функції компонентів узгоджені за часом і в просторі і часто являються результатом впливу загальносистемних функцій.

Системно – комунікаційний аспект: розглядає взаємозв'язки системи з іншими об'єктами, явищами, системами.

Системно – інтегративний аспект: вивчає фактори збереження, досконалості та розвитку системи, тобто механізми які забезпечують збереження якісної специфіки системи.

Розглянуті аспекти системного підходу в своїй єдності та взаємодії перетворюють системний підхід в ефективний засіб пізнання.

Всебічне дослідження системи, процесу або проблеми може бути забезпечено тільки сукупним використанням всіх аспектів системного підходу.

Термін „система" досить давно використовується як в науковій літературі, так і у повсякденному житті: „сонячна система", „система рівнянь" у математиці, „система зв'язку" і т.п. З грецької система – це „складено з частин" і з нею завжди пов'язувалось поняття визначеного порядку, який протипоставлений хаосу (де все залежить від чогось іншого, невизначений порядок).

Отже, **система** – це внутрішньо організована сукупність взаємозв'язаних елементів, що утворює єдине ціле і спільно діє для досягнення поставленої цілі.

Розглянемо загальні властивості систем різної фізичної природи.

Властивість – здатність системи виявляти ті чи інші сторони у процесі взаємозв'язку і взаємодії.

Ця здатність обумовлюється внутрішньою природою системи, її будовою, структурою.

З визначення поняття „система" випливає, що сукупність об'єктів (предметів, елементів) в результаті їх поєднання у систему отримує нові властивості, які відрізняються від властивостей окремих елементів. Це явище називають "емерджентність" (від англ. – поява нового). Воно було відкрите англійським кібернетиком У.Р. Ешбі і визначає основну властивість системи – цілісність – поява у системі властивостей, що не випливають із частин (елементів системи), тобто система володіє інтегрованими властивостями (приклад про навчальну аудиторію). З цим зв'язана інша властивість систем – єдина ціль, якій підпорядковані цілі підсистем та елементів системи, тобто єдина функціональна спрямованість.

Щоб деяке з'єднання будь-яких об'єктів можна було назвати системою, воно повинно бути досить стійким, здібним на існування тривалий час. Тому важливою властивістю системи є гомеостатичність, тобто здібність тривало функціонувати без суттєвого зниження ефективності.

Крім названих основних властивостей можна виділити такі загальні властивості систем, як динамічність (наявність в системі активних процесів), детермінованість (закономірний і логічний розвиток процесів у системі, чітке виявлення зв'язків), ізоморфізм (подібність процесів у системах однакової структури). Остання властивість є особливістю систем різної природи – біологічних, соціальних, економічних, технічних та інших.

Будь-яка система існує у середовищі і може розглядатись як підсистема більш загальної системи (макросистеми). Для дослідження системи, її необхідно виділити із сукупності інших систем, тобто визначити її склад і межі. Схематично (рис. 1) будь-яку систему у природі можна подати об'єктом із входами x (вхідні фактори, один з яких позначає вплив зовнішнього середовища – E) та виходами y (вихідні фактори – реакція на вхідні фактори).

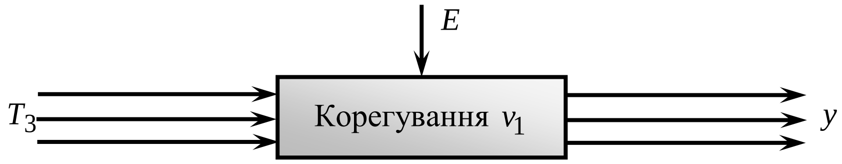


Рис. 1

Система відносно зовнішнього середовища виступає і відповідно сприймається як єдина і відносно самостійна, в чому полягає її цілісність. Однак, відокремленість системи надто умовна, бо завжди має місце взаємодія системи із зовнішнім середовищем (іншими системами).

Середовище є сукупністю елементів, які не входять до складу системи, але впливають на неї деяким чином. Одні з них є пасивними природничими об'єктами (природне середовище), які тільки обмежують поведінку системи, інші – активними елементами позитивного або негативного впливу на систему.

Таким чином, *основними положеннями, на яких основується поняття системи*, є:

- множина взаємозв'язаних компонентів, які складають об'єкт обмежений зовнішнім середовищем і взаємодіючий з ним;
- ця множина утворює єдине ціле, яке має визначену ціль або призначення, характерне для всієї сукупності елементів;
- кожний елемент множини виконує визначену функцію, яка сприяє досягненню цілі, виконанню загальносистемних функцій.

Основні характеристики систем.

До основних характеристик систем відносять: структуру системи, стан системи та перетворення системи.

Функціонування системи, а також взаємодія із зовнішнім середовищем визначається її структурою. Структура системи визначає сукупність її елементів і стійких зв'язків між ними.

Взагалі, можна виділити два основних типа структурних зв'язків: підпорядкованості та узгодженості.

Зв'язок *підпорядкованості* припускає, що один із компонентів є головним, тобто визначаючим в їх сумісному функціонуванні. Зв'язок *узгодженості* – це такий зв'язок, при якому ролі компонентів рівноцінні.

Ці типи структурних зв'язків визначають ієрархічну структуру системи. Компоненти з підпорядкованими зв'язками розміщуються на різних рівнях ієрархії, а компоненти узгоджених зв'язків знаходяться на одному рівні ієрархії.

Між компонентами системи і компонентами зовнішнього середовища існують комунікативні зв'язки.

Кожен компонент із складу системи виконує функції, які визначаються, з одного боку, властивостями компоненти, а з іншого – його структурними і комунікативними зв'язками. Між функціями компонентів також є зв'язки підпорядкованості і узгодження. Тому можна подати ієрархічну структуру функцій компонентів, на верхньому рівні якої знаходяться загальносистемні функції, на виконання яких спрямовані всі функції компонентів системи.

Отже, ієрархічній структурі компонентів системи відповідає ієрархічна структура їх функцій: виконання функцій вищого рівня забезпечується сукупністю функцій попереднього (нижчого) рівня, які, у свою чергу, забезпечуються функціями ще нижчого рівня і т.д. до елементарних функцій, які реалізуються окремими елементами системи.

Види структур систем.

В залежності від складу і просторово-часових властивостей системи бувають <u>прості</u>, <u>складні</u> і <u>великі</u>.

Прості – це системи, які не мають розгалуженої структури і складаються з невеликої кількості взаємозв'язаних і взаємодіючих елементів. Такі системи служать для виконання простіших функцій і як правило входять до складу інших систем. Особливістю простих систем є детермінованість номенклатури і числа елементів та зв'язків (як внутрішніх, так і зовнішніх).

Складні системи характеризуються великою кількістю елементів і внутрішніх зв'язків, їх неоднорідністю та різноякісністю, структурною багатостатністю, виконанням багатьох функцій або складної функції (наприклад: людина, держава, комп'ютер тощо). Компоненти складної системи можна розглядати як підсистеми, які також можуть складатись з простіших підсистем і т.д.

Тобто, <u>ієрархічна побудова</u> – характерна ознака складної системи. Окремо для складних систем можна виділити фактор неможливості передбачення їх поведінки без спеціального аналізу та оцінювання.

Взагалі складну систему поділяють на такі функціональні підсистеми:

- *вирішальну*, яка приймає глобальне рішення про взаємодію з зовнішнім середовищем та розподіляє локальні завдання всім іншим підсистемам для його реалізації;
- *інформаційну*, що забезпечує збір, обробку та передачу інформації, необхідної для прийняття глобального рішення та виконання локальних завдань;
- *управління*, призначену для реалізації глобального рішення;
- *гомеостазну*, яка підтримує динамічну рівновагу усередині системи і регулює потоки і ресурси енергії та матерії у підсистемах, необхідних для виконання їх локальних завдань, тобто забезпечує здібність системи тривало функціонувати без суттєвого зниження ефективності;
- *адаптивну*, яка накопляє досвід в процесі навчання для покращення структури і функцій системи.

Таким чином, у складній системі всі її підсистеми, як правило, також складні системи. Складність системи – поняття багатогранне, тому в різних проблемах виявляються різні аспекти складності. Виділяють структурну складність, динамічну складність, обчислювальну складність і т.д. Складність – поняття якісне, нечітке, яке не строго визначено і не має загально прийнятого способу кількісного оцінювання.

Велика система – це система, яку неможливо спостерігати одночасно з позиції одного спостерігача у часі або просторі, для якої суттєвим є просторовий фактор, кількість підсистем якої дуже велика, а склад різнорідний. Система може бути і великою, і складною. Складні системи поєднують більше широку групу систем, ніж великі системи, тобто останні є підкласом складних систем.

Важливим в процесі аналізу та синтезу великих і складних систем є поняття <u>декомпозиції</u> та <u>агрегування</u>. *Декомпозиція* означає спосіб дослідження систем, який приводить до спрощеного опису. Буквально, декомпозиція є роз'єднанням системи на окремі частини з їх послідовним самостійним розглядом. Стосовно великих та складних систем декомпозиція є найбільш ефективним інструментом для їх дослідження.

Агрегування систем є поняттям протилежним декомпозиції. В процесі аналізу і особливо синтезу виникає необхідність поєднання елементів системи з метою розгляду системи з більш загальних позицій.

Стан та перетворення системи.

Основним в процесі опису поведінки системи є поняття <u>**стану системи**</u> – це сукупність суттєвих властивостей, які має система у кожний момент часу, який розглядається, тобто стан системи характеризується множиною значень величин, які визначають її поведінку. Цю множину можна розглядати як координати точки у n - вимірному просторі (гіперпросторі):

$$Z = \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}, \tag{1.1}$$

Кожному стану системи відповідає визначена точка $Z_1, Z_2, ..., Z_n$; процесу функціонування системи відповідає траєкторія її поведінки, яка описується вектор - функцією:

$$Z(t)^T = (Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t)). \tag{1.2}$$

Множину переходів системи із стану в стан ($Z_1 \to Z_2, Z_4 \to Z_3$ і т.д.) називають перетвореннями системи. Перетворенню можна надати математичне подання за допомогою ясного, наочного і змістовного методу, запропонованого англійським кібернетиком У. Росс Ембі. Якщо деяка множина атомів системи містить стани Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 і на цю множину діє оператор P, то поведінку системи можна описати, наприклад, так:

$$Z(t_1) = \begin{pmatrix} Z_1(t_1) \\ Z_2(t_1) \\ Z_3(t_1) \\ Z_4(t_1) \end{pmatrix} \stackrel{P}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} Z_2(t_2) \\ Z_3(t_2) \\ Z_1(t_2) \\ Z_4(t_2) \end{pmatrix} = Z(t_2) \tag{1.3}$$

Наприклад, оператор P - енергія сонячних променів – діє на зерно і стимулює його зростання та перетворення у рослину тощо:

зерно (насіння) → рослина → фаза цвітіння → фаза плодоношення.

Зміна станів системи (поведінка) виникає під впливом різних факторів-процесів усередині системи та багатьох зовнішніх факторів (зовнішнього середовища).

Формалізація загальної схеми процесу функціонування системи основується на таких положеннях: система функціонує у часі, взаємодіючи із зовнішнім середовищем, і в кожний момент часу може знаходитись в одному з можливих станів; до входу системи можуть надходити вхідні впливи; система здібна видавати вихідні сигнали; стан системи у даний момент часу визначається попередніми станами та вхідними впливами, які надійшли у даний момент часу або раніше; вихідний сигнал у даний момент часу визначається станом системи та вхідними впливами, які відносять до даного або попереднього моментам часу.

Функціонування системи як одного цілого забезпечується зв’язками між її компонентами.

Узгоджена взаємодія всіх компонентів системи в процесі її функціонування забезпечується управлінням системою.

Класифікація систем.

Класифікація систем, як об’єктів будь-якої природи подана у *табл. 1.1.* Ми пропонуємо вісім рівнів класифікації, кожний з яких має по два класи. Це спроба узагальнити підходи різних літературних джерел [ ].

Всі системи (загальний рівень) можна поділити на матеріальні (фізичні, елтегрічні) та абстрактні (концептуальні). Матеріальні складаються із реально існуючих (природничих або штучних) об’єктів: сонячна система, Земля, людина, комп’ютер і т.д. Абстрактні – із об’єктів, які є продукт людського мислення: ідеї, поняття, категорії, гіпотези, теорії, методології, плани і т.п.

На другому рівні (рівень походження) розташовані природні та штучні класи систем. Системи, які виникають в природних процесах, називають *природними*: Галактика, сонячна система, клімат, гори, ліса, річки і т.п. Якщо людина змінила систему шляхом перетворення її складових, властивостей, зв’язків, то вона називається *штучною*: поле для вирощування сільгоспкультур, комп’ютер, місто Житомир і т.п.

За рівнем визначеності системи розділяють на стохастичні та детерміновані. Якщо складові частки системи взаємодіють точно передбаченим чином, систему називають *детермінованою*. При її дослідженні не виникає ніякої невизначеності (ентропія дорівнює нулю). Будь-який наступний стан завжди можна передбачити, якщо відомий попередній стан і програма переходу в інші стани. *Стохастичні* (імовірнісні, випадкові) системи – це складні системи, протилежні детермінованим. Для них точне передбачення стану неможливе, тобто вони завжди залишаються невизначеними з точки зору поведінки. Їх поведінку описують за допомогою методів теорії ймовірності та математичної статистики.

Таблиця 1.1

Рівень класифікації	**1 клас системи**	**2 клас системи**
1	2	3
I загальний рівень	матеріальні	абстрактні
II рівень походження	природні	штучні
III рівень визначеності	стохастичні	детерміновані
IV рівень подібності	ізоморфні	неізоморфні
V рівень значимості елементів	централізовані	децентралізовані
VI рівень зовнішніх зв'язків	відкриті (незамкнені)	закриті (замкнені)
VII рівень пристосування	адаптивні	неадаптивні
VIII рівень часу	постійні	часові

Рівень подібності (аналогії процесів у системах) виділяє системи з характерним однаковим набором вхідних та вихідних величин і однаковою реакцією на зовнішні впливи – ізоморфні системи.

Системи можна розділити також за рівнем значимості її елементів на централізовані та децентралізовані. *Централізовані* системи складаються з нерівнозначних елементів, тобто є домінуючий, визначаючий елемент і підпорядковані елементи. Наприклад: атом, де електрони обертаються навколо ядра; сонячна система; аудиторія, де центральним елементом є викладач і т.п. *Децентралізовані* системи складаються з елементів приблизно однакової значимості (комп'ютерний клас, система електростанцій тощо).

Системи існують у зовнішньому середовищі і обмінюються з ним інформацією, енергією та речовиною. У зв'язку з цим системи поділяють на відкриті (для інформації, для енергії та речовини) та закриті, якщо обмін із зовнішнім середовищем назначений і їм можна знехтувати.

На вплив зовнішнього середовища системи реагують по-різному: деякі пристосовуються, інші залишаються пасивними. В залежності з відношенням до зовнішніх впливів виділяють адаптивні системи, які здібні пристосовуватись до зовнішніх змін, та неадаптивні системи.

Управління в системах.

З точки зору кібернетики, **управління** - переробка (обробка) інформації з метою прийняття рішення. Інакше, управління – це цільовий вплив на об'єкт, вибраний з множини можливих впливів на основі інформації, який поліпшує функціонування або розвиток об'єкта.

В управлінні виділяють три основних стани: збір та обробка інформації; приймання рішення; реалізація впливу управління. Ці стани циклічно повторюються в управлінні.

Таким чином, **управління** є процесом перетворення інформації в дію – або процес прийняття рішення та його реалізацію.

В залежності від ступеню інформованості про середовище та параметри об'єкта, який управляється, рішення поділяють на три групи:

• рішення, які приймаються в умовах визначеності, коли всі фактори середовища та об'єкта детерміновані;

• рішення, які приймаються в умовах ризику, коли фактори середовища та об'єкта задані імовірними характеристиками;

• рішення, які приймаються в умовах невизначеності, коли є невідомими характеристики факторів, що враховуються.

Взагалі, система управління складається з двох основних елементів: пристрою управління (ПУ) та об'єкта управління (ОУ) (рис. 2).

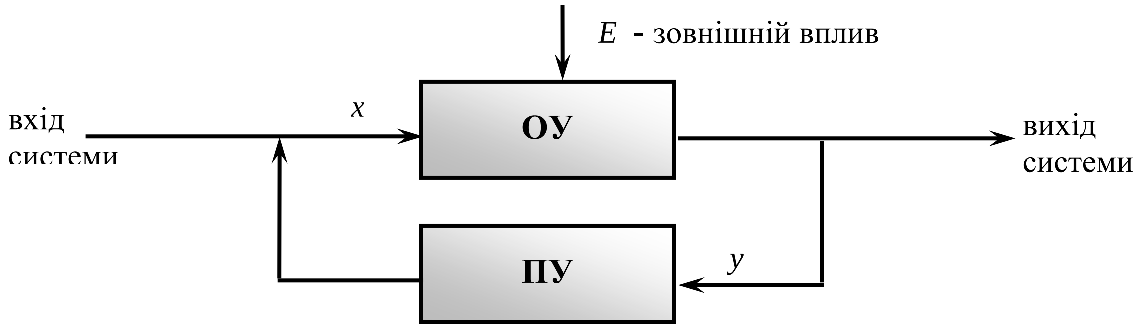


Рис. 2

Розглянемо основні типи управління, закон та принципи кібернетики.

Стабілізація – підтримка вихідних величин ОУ близькими до заданих значень $y(t) \approx y_0$, тобто стабілізація, як тип управління, є активним захистом від збурення системи.

Слідкування – слідуючи система управління – призначено для зміни стану ОУ за законом, який задається зовнішнім впливом (невідомим станом), тобто процес управління визначається зовнішнім сигналом.

Програмне управління – поведінка системи визначається заданим законом (програмою) $y(t) = y_0(t)$.

Адаптивне управління (пристосування) – управління з неповною апріорною інформацією про процес, який управляється, що змінюється при накопиченні інформації про нього про нього і використовується для поліпшення роботи системи.

Оптимальне управління – досягнення найкращого ефекту управління, екстремального значення функції ($y(t) \to \max$ або $y(t) \to \min$). Тобто необхідна міра для характеристики ефективності управління – критерій ефективності. Тоді під оптимальним управлінням розуміють сукупність керуючих дій, яка забезпечує найкраще (екстремальне) значення критерію ефективності.

Закон необхідного різноманіття (за У.Р. Ешбі.)

Різноманіття наслідків (станів, видів, результатів) керованої підсистеми, якщо воно мінімально, може бути зменшене лише за рахунок відповідного збільшення різноманіття станів (виходів) управляючої підсистеми (рис. 3).

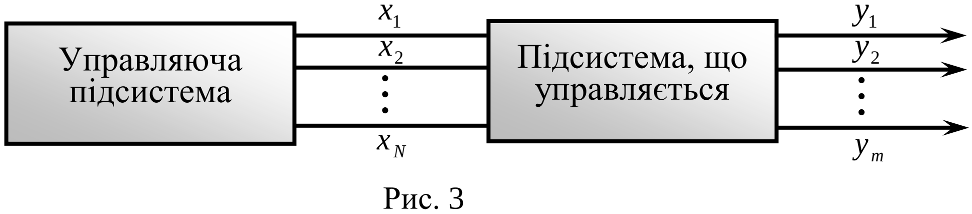


Рис. 3

N – кількість (різноманіття) керуючих станів (впливів);

M – кількість станів (різноманіття) керованої підсистеми.

$$m = m_{+} \oplus m_{-},$$

де m_{+} - потрібні (позитивні) стани;

m_{-} - негативні стани.

$$\uparrow N \Rightarrow \downarrow m = m_{+} \oplus \downarrow m_{-}$$ - збільшення.

$\uparrow N$ може обмежувати появу $m_{-} \downarrow$.

Таким чином, тільки різноманіття однієї підсистеми може зменшити різноманіття, яке утворюється іншою. „Тільки різноманіття може знищити різноманіття” (У.Р. Ешбі.).

Із закону випливають практичні висновки, які необхідно враховувати в управлінні виробництвом:

- неможливо створити просту систему управління для ефективного управління складною системою. Прості системи не в змозі справитися з різноманіттям зовнішнього середовища, оскільки не володіють достатнім різноманіттям. Тому, управляюча система повинна бути не менш різноманітною, тобто не менш складною за систему, яка управляється.
- часто цей закон формулюють, як закон необхідного та достатнього різноманіття (надлишок в окремих випадках гірше спрощення);
- інтегрування різноманіття керуючих впливів (в керуючій підсистемі) з віддаленням ступенів управління від керуємої підсистеми (від безпосередніх виконувачів). Наприклад плани стають менш диференційованими а різноманіття в розробці їх варіантів може збільшуватись.

Принцип вибору рішень на основі відбору та перетворення інформації.

Суть принципу базується на постулаті У.Р.Ешбі: будь – яка система виконує потрібний відбір (на ступінь вище випадкового), використовуючи отриману інформацію. Вибір найкращого варіанту, оптимального рішення тощо.

Принцип обов’язковості зворотного зв’язку (рис. 4**).**

Рис. 4

Принцип зовнішнього доповнення (англійський кібернетик Ст. Бір).

В будь – якій системі необхідно враховувати можливість впливу зовнішніх систем та факторів тобто, в ланцюгах управління включити деякий додатковий елемент („чорний ящик”) для **урахування** зовнішнього впливу (на основі законів розподілення імовірностей, за допомогою випадкових чисел або навіть інтуїтивно).

Загальна схема системи подана на рис. 5.

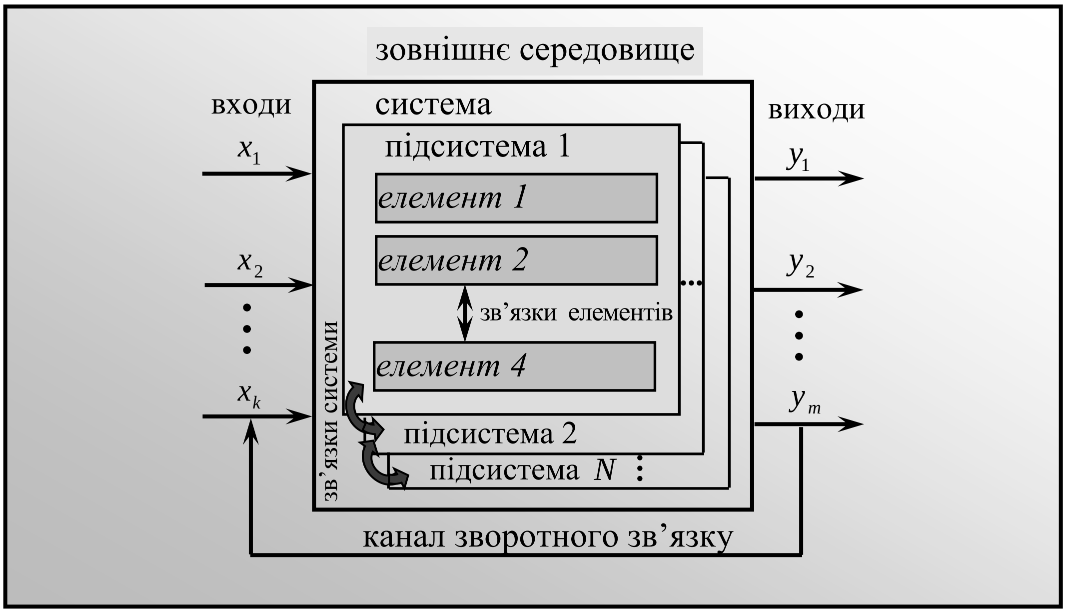


Рис. 5

1.3. Етапи і компоненти системного аналізу.

Два підходи до системного аналізу, які історично виникли послідовно, що визначились проблематикою та відповідним інструментарієм вирішування проблем:

- *перший підхід*, що базується на застосуванні формальних, математичних прийомів і методів, зокрема теорії оптимізації і дослідження операцій;
- *другий підхід* «неформалізований», в основі якого лежить логіка системного аналізу.

Системний аналіз характеризується наявністю певних типових стандартних компонентів, які практично присутні в аналізі будь-якої проблеми з системних позицій. Такими компонентами є:

- ***<u>ціль</u>;***
- ***<u>шляхи</u> досягнення цілі;***
- ***необхідні <u>ресурси</u>.***

Сполучення даних компонентів у визначеній послідовності, яка залежить від структури проблеми та причинних зв'язків, приводить до упорядкованого розв'язування проблеми. Розглядання викликаних проблем в логічній послідовності дає можливість ефективно поєднувати формалізовані та евристичні методи обґрунтування та прийняття рішень тільки вищої якості.

Системний аналіз веде до виконання певної послідовності взаємопов'язаних дій, виступаючи завжди як процес, що складається з певних основних етапів:

I.*Етап формулювання проблеми* потребує точного формулювання, виявлення логічної структури проблеми, її зв'язків з іншими проблемами, вивчення питання її принципового розв'язку. Формулювання проблеми здійснюється на вербальному рівні;

II.*Етап визначення цілей* здійснюється на основі формулювання проблеми. Він має два аспекти: *виявлення цілей* (включаючи пріоритети) та *формулювання цілей* у вигляді, зручному для ефективного управління з метою їх досягнення;

III.*Етап визначення наявних ресурсів* для досягнення цілей;

IV.*Етап генерації альтернатив та сценаріїв* (шляхів, способів, методик) досягнення поставлених цілей;

V.*Етап вибору оптимальної альтернативи* (способу, методики, алгоритму) досягнення головної цілі (загальної мети) на основі визначених критеріїв з подальшою побудовою моделі.

Для розв'язання задач системного аналізу використовують такі методи дослідження систем, як мікропідхід та макропідхід.

Метод мікропідходу зв'язаний з детальним описуванням кожного компонента системи, дослідженням їх структури, функцій, взаємозв'язків, структури системи вцілому.

Практична реалізація найважливішого етапу мікро підходу – виявлення елементів системи та взаємозв'язків між ними – пов'язана з необхідністю подолання суперечності між бажанням більш детального вивчення кожного з компонентів системи та реальною можливістю дослідити при цьому структуру системи в цілому і принципи її функціонування. При надмірній деталізації послаблюються системні зв'язки і погіршується зв'язок з головною ціллю системи.

Метод макропідходу полягає в ігноруванні детальної структури системи та вивченні тільки загальної поведінки системи як єдиного цілого. Макропідхід базується на методі кібернетики під назвою «*чорний ящик*», який був запропонований англійськім кібернетиком У.Р.Ешбі. Суть метода полягає в тому, що поведінка системи (її реакція на зовнішні дії) вивчається без знання внутрішньої структури системи. В міру поглиблення знань про поведінку системи можна робити висновки і про її будову.

Таким чином, метою макропідходу є побудова моделі системи через дослідження її взаємодії із зовнішнім середовищем, моделі типу «вхід – вихід», або моделі «чорного ящика», рис. 6.

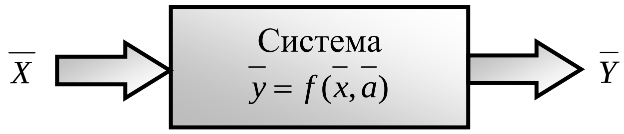


Рис. 6

Тут вектори $\overline{X}$ та $\overline{Y}$ – вхідні та вихідні фактори (спостереження), вектор а характеризує невідомі параметри системи, для визначення яких використовують методи регресійного аналізу.

2. Технологія моделювання.

2.1. Моделювання як метод описування систем

Основою всього системного аналізу є моделювання.

Моделювання – це науковий метод дослідження реальної системи (об'єкта, процесу) шляхом заміни його системою – моделлю (яка відображає суттєві властивості реальної системи) та визначення характеристик моделі з метою отримання нових наукових знань про об'єкт, що моделюється.

Іншими словами, моделювання – це процес дослідження реальної системи, який складається з певних етапів (рис. 7):

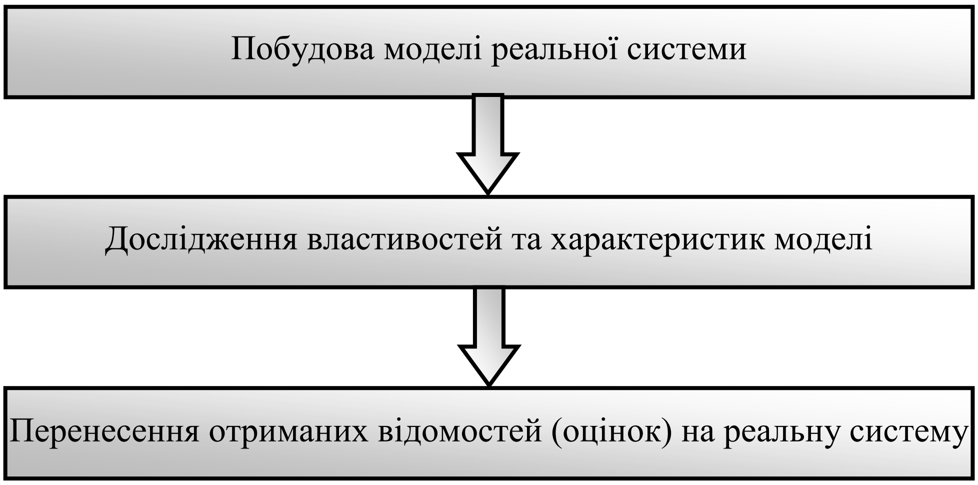


Рис. 7

Слово "модель" походить від латинського *modulus*, що позначає міру, такт, ритм, величину, а також зв'язане зі словом modus – копія, зразок.

Корінь цього терміну відноситься до праць з будівництва відомого римського інженера, архітектора і письменника Марка Вітрувія Полліона (І ст. до н.е.)

Моделі являють собою певний умовний образ об'єкта дослідження. Модель повинна відображати ті характеристики об'єкта досліджень (склад, зв'язки, властивості), які суттєві для мети дослідження. Для різних цілей дослідження будуються різні моделі досліджуваного об'єкта. Тому мета досліджень визначає ті властивості оригіналу, які мають бути відображені в моделі. Питання про визначення адекватності моделі оригіналу правомірно вирішувати лише відносно поставленої мети досліджень.

Таким чином, **модель – це спрощена подібність системи, яка відображає її суттєві властивості і співвідношення.**

Перевагами дослідження моделі перед безпосереднім дослідженням реальної системи є:

- модель обмежує сторонні впливи та надлишкову деталізацію, тобто представляє об'єкт, явище, процес в чистому вигляді, абстраговано, що надзвичайно важливо для отримання об'єктивних наукових висновків;
- модель дозволяє проводити дослід чи реальний експеримент там, де він не можливий з реальною системою;
- з моделлю можна багаторазово проводити експерименти або досліди до отримання задовільного результату, пізнання істинної суті явища.

В процесі моделювання складну систему (на етапі описування) поділяють на рівні абстрагування – *страти*, які характеризують технологічні, інформаційні, економічні або інші аспекти функціонування системи. На кожній страті в ієрархії структур є свій власний набір змінних, які дозволяють значною мірою обмежити лише дослідженням одного аспекту діяльності системи, однієї страти. Дану процедуру називають стратифікацією системи.

Наприклад, будь-яке підприємство можливо моделювати мінімум на трьох стратах, рис. 8:

- на виробничому рівні (фізичні процеси обробки та перетворення енергії);
- на рівні управління та обробки інформації (інформаційна система підприємства);
- на економічному рівні, з точки зору ефективності підприємства.

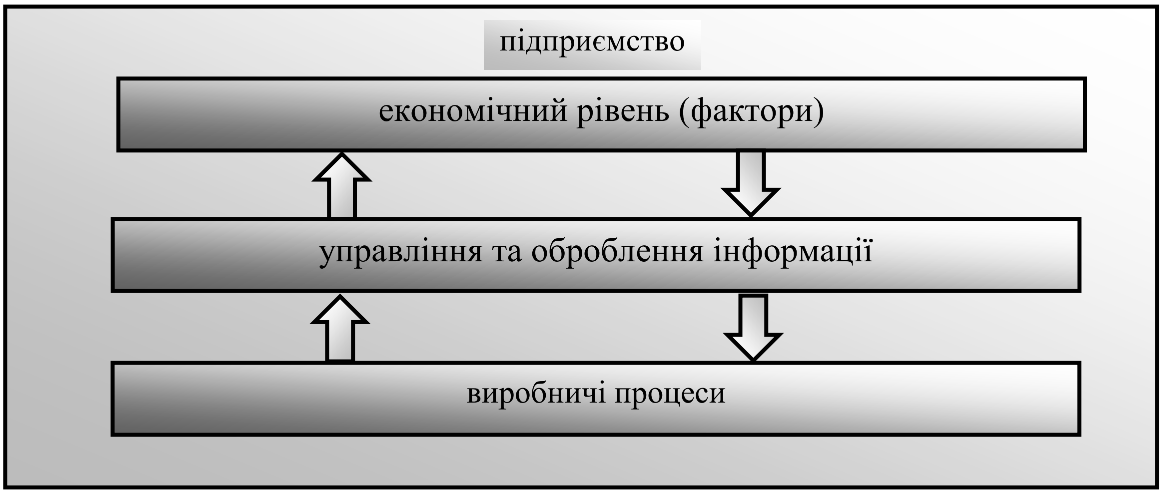


Рис. 8

Для кожного з цих трьох аспектів системи існує своя мова описування, свої моделі.

Головними рівнями дослідження систем є макроскопічний та мікроскопічний, які базуються на методах мікро– та макропідходу відповідно.

Найпростішою моделлю системи на макрорівні є модель чорної скриньки, (як метод кібернетики розглянутий раніше).

За допомогою тільки цієї моделі неможливо вивчити внутрішню структуру системи. Для більш детального опису систем використовують *моделі складу та моделі структури*. Модель складу системи відображає, з яких елементів та підсистем складається система, рис. 9, а модель стуктури застосовується для відображення відношень між елементами та зв'язків між ними, рис. 10.

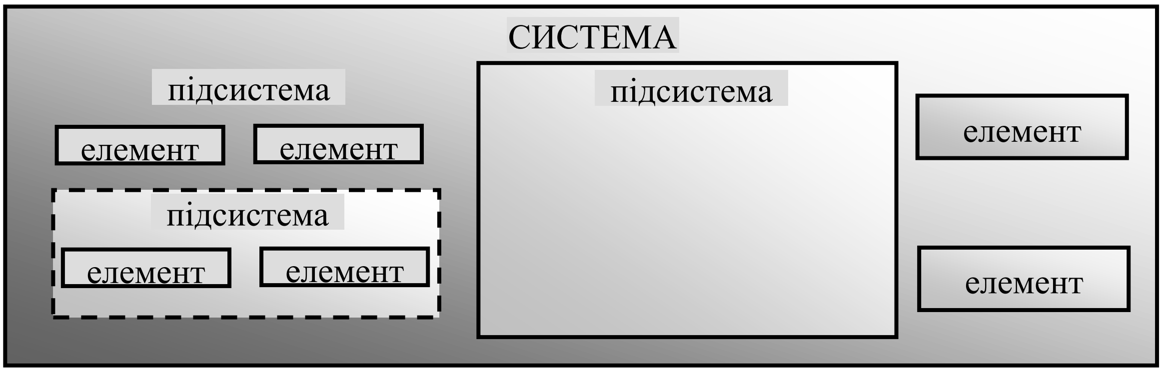


Рис. 9

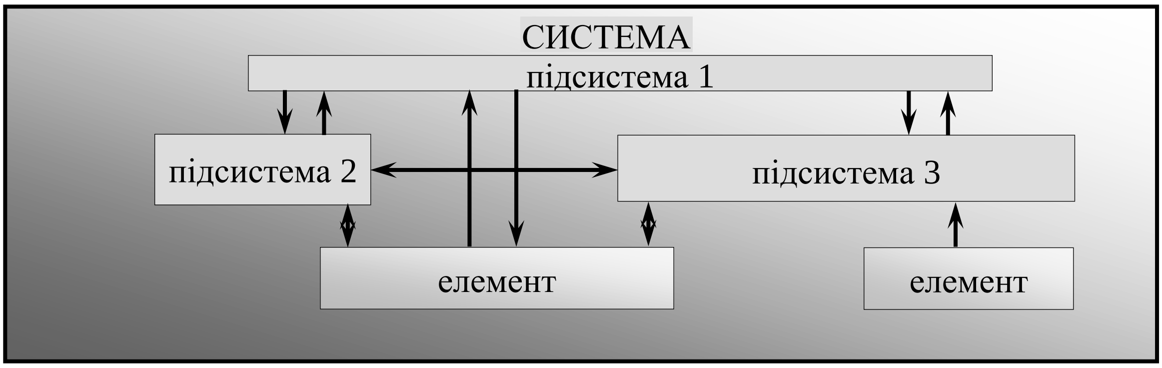


Рис. 10

2.2. Способи моделювання та види моделей

Для глибокого осмислення суті моделювання як метода наукового пізнання та його правильного використання необхідно знати способи моделювання та види моделей. Спосіб *повного* моделювання забезпечує подібність руху матерії в основних формах її існування – в часі та просторі, тобто повні моделі адекватні об'єкту в часі та просторі. *Неповне* (часткове, локальне або функціональне) моделювання забезпечує подібність протікання всіх основних процесів, які характеризують досліджуване явище, лише частково – тільки в часі, або тільки в просторі. При функціональному моделюванні забезпечується подібність між деякими функціями або узагальненими характеристиками, які в моделі і в оригіналі мають певну відповідність.

При *наближеному* моделюванні беруться до уваги тільки найважливіші аспекти (фактори) системи, які суттєво впливають на протікання основних процесів. Інші фактори моделюються приблизно або зовсім не беруться до уваги.

Моделі, які реалізуються трьома вище зазначеними способами, класифікуються за двома ознаками. За характером досліджуваних процесів в системі виділяються такі види моделей:

- *статичні* – застосовуються для описування стану системи у фіксований момент часу;
- *динамічні* – для дослідження поведінки системи у часі;
- *детерміновані* – відображають процеси з визначеними характеристиками (параметрами), тобто для яких відсутні випадкові впливи;
- *стохастичні* – враховують випадкові процеси. Моделі мають невизначені (повністю або частково) параметри;
- *дискретні* та *неперервні* (відносно деяких факторів, наприклад часу).

За формою подання об'єкта моделі поділяють на *матеріальні* (реально – практичні) та *абстрактні* (ідеально – теоретичні). До матеріальних моделей відносять *натурні, фізичні* та *машинні* (реалізовані алгоритмічні моделі, комп'ютерні – машинна імітація, кібернетичні пристрої). Клас абстрактних моделей містить *наочні*, *символьні* та *математичні* (аналітичні, алгоритмічні) моделі.

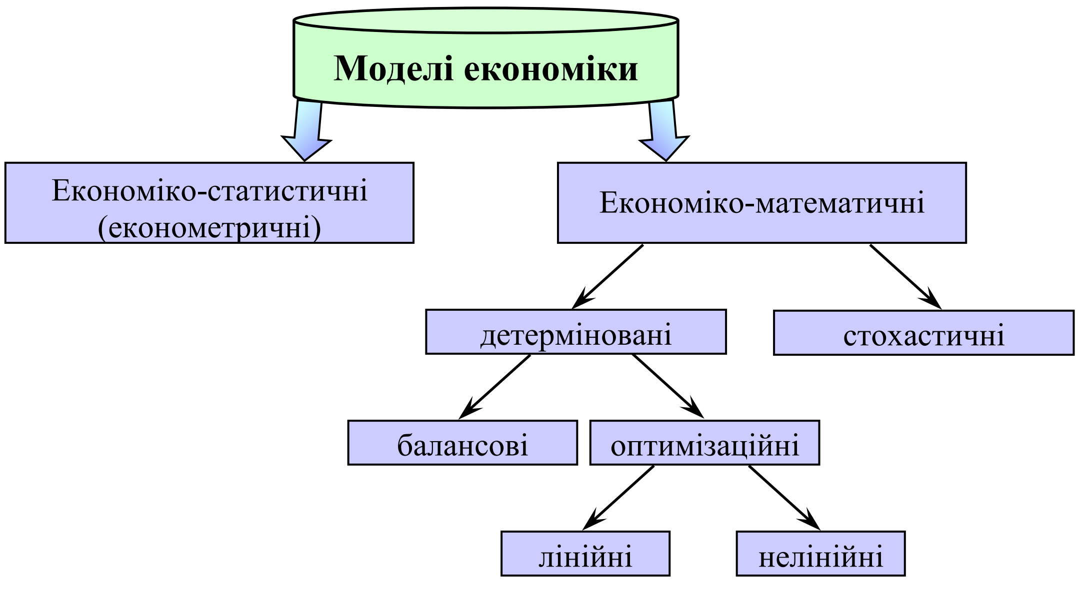


Рис. 11

<u>Принципи та основні етапи математичного моделювання.</u>

Математичне моделювання – це метод дослідження процесів, об’єктів, систем, який базується на побудові та дослідженні математичних моделей.

Математична модель – система математичних та логіко – математичних співвідношень, які описують реальну систему (об’єкт, процес, явище) і призначеня для визначення їх кількісних та якісних характеристик.

Математичні моделі відрізняються великим різноманіттям. Всі математичні моделі можна поділити на аналітичні та алгоритмічні.

Аналітична модель представляє систему математичних співвідношень у вигляді аналітичних (формульних) залежностей, рівнянь та нерівностей. Якщо аналітичний опис об’єкта виконати неможливо або він непридатний для досліджень, то створюють алгоритмічну модель і, як правило, з наступною реалізацією у вигляді програми для ЕОМ. В результаті отримують машинну модель, яка відображає структуру і поведінку системи, її компонентів та взаємодію між ними. Виконання програми дозволяє імітувати динамімні процеси в системі, що моделюється. Кожний акт відтворення процесу функціонування системи за допомогою моделюючої програми з наступною реєстрацією отриманих даних називають *імітаційним експериментом*. На відміну від натурних експериментів, можлива така організація імітаційних експериментів, яка забезпечує суттєве використання інформації про внутрішню будову машинної моделі і враховує особливості її функціонування. Сьогодні машинне моделювання (машинна імітація) – це визнаний науковий метод вивчення, дослідження складних процесів та систем.

Головною перевагою математичних моделей є висока ступінь їх універсальності, можливість дослідження будь-яких процесів та пошука рішень дослідних задач. Математичну модель складної системи можливо побудувати:

- до того, як буде створена (синтезована) складна система з метою оцінювання її майбутніх характеристик та оптимізації системи;
- на етапі побудови системи для дослідження можливих варіантів;
- після побудови та впровадження системи з метою оцінювання ефективності її використання за призначенням та визначення напрямків подальшого удосконалення.

В процесі побудови математичної моделі необхідно враховувати такі принципи моделювання:

а) *принцип адекватності моделі і оригіналу*. Він передбачає відповідність моделі поставленій меті дослідження;

б) *принцип абстрагування від другорядних деталей та факторів*. Модель має описувати лише найсуттєвіші властивості оригіналу відносно поставленої мети та має бути простішою за нього. Тому при побудові моделі намагаються досягти її спрощення, зберігаючи при цьому суттєві властивості досліджуваної системи;

в) *принцип досягнення компромісу* між бажаною точністю результатів моделювання та складністю моделі.

Побудову математичної моделі можна здійснювати двома шляхами:

- *абстрактний шлях* – спочатку будується гіпотетична модель, яка потім наповнюється конкретним змістом, тобто будується оригінальна модель;
- *шлях аналогії* – використовуються типові моделі для опису системи або на базі типових моделей розробляють нову модель.

Етапи моделювання представлені на рис. 12.

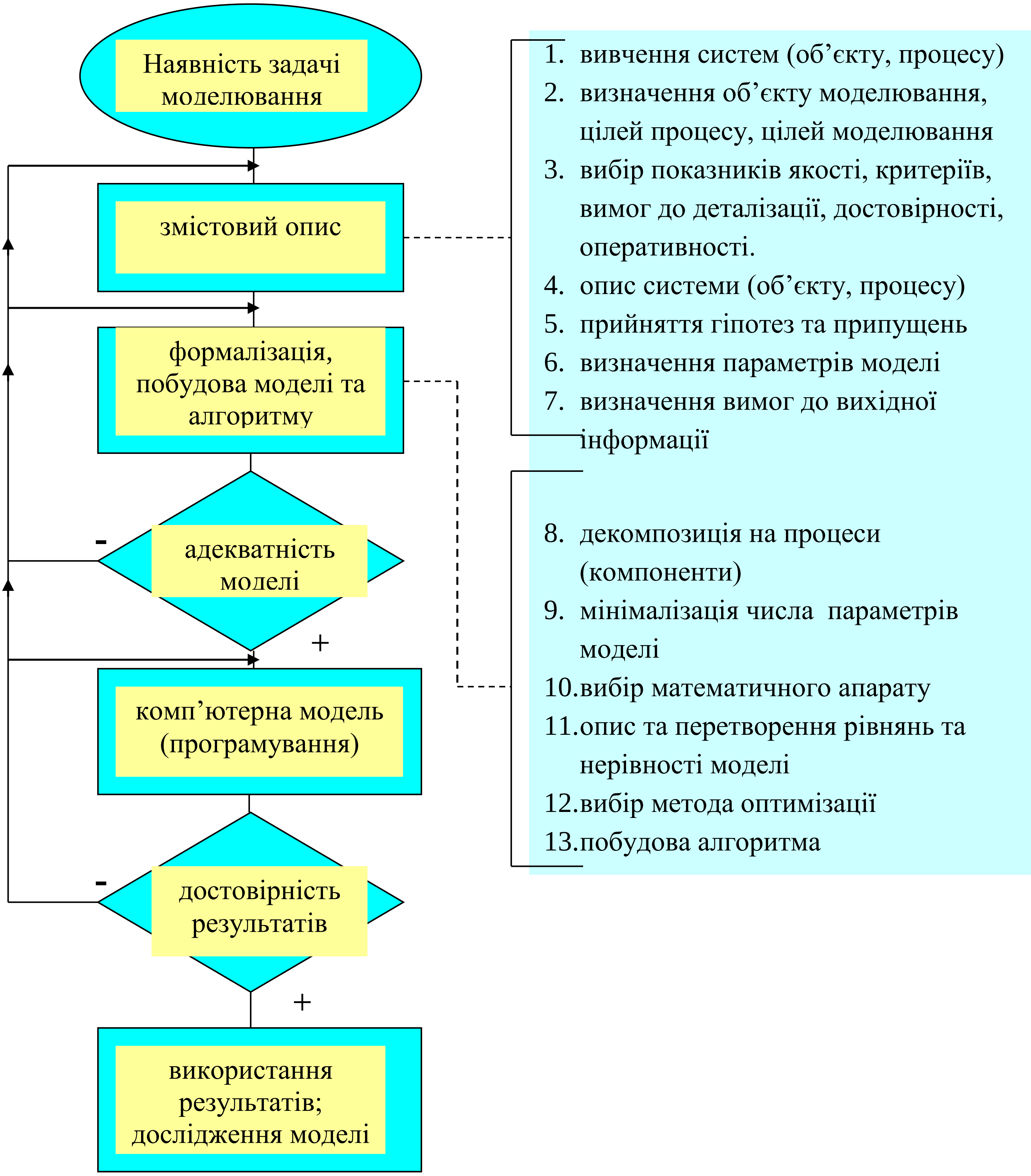


Рис. 12

Розглянуті етапи рідко виконуються в заданій послідовності, тобто процес моделювання є, як правило, ітеративним. На будь якому з етапів можливе повернення до попередніх етапів, оскільки модель може виявитись надто складною або суперечливою, виявитись помилкові припущення чи бракуватиме необхідної інформації, буде проводитись зміна цілей дослідження, проявиться неадекватність моделі або її недостатня точність.

Сьогодні майже у всіх областях діяльності людини метод моделювання використовується як обов'язковий елемент процесів обґрунтування розробки, випробовувань та впровадження в експлуатацію складних систем, а також для вивчення та дослідження систем різної природи.

Методи перевірки адекватності моделі

- Порівняння результатів моделювання з реальними результатами (тестування на реальних даних), або з результатами, отриманими на апробованих моделях.
- Перевірка моделі на наборах параметрів, для яких результат моделювання відомий раніше.
- Верифікація моделі – аналіз степені відображення в моделі основних елементів та процесів, коректності зроблених припущень, прийнятих гіпотез, використаних апроксимацій.
- Перевірка достовірності початкових даних, розмірності та масштабування параметрів в рівняннях моделі.
- Перевірка коректності моделі при виродженні умов моделювання.
- Аналіз наявності в моделі кількісного відображення діалектичних категорій і законів реального процесу, що моделюється.
- Метод зворотного переходу – повернення від кінцевих функціональних співвідношень моделі до прийнятих гіпотез, особливостей процесу та розгляданню реального процесу. Якщо такий підхід можливий, то він заводить адекватність аналітичної моделі реальному процесу з точністю прийнятих гіпотез (знань про процес, об'єкт, систему).

3. Задача математичного програмування (МП)

3.1 Формальна постановка задачі

МП – область математики, що займається розробкою теорії та чисельних методів розв'язку багатомірних екстремальних задач з обмеженнями, тобто задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область змінювання цих змінних. Або, **МП** – це розділ прикладної математики, який вивчає задачі умовної оптимізації.

Задача оптимізації – знайти найкращий варіант рішення в рамках визначеного критерію.

Оптимальність за Парето: Допустимий стан системи $\underline{x}^*$ є оптимальним за Парето, якщо не існує іншого допустимого стану, яке було б для всіх учасників не гірше і хоча б для одного – краще, ніж $\underline{x}^*$:

$$f_i(\underline{x}) \geq f_i(\underline{x}^*), i=1,...m, \quad \underline{x} \in x - \sum \text{всіх допустимихстанів} \Rightarrow f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x}^*), \ i=1,...,m,$$

де $\underline{x}$ - стан системи;

$f(\underline{x})$ - цільова функція для кожного учасника.

Формалізація задачі МП (оптимізації)

При формалізації задачі МП основними виступають такі поняття:

• <u>змінні</u> («інструментальні» змінні) ($\underline{x}$) - інструменти (тарифи, процентні ставки, обчислення тощо) для досягнення визначених цілей (ефективність плану, …): $\underline{x} = (x_1, x_2,..., x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$;

• <u>допустима множина</u> ($\underline{x}^*$) - вектор інструментальних змінних, що задовольняє обмеженням задачі (умовам функціонування системи:

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \left((\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_m)^T\right).$$

• <u>цільова функція</u> $\left(F(\underline{x}) = F(x_1, x_2,..., x_n)\right)$ - математичний вираз цілі (мети) даної задачі (як правило, у вигляді функціонала).

Задача МП формулюється таким чином:

при заданих умовах $\underline{\alpha}$ знайти таке рішення $\underline{x}$, яке приводить показник ефективності (цільову функцію) F до екстремального значення ($\max$ або $\min$:

$$F \Rightarrow F_{extr=\left\{\begin{smallmatrix}\max\\ \min\end{smallmatrix}\right\}}(\alpha, x). \qquad (1)$$

3.2. Види та структурні моделі загальної задачі МП

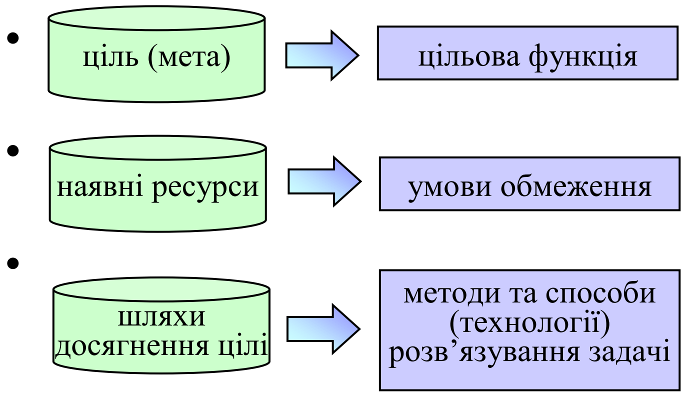
Виділяють три основних види загальної задачі МП:

• класична задача МП;

• задача нелінійного програмування (НП);

• задача лінійного програмування (ЛП).

Згадуючи метод системного підходу (методологію системного аналізу), до вирішення проблеми або розв'язування задачі можна застосувати такі компоненти:



<u>**Структурні моделі основних задач МП**</u>

Класична задача МП. <u>*Мета:*</u> максималізація цільової функції при заданих обмеженнях

$$extrF \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \min\limits_{\underline{x}} \\ \max\limits_{\underline{x}} \end{matrix}\right\} \text{ при умові, що } \underline{g}(\underline{x}) = \underline{b}, \qquad (2)$$

де $\underline{g}(\underline{x})$ - функції обмежень (відомі неперервно диференційовані функції);

$\underline{b}$ - константи обмежень.

В розгорнутому вигляді обмеження є рівностями:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2,..., x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2,..., x_n) = b_2 \\ \quad\vdots \\ g_m(x_1, x_2,..., x_n) = b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Задача нелінійного програмування (НП) передбачає систему обмежень двох типів:

умов-обмежень у вигляді нерівностей

$$\underline{g}(\underline{x})\begin{pmatrix} \le \\ \ge \end{pmatrix}\underline{b}; \tag{4}$$

граничних умов (невід'ємності)

$$\underline{x} \ge \underline{0},; \tag{5}$$

тобто $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,..., x_n \ge 0.$

Таким чином, задача НП записується так:

$$extrF(\underline{x}) = \begin{Bmatrix} \max\limits_{\underline{x}} \\ \min\limits_{\underline{x}} \end{Bmatrix} F(\underline{x}) \text{ при умові, що } \underline{g}(\underline{x})\begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix}\underline{b}, \underline{x} \ge \underline{0}. \tag{6}$$

Задача лінійного програмування (ЛП).

Цільова функція даної задачі – лінійна:

$$F(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \underline{c}\underline{x}, \tag{7}$$

де $\underline{c}$ - заданий вектор – рядок констант

$$\underline{c} = (c_1, c_2,..., c_n). \tag{8}$$

Система обмежень двох типів:

умови – обмеження у вигляді лінійних нерівностей

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \text{-------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\} \tag{9}$$

граничні умови

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,..., x_n \ge 0.$$

У векторній формі:

$$\begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix} F(\underline{x}) = \underline{c}\underline{x} \text{ при умові, що } \underline{A}\underline{x}\begin{Bmatrix} = \\ \le \\ \ge \end{Bmatrix}\underline{b}, \underline{x} \ge \underline{0}, \tag{10}$$

де

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ \text{----------} \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В операторній формі:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} = \\ \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad (12)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}.$$

3.3. Приклад розгорнутої моделі задачі ЛП

Порядок створення економіко-математичної моделі

I. Структурна модель.

II. Числова (розширена, розгорнута) модель, тобто запевнення конкретним числовим змістом.

Розглянемо приклад: нехай підприємство виробляє два види продукції: P_1 і P_2, для яких використовують сировину (ресурси) s_1 і s_2. Вартість одиниці кожного продукту відповідно C_1 і C_2: $C_1 = 3$ од., $C_2 = 2$ од. Знайти скільки треба виробити продукції P_1 і P_2, щоб отримати max доход $(F \to \max)$ і вкластися в обмеження по сировині: для s_1 використати не більше $\le b_1 = 12$ ресурсів; для s_2 - не більше $\le b_2 = 10$ ресурсів і по забрудненню середовища: не більше $\le b_3 = 6$ доз.

Далі витрат сировини та забруднення середовища при виробництві одиниці продукту відповідно:

$$\begin{array}{lcc} & P_1 & P_2 \\ S_1 & a_{11}=6 & a_{12}=3 \\ S_2 & a_{21}=2 & a_{22}=4 \\ \textit{забруднення} & a_{31}=2 & a_{32}=0 \end{array}$$

Формалізуємо задачу у вигляді таблиці для зручності побудови математичної моделі. Припустимо, що x_1 - кількість продукту P_1; x_2 - кількість продукту P_2:

Ресурс	x_1	x_2	Обмеження b_1
s_1	6	3	≤ 12
s_2	2	4	≤ 10
Забруднення	2	0	≤ 6
F	3	2	

Структурна модель:

$$\left.\begin{array}{l} F=\sum_{j=1}^{2} c_j x_j \Rightarrow \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Розгорнута числова модель:

$$\left.\begin{array}{l} F=3x_1+2x_2 \\ 6x_1+3x_2 \le 12 \\ 2x_1+4x_2 \le 10 \\ 2x_1+0x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

3.4. Графоаналітичний метод

Метод використовують, коли задача лінійного програмування містить дві змінні: x_1 і x_2 (можна 3 змінні $\Rightarrow$ декартовий простір $\updownarrow_{x_1}^{x_3} \rightarrow_{x_2}$). Наприклад, система рівнянь (13).

Методика розв'язання задачі:

1).Побудувати декартову систему координат (x_1, x_2) – тільки І чверть в силу обмежень $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2).Будуємо область допустимих значень G відповідно нерівностям-обмеженням, які представляють собою напівплощини. На перетині всіх півплощин знаходиться область G.

3). Проводимо лінії рівня функції $F(x_1, x_2)$, які визначаються видом рівняння

$$c_1x_1 + c_2x_2 = k\,, \tag{15}$$

де $k = const$.

Рівняння (15) можна записати у вигляді:

$$x_2 = \frac{k}{c_2} - \frac{c_1}{c_2}x_1. \tag{16}$$

Із (16) видно, що кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює $\left(-\frac{c_1}{c_2}\right)$ і не залежить від k. Якщо змінювати величину k, то пряма буде рухатись паралельно собі, тобто в напрямку градієнті функції $F(x_1, x_2)$:

$$gradF(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^T = (c_1, c_2)^T = \vec{c}, \tag{17}$$

тобто в напрямку нормалі до лінії рівня.

$F_{\min}$ відповідає точці (множині точок) перетину лінії рівня з ближньою вершиною (стороною) області G (точка входу).

$F_{\max}$ відповідає точці перетину лінії рівня з дальньою вершиною (стороною) області G (точка виходу).

Значення змінних x_1 і x_2 указують перпендикуляри до осей x_1 і x_2, опущені з точки екстремуму.

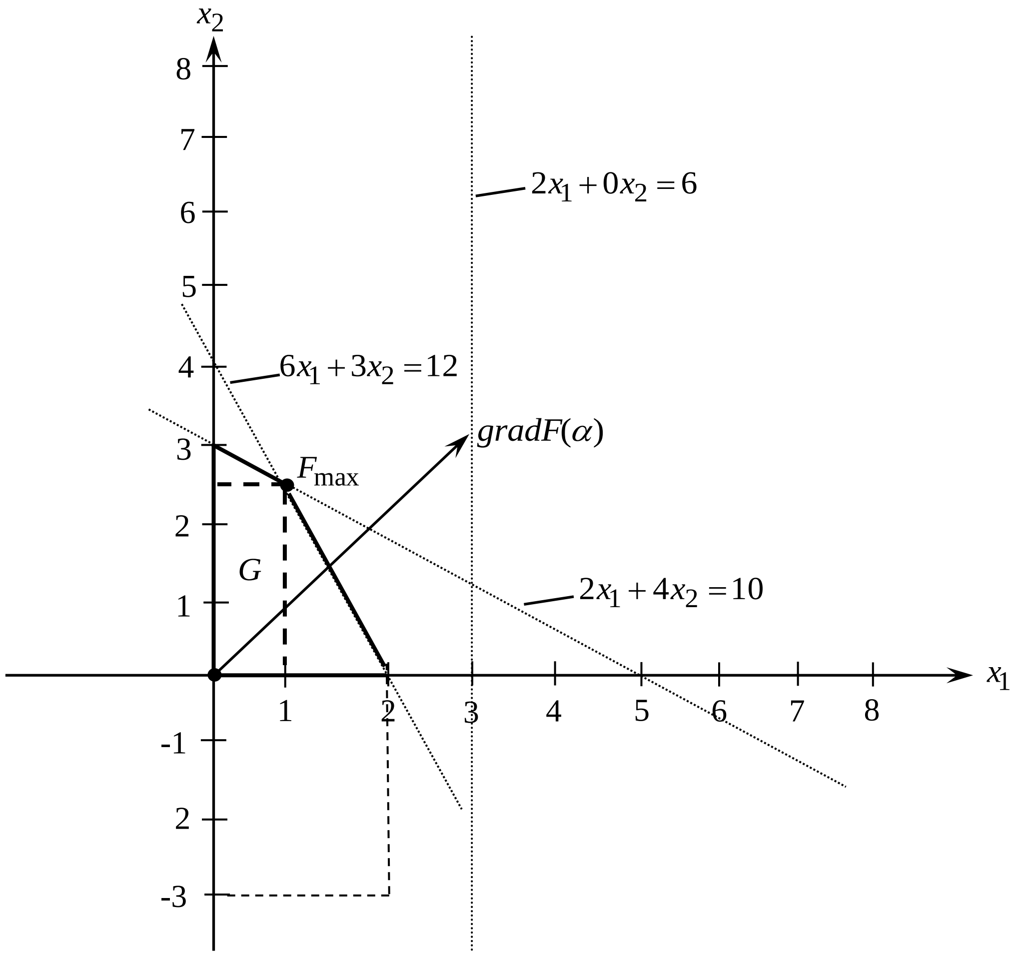
Закономірності:

1). Оптимальне рішення завжди знаходиться на границі області допустимих значень G і, як правило, у вершині багатокутника.

2). Рішення може бути не єдиним, якщо лінія рівня паралельна стороні багатокутника.

3). Задача може не мати рішення, коли в напрямку росту функції ($gradF$) допустима область не обмежена.

Розв'язок задачі – прикладу:



$$F_{\max} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Аналогічно: $F_{\max}$ на перетині ліній.

$$6x_1 + 3x_2 = 12 \text{ та } 2x_1 + 4x_2 = 10$$

$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$	

4. Сиплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування

4.1. Загальна характеристика симплекс-методу

Для розв'язування задач лінійного програмування взагалі використовують алгебраїчні методи (для $n > 3$ графічний метод використати трудно). Один з універсальних методів є симплексний метод (або метод послідовного поліпшення плану). Ідея цього методу була пропонована ще у 1939 р. академіком Конторовичем Л. В., але вперше метод був опублікований американським вченим Дж. Данцигом у 1947 р.

Розглянемо основну ідею симплекс-методу. Для цього проведемо деякі перетворення задачі лінійного програмування, виділимо основні вимоги алгоритму симплекс методу і введемо деякі спеціальні поняття і терміни.

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до стандартної форми – основної задачі лінійного програмування (ОЗЛП), де замість обмежень-нерівностей переходять до обмеження-рівностей. Такий запис умов – обмежень зручний для розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом.

Отже, кожне обмеження – нерівність виду

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \tag{1}$$

або у розгорнутому виді:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \tag{1а}$$

можна замінити рівністю, якщо ввести додаткову змінну x_{n+i}. Тоді маємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \tag{2}$$

тобто

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{3}$$

Таким чином, система обмежень приймає вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \ge 0,\ \ x_1 \ge 0,\ \ x_n \ge 0,\ \ x_{n+1} \ge 0, \end{cases} \tag{4}$$

а цільову функцію можна записати так:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0 \cdot x_{n+i} \tag{5}$$

Система рівнянь (4), (5) відповідає всім вимогам задач лінійного програмування і використовується для розв'язання симплекс-методом

Вимоги алгоритму симплекс-метода:

обмеження представляються у вигляді системи лінійних рівнянь;

вільні члени повинні бути не менше нуля: $(b_i \geq 0)$;

всі змінні повинні бути не менше нуля: $x_j \geq 0$.

Для запису алгоритму введемо поняття плану задачі та його різновидностей.

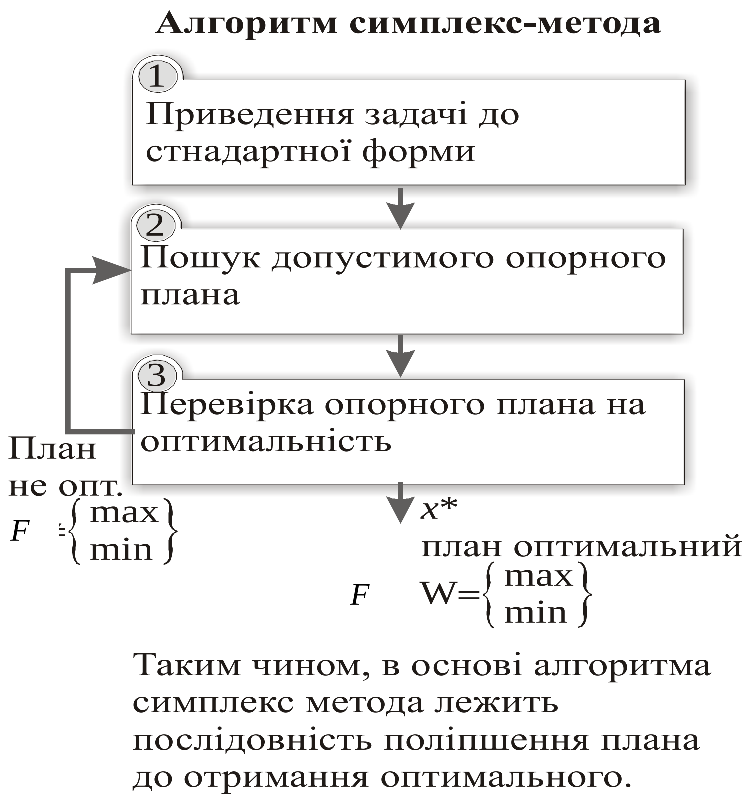
План задачі – будь-яке рішення (розв’язок) системи рівнянь $x^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\}$.

Компоненти плану – окремі значення змінних.

Допустимий план – план, всі компоненти якого не менше 0, тобто $x_j^* \geq 0$.

Опорний план – план, в якому кількість відмінних від нуля компонентів дорівнює числу рівнянь в системі основних обмежень.

Оптимальний план – допустимий план, при якому цільова функція $F \Rightarrow \begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix}$ приймає екстремальне значення.



4.2. Методика побудови симплекс-таблиці

Нехай дана система обмежень у стандартній формі: (див. (3)):

$$\left.\begin{aligned} & x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ & x_j \geq 0, \qquad x_{n+i} \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3а}$$

де x_j - небазисні (вільні)змінні (НБЗ);

x_{n+1} - базисні змінні (БЗ).

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5
\end{array}
$$
$$
* \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}
$$
вільні змінні базисні змінні

Аналогічно представимо ЦФ у вигляді: $F = 0 - \left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - 0 \cdot x_{n+i} \right).$

У розгорнутому вигляді для $n = 2$ та $i = 1, 2, 3$ задача на $\max$:

$$
\left.\begin{array}{l}
x_3 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \\
x_4 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \\
x_5 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \\
F_{\max} = 0 - (-c_1x_1 - c_2x_2) \\
\qquad x_j \geq 0
\end{array}\right\} \tag{6}
$$

Відповідно системі (6) будуємо симплекс-таблицю:

БЗ	ЗБЗ (значення БЗ)	НБЗ		СВ (симплексне відношення)
		x_1	x_2	
x_3	b_1	a_{11}	a_{12}	$\frac{b_1}{aj}$
x_4	b_2	a_{21}	a_{22}	$\frac{b_2}{aj}$
x_5	b_3	a_{31}	a_{32}	$\frac{b_3}{aj}$
F	0	$-c_1$	$-c_2$	

Приклад.

Представимо модель задачі у вигляді системи (6)

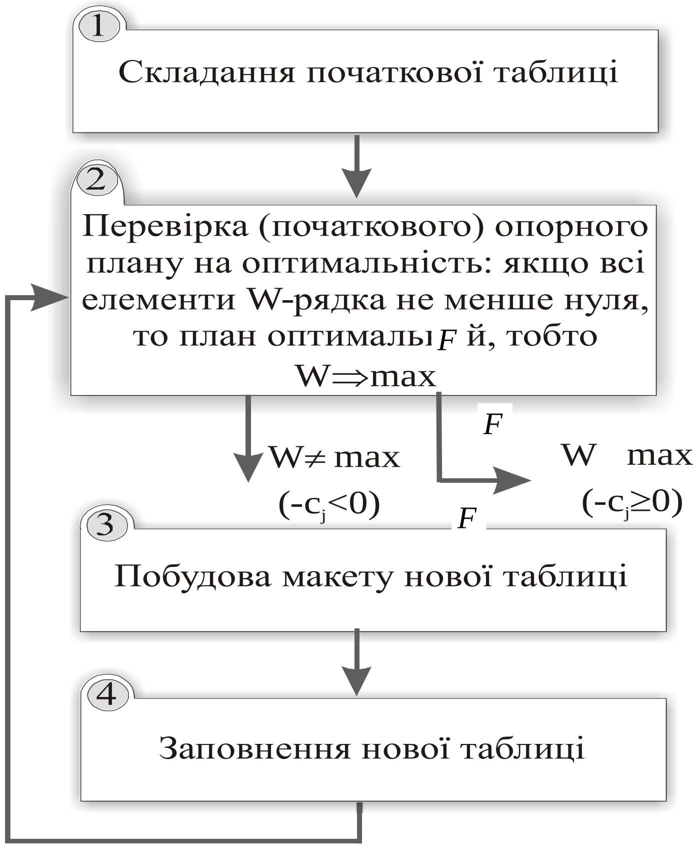
$$
\left.\begin{array}{l}
F = 3x_1 + 2x_2, \\
6x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
2x_1 + 4x_2 \leq 10 \\
2x_1 + 0x_2 \leq 6 \\
x_{1,2} \geq 0
\end{array}\right\} \text{у канонічній формі: }
\left.\begin{array}{l}
x_3 = 12 - 6x_1 - 3x_2, \\
x_4 = 10 - 2x_1 - 4x_2, \\
x_5 = \;\; 6 - 2x_1 - 0x_2, \\
F = 0 - (-3x_1 - 2x_2) \\
x_{1,2} \geq 0
\end{array}\right\} \tag{7}
$$

Таблиця 1

БЗ	ЗБЗ	НБЗ		СВ
		x_1	x_2	
x_3	12	6	3	$\frac{12}{6}=2$
x_4	10	2	4	$\frac{10}{2}=5$
x_5	6	2	0	$\frac{6}{2}=3$
F	0	–3	–2	

4.3. Методика отримання опорного плану та його покращення.

Алгоритм розв’язання задачі



Методика побудови макета нової таблиці.

- Вибір ключового стовпчика відповідно $\min$ значенню F -рядка.

➢ Вибір ключового рядка відповідно min СВ, тобто $\min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ijkn}}\right\}$. Співвідношення обсягу b_i та норми витрат a_{ij} (чим менше, тим скоріше обсяг ресурсу закінчується і внесе свій вклад у реалізацію цілі $F(x)$ (ЦФ)), тобто ресурс є дефіцитним. На перетині ключового стовпчика і ключового рядка знаходиться ключовий елемент.

➢ Будується нова таблиця, де змінні ключових стовпця і рядка міняються місцями, тобто одна з базисних змінних виводиться із базису, а на її місце становиться небазисна змінна.

Таблиця 2

БЗ	ЗБЗ	НБЗ		СВ
		x_3	x_2	
x_1	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$2:\frac{1}{2}=4$
x_4	6	$-\frac{1}{3}$	3	$6:3=2$
x_5	2	$-\frac{1}{3}$	-1	$2:(-1)=-2$
F	6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

Методика заповнення нової таблиці (на основі алгоритму звичайних Жорданових вилучень).

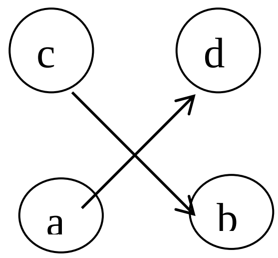
На місці ключових елементів ставиться величина обернена ключовим елементам попередньої таблиці, тобто $\dfrac{1}{a_{ij\kappa л}}$.

Інші елементи ключового рядка поділити на ключовий елемент.

Інші елементи ключового стовпчика поділити на ключовий елемент і змінити знак на протилежний.

Решту елементів таблиці перераховуємо за правилом прямокутника:

$$\frac{a\cdot D-c\cdot b}{D}$$



Заповнюємо нову таблицю:

Ключовий елемент $a_{11} = 6$, тому $\frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{6}$ ставимо на його місце у табл. 2.

$12 : 6 = 2; \; 3 : 6 = \frac{1}{2}$.

$-(2 : 6) = -\frac{1}{3}$;

$-(2 : 6) = -\frac{1}{3}$;

$-(-3 : 6) = \frac{1}{2}$.

Перший стовпчик (ЗБЗ):

$$\frac{10 \cdot 6 - 2 \cdot 12}{6} = \frac{60 - 24}{6} = 6$$

$$\frac{6 \cdot 6 - 2 \cdot 12}{6} = \frac{36 - 24}{6} = 2$$

$$\frac{0 \cdot 6 - (-3) \cdot 12}{6} = 6$$

Третій стовпчик (x_2):

$$\frac{4 \cdot 6 - 2 \cdot 3}{6} = \frac{24 - 6}{6} = 3$$

$$\frac{0 \cdot 6 - 2 \cdot 3}{6} = -1$$

$$\frac{-2 \cdot 6 - (-3 \cdot 3)}{6} = \frac{-12 + 9}{6} = -\frac{1}{2}$$

План неоптимальний згідно критерію, що елементи F - рядка повинні бути ≥ 0

Будуємо нову таблицю (нова ітерація):

БЗ	ЗБЗ	НБЗ		СВ
		x_3	x_4	
x_1	1	2/9	-1/6	
x_2	2	–1/9	1/3	
x_5	4	–4/9	1/3	
F	7	4/9	1/6	

Елементи ключового рядка: $\frac{6}{3} = 2; \; -\frac{1}{3} : 3 = -\frac{1}{9}$.

Елементи ключового стовпчика: $-\left(\frac{1}{2}:3\right)=-\left(\frac{1}{6}\right);$

$-\left(-1:3\right)=\frac{1}{3};$

$-\left(-\frac{1}{2}:3\right)=\frac{1}{6}.$

Рядок (x_1): $\dfrac{2\cdot 3-6\cdot\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{6-3}{3}=1$

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot 3-\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}{3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{3}=\frac{2}{9}.$$

Рядок (x_5): $\dfrac{2\cdot 3-(-1\cdot 6)}{3}=4$

$$\frac{-\frac{1}{3}\cdot 3-\left(-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{3}=\frac{-1-\frac{1}{3}}{3}=-\frac{4}{9}.$$

F -рядок: $\dfrac{6\cdot 3-\left(-\frac{1}{2}\cdot 6\right)}{3}=\dfrac{18+3}{3}=7$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 3-\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{3}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}}{3}=\frac{4}{9}.$$

План оптимальний:

$F_{\max}=7;$

$x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=0;\ x_4=0;\ x_5=4.$

5. Двоїста задача лінійного програмування. Аналіз результатів в табличному процесорі Excel

5.1. Поняття про двоїсту задачу лінійного програмування.

Аналіз отриманого оптимального рішення оснований на використанні оцінок (величин) і коефіцієнтів останньої симплексної таблиці, які отримуються в результаті розв’язання задачі. Коефіцієнти останньої симплекс-таблиці $\left(a_{ij}\right)$ називають коефіцієнтами структурних зрушень або заміщення, а оцінки ресурсів (розміщені в оцінному рядку - F - рядок) дістали назву об’єктивно зумовлених оцінок або двоїстих оцінок. Ця назва пов’язана з поняттям двоїстої задачі лінійного програмування.

Пряма задача:

$$\left.\begin{aligned} W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \\ x_j \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Двоїста задача:

$$\left.\begin{aligned} W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \\ y_i \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

де y_i - оцінки ресурсів (об’єктивно зумовлені оцінки) або двоїсті оцінки.

Двоїста задача розв’язується звичайним симплексним методом, і результатом є двоїсті оцінки y_i, що збігаються з коефіцієнтами оцінного рядка прямої задачі. То на практиці немає потреби розглядати обидві задачі – пряму і двоїсту. Досить розглянути будь-яку з них, і вся необхідна інформація про оцінки міститься в останній симплексній таблиці.

Зміст коефіцієнтів та величин моделі

Розглянемо зміст всіх показників моделі (симплексної таблиці) та їх сполучень.

Елементи a_{ij} представляють собою технологічні коефіцієнти. В процесі розв’язання задачі в результаті перерахунків вони терплять значні зміни, а їх зміст стає більш складним. Із нормативів, які характеризують витрати виробничих ресурсів, вони перетворюються у коефіцієнти зміщення (або коефіцієнти структурних зрушень). Кожен з них представляє величину зменшення $(a_{il} > 0)$ або збільшення $(a_{ij} < 0)$ значення i-ї базисної змінної (БЗ) при введенні в базис одиниці j-ї небазисної змінної (НБЗ).

Коефіцієнти ЦФ c_j характеризують прямий ефект (прибуток, витрати) введення в базис j-ї змінної з одиничною інтенсивністю. В залежності від смислу змінних величина c_j може бути більше, менше або дорівнювати нулю: $c_j = \begin{Bmatrix} \ge 0, \\ \le 0, \\ = 0. \end{Bmatrix}$

Величина $Z_j\left(F_j = \{F(x_1), F(x_2),..., F(x_n)\}\right)$ характеризує непрямий (побічний, посередній) ефект введення в базис j-ї змінної з одиничною інтенсивністю. Вона показує, на скільки зменшиться ЦФ за рахунок зміни значень БЗ при введенні в базис j-ї НБЗ з одиничною інтенсивністю. Вона визначається як сума добутку коефіцієнтів заміщення a_{ij} на прямий ефект БЗ c_i для всіх j-их, які не входять у базис:

$$Z_j = \sum_j a_{ij} c_i \ .$$

Наприклад: $Z_3 = \sum_3 a_{i3} c_i + = a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3 ... .$

Для БЗ непрямий ефект визначається прямим ефектом, тобто $z = c_i$.

Різниця $c_j - z_j$ представляє собою чистий ефект, який отримується при введенні у базис j-ї змінної. При цьому ЦФ збільшується на величину прямого і зменшується на величину непрямого ефекту.

5.2. Алгоритм розв’язування задачі оптимізації в Excel

Табличний процесор Excel – є достатньо потужним засобом розв’язування складних задач і аналізу результатів, які отримуються. Розглянемо технічні можливості програми Excel з аналізу даних в процесі розв’язування задач оптимізації.

Методика розв’язування задач складається з декількох етапів:
I етап – математична постановка задачі (математична модель);
II етап – введення моделі у програму;
III етап – пошук оптимального рішення (можливі корегування початкових даних);
IV етап – аналіз отриманих результатів та їх представлення у необхідній формі.
Алгоритм розв’язування задачі представлений на рис. 1.

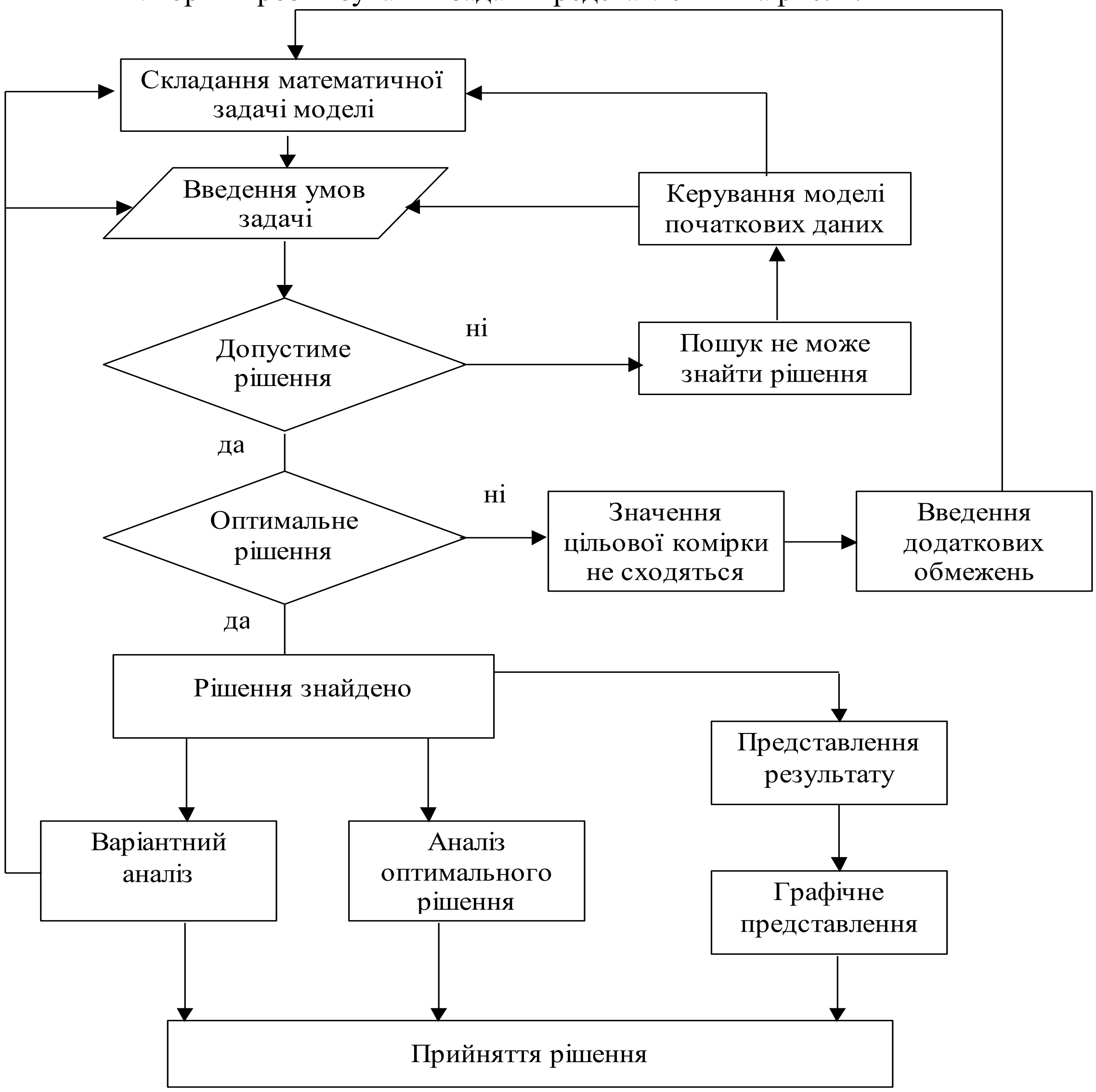


Рис. 1

Методика введення умов задачі

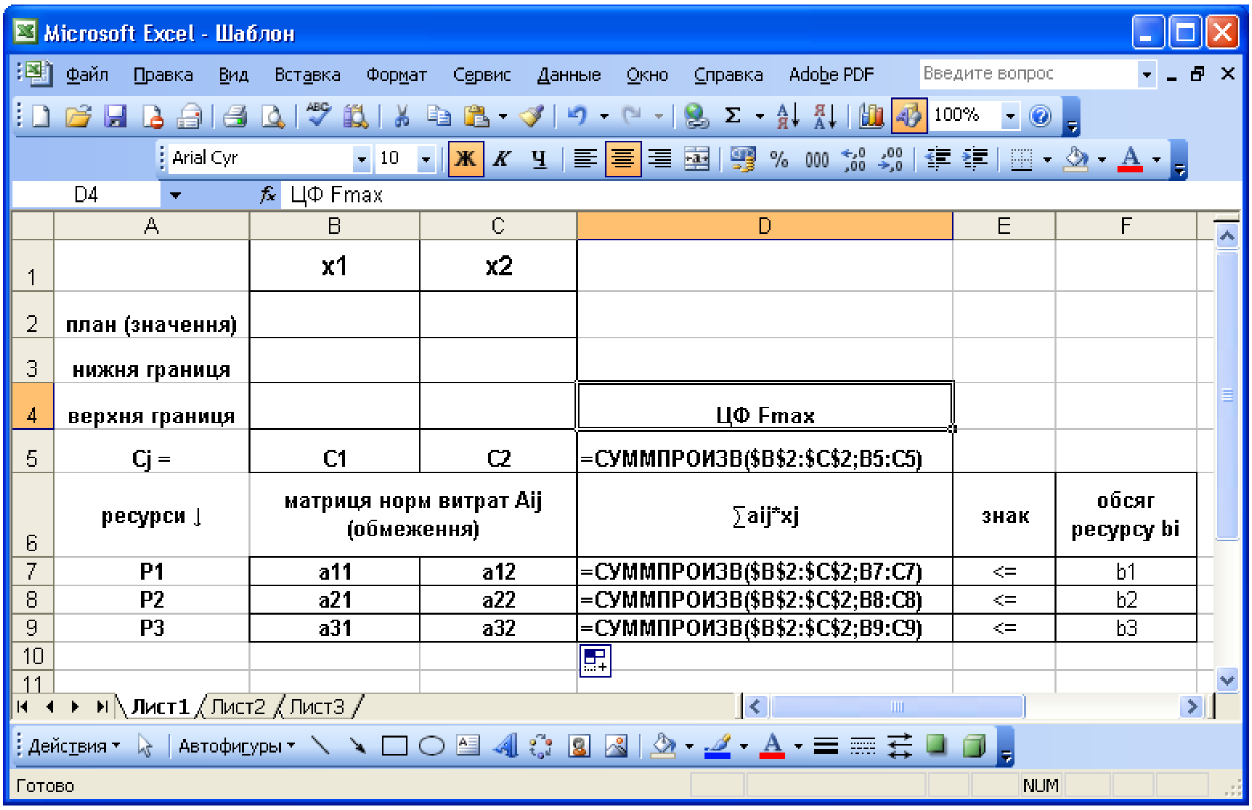
Методика введення умов задачі складається з таких основних елементів (кроків):

1) створення форми для введення умов задачі;
2) введення початкових даних;
3) введення формул математичної моделі задачі;
4) у діалоговому вікні підпрограми “Поиск решения”: призначити цільову функцію, ввести адреси початкових змінних та обмеження.

Для розглядання методики рішення задачі будемо використовувати наступну модель:

$$\left.\begin{aligned}
&W = 12x_1 + 10x_2 \Rightarrow \max;\\
&3x_1 + 9x_2 \le 31;\\
&7x_1 + 9x_2 \le 107;\\
&x_1 + 4x_2 \le 50;\\
&x_i \ge 0,\ i = 1{,}2
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Отже, спочатку створюють форму для введення умов задачі (рис.2). Весь текст форми є коментарем і на розв’язування задачі не впливає.



	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2	план (значення)					
3	нижня границя					
4	верхня границя			ЦФ Fmax		
5	Cj =	C1	C2	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B5:C5)		
6	ресурси ↓	матриця норм витрат Aij (обмеження)		∑aij*xj	знак	обсяг ресурсу bi
7	P1	a11	a12	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B7:C7)	<=	b1
8	P2	a21	a22	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B8:C8)	<=	b2
9	P3	a31	a32	=СУММПРОИЗВ($B$2:$C$2;B9:C9)	<=	b3

Рис. 2

Після ведення початкових даних і формул математичної моделі необхідно в меню <Сервис> викликати підпрограму “Поиск решения”. У відповідному (одноіменному) діалоговому вікні призначити цільову функцію; вибрати направлення цільової функції (критерій) – максимальне (мінімальне) значення; ввести адреси значень початкових змінних x_1, x_2; використовуючи кнопку “Добавить” ввести всі обмеження задачі в абсолютних звертаннях (рис. 3):

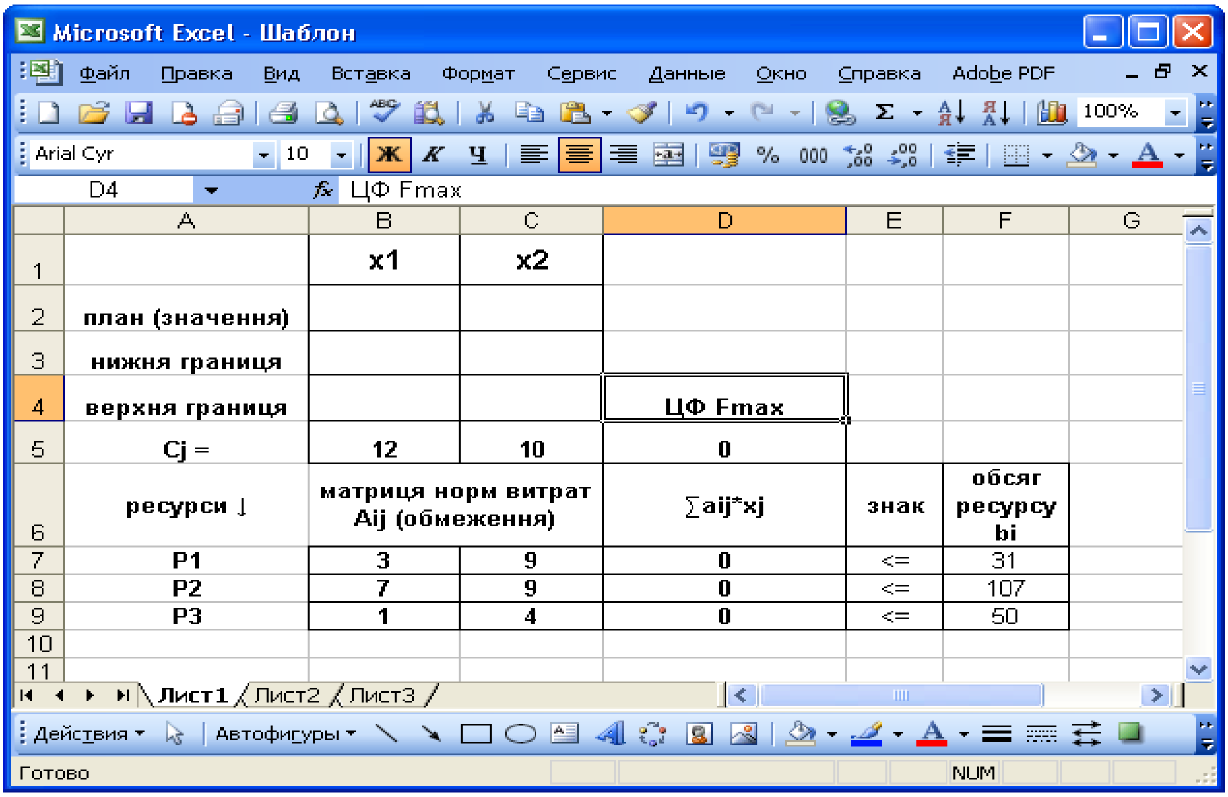
Для введення нового обмеження необхідно використовувати кнопку “Добавить”, а після останнього натиснути “ОК”. Для зміни або вилучення обмежень використовувати кнопки “Изменить” або “Удалить”.

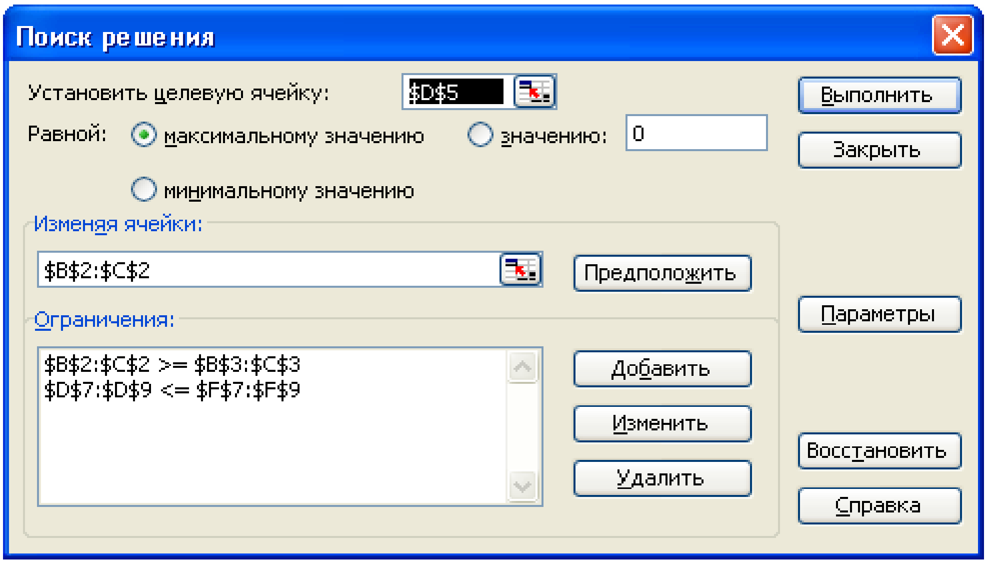
Крім цього є кнопка “Параметры”, яка дозволяє задати максимальний час пошуку рішення (по умовчанню – 100 сек.) і граничну кількість ітерацій (по умовчанню – 100 ітерацій). Остання дія перед запуском задачі на пошук рішення необхідно встановити прапорець “Линейная модель”, що забезпечить використання симплекс-метода, а не градієнтного (нелінійного).

Пошук рішення. Корегування початкових даних моделі

Після введення усіх початкових даних формул моделі, встановлення необхідних параметрів для розв'язання задачі можна починати пошук рішення, натиснувши кнопку "Выполнить" діалогового вікна "Поиск решения".

Результати рішення у вигляді цифрових даних поміщаються у відповідні комірки таблиці (рис.4).





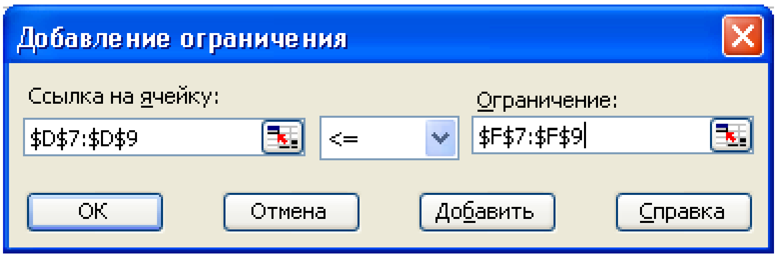


Рис. 3

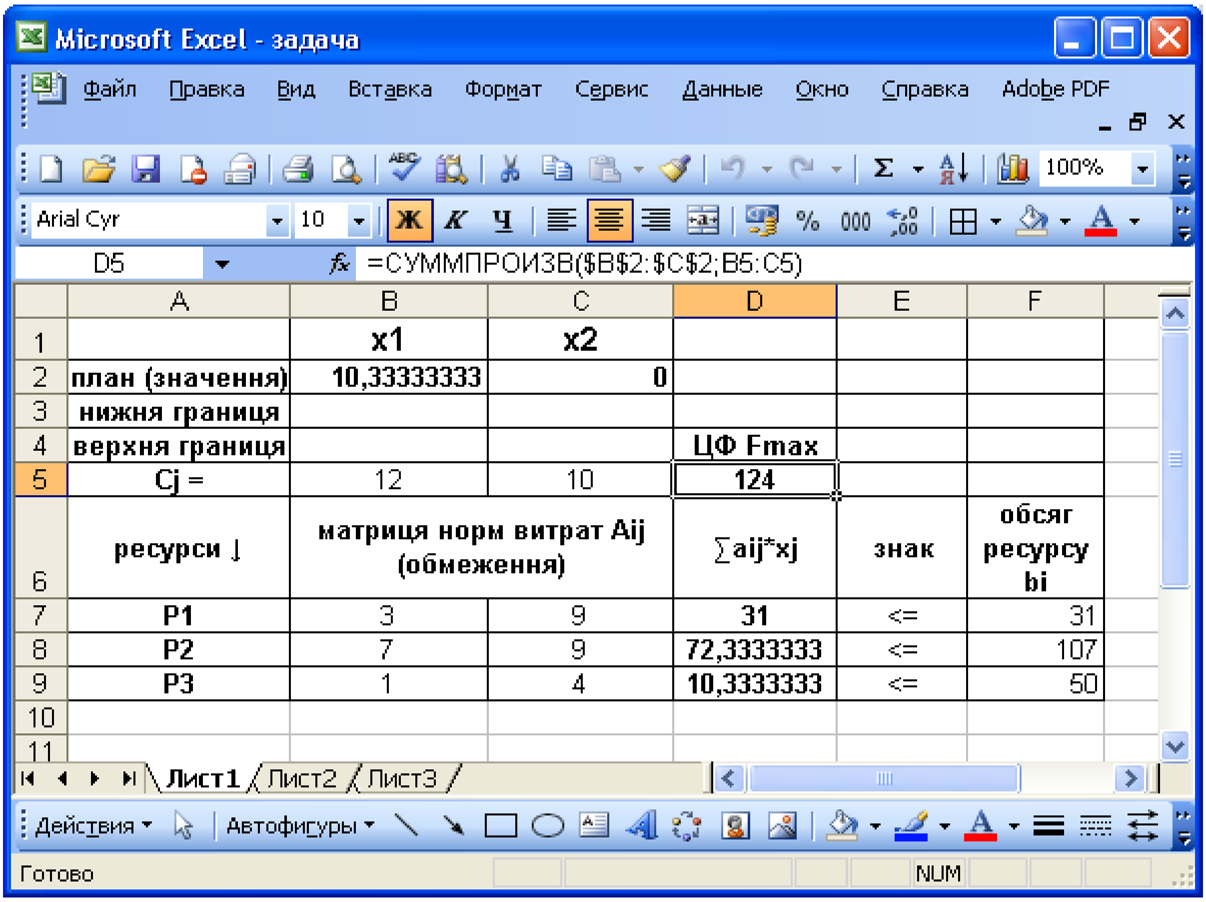


Рис. 4

Крім цього на екрані виникає вікно “Результаты поиска решения задачи”, яке інформує про знайдене рішення або неможливість отримати оптимальне рішення. Якщо задача має оптимальне рішення, його можна зберегти або оновити початкові значення. За допомогою цього вікна можна також продивитись звіти різних типів для аналізу оптимального рішення задачі, що буде розглянуто в подальшому.

Необхідно приділити особливу увагу ситуації, коли оптимальне рішення не знайдено. Розглянемо два характерних випадки: коли “Поиск решения” не може знайти рішення і, коли значення цільової комірки не сходяться.

Поява на екрані діалогового вікна “Поиск не может найти подходящего решения” – є ознакою несумісності рішення, тобто умови задачі несумісні. Для корегування початкових даних можна вводити додаткові необхідні ресурси (тобто $b_i + t_i$) або призначити інші граничні умови $x_j \geq 0$, тоді буде отримано нове рішення, яке буде визначатися попередніми граничними умовами: використанням додаткових ресурсів або наявність ресурсів (початкових).

Якщо є можливість збільшити ресурси на величину t_i (тобто $b_i + t_i$), то методика корегування задачі буде складатись з таких операцій:

1) Запис скорегованої умови задачі у вигляді

$$\left.\begin{aligned} &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i + t_i \\ &t_i \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

або

$$\left.\begin{aligned} &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - t_i = b_i \\ &t_i \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Така постановка задачі дає можливість визначити мінімальне значення додаткових необхідних ресурсів t_i .

2) Для введення умов задачі систему записують у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} &W^{/} = \sum_{i=1}^{n} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n \Rightarrow \min, \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - t_i = b_i \\ &t_i \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

і проводять корегування таблиці даних, тобто добавляють стовпчики змінних $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$; цільову функцію $W^{/}$ (=сум (*)), у стовпчики обмежень додати відповідні коефіцієнти при t_i (тобто “–1”).

3) У діалоговому вікні “Поиск решения”^

- становити комірку $W^{/}$ і вказати, що буде знаходитись мінімальне значення;
- у вікні “Изменяя” ввести нові звертання з урахуванням значень *ti* (тобто наприклад, B3:F3)4
- у вікно “Ограничение” ввести додаткові обмеження і граничні умови.

4) Після цього дати команду на включення. В результаті з’явиться додатковий ресурс у вигляді значень t_i і нове значення початкової цільової функції W .

Якщо у реальних умовах ресурси збільшити не представляється можливим, то необхідно корегувати умови $x_j \ge 0$. Тоді буде отримано рішення, яке визначається наявними ресурсами b_i .

У разі появи на екрані, в ході рішення задачі, повідомлення “Значения целевой ячейки не сходятся”, то це є ознакою необмеженості цільової функції. Наприклад,

$$\left.\begin{aligned} &W = x_1 \Rightarrow \max \\ &x_1 + x_2 \ge 1 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Задача має необмежену ЦФ W . В ході розв’язування, з’явиться відоме повідомлення. Для корегування умов задачі необхідно ввести додаткове обмеження для ЦФ. Наприклад,

$$\left.\begin{aligned} &W = x_1 \to \max \\ &x_1 + x_2 \ge 1 \\ &x_1 + x_2 \le 2 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

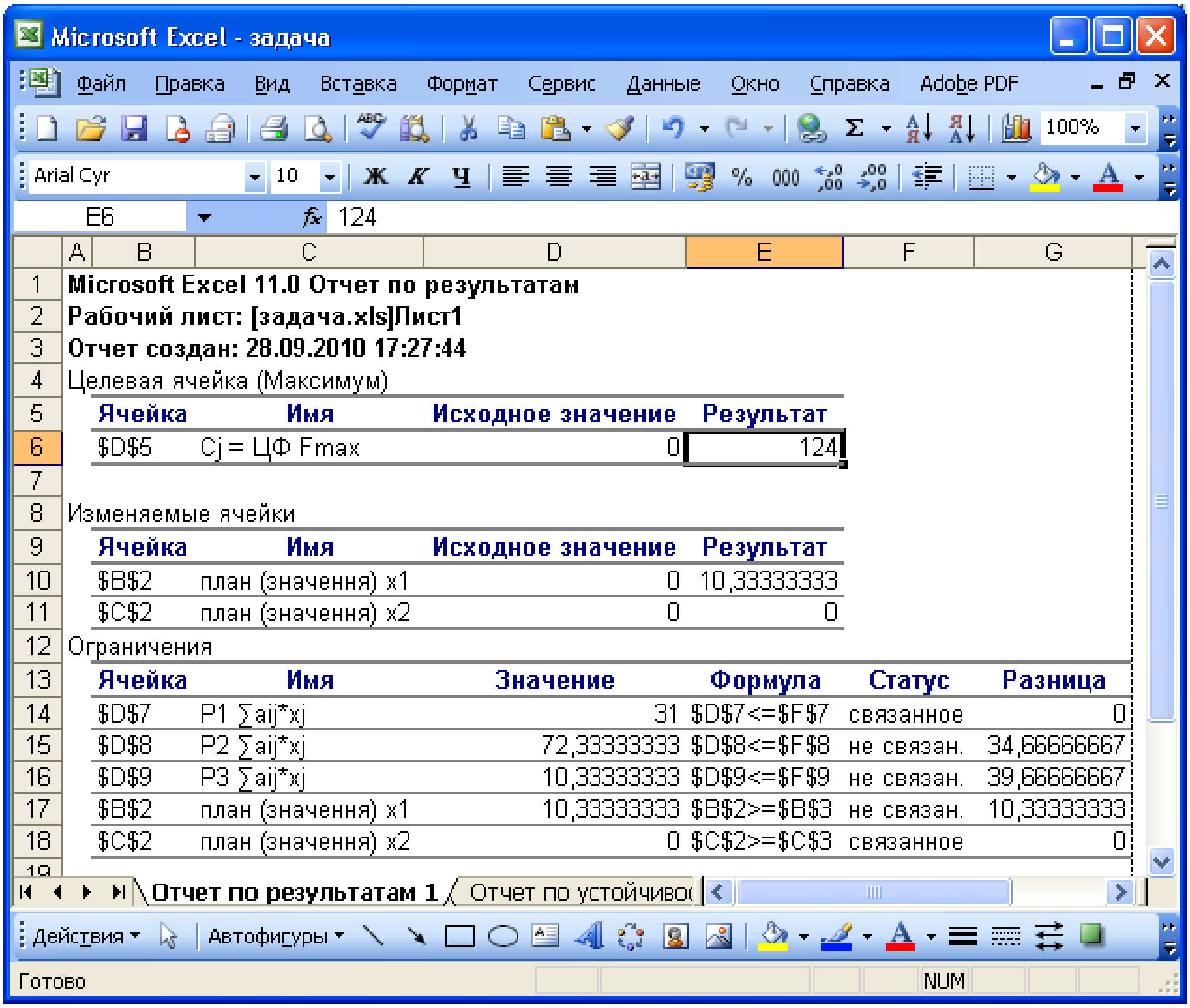
Після введення обмеження “зверху” задача буде мати оптимальне рішення. Аналогічно корегуються задачі на мінімум цільової функції.

5.3. Аналіз оптимального рішення задачі

Аналіз оптимального рішення проводять після того, як на екрані з’явиться вікно результату пошуку рішення з повідомленням, що рішення знайдено (“Результат поиска решения” – ”Решение найдено”). За допомогою цього вікна можна викликати звіти трьох типів:

- результати;
- стійкість (“устойчивость”);
- границі (“пределы”).

Кожен із звітів можна викликати на екран, якщо виділити необхідний і активізувати за допомогою маніпулятора миші кнопку діалогового вікна “ОК”. Розглянемо послідовно усі типи звітів, які з’являються на екрані у вигляді таблиць. Причому, на ярличку листа вказується відповідна назва звіту.



Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [задача.xls]Лист1
Отчет создан: 28.09.2010 17:27:44

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$5	Cj = ЦФ Fmax	0	124

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$2	план (значення) x1	0	10,33333333
$C$2	план (значення) x2	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$7	P1 ∑aij*xj	31	$D$7<=$F$7	связанное	0
$D$8	P2 ∑aij*xj	72,33333333	$D$8<=$F$8	не связан.	34,66666667
$D$9	P3 ∑aij*xj	10,33333333	$D$9<=$F$9	не связан.	39,66666667
$B$2	план (значення) x1	10,33333333	$B$2>=$B$3	не связан.	10,33333333
$C$2	план (значення) x2	0	$C$2>=$C$3	связанное	0

Рис. 5

Звіт “Результаты” складається з трьох таблиць: 1-цільова комірка (“Целевая ячейка”), 2-змінниюємої комірки (“Изменяемыя ячейки”), 3-обмеження (“Ограничения”).

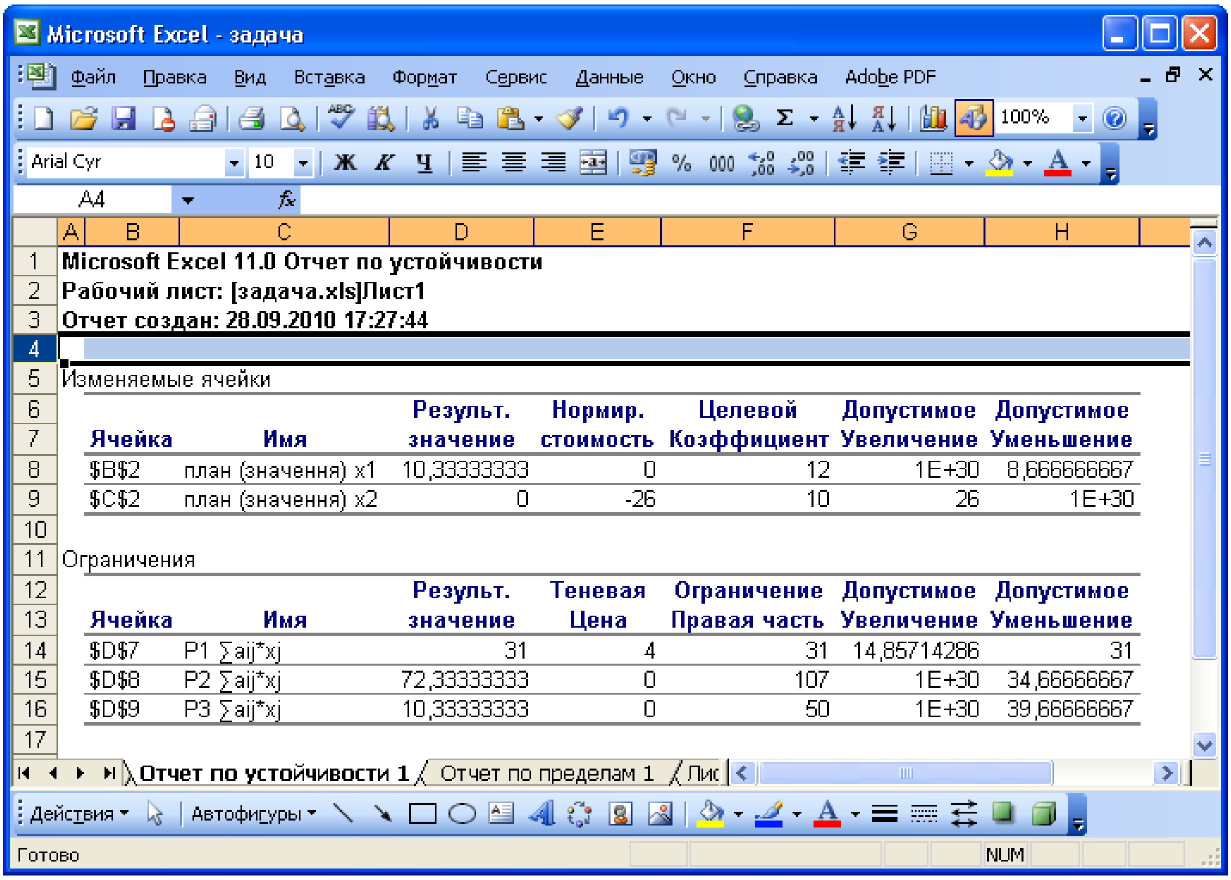
Таблиця 1 надає відомості про цільову функцію. У стовпчику “Исходно” приведені значення цільової функції до початку обчислення; у стовпчику “Результат” показано екстремальне (максимальне або мінімальне) значення цільової функції, тобто коли знайдено оптимальне рішення (див. рис. 5).

Таблиця 2 приводить значення шуканих змінних, отриманих у результаті розв’язування задачі (рис.5).

Таблиця3 показує результати для обмежень і граничних умов. Як і у попередніх двох таблицях перші два стовпчики призначені адресам комірок та відповідним ім'ям. Третій стовпчик має назву "Значение", де приведені величини використаного ресурсу. У четвертому стовпчику ("Формула") відображаються формули обмежень і граничних умов, які були введені в діалогове вікно "Поиск решения". В слідуючому стовпчику ("Состояние") повідомляється про повноту використання ресурсів. Якщо ресурс використаний повністю, то з'явиться повідомлення "Связное", а у слідуючому стовпчику "Разница" буде 0. В іншому випадку, коли ресурс використаний не повністю, то з'явиться повідомлення стану "Не связное", а у стовпчику "Разница" буде показана кількість невикористаного ресурсу, тобто різниця між числом у графі "Значение" і правою частиною відповідної нерівності – обмеження.

Для граничних умов (тобто границь значень x_1, x_2 і т.д.) приводяться аналогічні величини з тією лише відмінністю, що замість величини невикористаного ресурсу показана різниця між значенням змінної $(x_1, x_2, ...)$ у знайденому оптимальному рішенні і заданою для неї граничною умовою у діалоговому вікні "Поиск решения".

Таким чином, звіт "Результаты" крім кількісної оцінки оптимального плану (тобто значення $x_1, x_2, ...)$ і цільової функції $(F \Rightarrow \max(\min))$ надає важливу для аналізу інформацію про стан використання ресурсів.



Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [задача.xls]Лист1
Отчет создан: 28.09.2010 17:27:44

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	план (значення) x1	10,33333333	0	12	1E+30	8,666666667
$C$2	план (значення) x2	0	-26	10	26	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$7	P1 ∑aij*xj	31	4	31	14,85714286	31
$D$8	P2 ∑aij*xj	72,33333333	0	107	1E+30	34,66666667
$D$9	P3 ∑aij*xj	10,33333333	0	50	1E+30	39,66666667

Рис. 6

Звіт про стійкість, рис. 6 ("Устойчивость") надає інформацію про можливі зміни значення цільової функції, ресурсів та коефіцієнтів моделі у разі корегування отриманого рішення (плану). Звіт містить дві таблиці: змінюємо комірки ("Изменяемые ячейки") та обмеження ("Ограничения"). Перші два стовпчики обох таблиць такі ж, як і в попередньому звіті, тобто комірка та ім'я. Інші вказують на слідуючи:

Таблиця 1 “Изменяемые ячейки” має стовпчик Результат рішення задачі – де представлені значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (тобто оптимальний план). Наступна графа Редукована (зведена) вартість (“Редуцированная стоимость”) містить значення додаткових двоїстих змінних, які показують на скільки змінюється цільова функція F, якщо включити одиницю значення відповідної змінної (x) оптимальне рішення. В слідую чому стовпчику приведені коефіцієнти цільової функції. Останні дві графи – Допустиме збільшення і Допустиме зменшення – містять граничні значення приросту (тобто збільшення або зменшення) коефіцієнтів цільової функції, при яких збігається набір змінних оптимального рішення (тобто $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

В таблиці 2 “Ограничения” приводяться аналогічно значення для обмежень. В графі “Результати рішення” відображені величини використаних ресурсів (для отримання оптимального рішення). Слідуючий стовпчик має назву “Тільова ціна” (“Телевая цена”), де представлені значення двоїстих оцінок, які показують, як змінюється цільова функція при змінювані величин ресурсів на одиницю. Далі представлена графа “Обмеження. Права частина”, яка містить граничні значення ресурсів, тобто величини правої частини обмежень – нерівностей системи (1). Останні дві графи також призначені Допустимим збільшенню і зменшенню граничних значень приросту ресурсів, при яких збігається оптимальний набір змінних, які ходять в оптимальне рішення.

Таким чином, звіт про стійкість дає можливість оцінити варіанти корегування (змінювання) отриманого оптимального рішення, не виходячи за рамки прийнятої моделі.

Звіт про границі, рис. 7, показує, в яких рамках можуть змінюватись величини оптимального плану x_1, x_2 (нижня і верхня границі) при збереженні структури плану.

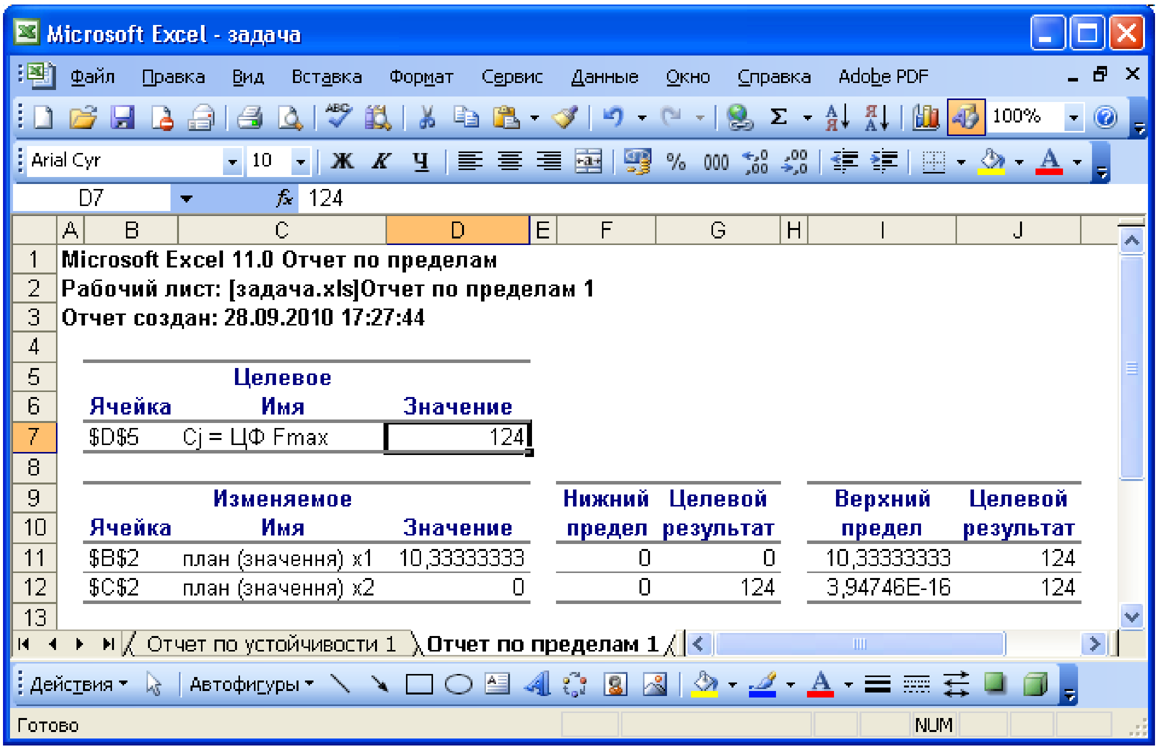


Рис. 7

Звіт складається з дох таблиць: перша відображає значення цільової функції оптимального плану; друга таблиця приводить значення x_j оптимального рішення, нижні та верхні границі змін значень x_j, а також указані відповідні нижнім і верхнім граничним величинам x_j значення цільової функції.

Таким чином, звіт про границі – надає допомогу в аналізі оптимального рішення і відображає інформацію про границі змінних і цільової функції.

6. Задача лінійного програмування транспортного типу

6.1. Постановка задачі

На попередніх лекціях ми розглянули загальні методи рішення задач лінійного програмування. Проте існують частинні типи задач лінійного програмування, які, в силу особливості своєї структури, допускають рішення більш простішими методами. Одним з таких типів задач лінійного програмування є задачі найбільш раціональної організації (тобто оптимальної) перевезення однорідного продукту з пунктів відправлення (ПВ) до пунктів призначення (ПП), які мають задані ресурси і потреби. Скорочено цей тип задач має назву – транспортна задача.

Критерієм якості плану перевезення може бути їх вартість, або термін (час). Відповідно вирішується транспортна задача за критерієм вартості, або критерієм часу.

В лекції розглянемо задачу при умові мінімальної вартості перевезення.

Постановка задачі: нехай маємо m пунктів відправлення $A_1, A_2,...A_m$, у кожному з яких міститься певна кількість однорідного продукту $a_1, a_2,..., a_m$ одиниць відповідно. Є n пунктів призначення $B_1, B_2,..., B_n$, куди потрібно доставити відповідно $b_1, b_2,..., b_n$ одиниць продукту. Передбачається, що сумарний ресурс (загальна кількість) продукту в ПВ $\sum_{i=1}^{m} a_i$ дорівнює сумарній потребі усіх ПП $\sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (1)$$

Крім того, відома вартість c_{ij} перевезення одиниці продукту від кожного ПВ A_i до кожного ПП B_j. Загальна вартість перевезення по будь-якому маршруту пропорційна кількості продукту, що перевозиться.

Необхідно скласти такий план перевезення (звідки, куди і скільки одиниць), щоб загальна вартість усіх перевезень біла мінімальна.

З точки зору передавання інформації задачу можна подати так. Нехай $\sum_{j=1}^{n} b_j$ - сукупність різних видів каналів обслуговування, а $\sum_{i=1}^{m} a_i$ - різні плани заявок. Кожне число b_j показує, скільки каналів містить даний вид, а число a_i - скільки є заявок класу i. Числа c_{ij} характеризують час обслуговування заявки i-го класу каналом обслуговування j-го виду.

Мета задачі – розподілити заявки між каналами так, щоб сумарний час обслуговування був мінімальний – це транспортна задача за критерієм часу.

Перш ніж розглянути математичну модель задачі та її рішення зробимо кілька зауважень.

Транспортна задача може бути закритого чи відкритого типу. Умова (1) показує, що задача відноситься до закритого типу. Якщо умова (1) не виконується, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ або } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то задача відкритого типу. Але у всякому разі таку задачу можна звести до задачі закритого типу введенням фіктивного ПВ або ПП ($A_ф$ або $B_ф$) з нульовою вартістю транспортування $c_{iф} = c_{фj} = 0$.

6.2. Математична модель транспортної задачі

Побудуємо загальну математичну модель транспортної задачі закритого типу за критерієм вартості:

Отже, сума ресурсу дорівнює сумі потреб (1):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Далі задається матриця вартості:

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} ... c_{1n} \\ c_{21} c_{22} ... c_{2n} \\ ----------- \\ c_{m1} c_{m2} ... c_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де c_{ij} - вартість доставки продукти з A_i до B_j і вводиться поняття плана перевезень, який визначається матрицею

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} x_{12} ... x_{1n} \\ x_{21} x_{22} ... x_{2n} \\ ----------- \\ x_{m1} x_{m2} ... x_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де x_{ij} - кількість одиниць продукту, який перевозиться з A_i до $B_j (i = 1,2,..., m; j = 1,2,..., n)$.

План перевезень $\underline{X}$ буде допустимий, якщо елементи x_{ij} матриці $\underline{X}$ задовольняють таким умовам – обмеженням (умовам ввезення і вивезення продуктів):

1).Сумарна кількість продуктів, які направляються з кожного ПВ до всіх ПП повинна дорівнювати запасу продуктів в даному пункті, або така трактовка: з кожного ПВ повинен бути вивезений увесь наявний там продукт. Це дасть нам m умов-рівностей:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = a_2, \\ ---------------------- \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = a_m. \end{array}\right\},$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = 1,2,..., m); \quad (4)$$

2). У кожному ПП має задовольнятися потреба в продукті. Це дасть нам n умов-рівностей:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + ... + x_{m1} = b_1, \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2, \\ ---------------------- \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = b_n. \end{array}\right\},$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = 1,2,..., n); \quad (5)$$

Крім того, усі числа $x_{ij} \geq 0$; для всіх $i = 1,..., m; j = 1,..., n;$

3). Сумарна вартість перевезень по всіх маршрутах повинна бути мінімальною:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min, \quad (6)$$

де подвійна сума означає, що підсумовування утворюється по всім комбінаціям індексів i та j , тобто по всім парам ПВ-ПП.

Таким чином, перед нами задача лінійного програмування з умовами-рівностями (4), (5) і мінімізуємого лінійною функцією (6). Особливістю цієї задачі є те, що усі коефіцієнти в умовах (4), (5) дорівнюють одиниці – це дозволяє розв'язувати задачу відносно просто. Крім цього, із структури моделі задачі видно, що умови-рівноваги (4). (5) лінійно залежні, бо їх праві частини зв'язані умовою (1). Лінійно-незалежних рівнянь буде m + n — 1, і базисний розв'язок матиме не більш як m + n — 1 невідомих, які не дорівнюють нулю, а число вільних змінних (які дорівнюють нулю)

$$k = m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1),$$

де $m \cdot n$ - загальна кількість змінних x_{ij} .

Відомо, що в задачі лінійного програмування оптимальне рішення досягається в одній з вершин області допустимих рішень (в опорній точці, де як правило, k змінних дорівнюють нулю). Тобто, для оптимального плану мінімум k перевезень повинні дорівнювати нулю (з відповідних ПВ у відповідні ПП нічого не перевозиться).

Таким чином, допустимий план перевезень повинен задовольняти умовам (4), (5), тобто всі потреби задовільнені, всі запаси використані. Опорним назвемо план, для якого всі базисні m + n — 1 змінні будуть більше за нуль, а вільні дорівнюватимуть нулю. План $(\underline{X})$ буде оптимальним, якщо він приводить до мінімальної сумарної вартості перевезень $(w = \min)$.

В силу особливої структури транспортної задачі при її розв'язуванні зручніше представити початкові дані у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

ПП / ПВ	B_1	B_2	…	B_n	ресурс (наявність) a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{21} x_{21}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$		$\vdots$	…		$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
потреба в j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Перший стовпчик табл..1 означає ПВ A_1, $A_2,\ldots$, A_m, верхній рядок – ПП B_1, $B_2,\ldots$, B_n. На перетині кожного рядка $A_i (i = 1,.., m)$ і стовпчика $B_j (j = 1,..., n)$ записується відповідна вартість перевезення c_{ij} і змінні x_{ij} (кількість одиниць продукту, який перевозиться з ПВ A_i до ПП B_j). В останньому стовпчику і останньому рядку відображаються числові дані ресурсу a_i в пунктах відправлення A_i і потреби b_j пунктів призначення B_j, які беруться із відповідних умов – рівностей. У клітинці правого нижнього кутка таблиці ставиться сума ресурсу і потреби, які в задачі закритого типу дорівнюють один одному.

Обчислювальні схеми розв'язуваної транспортної задачі подібні методам розв'язування загальної задачі лінійного програмування. Однак використання універсальних методів для розв'язування транспортної задачі є не ефективним. Існують спеціальні методи, дві категорії яких використовуються найбільше. До першої категорії відносяться *методи, які реалізують процес послідовного поліпшення плану перевезень*: на кожному етапі відбувається повне розподілення продукту по пунктам призначення (ПП) B_j, але вартість не оптимальна; процес послідовного поліпшення плану поетапно зменшує вартість, поки вона не стане мінімально можливою величиною. До таких методів належить відомий *метод потенціалів*.

Методи другої категорії основані на принципі часткового оптимального розподілення, тобто на кожному етапі виконується оптимальне (по вартості) розподілення тільки частки продукту.

Кількість оптимально розподіленого продукту в процесі рішення задачі поетапно зростає, поки не досягне заданої величини.

Ця ідея лежить в основі, так званого, «угорського» метода розв'язування транспортної задачі. Цей метод особливо добре пристосований до вирішення проблеми вибору.

На лекції ми розглянемо методику розв'язання транспортної задачі методом потенціалів, запропонованого Л.В. Канторовичем та М.К. Гавуріним і, дещо пізніше й незалежно від них, Данцигом.

6.3. Методика розв'язання задачі методом потенціалів

Методика розв'язання задачі методом потенціалів складається з перебору опорних планів транспортної задачі, даки не буде знайдений оптимальний план, тобто такий опорний план, при якому значення вартості $\underline{G}$ буде найменшим.

Аналогічно кожному кроку обчислень відповідає своя робоча таблиця задачі, тобто зробити крок – значить побудувати нову робочу таблицю.

Щоб скласти опорний план, скористаймося найпростішим способом «північно-західного кута» (діагональний спосіб). Відповідно до цього способу заповнення таблиці розпочинається з верхньої лівої клітинки (1;1). При цьому порівнюємо кількість продукту (ресурс) a_1, який знаходиться у ПВ A_1 з потребою b_1 ПП B_1. Меншу з цих величин $[\min(a_1, b_1)]$ заносимо в клітину (1;1). В результаті буде виконаний один з балансів (по першому рядку, якщо $\min(a_1, b_1) = a_1$, або по першому стовпчику, якщо $\min(a_1, b_1) = b_1$). Після цього переходимо в наступну клітину рядка або стовпця, де баланс не виконаний. Порівнюємо для цієї клітини невивезену кількість продукту (залишок ресурсу) по рядку з незадовільною потребою по стовпчику і записуємо в дану клітину меншу з порівнюваних величин. Далі зміщуємося в наступну клітину, доки не побудуємо опорний план задачі.

Для кращого уяснення методики розв'язання задачі розглянемо її на чисельному прикладі, початкові дані якого подані у вигляді табл. 2.

Отже, заповнення таблиці, тобто формування попереднього (опорного) плану почнемо з клітини (A_1, B_1), куди заносимо значення $x_{11} = \min(a_1, b_1) = b_1 = 40$. Оскільки баланс виконаний по стовпчику (потреба B_1 повністю задовільне на), то переходимо в наступну клітину по рядку, тобто клітину (A_1, B_2). Заповнюємо клітину значенням $x_{12} = \min(a_1 - 40; b_2) = a_1 - 40 = 30$. Баланс по рядку A_1 виконано (ресурс a_1 використаний повністю), а потреба B_2 не задовільне на, тому переходимо до заповнення клітин (A_2, B_2) значенням $x_{22} = \min(a_2, b_2 - 30) = b_2 - 30 = 30$. Баланс по стовпчику B_2 виконаний, тому пересуваємося по рядку A_2 до клітинки (A_2, B_3). Заповнюємо її: $x_{23} = \min(a_2 - 30, b_3) = b_3 = 25$б отже баланс по стовпчику B_3 виконаний. Тому, переходимо до клітинки (A_2, B_4) і визначаємо величину $x_{24} = \min(a_2 - 55, b_4) = a_2 - 55 = 25$, що відповідає залишку ресурса a_2 , тобто баланс по рядку A_2 виконано.

Таблиця 2

ПП / ПВ	B_1	B_2	B_3	B_4	ресурс (наявність) a_i	α_i
A_1	2 40	4 30	1	6	70	$\alpha_i = 0$
A_2	2	2 30	4 25	3 25	80	$\alpha_2 = -2$
A_3	1	2	3	2	50	$\alpha_3 = -3$
потреба в j	40	60	25	75	200	$C_1 = -310$
β_j	$b_1 = 2$	$b_2 = 4$	$b_3 = 6$	$b_4 = 5$	$C_2 = 845$	$C = 535$

Заповнюємо останню клітинку таблиці (A_3, B_4): $x_{34} = \min(a_3, b_4 - 25) = a_3 = b_4 - 25 = 50$, тобто ресурс по рядку A_3 відповідає незадовільне ній потребі стовпчика B_4, що підводить кінцевий баланс – всі потреби задовільне ні, весь ресурс використаний.

Таким чином, <u>побудували допустимий план транспортної задачі</u>. Він також є опорним планом, бо кількість базисних змінних (зайнятих клітинок) дорівнює 6 = m + n–1.

Сумарні витрати на перевезення при такому розподіленні ресурсу по маршрутах складає:

$$C_\Sigma = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34} =$$
$$= 2 \cdot 40 + 4 \cdot 30 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 25 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 50 = 535 \text{ (умовних одиниць.}$$

<u>Для перевірки збудованого плану на оптимальність необхідно по зайнятим клітинам побудувати систему потенціалів, а по вільним клітинам вирахувати систему оцінок</u>.

Кількість потенціалів в задачі дорівнює сумарній кількості ПВ та ПП (m + n = 7), тобто кожному ПВ та ПП відповідає числова величина, яка має назву ***«потенціал»***. Позначимо потенціали ПВ через $\alpha_i, i = 1,...,m$, а потенціали ПП через $\beta_j, j = 1,...,n$. Доповнимо табл. 2 ще одним стовпцем (α_i) і рядком (β_j).

<u>Значення потенціалів вираховують за такими правилами</u> (умовами):

<u>1)</u>. Потенціал першого рядка завжди повинен дорівнювати нулю - $\alpha_1 = 0$;

<u>2)</u>. Останні потенціали вираховують так: знаходять зайняту клітину $(x_{ij} > 0)$, для якої один з потенціалів відомий, а невідомий потенціал визначають з умови:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}. \qquad (7)$$

Розглянемо хід обчислень системи потенціалів для приведеного приклада, одразу заповнюючи табл.2.

Спочатку будуємо систему потенціалів:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\beta_1=2\\ \alpha_1+\beta_2=4\\ \alpha_2+\beta_2=2\\ \alpha_2+\beta_3=4\\ \alpha_2+\beta_4=3\\ \alpha_3+\beta_4=2\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь, використовуючи перше правило, що $\alpha_1 = 0$. Тоді $\beta_1 = 2, \beta_2 = 4, \alpha_2 = -2, \beta_3 = 6, \beta_4 = 5, \alpha_3 = -3.$

Якщо виконується рівненість:

$$c_\Sigma = c_1 + l_2 = \sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j, \quad (9)$$

то обчислення проведення правильно. У даному разі рівненість (9) виконується (535=-310+845).

<u>Далі перевіряємо побудований план на оптимальність</u>. Для цього по кожній вільній клітині $(x_{ij} = 0)$ вираховуємо оцінку Q_{ij} як різницю між вартістю c_{ij} та сумою її потенціалів, тобто

$$Q_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j). \quad (10)$$

Якщо для якоїсь вільної клітини (i, j) отримана оцінка негативна $(Q_{ij} < 0)$, то можна включити відповідний цій клітині маршрут в план, чим зменшити загальну вартість перевезень, тобто отримати кращій план. Кожна одиниця ресурса (продукта), яка буде перевезення по маршруту з негативною оцінкою, дасть економію на величину $|Q_{ij}|$. <u>Таким чином, наявність негативних оцінок показує, що план не є оптимальний, а якщо всі отримані оцінки більше нуля $(Q_{ij} > 0)$, то це є ознака оптимальності плана</u>.

Перевіримо для даного приклада:

$$\begin{aligned}&Q_{21} = 2-(-2+2) = 2;\\ &Q_{13} = 1-(0+6) = -5;\\ &Q_{14} = 6-(0+5) = 1;\\ &Q_{31} = 1-(-3+2) = 1+1 = 2;\\ &Q_{32} = 2-(-3+4) = 1;\\ &Q_{33} = 3-(-3+6) = 0.\end{aligned}$$

Результат перевірки показав неоптимальність плана, тому його треба поліпшити. Для цього необхідно побудувати цикл перерахунку для клітинки з оцінкою $Q_{ij} < 0$, у нашому випадку – це клітина (A_1, B_3). Щоб новий план був також допустимий і опорний, цикл перерахунку організують за визначеними правилами:

1). Цикл починається з вільної клітини, в якій $Q_{ij} < 0$;

2). Зміщуватись по рядкам чи стовпчикам, а повороти робити тільки в зайнятих клітинах під прямим кутом так, щоб повернутися до початкової клітини. В результаті маємо ломану замкнуту лінію з парною кількістю прямих кутів;

3). Вершини циклу (ломаної лінії) позначити знаками «+» і «-», починаючи знаком «+» у вільній клітини з $Q_{ij} < 0$;

4). Із негативних «-» вершини вибираємо елемент $\min x_{ij}$, додаємо його до клітинок позначених «+» і віднімаємо від клітинок позначених «-». При цьому баланси не порушаться, тобто план останеться допустимим, а оскільки загальна кількість зайнятих клітинок не зміниться m+n-1, то план буде опорним. Клітини, які не входять до вершини циклу своїх значень не змінюють.

Економія одиниці ресурса (продукта) дорівнює абсолютному значенню негативної оцінки $|Q_{ij}|$, відповідно загальна економія буде визначатись: $|Q_{ij}| \cdot \min x_{ij}$. Сума витрат по новому плану $C_H = C_П - |Q_{ij}| \cdot \min x_{ij}$, де C_H - витрати попереднього плана.

У нашому прикладі позначаємо клітину (1,3) знаком «+». Сполучимо клітинкою (2,3) і позначимо її знаком «-». Замкнемо коло, сполучивши клітинки (2,2) і (1,2), і позначимо їх відповідно «+» і «-» (табл.2).

Виберемо мінімальний елемент із негативних вершин (2;3) і (1,2):

$$\min(x_{23}; x_{12}) = x_{23} = 25.$$

Цей елемент додамо і віднімемо у відповідних клітинках. Матимемо новий план розв'язування задачі (табл. 3).

Таблиця 3

ПП / ПВ	B_1	B_2	B_3	B_4	ресурс (наявність) a_i	α_i
A_1	2 40	4 5	1 25	6	70	$\alpha_i = 0$
A_2	2	2 55	4	3 25	80	$\alpha_2 = -2$
A_3	1	2	3	2 50	50	$\alpha_3 = -3$
потреба в j	40	60	25	75	200	$C_1 = -310$
β_j	$b_1 = 2$	$b_2 = 4$	1	$b_4 = 5$	$C_2 = 720$	$C_\Sigma = 410$

Сума витрат складає: $C_H = 535 - |-5| \cdot 25 = 410.$

Для плану табл. 3 маємо:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= 2 \\ \alpha_1 + \beta_2 &= 4 \\ \alpha_1 + \beta_3 &= 1 \\ \alpha_2 + \beta_2 &= 2 \\ \alpha_2 + \beta_4 &= 3 \\ \alpha_3 + \beta_4 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 0; \\ \alpha_2 &= -2; \\ \alpha_3 &= -3; \end{aligned} \quad \begin{aligned} \beta_1 &= 2; \\ \beta_2 &= 4; \\ \beta_3 &= 1; \\ \beta_4 &= 5. \end{aligned}$$

Перевіримо правильність обчислень:

$$C_\Sigma = l_1 + l_2 = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_j = [80 \cdot (-2) + 50(-3)] + [40 \cdot 2 + 60 \cdot 4 + 25 \cdot 1 + 75 \cdot 5] =$$
$$= -310 + 720 = 410.$$

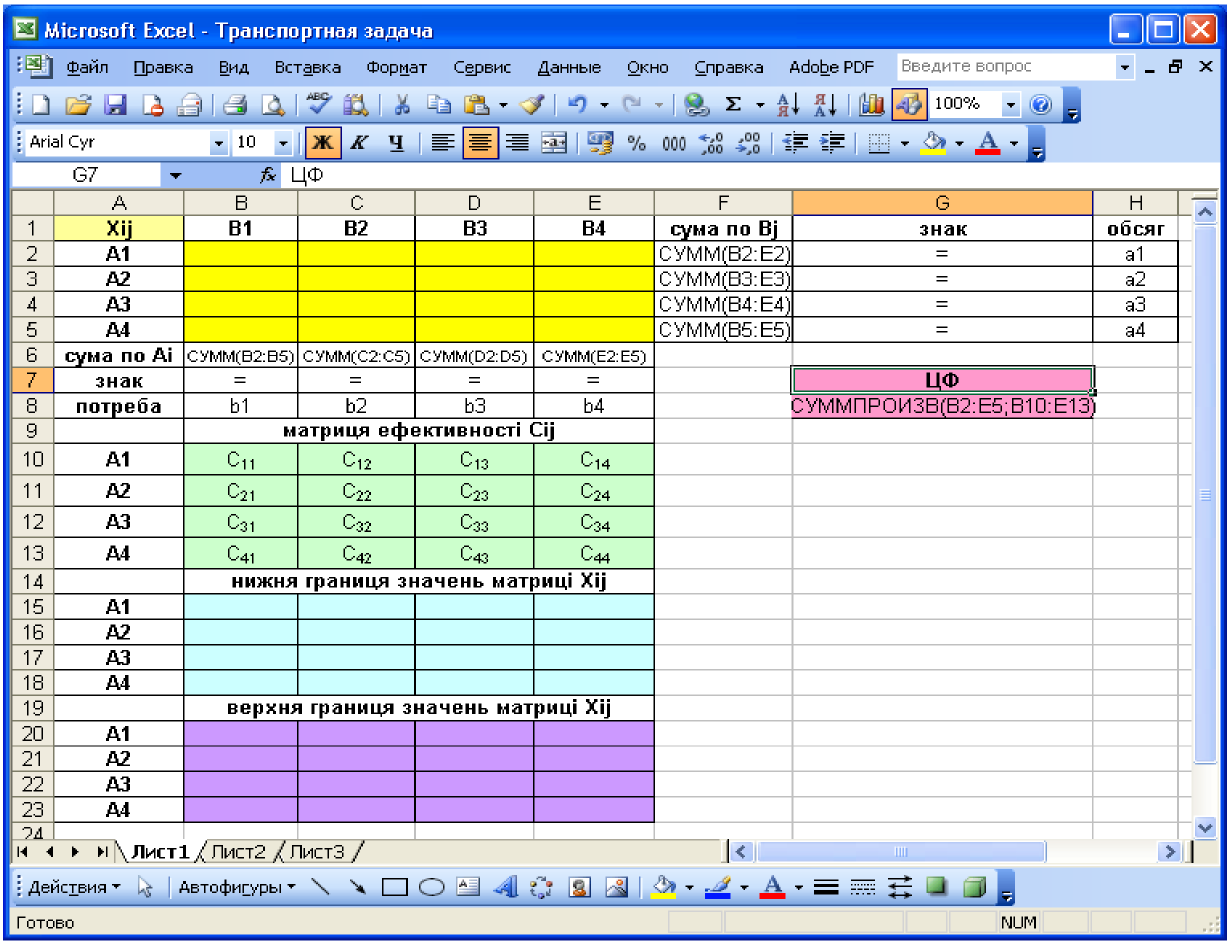
Дослідимо цей план на оптимальність:

$$Q_{21} = 2 - (-2 + 2) = 2;$$
$$Q_{31} = 1 - (-3 + 2) = 2;$$
$$Q_{32} = 2 - (-3 + 4) = 1;$$
$$Q_{23} = 4 - (-2 + 1) = 5;$$
$$Q_{33} = 3 - (-3 + 1) = 5;$$
$$Q_{14} = 6 - (0 + 5) = 1.$$

Результат показує, що план є оптимальний (тобто всі оцінки позитивні).

Необхідно відзначити, якщо є оцінки $Q_{ij} = 0$, то це вказує на те, що можна побудувати інший план розподілу ресурсу, але з однаковою вартістю перевезень, тобто альтернативний план.

Форма комп'ютерної моделі подана на рис. 1.


Microsoft Excel - Транспортная задача

G7 ЦФ

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Xij	B1	B2	B3	B4	сума по Bj	знак	обсяг
2	A1					СУММ(B2:E2)	=	a1
3	A2					СУММ(B3:E3)	=	a2
4	A3					СУММ(B4:E4)	=	a3
5	A4					СУММ(B5:E5)	=	a4
6	сума по Ai	СУММ(B2:B5)	СУММ(C2:C5)	СУММ(D2:D5)	СУММ(E2:E5)			
7	знак	=	=	=	=		ЦФ	
8	потреба	b1	b2	b3	b4		СУММПРОИЗВ(B2:E5;B10:E13)	
9		матриця ефективності Cij						
10	A1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}			
11	A2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}			
12	A3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}			
13	A4	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}			
14		нижня границя значень матриці Xij						
15	A1							
16	A2							
17	A3							
18	A4							
19		верхня границя значень матриці Xij						
20	A1							
21	A2							
22	A3							
23	A4							
24								

Рис. 1

Таким чином, методика розв’язування транспортної задачі методом потенціалів складається з таких етапів:

1. Будуємо опорний план, використовуючи, наприклад, спосіб «північно – західного кута», у вигляді таблиці.

2. Складаємо систему потенціалів, розв’язуємо її за відомими правилами, а результати заносимо до таблиці.

3. За формулою (9) перевіряємо правильність обчислень.

4. Для нашої вільної клітинки ($x_{ij} = 0$) вираховуємо оцінки Q_{ij} за формулою (10) і згідно критерію ($Q_{ij} > 0$) визначаємо оптимальність плана.

5. Якщо план неоптимальний, то для клітинки з $Q_{ij} < 0$ будуємо цикл перерахунку, формуємо нову таблицю (новий план) і починаємо аналіз спочатку.

7. Статистичні методи та моделі аналізу результатів досліду

7.1. Методи апроксимації функцій в задачах дослідження процесів і систем

У дослідженні процесів і систем набули широкого використання математичні моделі, які містять різні функціональні залежності. Наприклад, цільові функції в задачах оптимізації; виробничі функції для розрахунків нормативних коефіцієнтів; функції регресії виду $\bar{y} = f(\bar{x}, \bar{a})$, які виражають співвідношення “вхід–вихід” будь-якої системи ($\bar{x}$ – вектор вхідних факторів; $\bar{a}$ – вектор параметрів моделі, що належить визначенню за експериментальними даними; $\bar{y}$ – вектор відгуків – вихідні фактори). Регресивна модель будується для вивчення (дослідження) невідомих процесів у системах та оцінювання кількісних характеристик міжелементних зв’язків системи, наприклад: y = $a_0 + a_1x$ (рис. 1).

Рис. 1

Коефіцієнти a_0, a_1 характеризують процеси (поведінку) системи і визначаються за експериментальними даними: $\bar{x}_e$ та $\bar{y}_e$.

Щоб математичні моделі адекватно описували процеси і системи, необхідно використовувати досить адекватні функціональні залежності (математичні формули).

Таким чином, важливого значення набувають методи апроксимації – методи наближеного зображення реальних функцій такими стандартними аналітичними виразами, як, наприклад, алгебраїчні або тригонометричні багаточлени. Такі функції називають **апроксимуючими**.

У дослідженні процесів, систем початкові дані про апроксимуючу функцію $\bar{y} = f(\bar{x}, \bar{a})$ наводяться у вигляді дискретного ряду результатів вимірювань (експериментів) або проведених обчислень на ЕОМ.

У задачах апроксимації такими початковими даними є сукупність експериментальних або розрахованих (обчислених) значень $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ функції $y = f(x)$ у різних точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Інакше, початковою інформацією про функцію є вектор результатів вимірювань $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})^T$ на сітці $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

Розв’язок кожної задачі апроксимації складається:

1) з підбору деякої множини допустимих апроксимуючих функцій;
2) з вибору найбільш узгодженої з початковими даними функції з цієї множини.

Найбільш розповсюджений клас апроксимуючих функцій становлять узагальнені багаточлени.

Узагальненими багаточленами в базисі, складеному з функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)$, називають багаточлен виду

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \varphi_k(x), \tag{2.1}$$

де a_k – числові коефіцієнти.

Зокрема,

1) базис 1, $X, X^2, \ldots, X^K$ породжує алгебраїчні багаточлени

$$P(X) = \sum_{K=0}^{m-1} a_K x^K, (m = 0, 1, 2, \ldots); \tag{2.2}$$

2) базис, який складається з комплексних гармонік $1, e^{\pm j\frac{\pi}{L}x}$, $e^{\pm 2j\frac{\pi}{L}x}, \ldots e^{\pm kj\frac{\pi}{L}x}$ дає тригонометричні багаточлени

$$P(x) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{jk\frac{\pi}{L}x}, (m = 0,1,2,\ldots, L = 1,2,3,\ldots). \tag{2.3}$$

З алгебраїчними багаточленами пов’язані ще два важливі класи функцій, які використовують при апроксимації:

3) дрібнораціональні функції

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}; \tag{2.4}$$

4) сплайни (кусково-поліноміальні функції) – поліноми невисокого степеня, як правило третього (кубічного сплайну).

Важлива позитивна якість апроксимуючих багаточленів виду (2.1) – це їх лінійність відносно невідомих коефіцієнтів $\{a_k\}$, які треба знайти для побудови апроксимації, що дуже зручно і дозволяє будувати досить ефективні алгоритми найкращого приближення за допомогою таких функцій.

Вибір системи базисних функцій $\{\varphi(x)\}$ на практиці визначається: різними додатковими умовами (наприклад, необхідність досягти більшої швидкодії при обчисленні на ЕОМ); або аналітичними особливостями функції $f(x)$, яку необхідно апроксимувати (наприклад, якщо $f(x) \equiv 2L$ – періодична, то можливо, тригонометричному базису $\left\{e^{jk\frac{\pi}{L}x}\right\}$ слід надати перевагу).

7.2. Критерії узгодженості апроксимуючої функції з даними експерименту

Припустимо, що початковими даними апроксимованої функції $y = f(x)$ є використання результатів вимірювань (опиту) її значень

$$\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})^T \tag{2.5}$$

на сітці

$$x = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \tag{2.6}$$

і апроксимуюча функція $P(x)$ визначається формулою (2.1).

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \varphi_k(x)$$

при фіксованому значенні $m = const$ і визначеному виборі базисних функцій

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_{m-1}(x).$$

<u>*Задача*</u>. Як найкраще виконати “узгодження” вектора

$$\vec{p} = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_{n-1}))^T$$

з вектором результатів вимірювань $\bar{y}$ шляхом вибору потрібних коефіцієнтів a_k.

Дана постановка задачі отримає конкретний точний зміст після прийняття деякого критерію оптимальної узгодженості векторів $\vec{P}$ та $\bar{y}$.

На практиці частіше використовують такі два критерії (методи наближення функцій):

- *метод коллокації* – (інтерполяційне наближення – від лат. interpolatio – “змінювання”; в математиці – визначення проміжних значень величини за деякими відомими її значеннями);
- *метод найменших квадратів (МНК)*.

Метод коллокації – найпростіший метод узгодження функцій $P(x)$ та $f(x)$ – є проходження графіка функції $P(x)$ через n експериментальних точок $x_0, y_0, x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, (x_{n-1}; y_{n-1})$ або інакше – рівність векторів $\bar{P}$ та $\bar{Y}$ рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} P(x_0) = a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \ldots + a_{m-1}\varphi_{m-1}(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \ldots + a_{m-1}\varphi_{m-1}(x_1) = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(x_{n-1}) = a_0\varphi_0(x_{n-1}) + a_1\varphi_1(x_{n-1}) + \ldots + a_{m-1}\varphi_{m-1}(x_{n-1}) = y_{n-1} \end{cases} \quad (2.7)$$

У матричній формі

$$\Phi a = y\,, \quad (2.7а)$$

де

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0)\varphi_1(x_0)..\varphi_{ь-1}(x_0) \\ \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_1)..\varphi_{ь-1}(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_0(x_{n-1})\varphi_1(x_{n-1})..\varphi_{m-1}(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad (2.7б)$$

Виконання умов (2.7) називають *колокацією*, а узагальнений багаточлен $P(x)$, який задовольняє ці умови, є інтерполяційним багаточленом, тобто багаточленом, що інтерполює функцію $y = f(x)$ на сітці $X = \{x_0, x_1..x_{n-1}\}$.

Приклад. Дано $y = \{y_0, y_1..y_{n-1}\}$ на сітці $X = \{x_0, x_1..x_{n-1}\}$. Розглянемо найпростіші базисні функції $\varphi_0(x) = x^0 = 1; \varphi_1(x) = x$.

Знайти інтерполяційний багаточлен виду $P(x) = a_0 + a_1 x$ (тобто $m = 2$).

Розв'язок: система (2.7) має вигляд

$$\begin{Bmatrix} a_0 + a_1x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 = y_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 = y_0 - a_1x_0 \\ a_1x_0 - a_1x_1 = y_0 - y_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 = y_0 - a_1x_0 \\ a_1 = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{Bmatrix} \Rightarrow, \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 = y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 \\ a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Тоді багаточлен має вигляд

$$,\ P(x) = a_0 + a_1x = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x. \quad (2.9)$$

Отриманий багаточлен описує функцію, що вивчається (процес, систему), на проміжку значень сітки: $(x_1 - x_0);(y_1 - y_0)$.

Метод найменших квадратів

Постановка задачі. Нехай потрібно вивчити (дослідити) залежність між фізичними величинами y та x, які зв'язані деякою функціональною залежністю $y = f(x)$, вид якої невідомий і його потрібно визначити на основі експерименту. Результатами експерименту є обчислені або виміряні значення $f(x)$ на сітці $x = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$.

Оскільки експериментальні дані мають похибки (помилки), то задача ставиться таким чином: так обробити ці дані, щоб залежність між y та x відображалась з найбільшою точністю, щоб незакономірні помилки (похибки), які пов'язані з експериментом, були максимально згладжені.

Часто МНК називають **методом згладжування**. Він широко використовується в системах фільтрової обробки інформації, в системах екстраполяції (прогнозування) та ін.

Задача зводиться до визначення рівняння лінії – яка буде виражати реальну (потрібну) залежність. Вигляд лінії виражає вибір апроксимуючого багаточлена:

- лінійний $P(x) = a_0 + a_1 x;$
- степеневий $P(x) = a_0 a_1 x$;
- параболічний $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2$;
- гіперболічний $p_x = a_0 + a_1$ тощо.

Нехай це буде лінійна тенденція

$$y = a_0 + a_1 x. \tag{2.10}$$

Підстановка в рівняння (2.10) замість значень $x_0, x_1,..., x_{n-1}$ дає нам ординати точок прямої, які не збігаються з ординатами точок $D_0, D_1,...$.Тому різниці між ними

$$\Delta_0 = a_0 + a_j x_0 - y_0 = D_0 D_0;$$
$$\Delta_1 = a_0 + a_1 x_1 - y_1 = D_1 D_1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad .$$
$$\Delta_{n-1} = a_0 + a_1 x_{n-1} - y_{n-1} = D_{n-1} D_{n-1}.$$

Як правило $\Delta_i \neq 0$.

Змінюючи параметри a_0 і a_1 (інакше, вибираючи то одну пряму то другу), можна змінювати величини відхилень $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_{n-1}$, а потім знаходити мінімум суми відхилень (або нев'язок) і визначати коефіцієнти a_0, a_1; тобто

$$\sum_{i=0}^{n-1} (P_i(x) - y_i) \Rightarrow \min. \tag{2.11}$$

Однак, даний спосіб супроводжується суттєвим недоліком. Різниці $\Delta_i = P_i(x) - y_i$ можуть виникати з різними знаками (+ або –).

Тому якщо знаходити суму відхилень у деяких експериментах, то можна отримати малу величину відхилення помилково, за рахунок взаємовилучення складових більшої величини, але різних знаків (рис. 2).

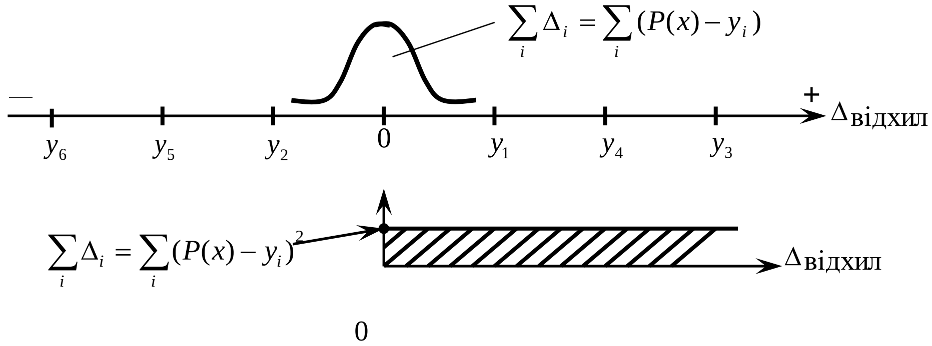


Рис. 2

Уникнути цього недоліку дозволяє міра відхилення (критерій), яка була запропонована французьким математиком Лежандром (і паралельно Гауссом) у 1806 році, – брати суму квадратів відхилень.

Таким чином, метод апроксимації, суть якого є мінімізація суми квадратів нев'язок ($P(x) - y_i$), веде свій початок від праць таких класиків математичної науки, як Лежандр і Гаусс, і називається **методом найменших квадратів**

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \big(P(x_i) - y_i \big)^2 \Rightarrow \min. \tag{2.12}$$

Формула читається так: мінімум суми квадратів "нев'язок".

Одне з можливих узагальнень формули (2.12) – це "ваговий" МНК:

$$S_q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \big(P(x_i) - y_i \big)^2 \Rightarrow \min, \tag{2.13}$$

де $q_i \equiv q_0, q_1, ..., q_{n-1}$ – дійсні додатні числа (ваговий коефіцієнт). У матричній формі: $\underline{Q} = diag(q_0, q_1, ..., q_{n-1})$ – матриця вагових коефіцієнтів.

Причина (джерело) появи вагових коефіцієнтів – це неоднакова точність вимірювань, які проводяться в різних точках сітки X. Тому вибирають значення q тим більше, чим точніше проводилось вимірювання величини y_i.

Для простоти приймемо, що $q_0 = q_1 = ... = q_{n-1} = 1$.

Подамо формулу (2.12) у вигляді:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} a_k \varphi_x(x_i) - y_i \right]^2 \Rightarrow \min. \tag{2.12a}$$

Таким чином, побудова оптимального апроксимуючого багаточлена $P(x)$ зводиться до знаходження коефіцієнтів, які мінімізують функцію $S \Rightarrow \min$, тобто

$$\begin{gathered} a_k = \arg\min S(a_k) \\ a_k \in R^m \end{gathered} \tag{2.14}$$

(аргумент, що мінімізує функцію $S(a_k)$), $R^m - m$ — мірний простір.

Як відомо з курсу математичного аналізу, необхідною умовою екстремуму (функції декількох змінних) є обернення в нуль її частинних похідних у цих змінних:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.15}$$

Розглянемо задачу обчислення коефіцієнтів aк для полінома першого степеня (лінійна функція $\varphi_k(\alpha)$): $P(x_i) = a_0 + a_1 x_i$.

Підставляємо значення $P(x)$ у формулу (2.12):

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 \tag{2.16}$$

Запишемо систему частинних похідних і прирівняємо їх до нуля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{2.17}$$

Розкриваємо дужки у формулі (2.16):

$$\begin{aligned} &[(a_0 + a_1 x_i) - y_i]^2 = (a_0 + a_1 x_i)^2 - 2(a_0 + a_1 x_i) y_i + y_i^2 = \\ &= a_0^2 + 2a_0 a_1 x_i + a_1^2 x_i^2 - 2a_0 y_i - 2a_i x_i y_i + y_i^2. \end{aligned}$$

Підставимо у систему (2.17):

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \frac{\partial \sum_{i=0}^{n-1}}{\partial a_0} \left(a_0^2 + 2a_0 a_i x_i + a_1^2 x_i^2 - 2a_0 y_i - 2a_1 x_i y_i + y_i^2 \right) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2a_0 + 2a_1 x_i - 2y_i) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_1 x_i - \sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0 \,;$$

$$n a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \,.$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_0^2 + 2a_0 a_1 x_i + a_1^2 x_i^2 - 2a_0 y_i - 2a_1 x_i y_i + y_i^2 \right) = 0 \,;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(2a_0 x_i + 2a_1 x_i^2 - 2x_i y_i \right) = 0 \,;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_0 x_i + \sum_{i=0}^{n-1} a_1 x_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = 0 \,;$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n-1} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i \,.$$

У результаті отримуємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} & n a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ & a_0 \sum_{i=0}^{n-1} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i \end{aligned} \right\} \tag{2.18}$$

Для зручності можна ввести позначення

$$r_0 = \sum_{i=0}^{n-1} y_i; \quad r_1 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i$$

$$\delta_1 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i; \quad \delta_2 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2;$$

Розв’язуючи систему (2.18) відносно a_0 та a_1, маємо

$$\left\{ \begin{aligned} & a_0 = \frac{r_0 \delta_2 - r_1 \delta_1}{n\delta_2 - \delta_1^2} \\ & a_1 = \frac{n\delta_1 - r_0 \delta_1}{n\delta_2 - \delta_1^2} \end{aligned} \right\} \tag{2.19}$$

або після підстановки

$$\left\{ \begin{aligned} & a_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} y_i \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i \sum_{i=0}^{n-1} x_i}{n \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \right)^2} \\ & a_1 = \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i - \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sum_{i=0}^{n-1} x_i}{n \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \right)^2} \end{aligned} \right\} \tag{2.20}$$

Після обчислення коефіцієнти a_0 і a_1 отримують конкретні числові значення, які підставляються в апроксимуючий багаточлен $P(x)$.

Таким чином, методика оцінки результатів експериментів за допомогою МНК складається з етапів:

I. Обирають апроксимуючу функцію $\varphi(x)$.

II. Визначають $\min S$, як $\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0;$ тобто знаходять систему частинних похідних і прирівнюють їх до нуля.

III. Розв'язують систему рівнянь відносно коефіцієнтів a_k.

IV. Записують апроксимуючий поліном $P(x)$ з урахуванням числових значень коефіцієнтів $P(x)$.

Кількість лінійних рівнянь повинна бути не меншою за кількість незалежних коефіцієнтів. При цьому чим більше вимірювань, тобто чим більшою мірою система перевизначена (надлишок інформації), тим краще, бо тоді випадкові помилки (похибки) окремих вимірювань вилучають одна одну і рішення стає більш достовірним, тобто багаточлен P(x) більш адекватно описує систему або процес, що вивчається.

7.2. Лінійна регресія за допомогою функцій, лінійного тренду та пакета аналізу

При дослідженні, вивченні явищ, процесів, взагалі систем, важливу роль відіграють взаємозв'язки між елементами системи (в процесах, явищах). Зв'язки бувають різні за природою та характером. Розрізняють два види зв'язків:

- *детерміновані*, рис. 3;
- *стохастичні (випадкові, імовірнісні)*, рис. 4.

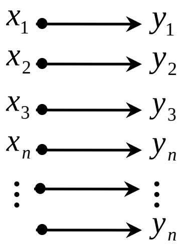


Рис. 3

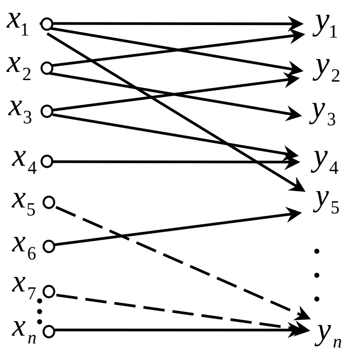


Рис. 4

При стохастичному зв'язку кожному значенню <u>факторної ознаки</u> (вхідного фактора) X від повідає <u>множинне значення результативної ознаки</u> (результат або вихідний фактор) Y, яка утворює деяке розподілення (яке, як правило, можна заставити з відомим законом розподілення). Частим випадком стохастичного зв'язку є <u>кореляційний зв'язок</u> – при якому кожному значенню (або групі значень) фактора X відповідає середнє значення результату $\overline{Y}$. Основною характеристикою кореляційного зв'язку є <u>лінія регресії</u> – це функція, яка зв'язує середні значення результату $\overline{Y}$ зі значеннями фактора X. Взагалі, <u>регресія</u> (або <u>регресійний аналіз</u>) – це група методів та прийомів визначення аналітичних виразів зв'язків у вигляді математичної функції (багаточлена). <u>Лінія регресії</u> може бути представлена: *аналітичним, табличним або графічним способами*.

Найчастіше використовують такі функції:

$y = a_0 + a_1 x$ – лінійне;

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ – параболічна;

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ – поліном n - го степеню;

$y = a_0 x^{a_1}$ – степеневі;

$y = a_0 a_1^x$ – показникова,

де $a_0, a_1, ..., a_n$ - параметри рівняння регресії (коефіцієнти регресії).

Параметри рівняння регресії визначається методом найменших квадратів (МНК).

Термін «лінійна регресія» означає, що рівняння, які використовуються для опису даних, лінійні відносно своїх коефіцієнтів, тому графік лінії не обов'язково буде лінійним.

Виконання лінійної регресії за допомогою функцій Excel

Для простої регресії, коли залежність величини нагадує лінійну функцію $y = a_0 + a_1 x$, можна використовувати статистичні функції Excel:

НАКЛОН (значение Y; знач $\_x$) – визначає нахил лінії регресії (кутовий коефіцієнт (slope) - a_1);

ОТРЕЗОК (значение $\_Y$; знач $\_x$) – визначає точку перетину лінії регресії з віссю ординат «Y» (intercept) – коефіцієнт a_0;

КВПИРСОН (значение $\_Y$; знач $\_x$) – обчислює квадрат коефіцієнта кореляції (coefficient of determination) - R^2, або достовірність апроксимації (ступінь вірності розрахованих показників лінії регресії a_0 або a_1).

Лінія тренду

Побудова лінії тренду (тренд – тривала тенденція змінювання показників) – це графічний метод регресійного аналізу, тобто наочне подання лінії регресії в графічній формі.

Алгоритм:

1. Виділити весь діапазон значень ряду X та Y разом із заголовками.
2. Кнопка «Майстер діаграм» (або меню Вставка).
3. Вибрати тип діаграми: «точечная». За необхідності ввести параметри діаграми.
4. Кнопка «Готово». З'явиться точкова діаграма.
5. Контекстне меню на будь – якій точці розподілу.
6. Вибрати «Добавить линию тренда».
7. Вказати тип лінії (вибрати базову функцію апроксимації):

- лінійна: $y = a_0 + a_1 x$;
- логарифмічна: $y = a_0 + a_1 \ln(x)$;
- степенева: $y = a_0 x^{a_1}$;
- експоненціальна: $y = a_0 e^{a_1 x}$;
- поліноміальна (додатково указати степінь поліному від 2 до 6):

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3;$$

....

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6.$$

8. Вкладника «Параметри», встановити прапорці «Показать уравнение на диаграмме» та «Поместить на диаграмму величину достоверности апроксимации R^2».

При необхідності можна додати інші параметри: змінити назву апроксимуючої функції; вказати прогноз вперед або назад на потрібну кількість одиниць; встановити прапорець «Пересечение кривой с осью Y в точці О» (на початку координат).

9. Кнопка «ОК» завершує операцію і на екрані з'являється лінія тренду, рівняння та достовірність R^2.

Пакет регресійного аналізу

Пакет регресійного аналізу надає більше можливостей аналізу даних ніж попередні два методи. Його використовують, коли необхідно:

- отримати більш детальну інформацію про регресійний процес, яку неможливо отримати за допомогою лінії тренду;
- використати будь – яку модель регресії (лінія тренду, якої відсутня).

Алгоритм:

1. Ввести початкові дані $\overline{X}$ та $\overline{Y}$. Кількість векторів $\overline{x}(\overline{x}_1, \overline{x}_2...)$ та значення величини $(\overline{x}_i, \overline{y})$ визначають тип моделі, наприклад:

$$\overline{y} = a_0 + a_1 \overline{x};$$
$$\overline{y} = a_0 + a_1 \overline{x} + a_2 \overline{x}^2;$$
$$\overline{y} = a_0 + a_1 \sin(\overline{x}) + a_2 \tan(\overline{x}^2);$$
$$\overline{y} = a_0 \exp(\overline{x}^{0,5}) + a_1 \ln(\overline{x});$$
$$\overline{y} = a_0 + a_1 \overline{x}_1 + a_2 \overline{x}_2 + ... + a_i \overline{x}_i \text{ тт інші.}$$

Всі моделі лінійні відносно коефіцієнтів a_i. Пакет регресійного аналізу в Excel дозволяє працювати з будь – якою лінійною моделлю.

2. Меню <Сервіс>, Анализ данних, Регрессия (якщо команда «.Анализ данних» відсутня, то меню <Сервіс>, Надстройки, Пакет анализа). Після вибору «Регрессия» - кнопка «ОК». На екрані з'являється вікно «Регрессия».

3. Ввести вхідні параметри:

- «входной интервал Y : ;
- «входной интервал X : ;

при необхідності, щоб лінія регресії проходила через початок координат – встановити прапорець «Константа – ноль».

4. Вказати параметри виводу:

- *розміщення результатів аналізу:*
  ключ «выходной интервал», або
  ключ «новый рабочий лист», або
  ключ «новая рабочая книга»;
- *результати у графічному вигляді:*
  прапорець «График остатков»,
  прапорець «График подбора» (лінія регресії).

«Остаток» (residual) – це різниця між значеннями $\overline{Y}$ - фактичними даними і значеннями $\overline{Y}_p$ - розрахованими для побудови лінії регресії. «График остатков» дозволяє виявити наочно неспівпадання значень: $\Delta_y = \overline{Y}_p - \overline{Y}$.

5. Кнопка «ОК». На екран виводиться:

- *таблиці з підсумками регресії:*

«Регрессионная статистика» містить значення R, R^2, стандартну похибку, кількість спостережень;

«Дисперсионный анализ» містить значення статистичних характеристик:

df - кількість степенів свободи (незалежності значення, змінної);

SS - сума квадратів відхилень;

MS - дисперсія, як відношення SS/df;

F - відношення дисперсії регресії до дисперсії «остатка» (залишку);

«Значимость F» − рівень значимості, який розраховується як *MS Регрессия / MS Остаток*. Рівняння регресії значимо (вагомо) для прогнозування, якщо вираз: *1 − «Значимость F* $\Rightarrow 1$;

коефіцієнти $a_0, a_1 ... a_к$ та їх статистичні характеристики;

- *графіки підбору (лінія тренда) та графік залишків («остатков»).*

Таким чином, загальна методика використання пакету регресійного аналізу складається з таких процедур:

1). Вибір моделі лінійної регресії, введення початкових даних;

2). Виконання регресійного аналізу засобами Excel;

3). Розміщення результатів та їх аналіз.

Визначення коефіцієнтів рівнянь лінійної регресії для багатофакторної задачі

Для отримання рівняння необхідно:

- визначити значення a_0, a_i;
- оцінити достовірність отриманого рівняння.

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i .$$

Формат функції:

= ЛИНЕЙН (інтервал значень y ;блок значень x_i ; константа; статистика).

	ИСТИНА	ЛОЖЬ
константа	$a_0 \neq 0$	$a_0 = 0$
статистика	оцінка достовірності	оцінки немає

Якщо константу не призначити, то результат буде поданий у формі, як при введенні ИСТИНА, тобто $a_0 \neq 0$. Якщо не призначати статистику, то результат буде таким, як при введенні ЛОЖЬ, тобто дані для оцінки достовірності подані не будуть.

Приклад:

$$x_1 = \{120,200,300,400,500,860\}$$
$$x_2 = \{450,960,145,212,265,312\}$$
$$y = \{4500,8000,3000,5500,5400,6500\}.$$

Визначити рівняння регресії:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 .$$

Алгоритм:

	A	B	C	D
	1. Ввести початкові дані			
	Початкові дані			
	Об'єкт	*вироблено* x_1	*якість* x_2	*ціна* y

4	A_1	120	450	4500
5	A_2	200	960	8000
6	A_3	300	145	3000
7	A_4	400	212	5500
8	A_5	500	265	5400
9	A_6	860	312	6500
	2. Графічні значення:			
11	min	120	145	
12	max	860	960	
<u>*Результат:*</u>				
	3. Рівняння регресії:			
14		5,7	3,9	1721
15		1,26	1,41	933
16		0,88	769	# Н/Д
17		10,77	3	# Н/Д
18		12735231	1773102	# Н/Д

Визначити min і max значення змінних:

- виділити комірку B11;
- $\boxed{fx}$ ⇒ Статистическая ⇒ <u>мин</u>;
- ввести інтервал B4:B9;
- натиснути «Готово».
- виділити комірку B12;
- $\boxed{fx}$ ⇒ Статистическая ⇒ <u>макс</u>;
- ввести івнтервалB4:B9;
- скопіювати B11:B12 у C11:C12;
- виділити блок B14: D18 (рядків завжди 5, стовпчиків n + 1 = 2 + 1 = 3);
- ввести функцію : = линейн (D4: D9; B4:C9; истина; истина);
- завершити операцію:[Shift] + [Ctrl] + [Enter].

На екрані результат обчислень:

	A	B	C	D
14		a_2	a_1	a_0
15		$\delta(a_2)$	$\delta(a_1)$	$\delta(a_0)$
16		R^2	$\delta(\partial)$	
17		$F_{розп}$	df	
18		SS_{reg}	SS_{resid}	

де $\delta(a_2)$, $\delta(a_1)$, $\delta(a_0)$ - СК відхилення;

R^2 - характеризує достовірність: $R^2 \to 0$ – низька достовірність, $R^2 \to 1$ – висока достовірність (тобто функціональна залежність існує).

df - число ступенів свободи: $df = k-(n+1) = 3$, де k - кілька рядків початкових даних ($k = 6$), $n = 2$ (число аргументів);

SS_{reg} - регресійна сума квадратів;

SS_{resid} - залишкова сума квадратів.

<u>Таким чином, рівняння регресії має вигляд:</u>

$$y = 1721 + 3{,}9x_1 + 5{,}7x_2.$$

!! Це рівняння вірно в межах визначених min і max значень змінних

$$120 \le x_1 \le 860; 145 \le x_2 \le 960.$$

$\delta[a_0], \delta[a_i]$ - середні квадратичні відхилення отриманих значень;

$\delta(\partial)$ - стандартна помилка для оцінки y;

$F_{розп}$ - F - статистика використання для визначення того, чи є випадковим або ні взаємозв'язок між залежною і незалежною змінними, що спостерігаються.

Оцінка достовірності рівняння регресії

Оцінка достовірності рівняння регресії поділяється на два етапи:

- оцінка достовірності залежності y від x;
- оцінка достовірності визначених величин a_0 та a_i.

1. Оцінка достовірності залежності y від x_i:

проводиться відносно величини $R^2: R^2 \to 0$ – відсутність залежності; $R^2 \to 1$ – наявність залежності.

Визначають також достовірність самої величини R^2 за допомогою F-розподілення, яке визначає P - імовірність того, що залежність y від x_i відсутня, а $(1-P)$ - імовірність того, що залежність y від x_i має місце.

Порядок обчислення:

1. Визначити комірку для результату «P» (наприклад, F 17).
2. «Мастер функций» ⇒ Статистические ⇒ F РАСП ⇒ д. в. ввести дані:

Формат функції:
= F РАСП (B17; 2; C17)

$$\begin{cases} x = F_{расп} \text{ в комірку B17} \\ \text{степінь свободи1} = \text{кількість аргументів} (n = 2) \\ \text{степінь свободи2} = df = \text{C17.} \end{cases}$$

3. Натиснути «Готово».
4. Ввести $1-P$: (в G17 = 1 – F 17).

На екрані: G17 = 0,96.

2. Оцінка достовірності визначених величин a_0 та a_i:

визначається за допомогою імовірності розподілення Стьюдента .

Алгоритм:

1. Обчислити величини $t_i = \dfrac{a_i}{\delta_i}$ (наприклад, в B21:D21).
2. Визначити імовірність β того, що значення a_i та δ_i не достовірні:

- курсор в B22;
- $\boxed{fx}$ ⇒ Статистика ⇒ Стьюдент ⇒ д.в. ввести дані:

$x = t_i$ в комірку B21

степінь свободи $= df$ в C17

хвости - 2 (це ознака 2 - степеневого розподілення Стьюдента, що використовується.

3. Натиснути «Готово».

На екрані: B22 = 0,02

4. Визначити $(1-\beta)$ - імовірність, що значення a_i достовірні:

   - курсор в B23;

- ввести в B23 = 1 – B22

Результат: 0,98.

5. Скопіювати B22:B23 у комірки C22:D23.

Алгоритми згладжування (фільтрації).

Програма Excel містить засоби фільтрації, які входять до складу пакету «Аналіз даних». Алгоритми фільтрації основуються на методах «ковзного середнього» та «експоненціального згладжування».

Метод «ковзного середнього» (лінійного згладжування).

Рівняння методу подається у вигляді:

$$y_{\phi_i} = \frac{y_i + y_{i+1} + ... + y_{i+k-1}}{\Delta t},$$

де y_{ϕ_i} - згладжене значення (фільтрування);

y_i - початкові значення (точки вимірювань, спостережень тощо);

K - кількість точок згладжування y_i;

Δt - інтервал згладженості – визначається кількістю точок K (на практиці обирають $K = 3...5$).

Метод реалізується в Excel інструментарієм «лінії тренду» та «пакета аналізу». «Лінія тренду» дає можливість спостерігати результат фільтрації тільки у графічному вигляді (згладжуюча лінія). Перевага «Пакета аналізу» - наявність відповідного фільтру, який дозволяє вивести результати не тільки в графічній, а й у табличній формі.

Спосіб 1 – фільтрація інструментом «лінії тренду».

Алгоритм побудови лінії тренду стандартний, тільки необхідно вибрати тип лінії – «Линейная фильтрация» та вказати кількість точок «K», за якою буде проводитись згладжування (усереднення).

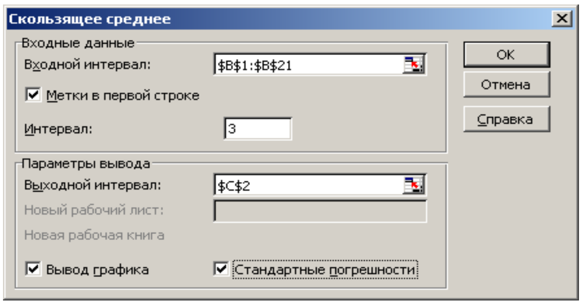
Особливість: на практиці вибирають $K = 3...5$, оскільки велика кількість точок погіршує точність згладжування.

Спосіб 2 – лінійна фільтрація засобами пакета аналізу.

Реалізується цей спосіб командою меню «Сервіс», «Аналіз данных», «Скользящее среднее». Після активізації команди з’являється відповідне діалогове вікно, яке заповнюють потрібними параметрами (рис. 5):

- у полі «входной интервал» ввести діапазон посилань до комірок з початковими даними y_i для згладжування;
- ключ (прапорець) «метки в первой строке» активізують у випадку, коли в першій рядок введений підпис даних (атрибут, назва стовпчика);
- у полі «Інтервал» ввести кількість точок «K», то аналізуються. Якщо поле не заповнено, то згідно замовченню використовується $K = 3$;
- у полі «выходной интервал» ввести посилання до комірки, з якої почнеться заповнення результуючого діапазону;

прапорці «Вывод графика» та «Стандартные погрешности» активізують процедури виводу графіків (фактичного і прогнозу), а також обчислюються стандартні похибки і розміщуються у стовпчик праворуч значень ковзного середнього (згладжених значень y_{ϕ_i}).



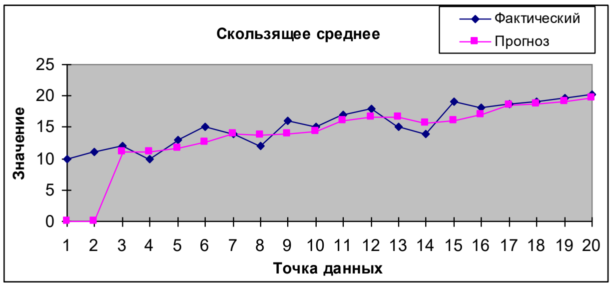


Рис. 5

Метод експоненціального згладжування

Математичне рівняння (модель) методу можна подати так:

$$\hat{y}_{\phi_{i+1}} = \alpha\, y_i + (1-\alpha)\,\hat{y}_{\phi_i},$$

де y_i - фактичне значення із набора початкових даних;

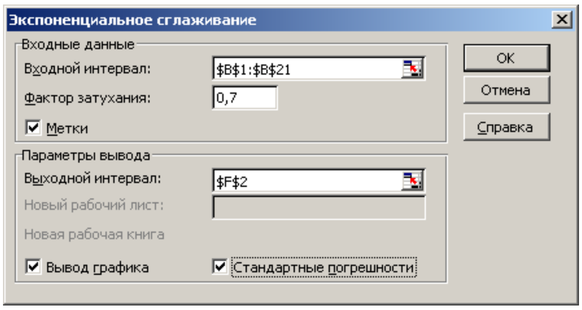
$\hat{y}_{\phi_i}$ - згладжене значення;

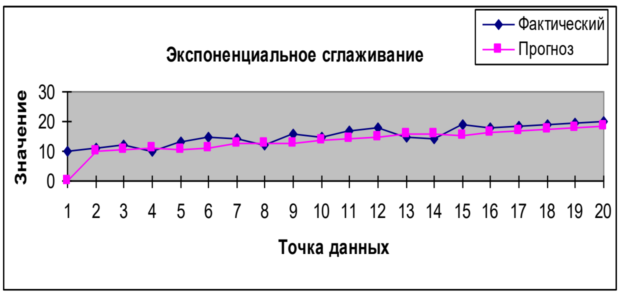
$\hat{y}_{\phi_{i+1}}$ - згладжене значення наступного інтервалу;

α - фактор згасання (коефіцієнт послаблення) визначається нерівністю: $0<\alpha<1$; чим більше $\alpha(\alpha \to 1)$, тим більше значимі фактичні дані y_i та слабкіше згладжування; для сильного згладжування використовують значення $0{,}01 \le \alpha \le 0{,}3$ (у даному випадку більш значимі згладжені значення).

Технологія експоненціального згладження аналогічна методу лінійного згладжування (ковзного середнього) за винятком:

- у вікні «Анализ данных» активізувати команду «Экспоненциальное сглаживание»;
- замість параметра «Интервал» використовується поле «Фактор затухания», куди ввести значення α , рис. 6.





8. Методи прогнозування.

Однією з головних задач моделювання процесів в системах є прогнозування з метою оптимізації рішень, що приймаються, щодо забезпечення мінімального ступеня негативного антропогенного впливу, а також своєчасного попередження та уникнення можливих кризових ситуацій.

Прогнозування– це процес передбачення перспектив розвитку систем (об’єктів, ситуацій), який базується на відповідній методології (сьогодні – системній методології передбачення), що складається з кількісних та якісних методів та методик (рис.1)

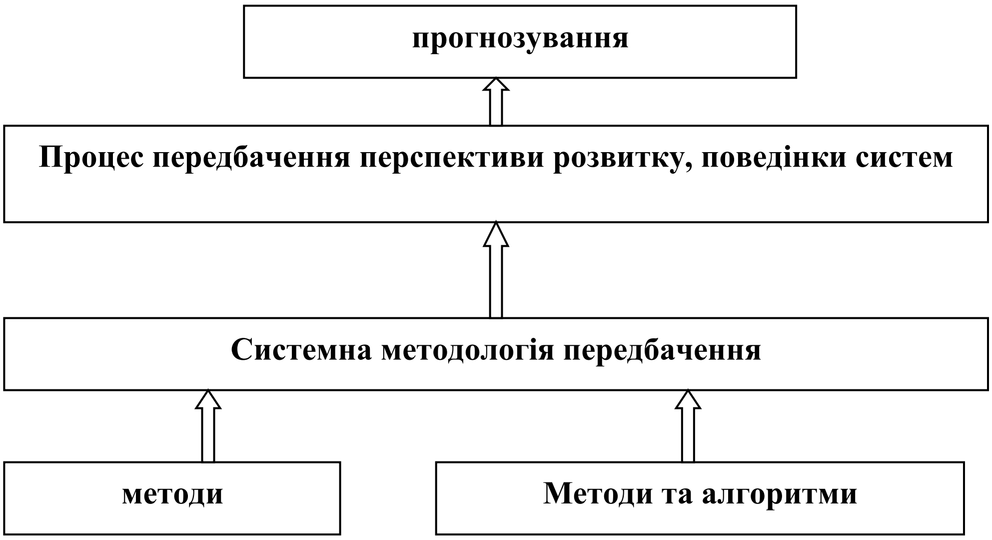


Рис.1

Результатом прогнозування є сукупність зібраних та оброблених даних різної форми подання (вербальна, числова, таблична, графічна, знакова і т.п.)та їх інтерпретація, тобто результатом прогнозування є інформація (прогноз), яка використовується для підготовки множини рішень (альтернатив) та вибору із них оптимального, рис.2.

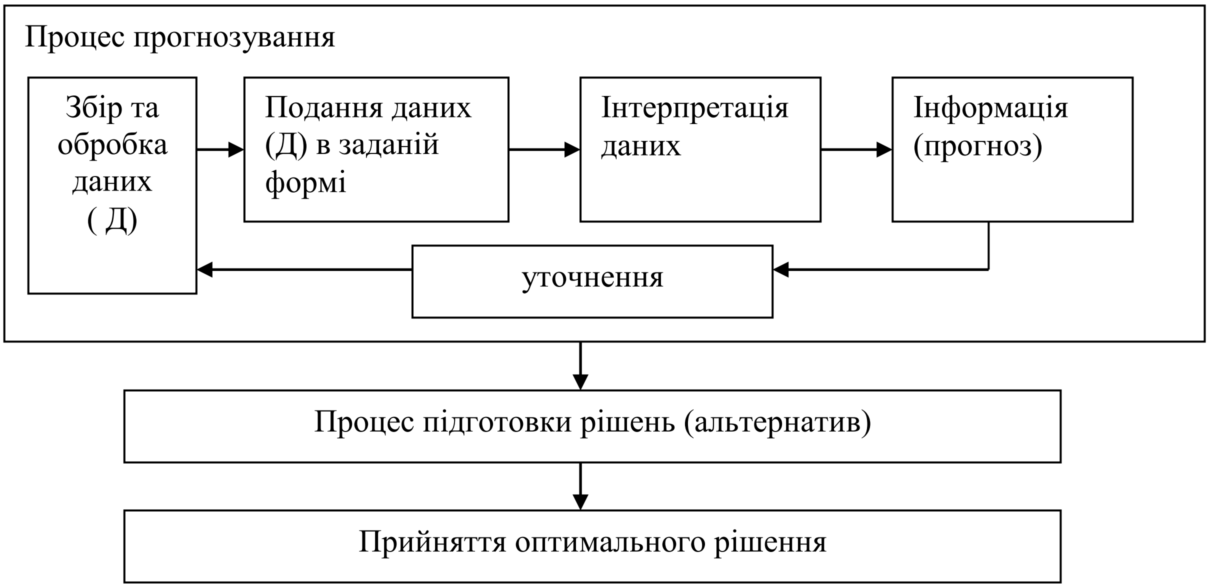


Рис. 2

Класифікація прогнозів

<u>За терміном прогнозування</u>:

- короткочасні (оперативні)−1-2 роки;
- прогнози середньої тривалості−5-10 років;
- довгострокові прогнози−15-25 років;
- наддовгострокові прогнози−50-100 років.

<u>За масштабами передбачуваних явищ:</u>

- глобальні (фізико-географічні);
- регіональні (в межах кількох країн, материка, океану);

- національні (в межах країни);
- локальні.

Методи прогнозування, як інструменти будь-якого прогнозу, основуються на формальній та прогнозній екстраполяції.

<u>Формальна екстраполяція</u> базується на врахуванні попередніх тенденцій розвитку системи (об'єкта).

<u>Природна екстраполяція</u> основується на гіпотезах про динаміку процесу (системи), що досліджується з урахуванням в перспективі його фізичної та логічної суті.

Методи прогнозування можна поділити на дві групи: евристичні (інтуїтивні) та формалізовані (рис.3).

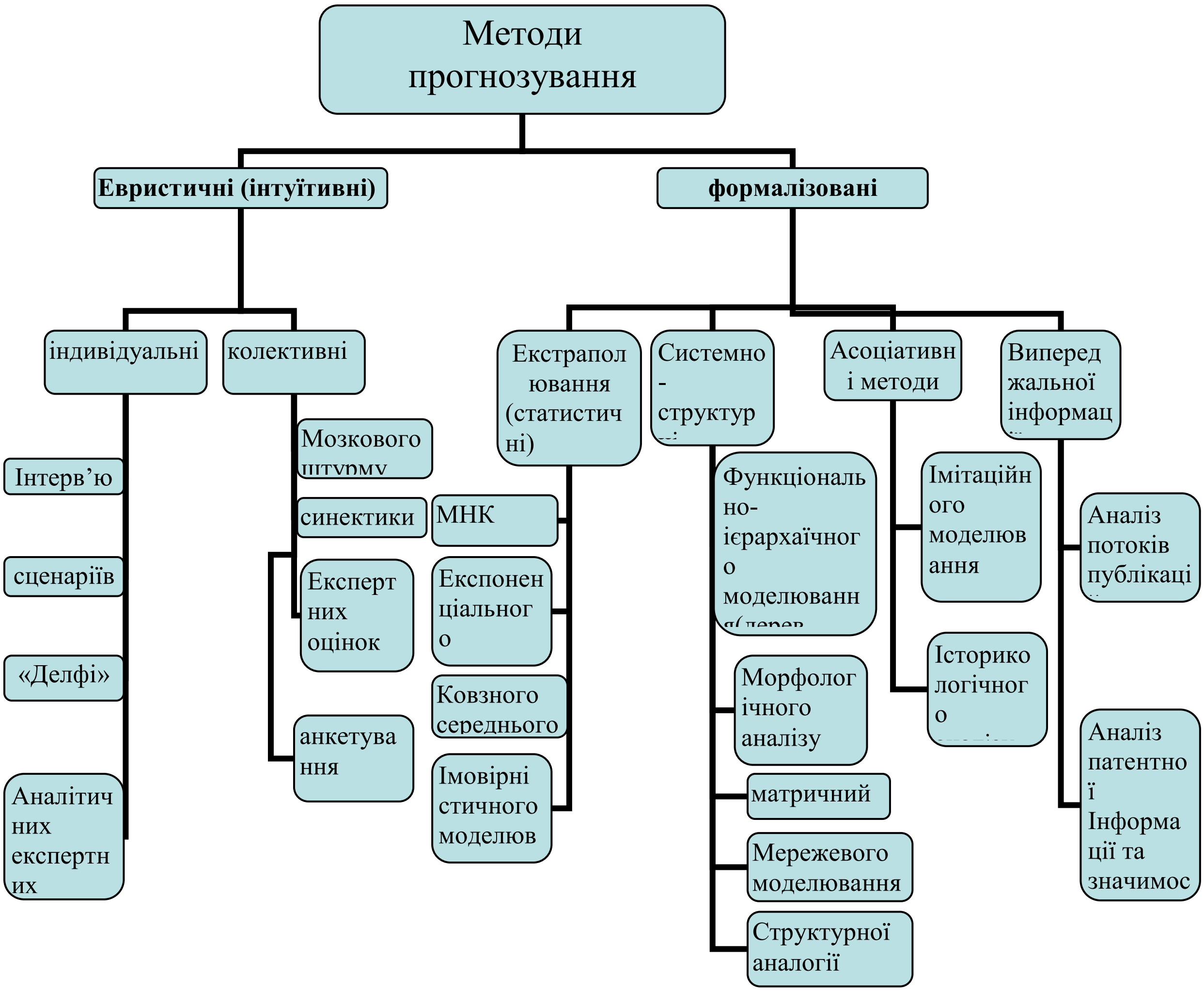


Рис. 3

Прогнозування в Excel.

Прогноз може основуватись на інтуїції, ясно баченні, ворожбі тощо. В Excel прогноз основується тільки на статистичних методах, які використовують показники попередніх періодів. Дані методи базуються на тому, що спочатку вивчається стратегія процесу за минулий період, а далі на її основі будується прогноз. Цю стратегію ще називають базовою лінією даних.

Тобто базова лінія є типовими результатами спостережень, які проводились протягом тривалого часу. Точність прогнозу залежить від вимог до базової лінії:

- починати побудову базової лінії потрібно з результатів самих ранніх спостережень і закінчувати останніми;
- всі часові періоди спостережень повинні бути однакові. Не слід змішувати дані за різні періоди. Наприклад, дані за день з середніми показниками за декілька днів.
- спостереження повинні фіксуватися в один і той же момент кожного часового періоду. Наприклад, при складанні базової лінії на основі добових (щоденних) спостережень фіксувати дані в один і той же час;
- пропущення даних не допускається. Тому, якщо відсутні дані спостережень за незначний період, доцільно буде їх доповнити наближеними даними.

Методи прогнозування враховують характер протікання процесів і значення випадкової величини часового ряду. Якщо варіація середніх значень незначна, для прогнозу на короткі інтервали часу використовують метод ковзного середнього. Якщо перші значення мають меншу значимість для прогнозу, а наступні значення мають більшу значимість для прогнозу, то використовують метод експоненціального згладжування. Дані методи розглянуті у першому питанні.

Для прогнозування також використовуються статистичні функції «Тенденция» та «Рост», які відносяться до функції регресійного аналізу.

Функція «Тенденция» апроксимує прямою лінією, а функція «Рост» експонентою, за методом найменших квадратів, масив відомих значень $\overline{Y}$ на сітці $\overline{x}$:

$$"\textit{Тенденция}" \Rightarrow \overline{y} = a_0 + a_1{}^* \overline{x};$$

$$"\textit{Рост}" \Rightarrow \overline{y} = a_0{}^* \exp\left(a_1 \overline{x}\right).$$

Параметри функцій однакові (для обох функцій): «Тенденция» (значення $\overline{Y}$; старі значення $\overline{x}$; нові значення $\overline{x}$ для прогнозу; логічна константа: якщо «1» - a_0 обчислюється, якщо «0» - a_0 = 0).

Алгоритм використання функцій:

1) ввести початкові дані (у стовпчик):

- значення сітки $\overline{x} = \{x_1, x_2, ... x_n\}$;
- значення $\overline{Y}$ (результати вимірювань, спостережень тощо) $\overline{y} = \{y_1, y_2, ... y_n\}$;

2) при необхідності отримати згладжені значення $\overline{Y}_Ф$, виконати як формулу масиву:

- виділити діапазон розміром $y_1 ... y_n$;
- «майстер функцій» - вибрати «Тенденция» або «Рост»;
- вказати перших два параметра;
- [Ctrl + Shift + Enter];

3) для отримання прогнозу на період $x_k > x_n$ (тобто x_{n+1}) можна використовувати такі способи:

Спосіб 1: за допомогою формули масиву:

- виділити новий діапазон, розмір якого визначається кількістю нових значень x_K (тобто $K = n$);
- функція «Тенденция» або «Рост»;
- в полі третього параметра додати діапазон нових значень $\overline{x} = x_{n+i}$;
- [Ctrl + Shift + Enter].

- *Спосіб 2:* автозаповнення:
- виділити комірку;
- функція «Тенденция» або «Рост»;
- додати третій параметр посилання до комірки зі значенням x_{n+1};
- «ОК»;
- маркером автозаповнення скопіювати формулу на необхідну кількість комірок.

Особливість; якщо для прогнозу використовуються тільки початкові (експериментальні, вимірювані) дані, то діапазони $\overline{x}$ та $\overline{y}$ зафіксувати абсолютними посиланнями (наприклад, \$A\$1:\$A\$20 та \$B\$1:\$B\$20).

Функція «ПРЕДСКАЗ» - обчислює значення $y_{p_i} = a_0 + a_1 x_{p_i}$ для заданого значення x_{p_i} (або $\overline{y}_p$ для масиву значень $\overline{x}_p$), тобто функція передбачає (завбачає або провіщує) значення змінної y_i. В основі – алгоритм МНК, за яким будується регресійне рівняння для визначення значень y_i.

Синтаксис функції:

ПРЕДСКАЗ (x_p або $\overline{x}_p$) значення $\overline{y}$; значення $\overline{x}$).

Якщо обчислюється масив значень $\overline{y}_p$, то функцію використовують як формулу масиву, тобто спочатку виділяють діапазон комірок відповідно кількості значень y_{p_i} масиву $\overline{y}_p$; перший параметр функції вводять як діапазон $\overline{x}_p$ і завершують операцію комбінацією клавіш [Ctrl + Shift + Enter].

Частина 2
Моделі економічних процесів і систем

9. Моделювання транспортних перевезень.

9.1. Значення транспортних перевезень для діяльності сільськогосподарського підприємства

Дана задача є приватною задачею внутрішньогосподарчого планування.

Господарська діяльність сільськогосподарського підприємства неможлива без переміщення вантажів. Керівникам і фахівцям господарств постійно доводиться вирішувати: що, чим, куди і звідки перевозити. Транспортні роботи в сільському господарстві вельми різноманітні. Усередині господарства транспорт використовується для перевезення урожаю з полів на склади, ферми і переробляючи пункти; для вивезення на поля добрив, насіння, отрутохімікатів і т. п. На зовнішньогосподарських роботах транспорт використовується для завезення в господарство продукції промислового виробництва: добрив, сільськогосподарських машин, знарядь і запасних частин до них, пального і змащувальних матеріалів, готових харчових продуктів і т. д., а також вивозу з господарства готової продукції. З великої кількості варіантів плану перевезень різних вантажів виникає проблема раціонального використовування транспортних засобів. Витрати на транспортування вантажів складають, як правило, 30-35% від загальних витрат на виробництво сільськогосподарської продукції в сільськогосподарських підприємствах. Фахівцями підраховано також, що транспортні витрати підвищуються на 10-15% від того, що перевезення здійснюються неоптимальним чином.

Дана задача може розв'язуватися в різних постановках. Якщо йдеться про перевезення одного виду вантажу одним видом транспорту, то має місце звична транспортна задача, що носить назву **класичної**. Передбачається також, що вантаж перевозиться за одну автомобільну ходу.

9.2. Класична транспортна задача. Особливості транспортної задачі

Перш, ніж записати модель цієї задачі, відрекомендуємо її у вигляді таблиці.

Постачальники	**Споживачі**				**Наявність вантажу**
	1	**2**	...	***n***	
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	...	…	**…**
m	C_{1m} X_{m1}	C_{2m} X_{m2}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреба у вантажі	b_1	b_2	...	b_n	Z a_i Z b_j

Позначення:

i - номер постачальника; i =1,2,3,… m ;

j - номер споживача; j=1,2,3,… n;

$\mathbf{X}_{ij}$ - кількість вантажу, що перевозиться від i-го постачальника до j - споживача;

$\mathbf{C}_{ij}$ - собівартість перевезення вантажу від з i-го постачальника до j - го споживача (або відстань між i-им постачальником і j -им споживачем);

$\mathbf{a}_i$ - наявність вантажу у i -го постачальника;

$\mathbf{b}_j$ - потреба у вантажі j -го споживача.

Задача полягає у відшуканні такого плану перевезень $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{m1} & x_{m2} & ... & x_{mn} \end{pmatrix}$,

який би забезпечував **мінімум загальної вартості** перевезень (або **мінімум відстаней**) при повному задоволенні запитів постачальників і споживачів.

Від таблиці переходимо до структурної моделі задачі, представленої в аналітичному вигляді.

Модель має вигляд:

$$Знайти \cdot Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij};$$

При виконанні умов:

1. Умова повного задоволення постачальників:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i; для \cdot всіх \cdot i = \overline{1,m};$$

2. Умова повного задоволення споживачів:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j; для \cdot всіх \cdot j = \overline{1,n};$$

3. Умова позитивності змінних:

$$x_{ij} \geq 0; для \cdot всіх \cdot i = \overline{1,m};$$

$$y_{ij} \geq 0; для \cdot всіх \cdot j = \overline{1,n};$$

Для вирішення задачі необхідно зібрати наступну інформацію:

1. Кількість вантажу у кожного з постачальників

$$a_i\left(i = \overline{1, m;}\right)$$

2. Кількість вантажу, яка необхідна кожному споживачу

$$b_j\left(j = \overline{1, n;}\right)$$

Відстані між постачальниками і споживачами або тарифи (витрати на перевезення одиниці вантажу від **i - го** постачальника до **j – ого** споживача).

Як задача лінійного програмування, в якій чітко визначена **мета** і **умови**, яких вона досягається, транспортна задача могла б бути вирішена симплекс-методом. Проте через громіздкість одержуваних при цьому **симплекс - таблиць** і низького коефіцієнта їх заповнювання, рішення цієї задачі на **ЕОМ** симплекс-методом недоцільне.

Через особливості транспортної задачі для її вирішення розроблені спеціальні методи: потенціалів, диференціальних рент, індексний, угорський, апроксимації Фогеля, загальний розподільний.

Особливості транспортної задачі полягають в наступному:

1. Коефіцієнтами при невідомих в обмеженнях обох типів є тільки одиниці.
2. Всі показники (техніко-економічні коефіцієнти і вільні члени) в обмеженнях обох типів мають одну і ту ж одиницю вимірювання, а коефіцієнти при невідомих в критерії оптимальності (відстань або вартість) задані з розрахунку на ту ж одиницю вимірювання (центнер, тонну).
3. Матриці, складені із змінних обох типів обмежень є транспонованими по відношенню одна до одної.

9.3. Постановка задачі по плануванню перевезення різних вантажів одним видом транспорту. Зведення її до класичної задачі

Розглянемо різновиди транспортних задач і способи зведення їх до класичної транспортної задачі.

На практиці часто плануються перевезення різних видів вантажів одним видом транспорту. Якщо вантажі якісно різні і одні іншими не замінювані (молоко, хліб, солома), то задача розпадається на декілька звичайних транспортних задач по кожному виду вантажу. Але часто вантажі взаємозамінні (різні сорти пшениці, види пального, будівельних матеріалів).

Тоді деяка частина потреб може бути задоволена наявними сортами вантажу, але в різних кількостях з урахуванням властивостей кожного виду вантажу і характеру потреб. Виникає необхідність рішення транспортної задачі для неоднорідного вантажу. Така задача приводиться до задачі про перевезення умовно однорідного вантажу. Розглянемо таку задачу.

Не порушуючи спільності міркувань, але з метою скорочення розмірів задачі включимо в неї **2** пункти відправлення **А1** і **А2** і два пункти споживання **В1** і **В2**. Кожний з постачальників має два види вантажу (**2** сорти пшениці), а кожний із споживачів вимагає певну кількість пшениці **I** і **II** сорту. Таким чином, кожний з пунктів - постачальників і споживачів можна розділити на **2** пункти по виду вантажу. Для постачальників це будуть підпункти **А11**, **А12** і **А21**, **А22**, а для споживачів - **В11 В12, В21, В22** - де перший індекс номер пункту, а другий номер вантажу.

Одержимо задачу, яку представляємо таблицею

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Споживачі
Постачальники</th><th colspan="2">В1</th><th colspan="2">В2</th><th rowspan="2">Наявність вантажу</th></tr>
<tr><th>В11</th><th>В12</th><th>В21</th><th>В22</th></tr>
<tr><td rowspan="2">А1</td><td>А11</td><td>С11</td><td>С11</td><td>С12</td><td>С12</td><td>a_{11}</td></tr>
<tr><td>А12</td><td>С11</td><td>С11</td><td>С12</td><td>С12</td><td>a_{12}</td></tr>
<tr><td rowspan="2">А2</td><td>А21</td><td>С12</td><td>С12</td><td>С22</td><td>С22</td><td>a_{21}</td></tr>
<tr><td>А22</td><td>С12</td><td>С12</td><td>С22</td><td>С22</td><td>a_{22}</td></tr>
<tr><td colspan="2">Потреба у вантажу</td><td>$в_{11}$</td><td>$в_{12}$</td><td>$в_{21}$</td><td>$в_{22}$</td><td></td></tr>
</table>

Виразимо весь вантаж через вантаж **II** сорту. Для цього введемо коефіцієнт взаємозамінності λ **L**, що показує скільки одиниць вантажу **1** сорту відповідає одиниці вантажу **2** сорту. Так, якщо **J** одиниць вантажу **I** сорту можна замінити **L** одиницями вантажу **II** сорту, тоді **а**$_{11}$ одиниць вантажу **I** сорту будуть рівні **jla**$_{11}$ одиницям вантажу сорту. Але у такому разі вартість перевезення одиниці вантажу сорту (або відстань) зменшиться в λ раз і стане рівною;

Задача має вигляд:

Споживачі Постачальники		B1		B2		Ная вність вантажу
		B11	**B12**	**B21**	**B22**	
A1	**A11**	C11 /λ	M	C12 /λ	M	λa_{11}
	A12	M	C11	M	C12	a_{12}
A2	**A21**	C12 /λ	M	C22 /λ	M	λa_{21}
	A22	M	C12	M	C22	a_{22}
Потреба у вантажу		$\lambda в_{11}$	$в_{12}$	$\lambda в_{21}$	$в_{22}$	

Задача зведена до звичайної транспортної задачі з блокуваннями - заборонами даного виду перевезень (**М**, - дуже велика собівартість перевезення, або дуже велика відстань) по перевезенню немов однорідного вантажу одним видом транспорту і може бути вирішена будь-яким з методів рішення класичної транспортної задачі. Після рішення задачі необхідно перейти до вантажу першого сорту, помноживши на λ поставки вантажу першого сорту, виражені через вантаж **II** сорту.

Постановка задачі по плануванню перевезення різних вантажів різними видами транспорту

При плануванні перевезень вантажів різних видів різними видами транспорту задача ускладнюється. Проте її можна звести до звичайної транспортної задачі.

Як і в попередньому случає, маємо два пункти постачальників **A1**, **A2**, ,**AI** – де **I** номер постачальника, **C** - вид транспорту, **j**- номер споживача, **l** - вид вантажу.

Розділимо кожний з пункту постачальників на два підпункти **A11**, **A12**, **A21**, **A22** по видам транспорту, а кожний з пунктів покупців на два підпункти **B11**, **B12**, **B21** і **B22** по видах вантажу. Біля підпунктів постачальників перший індекс - номер пункту, другий - вид транспорту, біля підпунктів споживачів перший індекс-номер пункту, другий - вид вантажу.

Задача має вигляд:

Споживачі Постачальники		B1		B2		Наявність вантажу
		B11	**B12**	**B21**	**B22**	
A1	**A11**	a_{1111} c_{1111} x_{1111}	a_{1112} c_{1112} x_{1112}	a_{1121} c_{1121} x_{1121}	a_{1122} c_{1122} x_{1122}	a_{11}
	A12	a_{1211} c_{1211} x_{1211}	a_{1212} c_{1212} x_{1212}	a_{1221} c_{1221} x_{1221}	a_{1222} c_{1222} x_{1222}	a_{12}
A2	**A21**	a_{2111} c_{2111} x_{2111}	a_{2112} c_{2112} x_{2112}	a_{2121} c_{2121} x_{2121}	a_{2122} c_{2122} x_{2122}	a_{21}
	A22	a_{2211} c_{2211} x_{2211}	a_{2212} c_{2212} x_{2212}	a_{2221} c_{2221} x_{2221}	a_{2222} c_{2222} x_{2222}	a_{22}
Потреба у вантажу		$в_{11}$	$в_{12}$	$в_{21}$	$в_{22}$	

На відміну від попередньої задачі в цій відома ще величина $\mathbf{a_{ikjl}}$- вантажопідйомність транспорту по видах і залежно від вантажу.

Для того, щоб звести цю задачу до класичної транспортної задачі, необхідно зробити наступне:

I. Наявність машин замінити наявністю вантажу. Це робиться шляхом множення вантажопідйомності на кількість машин, тобто вантажопідйомність грає роль коефіцієнта взаємозамінності.

2. Різні вантажі через коефіцієнт замінюванності зводяться умовно до одного виду (у разі однорідності вантажів) або задача розпадається на два самостійних (у разі неоднорідності вантажів).

3. Від чотирьохіндексної задачі переходять до двохіндексної шляхом заміни змінних типу: II - I, 21 - II; 12 - III; 22- IV. і т.д. В цьому випадку і для позначення змінних вибирається інший символ.

Задача прийме вигляд:

Споживачі / **Постачальники**		**B1**		**B2**		**Наявність вантажу**
		B11	**B12**	**B21**	**B22**	
A1	**AI**	a_{11} c_{11} x_{11}	a_{12} c_{12} x_{12}	a_{13} c_{13} x_{13}	a_{14} c_{14} x_{14}	$\overline{a_1}$
	AII	a_{21} c_{21} x_{21}	a_{22} c_{22} x_{22}	A_{23} c_{23} X_{23}	A_{24} c_{24} X_{24}	$\overline{a_2}$
A2	**AIII**	A_{31} c_{31} X_{31}	A_{32} c_{32} X_{32}	A_{33} c_{33} X_{33}	A_{34} c_{34} X_{34}	$\overline{a_3}$
	AIV	A_{41} c_{41} X_{41}	A_{42} c_{42} X_{42}	A_{431} c_{43} X_{43}	A_{44} c_{44} X_{44}	$\overline{a_4}$
Потреба у вантажу		$в_1$	$в_2$	$в_3$	$в_4$	

Задача розв'язується будь-яким з методів рішення класичної транспортної задачі. Після рішення задачі необхідно перейти до первинних позначень.

9.4. Коротка характеристика задач, що зводяться до транспортних.

До задач транспортного типу зводяться і інші задачі внутрішньогосподарчого планування.

Так, в задачі відшукання оптимального розміщення посівів різних культур по ділянках різної родючості як постачальники виступають культури, по яких відомі їх площі; як споживачі - ділянки різної родючості (їх площі також задаються). Як тарифи виступає врожайність конкретної культури, на певній ділянці. Змінними в задачі є площі певних культур на певних ділянках. **Критерій оптимальності - максимум валової продукції в натуральному виразі.**

Обмеження в задачі за площами культур (**I** тип) і площами ділянок родючості (**П** тип). Задача розв'язується будь-яким методом рішення транспортної задачі.

У задачі відшукань оптимального розподілу техніки по видах робіт як **постачальники** виступають марки агрегатів (відома їх наявність), як **споживачі** – види робіт (відомі їх об'єми). Тарифами є експлуатаційні витрати на виробництво певної роботи певної марки агрегату в потрібний агротехнічний термін. В задачі повинна бути задана ще і продуктивність агрегатів по марках на певній роботі. **Змінними** задачі є кількість агрегатів по марках, що виконують певну роботу. **Критерії оптимальності** - мінімум експлуатаційних витрат на виробництво всіх робіт в потрібні агротехнічні терміни. **Обмеження** в задачі по виконанню робіт в повному об'ємі і в потрібні агротехнічні терміни (по строках) і по наявності техніки (по стовпцях). Задача розв'язується загальним розподільним методом.

10. Загальна лінійна оптимізаційна модель Канторовича
(Основна задача виробничого планування)

З точки зору економічної кібернетики **національна економіка** України є об‘єднання двох сфер: **сфери виробництва** (матеріального і нематеріального), яка включає різні види діяльності і **сфери споживання,** яка включає використання різних видів благ безпосередньо для задоволення потреб суспільства.

В число видів діяльності включаються процеси вироблення різноманітної продукції і послуг, і процеси доведення виробленої продукції до кінцевого використання (тобто сфера обігу, обміну). При цьому кожен технологічний и організаційно - господарський спосіб виготовлення продукції і послуг представляється як особливий вид діяльності.

Лінійна оптимізаційна модель загального виду була вперше сформульована і досліджена Л.В. Канторовичем. Вона отримала назву основної задачі виробничого планування.

Ця модель є окремим випадком абстрактної моделі оптимального, планування, в якій цільова функція і всі обмеження є лінійними. Також, як у абстрактній моделі, її складові є:

- виробничі способи;
- умови максимізації споживання в заданому асортименті;
- баланси виробництва і використання продукції і ресурсів.

10.1. Побудова структурної моделі

Для побудови моделі введемо позначення:

S – номер партії матеріалу; ***s*** = 1,2,3,...S;
i – вид заготівки; ***i*** = 1,2,3,…m;
l – кількість заготівок;
l_i – кількість заготівок ***i***-го виду, в одному комплекту; ***l*** = 1,2,3, L;
i = 1,2,3,… ,m;
n – кількість усіх видів заготівок; ***n*** = 1,2,3,…N,;
a_s – кількість матеріалу ***s*** ої- партії; ***s*** = 1,2,3,...S;
j – номер варіанту розкрою; ***j*** = 1,2,3,…n;
a_{sji} – кількість заготівок ***i***-го виду з одиниці матеріалу ***s*** - ої партії згідно ***j***-ому варіанту розкрою; ***s*** = 1,2,3,…S; ***i*** = 1,2,3, ,m; ***j*** = 1,2,3,…,n;
x_{lj} – шукана кількість одиниць *l*-ого матеріалу, які розкроєні по ***j***-ому варіанту; ***l*** = 1,2,3,… ,L; ***j*** = 1,2,3,… ,n;

Тоді при розкрої усіх ***s***–партій матеріалу по усіх ***j*** варіантах буде отримано заготівок ***i***-го виду:

$\sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}$ для ***s*** = 1,2,3,…,S; ***i*** = 1,2,3, ,m; ***j*** = 1,2,3,… ,n;

і може бути зібрано комплектів:

$\frac{1}{l_i} \sum_{S=1}^{S} \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}$ для ***l*** **=** 1,2,3, ,L; ***s*** = 1,2,3, ,S; ***i*** = 1,2,3, ,m; ***j*** = 1,2,3, ,n;

План **x=(x_s)** повинен максимізувати кількість комплектів:

$$\frac{\max}{x} \frac{\min}{i} \frac{1}{l_i} \sum_{S=1}^{S} \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}$$

для ***l*** **=** 1,2,3 ,L; ***s*** = 1,2,3, ,S; ***i*** = 1,2,3, , m; ***j*** = 1,2,3, ,n;

при умовах виконання плану заготівок

$$\sum_{j=1}^{n_s} x_{sj} = a_s; \quad s = 1,2,3, ,S;$$

і реальності компонентів

$x_{sj} \geq 0$; для s = 1,2,3, ,S; j = 1,2,3, ,n;

Якщо через Z позначити кількість комплектів, то сформульована модель буде зведена до задачі лінійного програмування:

$$Z \to \max$$

при обмеженнях:

1. По кількості зібраних комплектів:

$$\frac{1}{l_i}\sum_{S=1}^{S}\ \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji}x_{sj} \geq Z;$$

для l = 1,2,3 ,L; s = 1,2,3, ,S; i = 1,2,3, ,m; j = 1,2,3, ,n;

2. По кількості використаних дошок:

$$\sum_{j=1}^{n_s} x_{sj} = a_s;$$

для s = 1,2,3, ,S; j = 1,2,3, ,n;

3. Умова невід'ємності змінних:

$$Z \geq 0; x_{sj} \geq 0;$$

для s = 1,2,3, ,S; j = 1,2,3, ,n;

Для побудови моделі введемо позначення:

j - вид, спосіб діяльності; $j \in N$;

x_j - інтенсивність застосування j- ого способу; j = 1,2,3,…n;

$S \in M$ - множина інгредієнтів S, яка розбивається на дві підмножини;

$S_1 \in M_1$ - продукти і поновлені ресурси (продукти для проміжного и кінцевого використання);

*$S_2 \in M_2$ – невоспроизводимые ресурси;

A_j = (*$S_2 \in M_{2}$$_{asj}$) - вектор виробничого способу j, компоненти матриці «випуск – затрати»;

**Y_{s1} - кінцева продукція;

***Q_1 - постійна частина кінцевої продукції;

****Y_{s1} - вектор змінної продукції;

L_{s1} - кількість продукції S_1 в одному комплекті;

Z - число комплектів змінної частини кінцевої продукції;

R_{s2} – об'єм невоспроизводимого ресурсу S_2 виду; $S_2 \subset M_2$;

У відповідності з прийнятими позначеннями модель має вид:

$$Z \to \max$$

при обмеженнях:

1. По балансу виробництва і розподілу продукції:

   $\Sigma A_{s1j}X_j - L_{s1}Z >= Q_{s1}$; $s_1 \in M_1$; $s \in M_1$; $j \in N$;

Кількість вироблених заготівок, має бути не менше кількості споживаючих заготівок.

2. По балансу не відтворюємих ресурсів:

   $\Sigma A_{s2j}X_j <= R_{s2}$; $S_2 \in M_2$; $j \in N$;

   Ресурсів повинно бути використано не більш їх наявності.

3. Невід'ємність змінних:

   $X_j >= 0$; $j \in N$; $Z >= 0$;

**В складі кінцевої продукції виділяємо постійну и змінну частини:

$$Y_{s1} = Q_{s1} + \bar{Y}_{s1};$$

***Постійна частина кінцевої продукції включає мінімально необхідні об'єми продукції для невиробничого споживання (які досягнуті у минулому періоді): накопичення, заміщення вибуття основних доходів зовнішньоторгового обміну і т. д.

****Змінна частина кінцевої продукції максимізується у заданому асортименті у відповідності з умовами:

$Z \to max$, $\bar{Y}_{s1} >= L_{s1}Z$;

Для того, щоб задача мала рішення, необхідно, щоб матриця випуску і матеріальних затрат способів **A** (**Asj**) була **продуктивною** або деякий вектор $\bar{X}$ такий, що $A\ \bar{X} <= \bar{X}$, де $\bar{У} = A\ \bar{X}$ – вектор затрат, а $\bar{X}$ – вектор випуску системи. Затрати продукту не повинні перевищувати випуску того ж продукту.

11. Оптимізаційна модель МГБ з обмеженнями на загальні не відтворювані ресурси

Постановка завдання

Розглянемо модель в якій баланси виробництва і розподілення продукції доповнюються обмеженнями по **загальних, не відтворюваних** ресурсах.

Згадаємо (із абстрактної моделі економіки), що коли мова йде про баланс виробництва і розподілення продукції, а її виробництво постійно супроводжують затрати ресурсів, то ми маємо справу з множинами M_1 та **M2.**

Загальний індекс продукції $S_1 \subset M_1$**,** наприклад в задачі Канторовича – це заготовки 1-го і 2-го видів і **загальний індекс** ресурсів $S_2 \subset M_2$**,** наприклад в тій самій задачі Канторовича – це дошки різної довжини (2 варіанти дошок).

Множина не відтворюваних ресурсів M_2 включає, головним чином, не відтворювані (природні ресурси).

Побудова моделі

Для побудови моделі введемо позначення:

J - вид продукції; **j =** 1,2,3...n; $j \subset M_1$ заготовки**;**

X = (**Xj) -** вектор валового продукту $j \subset I$**;**

L = (Li) -- вектор асортиментних коефіцієнтів приросту кінцевої продукції (заготівок)**;**

Z - кількість компонентів приросту споживання;

Q = (qi) - вектор заданих об’ємів кінцевої продукції;

R - об’єм ресурсів;

f - вектор затрат невідтворюваних ресурсів на виробництво одиниці продукції;

$\Phi = (\varphi) = f\ (E-A)^{-1}L$ **-** вектор повних затрат ресурсів на один комплект приросту кінцевої продукції;

$R = (rs) = R - f\ (E-A)^{-1}Q$ **-** вектор ресурсів для отримання змінної частини кінцевої продукції

В відповідності з прийнятими позначеннями модель матиме вигляд:

$Z \to max$

при обмеженнях:

1. По балансу виробництва і розприділення продукції:

   $*(E-A)\ X - LZ >= Q;\ Q \geq 0;$

Різниця між виробленою і спожитою продукцією повинна бути більша або дорівнювати деякій заданій кількості кінцевої продукції.

2. По затратах невідновних ресурсів:

   $**\ \bar{f}\ \bar{X} <= R;$

Ресурсів повинно бути використано не більше наявних.

3. Невід’ємність змінних:

   $X \geq 0;\ \ \bar{Z} \geq 0.$

*Із моделі **МГБ** ми знаємо, що $(\bar{E} - A)\ X = Y$**,** де **X** – валовий продукт, а **Y** – кінцевий продукт.

** Згадаємо, що оптимальний план перетворює першу групу умов у рівності (невигідно виробляти надкомплектні надлишки кінцевої продукції). Наприклад, в задачі Канторовича заготовок 1-го виду - 212,5, а 2 – го - 428. Повних комплектів отримують 212, а це min із 212 і 428 поділено на 2, тобто 2 заготовки надкомплектні. Щоб їх не було, треба першу групу умов записати як рівність **(E-A)X – LZ = Q,** іншими словами, виробництво заготовок повинно бути таким, щоб після споживання їх залишилося ще якийсь запас, котрий може бути рівний й **0.**

Визначення і розшивка „вузьких місць”

З **(E-A) X – LZ = Q** маємо **X = (E-A)⁻¹LZ + (E-A)⁻¹Q.** Підставимо це значення **X** в обмеження по загальних ресурсах, після чого отримаємо вираз

$$\mathbf{f\,(E\text{-}A)^{-1}LZ+f(E\text{-}A)^{-1}Q \le R.}$$

Залишаємо в лівій частині змінну частину продукції (перший додаток), а постійну перенесемо вправо. Отримаємо вираз:

$\mathbf{f\,(E\text{-}A)^{-1}LZ \le R - f(E\text{-}A)^{-1}\,Q,}$ або позначивши $\mathbf{f(E\text{-}A)^{-1}\,L=\varphi,}$ отримаємо

$\mathbf{\varphi Z <= R.}$ Із отриманої нерівності випливає **Rrs**

$$\mathbf{{}^{*}Z=\max Z=\min}\ \frac{\overline{R}}{\overline{\varphi}}\ \mathbf{=\min}\ \frac{r_s}{\varphi_s}\,;\ \ \mathbf{S\subset M2}$$

Це означає, що **максимальне** число компонентів досягається, як правило, при повному використанні тільки **одного** ресурсу (наприклад, у задачі Канторовича, максимум компонентів досягається при мінімумі заготовок розміром 2м), таким чином, повністю використано тільки **один** ресурс заготовки 1-го виду (2м).

Повне використання якогось виду ресурсу є сигналом максимального розширення об’ємів ресурсу.

Для визначення програми першочергових заходів по розширенню ресурсів доцільно упорядкувати їх по дефіцитності. $\mathbf{Z_i} = \dfrac{\overline{R}_i}{\overline{\varphi}_i}$,

Для кожного виду ресурсів розраховують показник $\mathbf{Z_i} = \dfrac{\overline{R}_i}{\overline{\varphi}_i}$, який характеризує максимальне число компонентів кінцевої продукції, яке можна отримати з ресурсу виду **I при умові необмеженості інших ресурсів.**

Упорядкувавши ряд чисел **Zi,** починаючи з **Z* = min Zi,** отримуючи послідовність ресурсів, упорядковану за ступенем їх дефіцитності.

Різниці (**Zi+1- Zi**) покажуть приріст числа комплексів після „розшивки **к**-ого вузького місця” в системі ресурсів.

12. Модель Леонтьєва

Модель «витрати - випуск» Леонтьєва. Замкнуті моделі

Розглянемо просту лінійну модель виробництва з фіксованими коефіцієнтами, що містить декілька виробничих (технологічних) процесів, кожен з яких проводить тільки один продукт.

Введемо позначення:

j – вид вироблюваного продукту; $j = \overline{1, n}$;

i – вид продукту, що витрачається; $i = \overline{1, n}$;

aij – фіксована кількість ***i***-ого продукту, що витрачається на виробництво одиниці **j-ого** продукту;

Оскільки коефіцієнти aij фіксовані, то не існує взаємозамінюваності між продуктами, що витрачаються.

Так для виробництва **j-ого** продукту в об'ємі **xj** буде потрібно **aijxj i-ого** продукту і **akjxj к-ого** продукту. Відмітимо, що в цій моделі деякі з продуктів, що витрачаються, є випусками виробничих процесів цієї ж системи.

Така модель називається моделлю «витрати - випуск». Коефіцієнти **aij** – **коефіцієнтами витрат**, а матриця $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$ - **матрицею витрат**.

У моделі безліч витрат співпадає з безліччю випусків. Тому матриця, складена з коефіцієнтів витрат, – **квадратна**. Очевидно, що коефіцієнти витрат невід'ємні. Крім того, випуск кожного продукту вимагає витрат, принаймні, одного продукту і витрати кожного продукту обумовлюють випуск, принаймні, одного продукту. Матриця **А** є **позитивною**, тобто такий, що помножена на позитивний вектор, вона дає позитивний вектор.

Модель «витрати - випуск» зазвичай називають моделлю Леонтьєва. Леонтьєв своїми роботами по аналізу американської економіки вперше привернув увагу до моделей такого роду.

Якщо безліч продуктів, які хоч раз випускалися, співпадає з безліччю продуктів, які хоч раз використовувалися в технологічних операціях, і якщо не існує джерела витрат, окрім поточної продукції, а продукція, що випускається, використовується тільки як витрати технологічних процесів, то така модель називається **замкненою**.

Діагональні елементи $\boldsymbol{a_{ii}}$ матриці $\hat{A}$ вимагають особливого розгляду, коефіцієнтом $\boldsymbol{a_{ii}}$ є кількість ***i***-ого продукту на виробництво одиниці цього ж продукту.

Наприклад, при виробництві електроенергії необхідно використовувати ту ж електроенергію для запуску генератора, подачі палива і так далі Якщо відняти використану таким чином енергію зі всієї проведеної, отримаємо чистий випуск електроенергії.

Нехай $\bar{X}$ - вектор випуску системи. Набір компонент вектора $\bar{X}$ характеризує обсяг выпускаємих продуктів. Тоді $\sum_j a_{ij} x_j$ визначає кількість ***i*** – ого продукту, необхідного при виробництві цього набору. Таким чином, $\bar{z} = A\bar{x}$ є вектор витрат. Оскільки в замкнутій моделі вектор випуску $\bar{X}$ є єдиним джерелом витрат, система не може функціонувати і проводити $\bar{X}$, якщо не виконується нерівність $\bar{z} \le \bar{x}$. Виробничі процеси незворотні, тому $\bar{X}$ - **невід'ємний** вектор.

Називатимемо модель продуктивною, якщо існує деякий вектор, такий, що:

$A\bar{x} \le \bar{x};\ x \ge 0;$

Вирішення цієї системи нерівностей, якщо воно існує, називається **продуктивним** рішенням.

Виділимо з числа продуктивних рішень таке, яке називатимемося **рівноважним**. Найсильніший тип рівноваги – **внутрішня** рівновага. Воно визначається співвідношеннями:

$A\bar{x} = \bar{x};\quad \bar{x} >> 0;$

Вектор, що задовольняє співвідношенням, називається **рівноважним**.

При внутрішній рівновазі кожен продукт проводиться, причому випуск продукту в точності рівний попиту на нього.

Якщо - ціна ***i*** – ого продукту, то $p_i a_{ij}$ - вартість ***i*** – ого продукту, витраченого на випуск одиниці ***j***, – ого продукту, а $\sum_i p_i a_{ij}$ - сумарні витрати на випуск одиниці j – ого продукту. Іншими словами $\sum_i p_i a_{ij}$ є витратами виробництва на випуск одиниці ***j*** – ого продукту.

Прибуток від випуску одиниці продукту ***j*** – ой галузі рівна $p_j - \sum_i p_i a_{ij}$.

Сформулюємо правила:

1. Якщо існує ненегативний вектор цін, що дає втрати у всіх галузях, то модель непродуктивна.
2. Якщо існує ненегативний вектор, що дає прибуток у всіх галузях, то модель продуктивна.

Відкрита модель Леонтьева

Якщо модель визначається виробничим сектором, зовнішнім ресурсом і попитом, відмінним від потреб технологічних процесів, то вона є **відкритою**. Виробничий сектор випускає **n** продуктів, які частково витрачаються усередині сектора. Зовнішній ресурс зазвичай ототожнюється насилу. Розглянемо тільки виробничий сектор. Позначимо матрицю витрат через $\hat{A}$ вона позитивна. Нехтуватимемо на якийсь час зовнішнім ресурсом. Хай $\overline{x}$ - вектор випуску системи.

Тоді $\overline{x} - \hat{A}\overline{x} = (1 - \hat{A})\overline{x}$ - вектор **чистого випуску**, тобто набір об'ємів продуктів, що залишаються для розподілу поза виробничим сектором.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1-a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a_{11})x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & (1-a_{22})x_2 + & \dots & a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots & (1-a_{nn})x_n \end{bmatrix}$$

Основне завдання відкритої моделі полягає в наступному: чи може економіка поставити набір чистої продукції, що призначається кінцевим попитом або асортиментним набором продуктів?.

Позначимо кінцевий попит через вектор стовпець $\overline{y}$.

Тоді основне завдання може бути сформульована таким чином: чи існує вектор $\overline{x}$ такий, що $\overline{z} = \overline{y}$, тобто такий, що $(1 - A)\overline{x} = \overline{y}; \overline{x} \geq 0;$ для будь-якого

Якщо *(1-A)* – **невироджена** матриця, то $\overline{x}$ завжди можна представити у вигляді: $\overline{x} = (1 - A)^{-1}\overline{y}$

У випадку, якщо $(1 - A)^{-1}$- **позитивна** матриця, то $(1 - A)^{-1}\overline{y}$ - невід‘ємний вектор, і завдання було б вирішене.

Розглянемо роль зовнішнього ресурсу у відкритій моделі. Позначимо об'єм зовнішнього ресурсу, потрібний для випуску одиниці ***j*** – ої галузі, через a_{0j} , а вектор з компонентами a_{0j} через $\overline{a_0}$; Модель, що враховує зовнішній ресурс, повинна задовольняти додатковій умові: $\overline{a_0}\,\overline{x} \leq l_0$, де l_0- величина, що обмежує допустиме споживання зовнішнього ресурсу. Досліджувати відкриту модель Леонтьева – значить, з'ясувати, чи може кінцевий попит бути задоволений в будь-яких пропорціях.

Вважатимемо, що додаткова умова виконується. Якщо опиниться ще, що матриця $(1-A)^{-1}$ позитивна, то за наявності цих двох умов кінцевий попит задовольняється в будь-яких пропорціях.

Сформулюємо два економічно осмислених умови, кожне з яких забезпечує необхідний результат:

1. Хай деякий ненульовий кінцевий попит може бути задоволений по всіх продуктах. Тоді кінцевий попит може бути задоволений по всіх пропорціях.

2. Хай існує деяка безліч позитивних цін, при яких кожна галузь може покрити витрати виробництва і, принаймні, для однієї галузі отримати позитивний прибуток. Тоді кінцевий попит може бути задоволений в будь-яких пропорціях.

Якщо перша умова виконується, то $(1-A)\bar{x} \geq 0$ із строгою нерівністю для деякого i і, $x >> 0$ тобто і $A\bar{x} \leq \bar{x}$ із $\bar{x} \geq 0$ строгою нерівністю, принаймні, для одного і і **.**

Якщо виконується друга умова, то $pA \leq p$ із знаком нерівності для деякого j .

13. Динамічні моделі збалансованого зростання

Моделі леонт'євского типу

Мова піде про моделі Дорфмана, Самуельсона і Солоу, які досліджували збалансоване зростання.

Збалансоване зростання, при якому всі пропорції економіки залишаються стаціонарними, забезпечує зв'язок між динамічним і статичним аналізом багатосекторних моделей економіки. Виникає питання, чи володіють деякі економічні моделі режимом збалансованого зростання, і якщо володіють, то чи єдиний він і які характеристики цього режиму.

Аналіз збалансованого зростання у багатьох відношеннях більше схожий на аналіз статичної рівноваги (як у Леонтьева), ніж на аналіз складніших моделей зростання.

Тому дані моделі і носять назву моделей леонт'євского типу, як би узагальнюючи модель Леонтьева.

Розширимо статичну модель "витрати - випуск" найпростішим чином. Припустимо, що через тимчасові лаги (затримок, відставань) між виробництвом продуктів і їх здатністю затрачуватися вимагається, щоб економічна система мала запаси всіх своїх продуктів. Вважатимемо, що економіка в цілому вимагає запас і–ого продукту, рівний, принаймні, кількості цього продукту, що використовується за одиницю часу, помноженому на коефіцієнт споживання запасів $\mathbf{k_i}$. Одиниця часу може бути короткою (тиждень) або довгою (рік) – на результати аналізу не впливає. Слід тільки мати на увазі, що коефіцієнти $\mathbf{k_i}$ буває меншими для більш довгого періоду часу.

В моделях Леонтьева і інших моделях типу "витрати - випуск" запаси в кожній галузі передбачаються пропорційними інтенсивності використовування продукту в даній галузі. Достатньо реалістично припустити, що запаси не належать певній галузі, а можуть передаватися у міру потреби з однієї галузі в іншу. Тому має сенс розглядати тільки сумарні запаси економічної системи.

Запишемо набір коефіцієнтів потреби в запасах $\mathbf{k_i(i=l,\ n)}$ у вигляді діагональної матриці **К**

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_i\, 0...0 \\ 0k_2...0 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 00K\, k_n \end{bmatrix}.$$

Вектор, що визначає сумарні витрати виробництва, рівний $A\ \overline{X}$.

Таким чином, потреба економічної системи в запасах, необхідних для виробництва валового випуску $\overline{X}$ задається вектором $KA\overline{X}$.

Отже, якщо у момент часу **t** потрібно провести $\overline{X}(t)$ продуктів, то запаси $\overline{S}(t)$ до цього часу повинні бути достатніми для того, щоб забезпечити цей рівень випуску, тобто повинне мати місце співвідношення

$$KA\overline{X}(t) \le \overline{S}(t);$$

Хай $\overline{\alpha}$ - довільний асортиментний набір продуктів. Для виробництва цього набору потрібен валовий випуск $\overline{X}$, що задається, як завжди у відкритій моделі, рівністю

$$\overline{X} = (1\text{-A})^{-1} \cdot \overline{\alpha};$$

Таким чином, деякий асортиментний набір продуктів $\overline{\alpha}(t)$ може бути проведений у момент **t** тільки в тому випадку, якщо

$$KA(1-A)^{-1}\overline{\alpha}(t) \le \overline{S}(t);$$

Це співвідношення є **фундаментальним обмеженням моделі** “витрати - випуск” із запасами.

А які при цьому потреби в праці?

В справжній моделі праця ніде не є обмежуючим чинником. Обмежуючим ресурсом в моделі є рівень запасів.

Якщо включити в модель працю, то можна відрекомендувати його як одного з продуктів в основній технології і зажадати, щоб необхідний запас праці був пропорційним інтенсивності його використовування в системі.

Оскільки запаси обмежені, зростання в цій моделі має місце, тільки якщо запаси зростають. Зростання забезпечується виробництвом.

Можна вважати, що будь-який асортиментний набір продуктів складається з двох частин. Перша частина $\overline{\alpha'}(t)$ - вектор продуктів поточного споживання (для праці це витрати у виробничому процесі, що проводить працю). Друга частина набору $\Delta\overline{S}(t)$ - приріст запасів $\overline{S}(t)$. Маємо два співвідношення:

$$\overline{\alpha}(t) = \overline{\alpha'}(t) + \Delta\overline{S}(t);$$

$$\overline{S}(t+1) = \overline{S}(t) + \Delta\overline{S}(t);$$

Якщо поточне споживання $\overline{\alpha'}(t)$ задано, то перша система рівнянь встановлює зв'язок між зростанням запасів і поточними запасами. Друга система фіксує зв'язок між запасами, відповідними двом, наступним один за іншим, періодам часу. Приведені співвідношення служать основою для побудови динамічній моделі.

Зробимо дуже сильне спрощення. Припускатимемо, що споживання кожного продукту є незмінної в часі частиною його чистого продукту.

Хай γ_i - відношення споживання до чистого випуску **i** - го продукту $(0 < \gamma_i < 1)$. Назвемо γ_i схильністю до споживання **i** - го продукту. Утворюємо діагональну матрицю **Г** схильностей до споживання. Маємо

$$\overline{\alpha'}(t) = \Gamma\overline{\alpha}(t);$$

$$\Delta\overline{S}(t) = \overline{\alpha}(t) - \overline{\alpha'}(t) \text{ або } \Delta\overline{S}(t) = (1-\Gamma)\cdot\overline{\alpha}(t);$$

Рівняння чистого випуску прикмет вигляд:

$$\overline{\alpha}(t) = (1-\Gamma)^{-1} \cdot \Delta\overline{S}(t);$$

Матриця $(1-\Gamma)$ - діагональна із строго позитивною діагоналлю $(0 < \gamma_i < 1)$. Тому $(1-\Gamma)^{-1}$ існує і є підлозі позитивної. Діагональні елементи її рівні $\dfrac{1}{1-\gamma_i}$;

Підставимо вираз чистого випуску у **фундаментальне обмеження моделі**. Отримаємо систему нерівностей:

$KA(1-A)^{-1}\overline{\alpha}(t) \le \overline{S}(t);$

$KA(1-A)^{-1}(1-\Gamma)^{-1} \le \overline{S}(t);$

Позначимо $KA(1-A)^{-1}(1-\Gamma)^{-1}$ як K^*

Підставимо цей вираз в попередню нерівність і отримаємо **фундаментальне обмеження моделі** у вигляді:

$K^*\Delta\overline{S}(t) \le \overline{S}(t)$, де

K^* - полу позитивна матриця.

Розглянемо умови, що забезпечують рівноважне зростання, тобто такий, при якому відношення $\mu = \dfrac{\Delta\overline{S_i}(t)}{S_i}$ одне і теж для всіх продуктів і, принаймні, запас одного продукту використовується повністю (тобто у фундаментальному обмеженні має місце рівність, принаймні, для одного продукту).

Величина μ називається **темпом зростання** системи. Таким чином, задача зводиться до рішення спеціальної системи нерівностей

$K^*\Delta\overline{S}(t) \le \dfrac{1}{\mu}\cdot\Delta\overline{S}(t)$, в якій вимагається, принаймні, щоб одне співвідношення виконувалося як рівність. При цьому повинне бути $\Delta\overline{S}(t) \ge 0$.

Єдине рішення приведеної системи є $\dfrac{1}{\mu^*} = \lambda^*$; $\Delta\overline{S}(t) = \overline{X}^*$, де λ^* - найбільший по модулю характеристичний корінь, а X^* - відповідний власний вектор полу позитивної матриці K^*. Ми вимагали рівноваги одного продукту, а воно досягається для всіх продуктів (на рівність перетворюються всі співвідношення фундаментального обмеження).

Модель фон Неймана

Хай задано дві прямокутні матриці **A** і **B** однакових розмірів (***m*** рядків і ***n*** стовпців з ненегативними елементами).

Хай ***m*** – кількість вироблюваних продуктів;

n – кількість технологічних способів, що проводять продукти;

I - вид продукту; ***I*=1, 2, 3...m**;

J – вид виробничого способу; ***J*=1, 2, 3...n**;

Матриця витрат**:** $A = \begin{bmatrix} a11\, a12 \ldots a1n \\ a21\, a22 \ldots a2n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ am1\, am2 \ldots amn \end{bmatrix}$

В технологічному способі з номером $j(1 \le j \le n)$, що використовується з одиничною інтенсивністю, затрачуються **m** продуктів в кількостях $Q_{1j}, Q_{2j}, \ldots, Q_{mj}$, так що стовпець матриці **A** з номером **j** характеризує витрати продуктів в способі **j**

Матриця випуску: $B = \begin{bmatrix} b11\, b12 \ldots b1n \\ b21\, b22 \ldots b2n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bm1\, bm2 \ldots bmn \end{bmatrix}$

Стовпець з номером **j** матриці **B** характеризує кількість $b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{mj}$, тих же продуктів, які випускаються (проводяться) при використовуванні способу **j** з одиничною інтенсивністю (наступного року). І даний вектор $\overline{X}$, компоненти його і називаються **інтенсивностями**, з якими використовуються технологічні способи; $\overline{X}$ - вектор інтенсивностей.

Якщо компоненту x_j вектора $\overline{X}$ рівна нулю, то говорять, що спосіб **j** не використовується.

Величина $U_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, є кількість продукту **I**, яке витрачається (затрачується) при вибраних інтенсивностях використовування технологічних способів.

$V_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$ - кількість продукту **I**, яке проводиться (випускається) при вибраних інтенсивностях.

Вибір вектора $\overline{X}$ визначає витрати $\overline{U} = A\overline{X}$ і випуск $\overline{V} = B\overline{X}$ продуктів, тобто **деякий технологічний процес.**

Тут $\overline{U} = (U_1, U_2, ..., U_m)$

$\overline{V} = (V_1, V_2, ..., V_m)$.

Хай **Д** – прямокутна матриця з ненегативними елементами. Розглядатимемо матриці, що володіють тією або іншою властивістю:

Властивість 1. Якщо $Д\overline{X} = 0$ і $\overline{X} \geq 0$, то $\overline{X} = 0$;

Властивість 2. Існує $\overline{X} > 0$, такий, що $Д\overline{X} > 0$.

Говорять, що пара матриць (**A,B**) визначає **модель Неймана**, якщо **A** володіє **властивістю 1** і **B** володіє **властивістю 2.**

При прийнятій нами економічній термінології це означає:

1. Якщо жоден продукт не витрачається ($A\overline{X} = 0$), то жоден спосіб не використовується ($\overline{X} = 0$); звідси негайно витікає, що жоден продукт не випускається ($B\overline{X} = 0$).
2. Всякий продукт можна провести ($B\overline{X} = 0$).

Наступні два твердження дозволяють інакше сформулювати ці властивості.

Твердження 1. Для того, щоб невід‘ємна матриця Д володіла **властивістю 1**, необхідно і достатньо, щоб в матриці не було нульових стовпців, тобто для кожного **j=1, 2, ..., n** має місце $\sum_{i=1}^{m} d_{ij} > 0$; або min $\sum_{i=1}^{m} d_{ij} > 0$ при **1<j≤n**;

Твердження 2. Для того, щоб невід‘ємна матриця **Д** задовольняла **властивості 2**, необхідно і достатньо, щоб в матриці не було нульових рядків, тобто для кожного **i=1, 2, ..., m** мало місце нерівність $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} > 0$. З **тверджень 1 і 2** можна отримати взаємозв'язок між **властивостями 1 і 2.**

Твердження 3. Якщо для деякої матриці **Д** має місце **властивість 1**, то для транспонованої матриці **Д*** має місце **властивість 2**. Якщо для **Д** справедливо **властивість 2**, то для **Д*** справедливо **властивість 1**.

Хай $\alpha_i(x)=\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}$, є відношення випуску продукції **і** до витрат цього ж продукту в технологічному процесі, визначуваному вибором вектора $\overline{X}$ **.**

$\alpha_i(x)$ називається **темпом зростання продукту і в даному процесі**.

$\alpha(x)=\min\alpha_i(x)$ для **1<i**$\leq$**m** назвемо **темпом зростання при даній інтенсивності х.**

Тепер очевидно, що $\alpha=\max\alpha(x)=\max\min\alpha_i(x)$ при **х**$\geq$**0**; **1<i**$\leq$**m,** тобто в кожному процесі (для кожного $\overline{X}\geq 0$) вибирається продукт з якнайменшим темпом зростання, і він оголошується **темпом зростання в даному процесі** $\alpha(x)=\min\alpha_i(x)$ при **1<i**$\leq$**m**, потім серед всіх процесів відшукується той, в якому темп зростання максимальний: $\alpha=\max\alpha(x)$ при **х**$\geq$**0.** Цей максимальний темп зростання α називається **технологічним темпом зростання**.

Позначимо символом **Х** вектор, на якому досягається **технологічний темп зростання.**

Можна сказати, що в моделі Неймана відшукується **максимальний технологічний темп зростання** і структура використовування способів виробництва, що здійснює цей максимальний темп зростання. Деякий продукт може не проводитися і не використовуватися.

В моделі Неймана технологічний темп зростання кінцевий і позитивний, тобто $0<\alpha<\infty$.

Випадок, коли матриці **А** і **В** квадратні (**m=n**), $A\geq 0$ і **В** – одинична матриця, є окремим випадком моделі Неймана.

Аналогічно, запишемо деяку величину

$$\beta_j(p)=\frac{\sum_{i=1}^{m} b_{ij}p_i}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i};$$

де p_i оцінка **і** - го продукту;

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_j$ - вартість витрат в **j** – способі;

$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}p_j$ - вартість випуску **j** - го продукту;

$\beta_j(p)$ - відношення вартості випуску до вартості витрат в **j** способі;

Величина $\beta(p)=\max\limits_{1<j\leq n}\beta_j(p)$ називається **темпом зростання вартості найефективнішого способу**;

Величина $\beta=\min\beta(p)$ називається **економічним темпом зростання**.

Вектор цін p такий, на якому здійснюється **економічний темп зростання**.

При цьому $\beta\leq\alpha$, тобто **економічний темп зростання** менше або рівно **технологічному темпу зростання**.

Застосування моделі Неймана

Розглядаючи економічні моделі, ми шукали екстремум деякої сумарної величини: **max** прибутку в задачах розподілу фінансів, **max** продукції в задачі Канторовіча, **min** витрат праці або грошових коштів в міжгалузевому балансі. Це були статичні задачі.

В динамічних задачах має сенс вважати добрим рішенням таке, при якому що входять в модель величини зростають з однаковим темпом протягом декількох тимчасових періодів і оптимальним, якщо цей темп зростання максимальний.

Модель Неймана може описувати динамічну модель всієї економіки, в якій шуканими будуть об'єми продукції галузей (X_j), об'єми накопичень (V_j) і об'єми споживання (λ). При рішенні задачі відшукується **максимальний темп зростання економіки.**

Можна застосувати модель Неймана і для вирішення задачі в одній галузі економіки, наприклад, в сталеплавильному виробництві розглядаються мартенівський, кисневo-конвертерний і електросталеплавильний способи. Треба довести необхідність заміни мартенівського способу конверторним і це робиться шляхом відшукання **оптимального темпу зростання** виробництва сталі.

Модель Леонтьева-фон Неймана

Модель фон Неймана допускає можливість сумісних випусків. Нейман, зокрема, розглядав просту модель з двома типами капіталу, кожний з яких використовується при виробництві обох типів. Він, розглядав кожний тип капіталу як частково що використовується після першого використовування і повністю що використовується після другого. Виробничий процес, споживаючий невикористаний капітал, випускає спільно з деяким продуктом і використаний капітал. Якщо ж споживався однократно використаний капітал, то цього не відбувалося.

Модель Леонтьева-фон Неймана аналогічна попередній моделі фон Неймана, але виключає сумісне виробництво. Кожний виробничий процес випускає один продукт, але один і той же продукт може випускатися багатьма процесами.

Можна розглядати цю модель, як спрощену модель фон Неймана, або як узагальнену модель Леонтьева. Останнє визначення – більш природно, оскільки саме можливість сумісного виробництва додає моделі фон Неймана специфічний характер моделі розширення капіталу. Але як би ми її не називали, вона перекидає міст між аналізом, що використовується в моделі фон Неймана і аналогом моделей Леонтьева, заснованому на теорії підлозі позитивних матриць. Модель Леонтьева-Неймана має єдиний коефіцієнт розширення γ . Випуски всіх продуктів ростуть, але так, що в системі відсутні надлишки. Всі виробничі процеси розширяються з темпом зростання.

Решта темпів зростання виробничих процесів же невигідна.

Динамічна модель Канторовича

Постановка задачі: є деяка кількість ресурсу x, яка можна використовувати **N** різними способами. Ресурси можуть бути самої різної природи (гроші, машини, люди, земля) і т.п., так само, як і способи їх використовування. Наприклад, ресурс - вантажопідйомність завантаження різними типами предметів.

Якщо позначити через **xi** кількість ресурсу, що використовується i-ым способом, то кожному способу зіставляється функція корисності Yi(xi), що виражає дохід від цього способу. Передбачається, що всі доходи вимірюються в однакових одиницях і загальний дохід рівний сумі доходів, отриманих від використовування кожного способу.

Випишемо задачу в математичній формі:

Знайти загальний дохід від використовування ресурсів всіма способами, тобто $\max\{Y1(x1)+Y2(x2)+...+YN(xN)\}$

за умов:

1. $x_1 + x_2 + ... + x_N = x$;

Загальна кількість ресурсів рівно **x**.

2. $x1...xN >= 0$;

Шукані кількості ресурсів ненегативні;

Задача розв'язується за допомогою послідовності функцій і відповідних їм рекуррентних співвідношень, висновок яких заснований на принципі оптимальності Р. Беллмана.

Разом з рішенням початкової задачі одержують рішення цілого сімейства схожих між собою задач.

14. Абстрактна модель оптимального планування виробництва

Цільова функція суспільного добробуту

Цільова функція суспільного благозабезпечення (**ЦФБ**) – це самий загальний критерій оптимальності у вигляді аналітичної функції **Z(**$\bar{x}$**).**Ця функція повинна визначатися на всій безлічі кількісних показників (компонент вектора $\bar{x}$), що характеризують в динаміці різноманітні умови життя суспільства: задоволення матеріальних і духовних потреб, умови праці і можливість вибору сфери трудової діяльності, екологічні умови, збереження здоров'я і т.д.

Для економічних досліджень область визначення Z($\bar{x}$) може бути обмежений безліччю «**економічних** благ» (споживані продукти і послуги, можливості використовування вільного часу і т.д.)

ЦФБ, перш за все, відображає факт зіставлення різних варіантів розвитку економіки з погляду задоволення суспільних потреб. Її величина зростає при переході від менш переважних до більш переважних варіантів.

Побудова **ЦФБ** припускає рішення багатьох фундаментальних проблем науки про людину і суспільство (фізіології, медицини, психології, соціології, естетики і т.п.), систематизацію розширеної і різноманітної інформації.

Теоретично можливі два полярні підходи до побудови **ЦФБ: нормативний** і **дескриптивний.**

Нормативний підхід припускає можливим будувати цільову функцію виключно за даними науки про найраціональніші умови людського життя («Як треба жити»).

Дескриптивний підхід заснований на узагальненні фактично спостережуваної поведінки суспільства (за допомогою обробки статистичних даних, матеріалів соціологічних обстежень і т.п.).

Недоліком чисто нормативного підходу є слабкий облік переваг і потреб суспільних груп, що склалися, з досвіду суспільної поведінки. Цей підхід приховує факти нераціональних потреб, обмежує можливості обліку майбутніх потреб суспільства, що розвивається.

Методика побудови **ЦФБ** повинна поєднувати **нормативний** і **дескриптивний** підходи.

Прикладом такого поєднання є розробка різного роду нормативів для задоволення потреб населення на основі вимог фізіології, медицини і т.д.; узагальнення досвіду суспільної поведінки ведучих в економічних і культурних відносинах верств населення (раціональні норми споживання продуктів харчування, раціональний гардероб, раціональний набір предметів тривалого користування, раціональна забезпеченість послугами і т.д.). **Наприклад,** визначення прожиткового мінімуму

Абстрактна модель оптимального планування виробництва

Нехай **національна економіка** є об'єднання двох сфер: **сфери виробництва** (матеріального і нематеріального), **що** включає різні види діяльності і **сфери споживання,** використовування різних видів благ безпосередньо для задоволення потреб суспільства.

В число видів діяльності включаються процеси виробництва різноманітної продукції і послуг, і процеси доведення вироблюваної продукції до кінцевого використовування (тобто сфера обігу, обміну). При цьому кожний технологічний і організаційно – господарський спосіб виготовлення продукції і послуг розглядається як особливий вид діяльності.

Запис моделі почнемо з позначень:

J – вид діяльності; $j \subset N_1$

I – вид блага; $i \subset N_2$

$\overline{x_1} = (x_j)$ - вектор інтенсивних видів діяльності; **j=1,2,3,.n;**

$\overline{x_2} = (x_i)$ - вектор об'ємів використовування благ; **i=1,2,3,.m;**

$\overline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{\overline{x_2}} \end{bmatrix}$ - загальний вектор змінних моделі; $N_1 \cup N_2 = N$;

$\overline{y_1}(\overline{x_1})$ - вектор – функція кінцевої продукції сфери виробництва;

$Z(\overline{x_2})$ - **ЦФБ,** визначається на векторі $(\overline{x_2})$;

$\overline{Q}$ - вектор фіксованих об'ємів продукції, що використовується, у сфері споживання;

$\overline{y_2}(\overline{x_1})$ - вектор – функція витрат ресурсів;

$\overline{R}$ - вектор об'ємів наявних ресурсів;

Відповідно до прийнятих позначень модель набуває вигляду:

$Z(\overline{x_2}) \to \max$

при обмеженнях:

1. По балансу виробництва і споживання:

$\overline{y_1}(\overline{x_1}) - \overline{x_2} >= \overline{Q}$, де $\overline{Q > 0}$;

або

$\overline{y_1}(\overline{x_1}) >= \overline{x_2} + \overline{Q}$;

Кінцевої продукції повинно бути достатньо для задоволення потреб (змінних і фіксованих).

2. По використовуванню ресурсів:

$\overline{y_2}(\overline{x_1}) =< \overline{R}$;

Ресурсів повинно бути затрачено не більш їх наявності.

3. Умова невід'ємності змінних:

$\overline{x_1} >= 0$

$\overline{x_2} >= 0$

Кінцевою продукцією є різниця між проведеною і використаною продукцією у сфері виробництва.

Функція $\overline{y_1}(\overline{x_1})$ повинна задовольняти умови: існують такі вектори $\overline{x_1} >= 0$; для яких $\overline{y_1}(\overline{x_1}) >= 0$; Іншими словами, присутність видів діяльності гарантує кінцевий продукт. Ця умова може бути названою **умовою продуктивності** економічної системи. Якщо дана умова не виконується, то не може здійснюватися навіть просте відтворювання.

Раніше було сказано про те, що **ЦФБ** визначається на векторі $\overline{x_2}$, тобто має вигляд - $Z(\overline{x_2})$. Функція виробництва $\overline{y_1}(\overline{x_1})$ і функція витрат $\overline{y_2}(\overline{x_2})$ визначаються на векторі $\overline{x_1}$.

В загальному випадку ця модель повинна трактуватись як динамічна.

Якщо час враховується дискретно, то всі умови моделі мають додаткові координати t=1,2..,T, де T – тривалість планового періоду. Це означає, що вектори $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}$ мають координати $\overline{x_{jt}}$ і $\overline{x_{it}}$, при чому $N = N^1 \cup N^2 \cup ... \cup N^t$, а в обмеженнях вказується для якого тимчасового періоду воно записується.

Ті види діяльності і технічні способи, які увійшли до оптимального плану, є рентабельними. Рентабельність оптимального плану гарантується величинами, що мають різноманітні назви: **подвійні змінні, оцінки оптимального плану, об'єктивно обумовлені оцінки, тіньові ціни, ціни оптимального плану, нормована вартість, нормований градієнт, редуцирована вартість, множник Лагранжа.** Кожному обмеженню відповідає множник Лагранжа.

Оцінка вироблюваної продукції по оптимальному плану дорівнює оцінці споживаних ресурсів.

Види діяльності, що не увійшли до оптимального плану, є збитковими, оскільки оцінка ресурсів перевищує оцінку продукції.

Для визначеності називатимемо вищезазначені величини **оптимальними** (або подвійними) **оцінками.**

Оптимальні оцінки володіють важливими властивостями вимірювальних витрат і результатів в економіці, що оптимізується.

Визначення:

Отже, **оптимальні оцінки** – це показники збалансованості продукції і ресурсів в економіці, і універсальні вимірники економічної ефективності всіх зовнішніх по відношенню до модельованої системи джерел дефіцитності (збалансованості) продукції, суспільно необхідних витрат на її виробництво і суспільної корисності її використовування.

Оптимальні (подвійні оцінки) виникли на підставі теорії подвійності.

15. Моделювання сфери споживання

15.1.Функція корисності. Загальні властивості функції корисності

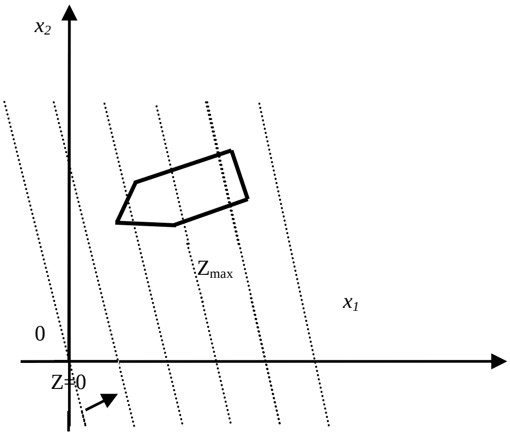
При побудові абстрактної моделі економіки в якості критерія оптимальності була прийнята цільова функція суспільного добробуту (**ЦФД**), що характеризує в динаміці різноманітні умови суспільного життя: задоволення матеріальних (продукція і послуги), духовних потреб, умови праці і можливості вибору трудової діяльності, екологічні умови, збереження здоровя і т.д. При моделюванні сфери споживання в якості критерія оптимальності виступає цільова функція споживання (**ЦФС),** що виражає рівень задоволення матеріальних потреб суспільства (рівень споживання) . **ЦФС** являється частиною **ЦФД.** Вона визначена на більш вузькій множині благ у порівнянні з **ЦФД**. Вектор змінних $x \geq 0$ включає різноманітні види продукції і послуг, що використовуються в сфері споживання. Але в цей перелік не входять ряд соціальних, екологічних та інших умов життя суспільства.

Таке обмеження області визначення **ЦФ** дозволяє, однак, більш ретельно досліджувати з її допомогою проблеми росту матеріального добробуту.

Являючись окремим випадком **ЦФБ,** функція $Z(x)$зберігає її загальні властивості як інструмента упорядкування різноманітних наборів (варіантів) споживчих благ з точки зору задоволення потреб суспільства. Ряд властивостей **ЦФС** зручно вивчати, використовуючи геометричну інтерпретацію рівнянь $Z(x)=C$, де C-змінний параметр, що характеризує значення (рівень) **ЦФС**. В просторі n споживчих благ кожному $Z(x)=C$ відповідає певна поверхня рівноцінних (чи байдужих) наборів благ. В теорії споживання такі поверхні отримали назву поверхонь байдужості. Цей термін був вперше введений англійським економістом-математиком Ф. Еджвертом (1845-1926) в 80-х роках XIX століття. Він був представником математичної школи політекономії.

На множині допустимих значень x можна побудувати сімейство (карту) поверхонь байдужості. Задача, що розглядається, являється задачею нелінійного програмування. Але також як ми геометрично інтерпретували задачу лінійного програмування, де функція цілі була лінійною і зображалась в двомірному просторі, тобто на площині в виді прямої лінії, ми можемо побудувати графік для **ЦФС** в тому ж двомірному просторі.

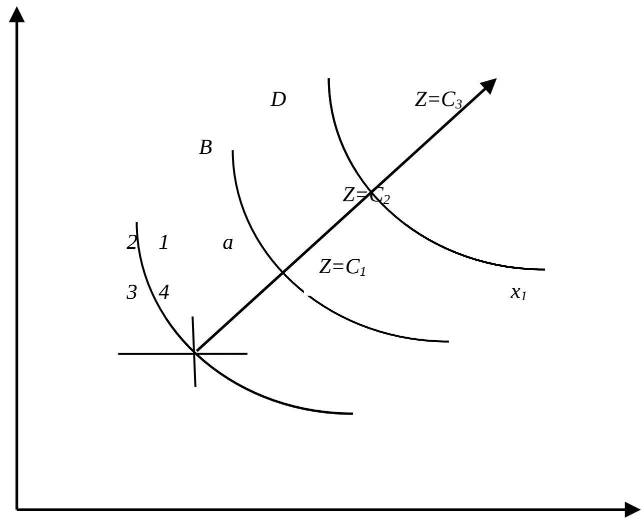
Отже, у випадку задачі **ЛП** воно виглядало так:



Аналогічно будуємо графік для **ЦФС.**

Розглянемо простір для двох благ. Це можливо якщо різні блага згрупувати в дві групи (наприклад, продукти харчування і непродовольчі товари, включаючи послуги), або розглядати різноманітні комбінації для двох конкретних благ при фіксованих значеннях всіх інших благ.

Рівні **ЦФС** зображаються на площині у вигляді кривих байдужості.



Доцільно для початку припустити, що функція Z(x) являється строго зростаючою по всіх властивостях аргумента, тобто збільшення споживання будь-якого блага при збереженні рівнів споживання всіх інших благ збільшує значення **ЦФС**. Якщо Xb≥Xa, то Z(B)>Z(A). Тому більш віддалена від початку координат поверхня байдужості відповідає великому значенню **ЦФС** (C<C<C), а сам процес максимізації **ЦФС** на деякій обмеженій множині можна інтерпретувати як знаходження допустимих точок, що належать кривій поверхні байдужості, максимально віддаленій від початку координат. Поверхні байдужості не можуть перетинатися або, інакше, через одну точку простору благ можна провести тільки одну поверхню байдужості. Інакше виявилось би, що один і той же набір благ відповідає декільком різним рівням одночасно.

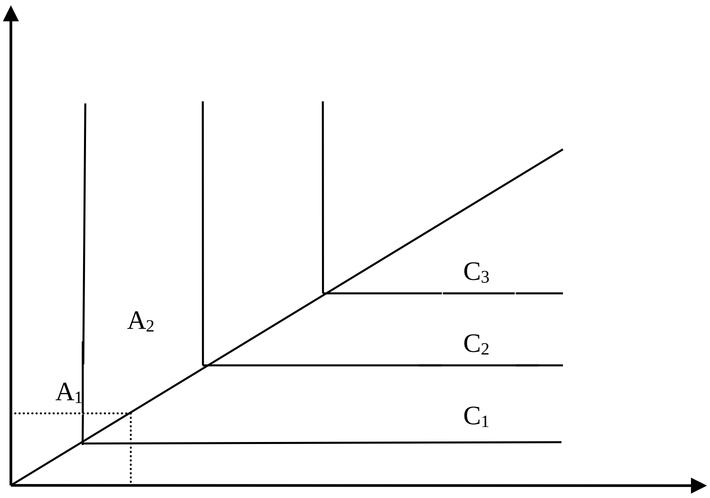
При русі по поверхні байдужості в будь-якому напрямку якісь значення x будуть зростати, а якісь зменшуватись.

Візьмемо довільну точку **А** і проведемо через неї прямокутну систему координат. В побудованій системі координат в квадранті 1 розміщуються комбінації більш кращі, ніж А, в квадранті 3 – гірші в порівнянні з А, а в квадрантах 2 і 4 знаходяться комбінації благ з різними відношеннями до набору А, в тому числі і рівноцінні (крива байдужості з набором А обов’язково проходять через квадранти 2 і 4).

Очевидно, криві (поверхні) байдужості повинні задовольняти умові, якщо Xb≥Xa і Xd≥Xb, то на відрізку **АД** завжди знайдеться точка **(а)**, що лежить на одній кривій байдужості з точкою **В**.

Візьмемо 4 набори благ: x=(2, 3); x=(3, 2); x=(3, 4); x=(4, 3). Z=x x; Zx=2*3=6 рівноцінно Zx=3*2=6; Zx=3*4=12 рівноцінно Zx=4*3=12.

Рівноцінні блага називаються **взаємозамінними**. Якщо блага цілком не взаємо заміняють один одного в процесі росту добробуту, то вони називаються **взаємодоповнюючими** або **комплектарними**. В цьому випадку криві байдужості мають вигляд прямих кутів.



Вершини–мінімальні точки, тобто набори, що забезпечують визначений рівень споживання при мінімальних затратах обох благ. Збільшення споживання одного блага (або декількох) без збільшення споживання додаткових благ не призводить до росту загального рівня споживання **(ЦФС).** Крім того**,** що на область споживання **ЦФС** і поверхонь байдужості накладено обмеження негативності змінних, для більш адекватного відображення закономірностей зміни споживання доцільно ввести обмеження хоча б для частини споживчих благ. Слід враховувати, що споживання ряду благ, безумовно, необхідно або не може суттєво зменшуватись в порівнянні з раніше досягнутим рівнем, а верхні границі повинні відображати повне задоволення (насичення) відповідних потреб.

15.2. Порівняння і взаємозамінність споживчих благ

Основні властивості **ЦФС** тісно пов’язані з особливостями порівняння і взаємозамінності благ. Різноманітні по своєму призначенню споживчі блага безпосередньо кількісно незрівнянні між собою в силу якісних відмінностей і кількісної неспівставності їх природних властивостей. Порівняння можливі тільки в рамках вузьких груп споживчих благ. Наприклад, порівняння продуктів харчування по їх калорійності. Однак самі різноманітні споживчі блага однорідні і співставні в тому сенсі, що їх споживання враховує суспільний добробут. Показники суспільної корисності випливають із **ЦФС**, характеризує приріст загального рівня споживання в результаті збільшення блага **і** на “малу одиницю”, тобто гранично корисний ефект (чи граничну корисність) **і**–того блага. В кінцевому рахунку, порівняння певних різних наборів споживчих благ по їх суспільній корисності є наслідок співставності різних наборів споживчих благ по їх перевазі з точки зору задоволення суспільних потреб. В цілому ж при малій зміні значення аргументів **ЦФС** зміна самої функції **ЦФС** приблизно виражається повним диференціалом

$dz(x)=\sum x\ dz$. **ЦФС** може бути досягнута різними способами. В цьому стоїть основа взаємозамінності споживчих благ. Коефіцієнт чи норма еквівалентної замінності благ обернено пропорційний співвідношенню граничних корисностей цих благ, взятого з оберненим знаком.

Для вивчення закономірностей споживання і конкретизації властивостей **ЦФ** важливо проаналізувати зміну коефіцієнтів еквівалентної замінності одних благ іншими. Практика показує, що якщо потреба в певному блазі задовольняється в незначній степені, то коефіцієнти замінності (витіснення) іншими благами для збереження загального рівня споживання високі. При збільшенні споживання цього блага коефіцієнти еквівалентної замінності іншими благами неухильно зменшуються.

Розглянемо умовний приклад. Споживання цукру на душу населення складає 50г на добу, а споживання м′яса 250г на добу. Допустимо, що загальний рівень споживання (300г), залишається колишнім, якщо кількість цукру збільшується до 80г (на 30г), а кількість м′яса зменшується до 220г (коефіцієнт замінності 1:1). Очевидно, що якщо кількість цукру зросте ще на 100г (180г), то зменшення м′яса на 100г (120г) уже не буде еквівалентним, так як знижує загальний рівень споживання. А при дуже високому рівні споживання цукру (стан граничного насичення, що шкідливо для здоров′я) він зовсім не може заміщувати навіть скільки завгодно малу кількість м′яса.

В вимірюванні коефіцієнтів замінності проявляється певна послідовність задоволення окремих потреб. На низьких рівнях добробуту задовольняється, перш за все, самі щоденні, природні потреби (їжа). Навіть дуже великий приріст благ, що забезпечує потреби більш "високого" порядку не може компенсувати відмову від задоволення потреб в їжі. Але по мірі насичення першочергових потреб блага, задовольняючі потреби більш високого рангу, отримують більш високу суспільну оцінку. Так з ростом добробуту збільшується цінність вільного часу як передумови гармонійного розвитку особистості, а відносна цінність матеріальних благ першої необхідності зменшується.

Це добре видно на графіку, де зображена крива байдужості. Якщо споживання першого блага збільшується. То споживання другого блага зменшується і цим пояснюється те, що крива байдужості носить ввігнутий характер.

15.3. Функція купівельного попиту

Найпростіша модель поведінки покупців в умовах товарно−грошових відносин має вигляд:

$Z(x) \rightarrow \max$ (вектор добробуту)

При обмеженнях:

По балансу ресурсів

$C\ x \leq D$;

Умови негативності змінних

$x \geq 0$, де:

$x = (x)$ – попит споживачів на товар (вектор);

$e = (e)$ − ціни на різні товари (вектор);

D – величина доходу (скаляр).

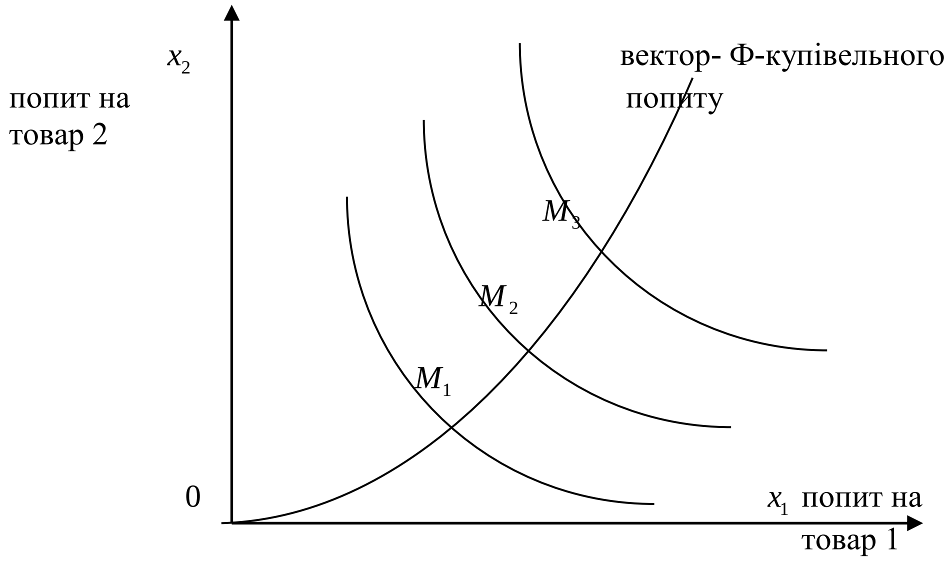
Споживачі можуть вибирати тільки такі комбінації товарів, які задовольняють умові:

$\sum e\ x \leq D$

Нехай в моделі* ціни і дохід – змінні параметри. Для зручності змінну доходу позначимо – у.

Тоді рішенням параметричної задачі буде вектор–функція x = x (c, y). Компонентами цього вектора являються функції купівельного попиту на певний товар від цін і доходу x=f(c, y).

Розглянемо частковий випадок, коли змінюється тільки дохід, а вектор цін залишається незмінним (c = c º).



При збільшенні доходу бюджетна лінія переміщується паралельно до самої себе і крапками оптимуму (попиту споживачів) будуть крапки: M_1; M_2; M_3. При нульовому доході попит на обидва товари буде нульовим. Крива O, M_1, M_2, M_3 є відображенням вектора-функції купівельного попиту від доходів при заданому векторі цін.

Шляхом диференціювання одержують коефіцієнти еластичності попиту на товар ***i*** від доходу або попиту на товар ***i*** від ціни. Вони характеризують відносну зміну попиту стосовно відносної зміни доходу чи ціни.

16. Моделювання розміщення і спеціалізації сільськогосподарського виробництва

Розміщення і спеціалізація сільського господарства як частина комплексної проблеми розміщення виробництва

Пошук оптимального плану розміщення і спеціалізації сільськогосподарського виробництва – це пошук оптимального плану розвитку всієї галузі – сільське господарство – в цілому на різних районних рівнях: країна в цілому, (економічна зона), область (автономна республіка), район, господарство.

Проблема розміщення і спеціалізації сільського господарства являється частиною комплексної проблеми – розміщення продуктивних сил.

Правильне, науково обґрунтоване розміщення сільськогосподарського виробництва і вибір раціональної його спеціалізації на різних рівнях – умова успішного виконання і продовольчої проблеми – центральної проблеми поточного десятиліття.

Розміщення і спеціалізація сільського господарства – це складна проблема. Недоліки в її вирішенні породженні недосконалістю планування даного питання, так як інших пропонує використання сучасних методів і напрямків, одним з яких являється застосування економіко-математичних методів та обчислювальної техніки. Насправді в розв’язку даної задачі існує багатоваріантність, обумовлена наступними причинами. Продовольчими ресурсами всіх галузей сільського господарства являються земля, робота, техніка та ін. Це обумовлює взаємозв’язок галузей. Крім того для сільського господарства характерна взаємозамінність деяких видів виробленої продукції.

Оскільки проблема багатоваріантна, то постає питання – як із багатьох варіантів знайти оптимальний. Розв’язок цієї проблеми досягається шляхом прийому методів математичного оптимального програмування, а ось яких – це також проблема, якої доторкнемось пізніше.

Підходи до вирішення проблеми розміщення і спеціалізації сільського господарства та економічні параметри задачі

З точки зору територіальної ознаки можна виділити задачі у відповідності із чотирма рівнями управління:

Країна в цілому

Область

Район

Підприємство

Задача на всіх рівнях разв’язується аналогічно, різниця лише у вихідній інформації. На кожному конкретному рівні враховуються умови даних об’єктів і в модель вносяться відповідні зміни. Потрібно сказати також про те, що розв’язання задачі ефективне тільки в тому випадку, якщо шукається її оптимальне розв’язання на всіх рівнях.

Тому, розв’язуючи задачу розміщення і спеціалізації сільського господарства по критерію max чистого прибутку співробітники прийшли до висновку про те, що при розв’язанні задачі на будь-якому конкретному рівні чистий дохід можна збільшити порівняно з його показником у фактичному плані на 2%, а при розв’язанні системи моделей послідовно для всіх рівнів – на 10%.

З точки зору часового признака задачу розв’язують як задачу довгострокового планування, прогнозування (на період до 20 років) і як задачу перспективного планування (на період у 5 років). Розв’язання задачі поточного(на 1 рік) та оперативного планування економічно не обґрунтоване через її складнощі.

З точки зору використаної інформації, задача може розв’язуватись по фактичним даним із ціллю економічного аналізу фактичного розміщення і спеціалізації сільськогосподарського виробництва.

Однак більш цінними і корисними для практики являються результати розв’язку такої задачі по прогнозуючих чи планових показниках.

Які ж економічні параметри, необхідні для розв’язку задачі і отримані в результаті розв’язку цієї задачі?

До рішення задачі на певному рівні повинні бути відомі наступні дані:

1. Розроблені плани розвитку сільського господарства на вищестоящому рівні;
2. З’ясовані потреби кожного об’єкта в продукції сільського господарства;
3. З’ясовані ресурси по кожному об’єкту і загальні ресурси по всіх об’єктах (будемо називати зоною);
4. З’ясовані найбільш ймовірні транспортні зв’язки між об’єктами і види перевізної продукції;

В результаті розв’язку задачі з’ясовують:

1. Галузі, які повинні розвиватися в кожному об’єкті.
2. Оптимальний для кожного об’єкта зв'язок галузей з урахуванням всіх агротехнічних і зоотехнічних потреб.
3. Довершеність та поглиблення спеціалізації виробництва.
4. Об’єм виробництва, кожного виду сільськогосподарської продукції в об’єкті.
5. Баланс виробництва і споживання кормів.

6. Баланс виробництва і споживання продукції по кожному об’єкту із урахуванням потреб населення, переробної промисловості, перевозок між об’єктами.

7. Баланс по розходу ресурсів з урахуванням наявності і поступу.

Перш ніж перейти до моделі задачі, вирішимо питання, якими ж із відомих нам методів слідує розв’язувати цю задачу? Те, що задача розв’язується на певному рівні для об’єктів даного рівня, наштовхує на думку про те, що задача блочна і може бути розв’язана блочним симплекс методом. При цьому задача нагадує вже розглянуту задачу оптимізації спеціалізації і співвідношення галузей у сільськогосподарських підприємствах.

Постановка задачі. Вибір критерію оптимальності і визначення складу змінних величин

Постановка задачі може бути сформульована наступним чином: Виходячи із конкретних умов кожного об’єкта зони, виділити такий план розміщення і спеціалізації сільськогосподарського виробництва, який дозволив би виконати план-замовлення держави на виробництво всіх видів продукції в кожному об’єкті і зоні в цілому при отриманні ефекту від сільськогосподарського виробництва, який може виражатися в отриманні максимуму продукції, доходу, рентабельності, або мінімуму затрат основних ресурсів. Найбільш об’єктивним критерієм оптимальності являється **мінімум приведених затрат**, враховуючи затрати на виробництво продукції ті на її транспортування.

Головними змінними величинами задачі будуть являться розміри галузей об’єкта, для якого вони розраховуються. Крім того необхідно врахувати, що при розв’язку задачі на більший період можливе поповнення ресурсів кожного об’єкта за рахунок ресурсів зони, а тому в число додаткових перемінних можна включити види і способи виробничої діяльності об’єкта: об’єми затрат ресурсів по видах, кількість реконструйованих або построєних приміщень, кількість використаної техніки, показники виробничої діяльності об’єкта і т.д.

Структурна економіко-математична модель задачі

Для запису економіко-математичної моделі введемо позначення:

j – індекс виду продукції, яка заготовлюється;

r – індекс объекта, в якому розміщується план заготівок;

k – індекс варіанта перевезень;

i – індекс обмеження;

N – множина видів продукції, яка заготовлюється для власної потреби;

N_1 – множина видів продукції, яка перевозиться для покриття потреб інших об’єктів;

R – множина об’єктів, в яких розміщуються плані заготівок;

K – множина варіантів перевезень продукції;

M – множина обмежень по об’ємах заготівок продукції по системі в цілому;

M_1 – множина по об’ємах заготівок продукції в об’єкті;

M_2 – множина обмежень по земельним угіддям, які виділені для виробництва товарної продукції;

M_3 – множина по трудових ресурсах;

M_4 – множина обмежень по заготівлі окремих видів продукції, яка не підлягає вивозу за межі об’єктів планування, що виробляють продукцію;

X_{jr} – змінна, яка позначає шукані об’єми j - того продукту для вживання в середині r - того об’єкта планування;

X_{jrk} – змінна, яка позначає шуканий об’єм j - тої продукції, який заготовлюється в r - тому об’єкті і перевозиться по k - тому варіанту;

L_{jr} – витрати на виробництво одиниці j - тої продукції в r - тому об’єкті;

L_{jrk} – транспортні витрати по перевезенню j - тої продукції із r - того об’єкта по k - тому ому варіанту;

$\underline{B}_{ir}$ – нижня границя можливого об’єму заготівок j - тої продукції в r - тому об’єкті;

$\overline{B}_{ir}$ – верхня границя можливого об’єму заготівок j - тої продукції в r - тому об’єкті;

p_{ijr} – потреба у земельній площі на виробництво одиниці j - тої продукції в r - тому об’єкті;

t_{ijr} – витрати праці на виробництво одиниці j - тої продукції в **r** - ому об’єкті;

$\overline{T}_{ir}$ – наявність трудових ресурсів в r - тому об’єкті для виробництва продукції у обсязі заготівок;

$\underline{q}_{ir}$ – потреба r - того об’єкта в j - ій продукції;

$\underline{Q}_{j}$ – план заготівок j - ого виду по усіх системах;

α_{ij} , α_{ijk} – логічні коефіцієнти які приймають значення 1 або 0.

Треба визначити значення X_{jr} та X_{jrk}, при яких досягається мінімум витрат на виробництво та доставку продукції до споживача:

$$F(x) = \sum_{r \subset R} \sum_{j \subset N} c_{jr} x_{jr} + \sum_{r \subset R} \sum_{\gamma \subset N_1} \sum_{k \subset K} \left(c_{\gamma r} + l_{\gamma rk} x_{\gamma rk} \right) \longrightarrow \min;$$

При умовах:

- Обмеження по можливих границях заготівлі окремих видів продукції (по спеціалізації)

$$\underline{B}_{ir} \le (\alpha_{ij} \ X_{jr}) + \sum \ \alpha_{ijk} \ X_{jrk}) \le \overline{B}_{ir} \ |;$$

$$(i \subset M1; \ j \subset N + N_1; r \subset R;)$$

- Обмеження розрахункової площі

$$\underline{B}_{ir} <= \sum_{\gamma \subset N_1} \sum_{k \subset K} p_{ijrk} \overline{<= B_{ir}}; (i \subset M2;)$$

- Обмеження по використанню трудових ресурсів

$$\sum_{j \subset N} t_{ijr} x_{yr} + \sum_{\gamma \subset N_1} \sum_{k \subset K} t_{ijrk} \overline{<= T_{ik}};$$

- Обмеження по потребах об’єкта у **j** – тому виді продукції

$$\alpha_{ij} + x_{jr} + \sum_{r=1}^{R-1} R \sum_{k \subset K}^{r-1} \alpha_{ijk} x_{jrk} = g_r;$$

- Обмеження по плановому об’єму заготівель

$$\sum_{r \subset R} \left(\alpha_{ij} x_{jr} + \sum_{k \subset K} \alpha_{ijk} x_{jrk} \right) = Q_j;$$

- Умови невід’ємності змінних

$$x_{jr} >= 0;$$

$$x_{jrk} >= 0;$$

Формування вихідної інформації. Схема матриці задачі

При розробці оптимального плану розміщення і спеціалізації сільськогосподарського виробництва розрізняють три види вихідної інформації:

I. – дані необхідні для розрахунку коефіцієнтів затрат-випуску і коефіцієнтів цільової функції;

II. – необхідні об'єми виробництва конкретних видів продукції по об'ємах та в цілому по зоні;

III. – об'єми перерозподілених по об'єктах ресурсів в зоні.

До **I** типу даних відносяться:

- урожайність культур (продуктивність тварин);
- затрати основних виробничих ресурсів на одиницю галузі;
- вихід харчових продуктів з 1 га культур;
- затрати кормів на 1 голову тварин;
- собівартість одиниці продукції.

Для знаходження урожайності. продуктивності, собівартості до розв'язку даної задачі використовуються похідні функції, метод експертних оцінок і т.д.

Затрати праці знаходять на основі технологічних карт. Для розв'язку задачі знаходять також розміри земельних угідь, можливість трансформації земель.

Дані **II** типу – об'єми виробництва основних видів продукції задаються вищестоящими органами.

Дані **III** типу – об'єми перерозподіляючих ресурсів по об'єктах зони також задаються.

Задача розв'язується **блочним симплекс-методом**.

Матриця задачі має наступну блочну структуру:

ФУНКЦІЯ ЦІЛІ		
I – 5 обмеження		
	I – 5 обмеження	
		I – 5 обмеження
Зв'язуючий блок - 6, 7 обмеження		

17. Виробничі функції (ВФ).

Зв'язок між будь-яким результатом і факторами, що на нього впливають, у загальному вигляді описується як $y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ і зветься залежністю функції у від аргументів x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$.

Для визначення статистичних залежностей необхідно виконати 2 кроки:

- На підставі фізичного змісту статистичних даних прийняти вид аналітичних залежностей, наприклад, поліном другого ступеню, експонента, лінійна залежність і т. п.
- За допомогою метода найменших квадратів по наявних статистичних даних знайти значення величин, які визначають вид прийнятих залежностей, тобто закон, по якому здійснюється прогноз поведінки об'єкту, який досліджується, на майбутнє. Отримані аналітичні залежності є рівняннями регресії.

Регресія є парною, якщо вона описує аналітичну залежність між функцією і однією змінною і має вигляд $y = f(x)$ і множинною, якщо вона описує аналітичну залежність між функцією та декількома змінними і має вигляд $y = f(x_1, x_2, \ \ x_n)$.

Якщо залежність лінійна, то і регресія буде лінійною, в протилежному випадку регресія буде нелінійною. Дуже важливою характеристикою регресіонних залежностей є міра їх достовірності, яка оцінюється величиною R^2 і знаходиться у межах $0 \le R^2 \le 1$. При $R^2=0$ величини, для яких визначається рівняння регресії, є незалежними, а при $R^2=1$ має місце функціональна (а не статистична) залежність. Прийнято враховувати припустимим $R=0,7$.

Одним із засобів підготовки вихідної інформації е використання **ВФ**.

ВФ – це математичний вираз економічних і технологічних залежностей процесу, об'єкта, явища. При цьому результативний показник виробництва являє функцію затрат певних виробничих ресурсів. Такими показниками є урожайність, продуктивність, рентабельність, собівартість, прибуток і т. п.

Звісно, наприклад, що урожайність і продуктивність є одними з основних показників розвитку **АПК**. Вони залежать від множини факторів, які діють на них (затрати праці, грошово-матеріальні витрати). В промисловому виробництві продуктивність, випуск валової продукції залежать від основних фондів і оборотних коштів. Тому, щоб обґрунтовано планувати, виробництв, треба, перед усім, обґрунтовано планувати вищенаведені показники. Розрахунки середніх статистичних показників надають приблизні значення. Для більш точного розрахунку показників успішно використовуються **ВФ**.

ВФ можуть бути представлені різноманітними способами:

Табличний спосіб – найбільш зручний тоді, коли вивчаються залежності за даними безпосередніх спостережень;

Графічний спосіб найбільш наочний. На графіку безпосередньо виявляються основні якості функції і хід її зміни;

Вісьма зручним і розповсюдженим є **аналітичний** спосіб виразу **ВФ**. В цьому випадку **ВФ** є **математичною моделлю** багатофакторного економічного процесу, який у формі рівняння встановлює зв'язок між ознаками, які вивчаються.

На відміну від економіко-математичних моделей, які включають в собі систему нерівностей (рівнянь). **ВФ** – це математико-статистичні моделі і у більшості випадків описуються одним рівнянням, у якому результати роботи представляються як функція **n** незалежних величин (факторів) и записується як

$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, де

y - виробничий результат, а $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}, \ldots \mathbf{x_n}$ - фактори виробництва.

Перши спроби дослідження виробничих зв'язків у сільському господарстві спостерігалися ще у 50-х роках XIX віку. Німецький вчений Юстус Лібіх спробував виразити зв'язок між кількістю внесених споживчих речовин і врожайністю культур. Ідея Лібіха була сформульована Бондарфом и Плессингом і вигляді функції **y = ax**, яка залежить від ґрунту, клімату, виду рослин, культури їх вирощування и др. При запису функції використані позначення:

y - врожайність;

x - кількість внесених поживних речовин;

a - постійна величина, яка характеризує ступень впливу добрив на врожайність.

Пізніше формула видозмінилася и прийняла вигляд:

$y = a_0 + a_1 x$, де

a_0 - постійна величина, яка виражає врожайність без добрив. Це звісна тепер парна лінійна кореляція.

Ця функція виражає залежність врожайності тільки від однієї споживчої речовини. Так цей закон мінімуму Ю. Лібіха спростував Эдвальд Вольні у 1869 році, коли вивів більш жорстку залежність величини врожаю від сукупності трьох факторів: світла, води і живлення. Ця залежність не була представлена в аналітичній формі, але графічне її представлення заслуговує на увагу. Однак ця формула не давала можливості визначити максимальну врожайність, так як при внесенні добрив до визначеної величини вона знижувалася. Так що формула неправильно описувала функцію $y = f(x)$.

Пізніше (1909 р.) незалежно один від одного пропонували формулу:

$y = M - AR^x$, де

M - максимальна врожайність;

A - максимальна прибавка до врожаю;

R - ступень зниження максимальної ефективності добрив;

X - кількість внесених добрив.

Ця функція є більш точною, але має недоліків, так як припускає зниження потужності додатних вкладень і припускає досягнення врожайності максимуму якщо $X \to \infty$.

Англійці Кроутер та Іетс пропонували інший варіант формули Мітчерліха – Спіллмана:

$$y = y_0 + A\left(1 - 10^{-KX}\right),$$

де y_0 - врожайність без добрив;

A - максимальна прибавка до врожаю;

К - постійна величина для даного виду добрив.

X - кількість внесених добрив.

Немчинов В.С. наряду с вивчення впливу на врожайність методологічних і агротехнічних факторів використовувал виробничі функції в економічних дослідженнях.

За допомогою багатофакторних рівнянь регресії було вивчено вплив різноманітних факторів на розміри грошової оплати людино-дня.

$$y = -2{,}06 + 0{,}811x_1 + 0{,}0168x_2 + 0{,}83x_3,$$

де *у* - грошова оплата;

x_1 - розмір засобів виробництва у розрахунку на 1 га с. г. площі;

x_2 - % спеціалізації галузей в товарній продукції;

x_3 - врожайність картоплі, ц / га.

Види рівнянь, за допомогою яких можуть бути відображені виробничі функції, визначаються в залежності від суті досліджуваного процесу и характеру факторів.

Звісні 2 способи визначення виду **ВФ:**

1. Побудова графіка і підбір відповідних кривих.

К виробничим функціям, рівняння яких графічно зображаються кривими, відносяться, перед усім, **квадратична** функція **параболічного** типу.

2. Вираз даної залежності у вигляді суми функцій визначеного класу $y = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + ... + a_2 f_2(x)$, що потребує достатніх математичних знань.

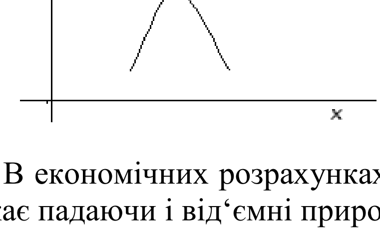
Але існує загальноприйняті види функцій, які і будуть тут пропоновані.

Якщо цю формулу розповсюдити на ряд поживних речовин, то отримаємо множинну лінійну кореляцію.

Якщо є можливість припустити, що величина результату ***у*** буде зростати або убивати зі збільшенням фактора ***х*,** і в межах його зміненні можливі **max** або **min** величини ***у***, то к рівнянню прямої слід приєднати третій член. Рівняння прийме вигляд:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;$$

За допомогою такої функції можна вивчити зв‘язок “врожайність - опади”.



В економічних розрахунках часто використовують **параболу** другого порядку, яка допускає падаючи і від‘ємні прирощення результату виробництва

$$y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2;$$

Наведена функція достатньо гарно описує затрати на корми для тварин на відгодівлі. Вона припускає зниження продукту, який доповнює одиницю затрат.

При використанні виробничих функцій часто роздивляють пари величин, зворотно пропорційні друг другу, наприклад, трудомісткість і_продуктивність праці; норма часу и норма виробітку; собівартість і рентабельність.

Така зворотно пропорційна залежність описується рівнянням **гіперболи**

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x};$$

Ця залежність основана на припущенні, що частина расходів зростає пропорційно випуску продукції, а решта їх частина $\mathbf{a_1}$ залишається постійною. Параметр $\mathbf{a_0}$ має конкретний економічний зміст.

Може бути використана і гіперболічна функція іншого типу:

$$y = a_0 + \frac{a_1}{\sqrt[n]{x}}$$, де n > 1;

Ця функція основана на тому, що затрати виробництва можуть розподілятися на зростаючи пропорційно випуску продукції і зростаючи більш повільно.

В практиці аграрних економічних розрахунків широко використовується В**Ф** ступеневого виду:

$$y = a_0 x^{a_1}$$, де $\mathbf{a_1}$ – коефіцієнт регресії.

Ця функція зручна тим, що шляхом логарифмування вона приводиться к лінійному виду (відносно логарифмів **x** и **y**), яка вирішується простіше, ніж нелінійна. В той же час ступенева функція являючись криволінійною, володіє більшою гнучкістю, і тим самим дає можливість ліпше аппроксимувати складні економічні взаємозв’язки.

За кордоном к цьому типу відноситься широко розповсюджена функція Кобба-Дугласа

$$y = a_0 \prod_i x_i^{\alpha_i}$$, де

y - результат виробництва;

x_i – ***i***-ий аргумент, який впливає на результат;

a_0 – коефіцієнт пропорційності;

α_i - показник ступеню ***i***-ого аргументу;

П – знак добутку.

За допомогою функції

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$ де

y – національний доход;

x_1 – трудові ресурси;

x_2 – виробничі фонди;

можна визначити вплив таких факторів, як трудові ресурси і виробничі фонди на величину національного доходу.

Та же функція $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, де

y – валовий продукт;

x_1 – основні фонди;

x_2 – оборотні засоби;

Це дає можливість дослідити вплив таких факторів, як основні фонди оборотні засоби, на величину валового продукту.

За допомогою формули Кобба-Дугласа можна визначити чисельне значення диференційної ренти

$$y = a_0 \prod_i x_i^{\alpha_i} z_k^{\beta_i}$$, де

x_i - фактори I групи, які визначають диференційну ренту I (якість ґрунту, опади, температура, радіація, положення підприємства);

z_k - фактори II групи, які визначають диференційну ренту II та інтенсифікують сільське господарство (агротехніка, сорти, якість насіння, добрив, породи тварин, концентрація, механізація, організація праці, оплата праці та ін.).

α_i і β_i - показники ступеню аргументів x_i и z_k;

$\prod_i x_i^{\alpha_i}$ - величина, яка визначає ступень впливу на доходність факторів I групи;

$\prod_k z_k^{\beta_k}$ - величина, яка визначає ступень впливу на доходність факторів II групи.

Раніше ми розглянули лінійну багатофакторну кореляційну модель:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n;$$

В економічному аналізі застосовують рівняння більш складного криволінійного типу, яке ліпше описує багатофакторні економічні взаємозв‘язки.

Одним з таких рівнянь є **поліном** виду:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_2^2 + ... + a_{1n} x_n^2 + a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_1 x_3 + ... + \text{і}$$

т. д., тобто розкладення функції у рядок Тейлора.

Як криволінійний, цей поліном володіє достатньою гнучкістю і у багатьох випадках, вже будучи другого ступеню хороше описує складні залежності.

В економіці широко використовується ступенева багатофакторна функція виду:

$$y = a x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n};$$

Ця функція, як і ступенева з одною мінною, приводиться до лінійного виду шляхом логарифмування.

Дослідження за допомогою виробничих функцій відносяться до області е**кономіко – статистичного** моделювання. Побудову математичної моделі повинен передувати ретельний якісний аналіз економічного процесу, який моделюється. Моделювання процесу здійснюється в декілька етапів:

- економічний аналіз, визначення залежної змінної (функції) і виявлення факторів (аргументів), які впливають на її значення;
- сбір та обробка статистичної інформації;
- визначення виду виробничої функції;
- запис математичного рівняння у загальному вигляді;
- визначення параметрів (коефіцієнтів) математико-статистичної моделі і їх достовірності;
- статистична і економічна оцінка моделі;
- експериментальна перевірка моделі;
- економічна інтерпретація моделі і впровадження її у виробництво.

18. Застосування генетико - математичних методів у тваринництві

Селекційно - племінна робота – це процес управління еволюцією сільськогосподарських тварин в межах популяції (стада, породи). Цей процес відбувається по відповідному алгоритму, який втілюється в плані селекційно – племінної роботи, що розраховано на декілька років. Складання планів на перспективу потребує від селекціонерів великого об’єму розрахунків і знань відповідних **математичних методів**, модифікованих у відповідності зі специфікою біологічних процесів і особливостями біологічних досліджень. Такі методи називаються **варіаційно – статистичними** або **біометричними.**

Предметом біометричних методів є **варіаційні ознаки.** Це такі ознаки, які приймають різні величини у об’єктів, які утворюють відносно однорідну групу по будь-яких основних показниках. Наприклад, у тварин однієї статево вікової групи **варіаційними** ознаками можуть бути надій, **вага**, **настриг вовни** і т. п.

Варіювання ознак обумовлено різними по виду і дії факторами. Варіювання має відповідну закономірність, яка базується на законі великих чисел теорії ймовірностей, який є теоретичною основою біометрії.

Вивчення варіаційної ознаки здійснюється на відповідній групі об'єктів, тобто **сукупності.** Розрізняють **генеральну** та **вибіркову** (випадкову) сукупність. **Генеральною сукупністю** може бути група тварин виду, породи. Вона складається з великої кількості об'єктів і її вивчення надто громіздке. Тому вивчають тільки частину членів генеральної сукупності, відібраних за принципом випадковості. Утворена сукупність називається **випадковою вибірковою сукупністю** або **вибіркою**. Вибіркова сукупність повинна правильно характеризувати генеральну сукупність, тобто бути **репрезентативною** (представною), що досягається принципом випадкового відбору її членів.

Вибіркова сукупність може бути одержана різними шляхами (дочки бугая, взяті для оцінки із усіх можливих його дочок; відібрані для досвіду тварини). Вибірка вважається **малою**, якщо вона складається не більше, ніж із 30 членів (n=30). Або великою, якщо вона складається з більшої кількості об'єктів.

В залежності від того, які показники повинні бути обчислені, вибірку оформляють у вигляді **варіаційних**, **рангових** рядів, **кореляційних** решіток, **статистичних** і **ієрархічних** комплексів.

Застосування біометричних методів для обробки інформації дозволяє складати науково - обґрунтовані плани селекційно – племінної роботи. Основні задачі, які доводиться вирішувати при складанні планів, доцільно розділити на класи:

Обробка звітності. В цей клас задач входить обробка результатів щорічної **оцінки** (**бонітування**) тварин для визначення їх племінної цінності. Вона проводиться на різних регіональних рівнях: господарство, район, область, держава в цілому. Для рішення таких задач використовуються алгоритми обробки звітів і табличних документів.

В цей клас задач входить розрахунок параметрів, які характеризують **структуру популяції**: середніх генетико – статистичних констант по основних селекційних ознаках (обільномолочності, жирномолочності, м'ясних якостях); параметрів, які вказують на **кореляційно – регресійний** зв'язок між цими ознаками, а також показників статистичних помилок і достовірності одержуваних статистичних показників.

Розрахунки параметрів для моделювання процесів управління еволюцією сільськогосподарських тварин. Ці задачі дають добру базу для управління спадковістю. Характерним для них є використання в якості базових даних результатів розв'язку попередніх задач – основних параметрів структури популяції.

Для формалізації алгоритмів обчислення генетико – статистичних констант введемо позначення :

X_k – **k** - та варіаційна ознака: надій, вміст жиру, білку в молоці; ознаки, які характеризують пристосування до механічного доїння; жива вага тварини і т. д. (**k**=1,2,…,K);

X_{ki} – значення **k** - тої варіаційної ознаки **i** - тої особини (**i** = 1,2,…,n);

n – кількість особин в популяції.

З урахуванням прийнятих позначень формули для обчислення середніх статистичних констант будуть мати вигляд.

Обчислення середньої арифметичної (простої і **зваженої) ознаки** X_k для **малої вибірки**. Для малої вибірки вона є часткою від ділення суми всіх значень варіаційної ознаки на кількість членів вибірки :

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ik}}{n};$$

Приклад. Визначити середню живу вагу 9 тварин.

Номер тварини	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Жива вага (кг)	480	476	475	485	460	494	510	495	490

Підставивши дані у формулу, одержимо:

$$\bar{X}_k = \frac{480+476+475+485+460+494+510+495+490}{9} = 485(кг).$$

Для визначення середньої живої ваги приплоду даної лінії, але одержаного від різних батьків, визначають **середню зважену** арифметичну величину, для обчислення якої суму добутків середньої живої ваги потомків по кожному плiднику на число потомків потрібно розділити на суму всіх потомків :

$$\bar{X}_k^{зв} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ikni}}{\sum_{i=1}^{n} ni};$$

Приклад. Визначити середню живу вагу потомків **10** плідників.

Середня жива вага потомків кожного плідника	460	485	510	535	560	585	610	635	660	685
Кількість потомків кожного плідника, n_i	2	9	14	18	6	12	14	12	10	3

Підставивши дані у формулу, одержимо:

$$\bar{X}_k^{зв} = \frac{460*2+485*9+510*14+535*18+560*6+585*12+610*14+635*12+660*10+685*3}{2+9+14+18+6+12+14+12+10+3} = 572{,}5(кг)$$

Обчислення середньої арифметичної для великої вибірки. При великій кількості обстежень (n>30) вибіркову сукупність представляють у вигляді варіаційного ряду, розподіляючи всі члени сукупності по класах з урахуванням величини варіаційної ознаки.

Позначимо кожне значення варіаційної ознаки $X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n$ і назвемо **варіантою,** а число, що показує скільки разів зустрічається та чи інша варіанта, – **частотою** і позначимо $m_1,\ m_2,\ m_3,\ldots,\ \ m_n$;

Варіація може бути **дискретною** (перервною), коли ознаки виражені цілими числами (кількість голів, яєць, число еритроцитів), і **неперервною,** коли ознаки виражені будь-яким дробовим числом (ріст в сантиметрах, вага в кілограмах, жирномолочність в %).

Обробку варіаційного ряду здійснюють різноманітними методами: методом **добутків**, методом **сум** чи **різниць**.

Приклад. Зі стада свиноматок **542** голови взята вибірка **50** голів. Варіаційна ознака – показник плодючості маток.

Визначимо величину класу (**k**) і число класів(**1**). Знайдемо різницю між максимальною і мінімальною плодючістю маток (**D**), яка називається **розмахом (лімітом) мінливості плодючості**. В нашому прикладі

$$D = XI^{\max} - XI^{\min}$$

Таблиця 1.Опис плодючості свиноматок

Номер матки	Плодючість, гол.	Номер матки	Плодючість, гол.	Номер матки	Плодючість, гол.	Номер матки	Плодючість, гол.
1	8	14	11	26	6	39	10
2	11	15	12	27	12	40	10
3	7	16	7	28	10	41	15
4	9	17	13	29	13	42	10
5	10	18	9	30	10	43	11
6	11	19	12	31	14	44	10
7	9	20	10	32	10	45	10
8	6	21	10	33	9	46	9
9	8	22	9	34	11	47	12
10	10	23	10	35	7	48	8
11	12	24	11	36	9	49	13
12	10	25	8	37	15	50	10
13	8			38	8		

Таблиця 2 Варіаційний ряд

Значення варіанти (х)	6				10	11	12	13	14	15
Частота (m)					15	6	5	3	1	2

Розділивши цю різницю на число класів, що передбачається, одержимо величину класу.

Рекомендується мати таке число класів при різних об’ємах вибірки

Об’єм вибірки, (n)	Число класів, (I)
40-60	6-8
60-100	7-10
100-200	9-12
200-500	12-17

Тоді $k = \frac{D}{I} = \frac{9}{8} = 1{,}1(гол)$.

Так, як для ознак з перервними значеннями величина класу повинна виражатися цілими числами, то після округлення одержимо **k=1** гол., а кількість класів фактично буде дорівнювати не **8**, а **10**. Побудуємо варіаційний ряд. Для цього знайдемо найменшу варіанту, яка дорівнює **6** гол., і розміщуючи варіанти по зростанню, підрахуємо їх частоти.

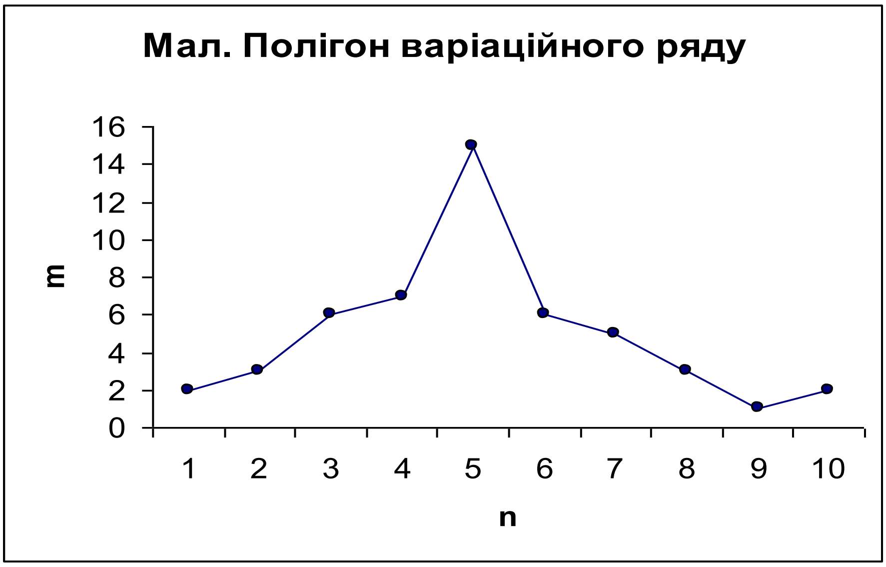
Графічне зображення варіаційних рядів

Зручне і наочне графічне зображення варіаційних рядів у вигляді полігона, гістограми, кумуляти і огіви. Для зображення дискретних варіаційних рядів частіше застосовують полігон.

Побудуємо полігон для нашого прикладу. Для цього в прямокутній системі координат на осі абсцис відкладемо значення ознак, а на осі ординат – величини частот.

З наведеного прикладу видно, що чим ближче значення ознаки до середньої арифметичної, тим частіше воно зустрічається. Подібний розподіл значень ознаки називається **нормальним розподілом**.

Для обчислення **середньої арифметичної** одержаного варіаційного ряду використовуємо **метод добутків**.



Складемо таблицю, дані якої використовуємо для розрахунку кінцевого результату. В першому стовпчику таблиці **X** запишемо класи варіаційної ознаки від найменшого до найбільшого, в другому **A** відповідні частоти. Клас з найбільшою частотою приймемо за умовну середню або за умовну точку відліку і позначимо X_m (для наочності він виділений лініями від стрічок інших класів). В стрічку цього класу нічого не вписується. Як правило, він знаходиться в середині варіаційного ряду. В наступний стовпчик ($X - X_m$) записуємо відхилення окремих класів від умовної точки відліку з відповідними знаками. В останньому стовпчику А($X - X_m$) запишемо добутки частот **A** на відхилення $X - X_m$.

Середню арифметичну визначимо за формулою:

$$\bar{X}_k = X_m + K\frac{\sum A(X - X_m)}{n} = 10 + 1 * 0{,}6 = 10{,}06(гол.).$$

Таблиця 3. Обчислення середньої арифметичної зваженої для загального числа поросят, що народилися, при великій кількості випадків

X	**A**	$X - X_m$	**A(** $X - X_m$ **)**
6 7 8 9	2 3 6 7	-4 -3 -2 -1	-8 -9 -12 -7
30	18	-	-
11 12 13 14 15	6 5 3 1 2	1 2 3 4 5	6 10 9 4 10
	50	-	3

Величину середньої арифметичної можна обчислити більш точно за формулою:

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ik}}{n} = \frac{503}{50} = 10{,}06(гол.).$$

Отримаємо ту ж величину, але такий збіг буває рідко. Потрібно мати на увазі, що чим більше класів виділено у варіаційному ряді, тим точніша середня арифметична , але більший об'єм обчислювальної роботи.

Визначаючи умовну точку відліку, потрібно враховувати, чи має ознака дискретне значення чи може мати будь-яку величину, тобто неперервне значення. В першому випадку умовну середню **X** при інтервалі класу більше одиниці **(k>1)** обчислюють як середню показників граничних величин класу. Так, при **k=2**

$$X_m = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5(\textit{гол.}).$$

В другому випадку $\mathbf{X}_m$ обчислюють додаванням $\frac{k}{2}$ до початку нульового класу, відповідну $\mathbf{X}_m$.

Обчислення медіани і моди. За характеристику варіаційного ряду застосовують медіану (M_e), тобто значення варіаційної ознаки, яка припадає на середину упорядкованого варіаційного ряду. При непарному числі випадків (2m+1) в ряді значення ознаки серединного випадку (m+1) буде медіанним. Якщо в ряді парне число (2m) випадків, медіана дорівнює середній арифметичній з двох середніх значень.

Для обчислення медіани при непарному і парному числах варіантів використовують формули:

$$M_e = X_m + 1; \quad \text{і} \quad M_e = \frac{X_m + X_m + 1}{2}.$$

Для наведеного вище прикладу $M_e = \dfrac{X_5 X_6}{2} = 10{,}5.$

Мода (М o) – це варіант, що найбільш часто зустрічається в даному варіаційному ряді. Для дискретного ряду мода визначається за частотами варіантів і відповідає варіанту з найбільшою частотою.

Для визначення величини моди використовують формулу:

$$M_o = X_{Mo} + k\frac{m_2 - m_1}{2m_2 - m_1 - m_3}.$$

Де X_{Mo} – значення варіаційної ознаки, яке відповідає початковому модальному класу; m_1 - частоти класу, який передує модальному; m_2 - частоти модального класу; m_3 - частоти класу, який йде після модального.

Розрахуємо моду для попереднього прикладу, змінивши його так, щоб величина класу **k** була рівна **2**. Вихідні дані внесемо в таблицю.

Таблиця 4. Варіаційний ряд по показнику плодючості свиноматок

Клас по плодючості	6…7	8…9	10…11	12…13	14…15
Частота(m)	5	13	21	8	3

Для цього прикладу модальним класом буде клас з частотою m = 21;

X=10 гол.; m_1=13; m_2=21; m_3=8; k=2.

$$M_o = X_{Mo} + k\frac{m_2 - m_1}{2m_2 - m_1 - m_3} = 10 + 2\frac{2-13}{2*21-13-8} = 10 + 0{,}76 = 10{,}76(\textit{гол.})$$

Величини моди (10,76) і середньої арифметичної (10,06) різні і співпадають лише для симетричних варіаційних рядів, у яких частоти варіант, рівновіддалених від середньої, рівні між собою. Для рядів з асиметричним розподілом частот, неоднаково розміщених навколо середньої, більш важливе значення має показник моди.

Моду і медіану часто використовують для характеристики якісних ознак, що мають місце при вивченні генетичних особливостей альтернативних (можливих) ознак (наприклад, при вивченні типів гемоглобіну у **ВРХ**).

Середні величини характеризують варіаційний ряд одним показником без врахування варіаційної ознаки. Для зміни мінливості варіаційна статистика пропонує ряд показників: варіаційний розмах (ліміти), середнє лінійне відхилення, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, нормоване відхилення.

Обчислення дисперсії (девіанти) і середнього квадратичного відхилення ознаки X_k **(стандартного відхилення).** Дисперсія (δ^2), або середній квадрат відхилень, являє собою середню арифметичну із квадратів відхилень варіант від їх середньої арифметичної і розраховується за формулами

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n}$$ (незважена дисперсія);

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 m}{m}$$ (зважена дисперсія).

Середнє квадратичне відхилення (δ) – це квадратний корінь із дисперсії. Незважене квадратичне відхилення обчислюється за формулою:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n}},$$

зважене

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 m}{\sum m}}.$$

Ці формули застосовують для великої вибірки, а для малої вибірки вони дають зміщені величини δ^2 і δ . Щоб ці величини правильно характеризували мінливість генеральної сукупності, з якої взята мала вибірка, їх потрібно дещо змінити:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1};$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}}.$$

Зміщеність усувається тим, що сума квадратів відхилень варіантів від їх середньої арифметичної ділиться не на об’єм сукупності (n), а на число ступенів свободи (n-1), яке дорівнює числу всіх елементів, що вивчаються, без числа обмежень різновидностей. При обчисленні дисперсії і середнього квадратичного відхилення мається одне обмеження, а саме, середня арифметична. Тому різновидність елементів в даному випадку обмежена однією умовою, а число ступенів свободи дорівнює числу елементів без одного (n-1).

Ці формули застосовують для точних розрахунків. Але їх використання пов’язане з великим об’ємом обчислювальної роботи із-за обчислень $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Тому в практиці більше застосовують робочі формули:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}}{n-1};$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}}{n-1}}.$$

Приклад. Розрахувати середній надій 12 корів і ступінь його мінливості.

$$Xi = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{n} = \frac{282{,}5}{12} = 23{,}54;$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i{}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{12} X_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{6780 - \frac{79806{,}25}{12}}{11} = \frac{6780 - 6650{,}5}{11} = \frac{129{,}5}{11} = 11{,}77;$$

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{11{,}77} = 3{,}43.$$

Якби δ^2 і δ були розраховані по формулах, то δ^2 =10,79 і δ =3,43.

Потрібно відмітити, що чим більша вибірка, тим менший вплив (n-1) на результат і менша різниця між результатами, обчисленими по тих чи інших формулах.

Таблиця 5. **Вихідна інформація і розрахункові величини для визначення середнього надою корів і ступеня його мінливості.**

Номер тварини	**Вихідні дані надою 1 гол., ц**	**Розрахункові величини**
I	X	X^2
1	20,6	424,30
2	20,2	408,04
3	19,9	396,01
4	20,3	412,09
5	21,6	466,56
6	22,1	488,41
7	22,7	515,29
8	24,1	580,81
9	25,4	645,16
10	28,2	795,24
11	29,4	864,36
12	28,0	784,00
	282,5	**6780,33**

При відборі тварин селекціонер має діло зі спадковістю і мінливістю ознак. Тому необхідно розрахувати коефіцієнти мінливості і спадковості, які визначають еволюцію популяції. З урахуванням вище прийнятих позначень приведемо формули для обчислення цих параметрів.

Обчислення коефіцієнта мінливості. На відміну від середнього квадратичного відхилення, яке є абсолютною величиною, коефіцієнт мінливості є відносною величиною, яка показує ступінь варіації (відхилення) дійсних значень **k**-ої варіаційної ознаки від її середнього значення. Його розраховують за формулою:

$$V_\sigma = \frac{\sigma * 100\%}{\bar{X}_k}$$

Обчислення коефіцієнта спадковості. Вивчення мінливості господарсько корисних ознак тварин показало, що амплітуда її дуже велика. На мінливість впливають і інші фактори (фенотипові мінливості) і спадковість (генотипові мінливості). Умови оточуючого середовища суб'єктивні і їх можна змінювати, а спадковість - об'єктивний фактор, тому необхідно із загальної амплітуди мінливості k-ої ознаки виділити частину, яка обумовлена спадковістю. Здібність ознаки до генотипової мінливості в середині популяції називається спадковістю ознаки. Для чисельної її характеристики використовують коефіцієнт H_{k^2} в процентах чи долях.

Найбільше поширення для обчислення H_{k^2} має метод подвоєння кореляції, чи регресії, між фенотипами груп родичів (дочок – матерів, синів – батьків). Наведемо одну із формул, запропонованих Райтом:

$$H_{k^2} = 2r_{x_k y_k};$$

де $r_{X_k Y_k}$; - коефіцієнт кореляції між фенотипами груп родинних тварин.

Селекційні ознаки (надій, вміст жиру в молоці, жива вага) взаємопов'язані. Цей зв'язок між різними селекційними ознаками в середині однієї групи тварин, а також між однаковими ознаками двох груп, що порівнюються, характеризується **коефіцієнтом кореляції**.

19. Індексація тварин та оцінка генетичного прогресу в популяції

Вдосконалення племінних та продуктивних властивостей популяцій тварин досягається за рахунок максимального використання для отримання нового покоління тварин кращих батьків за племінною цінністю, яка визначається величиною ознак продуктивності самої особі чи її батьків відносно середніх показників стада чи породи. **Відбір тварин** здійснюється у чотири етапи: **за походженням** (для ремонтного молодняку), **власної продуктивності** (для первісток на контрольних подвір'ях та бугаїв на елеверах), **за якістю потомків** (для бугаїв-плідників) та за комплексом джерел інформації (для відбору батьків корів, матерів та батьків нового покоління бугаїв). Розрахунок індексів племінної цінності тварин на кожному етапі має свої відмінності.

Постановка задачі може бути сформульована так: розрахувати племінну цінність тварини в залежності від її значення в селекційному процесі (ремонтний молодняк, тварина, що продуцирує: бугай-плідник, що оцінюється за якістю потомства, матері і батьки нового покоління бугаїв.

В основу розрахунків покладемо розвиток будь-якої однієї головної ознаки продуктивності, наприклад, надою.

Побудова економіко-математичної моделі. Для побудови моделі введемо позначення:

I_n - індекс племінної цінності потомка за походженням;

I_k - індекс племінної цінності корови за власною продуктивністю в стаді чи породі;

I_B - індекс племінної цінності бугая-плідника за потомством;

I_{ki} - індекс племінної цінності тварини за комплексом джерел інформації;

h^2 - спадковість ознаки за першу лактацію;

h_m^2 - спадковість ознаки за **m** лактацій;

h_c^2 - між стадні генетичні розбіжності в популяції за продуктивною ознакою;

b - коефіцієнт регресії племінної цінності бугая на фенотип його дочок;

n_1 - число дочок;

n_2 – число ровесниць;

n_d – число ефективних дочок;

m – кількість лактацій;

t – коефіцієнт повторності ознаки;

k_1, k_2, k_3 – вагові коефіцієнти джерел інформації матері, напівсестер по батькові та самої тварини;

P_1, P_2, P_3, - величина продуктивної ознаки відповідно матері, дочок (напівсестер), батька та ровесниць (ровесників) тварини;

$\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}$ - продуктивність відповідно ровесниць матері, ровесниць дочок (напівсестер), батька та ровесниць (ровесників) тварини;

$\overline{B}_m$ - середня продуктивність корів-ровесниць за **m** лактацій в активній частині породи.

У відповідності з прийнятими позначеннями модель оцінки племінної цінності тварин за власною продуктивністю в межах стада буде мати такий вигляд:

$$I_{kt} = h_m^2 (P_3 - \overline{P_3});$$

при цьому h_m виражає регресію племінної цінності тварини на його фенотип і розраховується за формулою:

$$h_m^2 = \frac{m \cdot h^2}{1 + (m-1) \cdot t}$$

для оцінки племінної цінності тварин по відношенню до породи в попередню формулу вводиться поправка на між стадні розбіжності:

$$I_{kp} = h_m^2 (P_3 - \overline{P}_3) + h_c^2 (P_3 - \overline{B_m});$$

Між стадні генетичні розбіжності (h_c^2) для надою дорівнюють 0,1.

Модель оцінки племінної цінності тварин на базі оцінки фенотипу їх потомків в більшості аналогічна попередній:

$$I_b = 2b\left(P_2 - \overline{P_2}\right) + h_c^2 (\overline{P}_2 - \overline{B_m});$$

де $$b = \frac{0{,}25^* \ n^* h^2}{1 + (n-1) * 0{,}25 * h^2};$$

Індекс племінної цінності тварин за походженням можна визначити за формулою:

$$I_n = 0{,}51_k + 0{,}51_b;$$

оскільки потомок отримує від кожного з батьків половину хромосомного набору.

При заміні I_k та I_b на раніш приведені формули можна отримати:

при оцінці в межах стада

$$I_{nc} = \frac{0{,}5mh^2}{1 + (m-1)t} (P_1 - \overline{P_1}) + \frac{0{,}25nh^2}{1 + (n-1)0{,}25h^2} (P_2 - \overline{P_2});$$

Та оцінюючи породи по відношенню до породи

$$I_{nn} = \frac{0{,}5mh^2}{1+(m-1)t}\left(P_1-\overline{P_1}\right)+\frac{0{,}25nh^2}{1+(n-1)0{,}25h^2}(P_2-\overline{P_2})+h_c^2\left(\overline{P_1-B_m}\right);$$

Індекс племінної цінності матері бугая за комплексом джерел інформації, до якого входять показники продуктивності матері, напівсестер по батькові та самої тварини, розраховують так:

$$I_{ki} = K_1\left(P_1-\overline{P_1}\right)+K_2(P_2-\overline{P_2})+K_3\left(P_3-\overline{P_3}\right);$$

Вагові коефіцієнти обчислюють за формулами:

$$K_1 = \frac{0{,}5h_{mM}^2\left(1-h_{mK}^2\right)}{1-0{,}25h_{mK}^2(h_{mM}^2+0{,}5b)};$$

$$K_2 = \frac{0{,}5b(1-h_{mK}^2)}{1-0{,}25h_{mK}^2(h_{mM}^2+0{,}5b)};$$

$$K_3 = \frac{h_{mK}^2\left[1-0{,}25(h_{mM}^2+0{,}5b)\right]}{1-0{,}25h_{mK}^2(h_{mM}^2+0{,}5b)};$$

де h^2_{mM} – спадковість ознаки за m лактацій матері;

h^2_{mK} – спадковість ознаки за m лактацій самої корови.

Точність обчислювань індексів племінної цінності визначають за такими формулами:

при оцінці за власною продуктивністю

$$R_{IK} = \sqrt{h_m^2};$$

за потомством

$$R_{ib} = \sqrt{\frac{0{,}25n_d h^2}{1+(n_d-1)0{,}25h^2}};$$

за походженням

$$R_m = \sqrt{0{,}5h_m^2+0{,}25b};$$

за комплексом джерел інформації

$$R_{ikI} = \sqrt{0{,}5k_1+0{,}25k_2+k_3};$$

Вихідна інформація та порядок її підготовки. Для розв’язання задачі на **ЕОМ** попередньо збирають інформацію по кожній тварині стада, що досліджується, вводять її в пам’ять машини та обробляють за допомогою машинних програм. Крім того, в пам’ять машини вводиться інформація о середніх показниках за різні лактації ровесниць активної частини породи. При використанні для розрахунків настільних **ЕОМ** спочатку готують інформацію о середніх даних, груп тварин, які вивчаються.

Розв’язування задачі та аналіз результатів розглянемо на конкретних прикладах:

Оцінка за власною продуктивністю. Корова **Русалка 286** лактувала в стаді та мала за 1, 2 та 3 - ю лактації надої відповідно **3650**, **4264** та **4242** кг, її ровесниці в стаді – **3520**, **4110** та **4462** кг, а в племінних стадах, де здійснювалась робота з породою, надої складали ці роки **3200**, **3665** та **4010** кг. Спадковість надою за 1-у лактацію в популяції складає 0,2, а між стадні генетичні розбіжності дорівнюють 0,1, повторність надою (t) + 0,4.

Визначимо різницю між **Р3** та **Р3**_по стаду та **Р3**_ та B_m по породі (табл.). Точність оцінки індексу племінної цінності при цьому буде

$$R_{ikII} = \sqrt{\frac{3*0{,}2}{1+(3-1)*0{,}4}} = \sqrt{0{,}333} = 0{,}577;$$

Таблиця 1. Розрахунок вихідних даних по корові

Рік лактації	Лактація	$P_з$	$\overline{P_з}$	$P_з - \overline{P_з}$	$\overline{B_m}$	$\overline{P_з}$ - $\overline{B_m}$
1982	1	3650	3520	+130	3200	+320
1983	2	4266	4110	+155	3665	+445
1984	3	4242	4462	-220	4010	+452
Ітого:				**+66**		**+1217**

Згідно формулі, племінна цінність Русалки 286

$$I_{kn} = \frac{3*0{,}2}{1+(3-1)*0{,}4}*\frac{66}{3}+\frac{0{,}1*1217}{3} = 7{,}3+40{,}6 = 47{,}9кг;$$

Тобто її генетична перевага в стаді дорівнює лише 22 кг, а в цілому по породі +143,7.

Оцінка племінної цінності тварин за походженням

Бугай-плідник **Карий** 1104 оцінений за 75 дочками-первістками, середня продуктивність яких 3620 кг і по породі – 3012 кг розрахована за формулою племінна цінність бугая.

$$I_b = 2*\frac{0{,}25*75*0{,}2}{1+(75-1)*0{,}25*0{,}2}*(3620-3240)+0{,}1*(3240-3012)=$$

$$= 2*\frac{3{,}75}{4{,}7}*380+0{,}1*228 = 606{,}4+22{,}8 = 629{,}2(кг).$$

Таким чином, племінна цінність **Карого 1104** у стаді дорівнює 660,4 кг, а в цілому по породі 629,2 кг.

При оцінці бугая **Вірного 1262** враховано, що 20 його дочок дали 3690 кг, 64 ровесниці по стаду – 3220 і по породі – 3012 кг молока за лактацію. Племінна цінність цього бугая

$$I_b = 2*\frac{0{,}25*20*0{,}2}{1+(20-1)*0{,}25*0{,}2}*(3690-3220)+0{,}1*(3220-3012)=$$

$$= \frac{2*1}{1{,}95}*470+0{,}1*208 = 482+20{,}8 = 500{,}.8;$$

Як бачимо, хоча дочки **Вірного 1262** більш високопродуктивні, племінна цінність його нижче, ніж у **Карого 1104**, і по стаду, і по породі в цілому внаслідок менш точної оцінки, обумовленою меншою кількістю дочок:

Карий 1104

$$R_{Ib}\sqrt{\frac{0{,}25*(\frac{75*250}{75+250})*0{,}2}{1+(\frac{75*250}{75*250}-1)*0{,}25*0{,}2}} = \sqrt{\frac{0{,}05*57{,}7}{1+56{,}7*0{,}05}} = \sqrt{\frac{2{,}884}{3{,}835}} = \sqrt{0{,}752} = 0{,}867;$$

Вірний 1262

$$R_{Ib} = \sqrt{\frac{0{,}25*\left(\frac{20*64}{20+64}\right)*0{,}2}{1+\left(\frac{20*64}{20+64}-1\right)*0{,}25*0{,}2}} = \sqrt{\frac{0{,}05*15{,}2}{1+0{,}05*14{,}2}} = \sqrt{\frac{0{,}762}{1{,}712}} = 0{,}445;$$

Приклад:

Батько ремонтного бугая **Брода 1468** по 60 дочкам мав перевагу над ровесницями + **300** кг, а мати, яка оцінена по п’ятьох лактаціях, мала племінну цінність по стаду + **800** кг. Різниця між середньою продуктивністю корів материнського стада та середньою продуктивністю по популяції склала + **400** кг.

Виходячи з цього, генетична перевага **Брода 1468** (формула):

$$I_{ПП}\ \frac{0,5*5*0,2}{1+(5-1)*0,4}*800+\frac{60*0,25*0,2}{1+(60-1)*0,25*0,2}*300+0,1*400=$$

$$=\frac{0,5}{2,6}*800+\frac{3}{3,95}*300+40=153,8+227,8+40=421,6кг;$$

по стаду:

Точність оцінки племінної цінності цього бугая

$$R_{шп}=\sqrt{0,5\cdot 0,384+0,25\cdot 0,759}=\sqrt{0,192+0,19}=\sqrt{0,382}=0,618$$

Оцінка племінної цінності тварин за комплексом джерел інформації. **Корова Лиска 2264** дала в середньому за 2 лактації 3688 кг молока, її ровесниці по стаду – 3296 кг, **мати - корова Русалка 286** – в середньому за три лактації мала перевагу над ровесницями стада +66 кг, а **батько** – бугай Карий 1104 – по 75 дочкам +380 кг над **ровесницями**. Розраховані за формулами вагові коефіцієнти для кожного джерела інформації складають:

$$K_1=\frac{0,5*0,333*(1-0,286)}{1-0,25*0,286*(0,333+0,5*1,6)}=\frac{0,119}{1-0,081}=\frac{0,119}{0,919}=0,129;$$

$$K_2=\frac{0,5*1,6*(1-0,286)}{1-0,25*0,286*(0,333+0,5*1,6)}=\frac{0,8*0,714}{1-0,081}=\frac{0,571}{0,919}=0,621;$$

$$K_3=\frac{0,286*[1-0,25*(0,333+0,5*1,6)]}{1-0,25*0,286(0,333+0,5*1,6)}=\frac{0,286*(1-0,283)}{1-0,081}=\frac{0,205}{0,919}=0,223;$$

Оцінка племінної цінності Лиски 2264:

$$I_{KN}=0,129*66+0,621*380+0,223*(3688-3296)=8,5+236+87,4=331,9\ \text{кг}$$

Розрахунок селекційного індексу. На практиці в селекційній роботі при відборі тварин враховується ряд ознак, а саме: різне значення для селекціонера та вимір у різних одиницях (кг, %, кг/мін). Об’єднати ці ознаки в одному показникові з урахуванням їх економічних терез можливо, якщо користуватися методом конструювання **селекційних індексів**. Цей метод ґрунтується на теорії часткових коефіцієнти **регресії**. Селекційний індекс більш повно виражає **генетичну** цінність тварини за комплексом ознак, що сприяє підвищенню ефективності племінної роботи.

Постановка задачі. Розрахувати оцінку тварин за комплексом ознак у вигляді селекційного індексу згідно величині розвитку ознак конкретної тварини та їх вагового значення, яка забезпечить максимальну точність призначення тварини у відтворювальну чи виробничу групу.

Як вихідні ознаки зазначено **надій**, **вміст жиру** у молоці та **тривалість** сервіс-періоду.

Побудова економіко-математичної моделі. Для розв’язування задачі введемо позначення вихідних величин:

$b_1, b_2, \dots, b_n$ - коефіцієнт регресії ознак 1, 2, ..., n;

$S_1, S_2, \dots, S_n$ - середні квадратичні відхилення ознак 1, 2, ..., n;

$R_{f1}, R_{f2}, \dots, R_{fn}$ - коефіцієнти фенотипової кореляції між ознаками 1, 2, ..., n;

$R_{g1}, R_{g2}, \dots, R_{gn}$ - коефіцієнти генетичної кореляції між ознаками 1, 2, ..., n;

$a_1, a_2, \dots, a_n$ - економічні ваги ознак 1, 2, ..., n;

$h_1^2.h_2^2.....h_n^n$ - коефіцієнти спадковості ознак 1, 2, ..., n;

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - величини ознак 1, 2, ..., n;

$\overline{x_1}.\overline{x_2}.......\overline{x_n}$ Величини стандартів ознак 1, 2, ..., n.

У загальному вигляді формула розрахунку і селекційного індексу має вигляд:

$$y=b_1(x_1-\overline{x_1})+b_2(x_2-\overline{x_2})+......+b_n(x_n-\overline{x_n})$$

Для трьох ознак в нашому прикладі

$$y=b_1(x_1-\overline{x_1})+b_2(x_2-\overline{x_2})+b_3(x_3-\overline{x_3})$$

Для розрахунку коефіцієнтів регресії ознак необхідні слідуючи дані (табл.) 2 .

Спадковість ознак, їх середні квадратичні відхилення, коефіцієнти фенотипової та генетичної кореляції розраховують за методикою дисперсійного аналізу.

Матриця розрахунку коефіцієнтів регресії така:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f31 & f_{32} & f33 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Окремі елементи матриці розраховують таким чином:

$f_{11} = S_1^2;$

$\theta_{11} = h_1^2 \cdot S_1^2;$

$f_{12} = R_{f(1\cdot 2)} \cdot S_1 \cdot S_2 = f_{21};$

$\theta_{12} = R_{\theta(1\cdot 2)} \cdot \sqrt{h_1^2} \cdot S_1 \cdot \sqrt{h_2^2} \cdot S_2 = \theta_{21};$

$\theta_{13} = R_{\theta(1\cdot 3)} \cdot \sqrt{h_1^2} \cdot S_1 \cdot \sqrt{h_3^2} \cdot S_3 = \theta_{31};$

$f_{13} = R_{f(1*3)}*S_1*S_2=f_{31};$

$f_{22} = S_2^2;$

$\theta_{22} = h_2^2 \cdot S_2^2;$

$f_{23}=R_{f(12*3)}*S_2*S_3=f_{32}.$

При збільшенні числа ознак матриця розрахунку коефіцієнтів регресії відповідно розширюється. Проте навіть при трьох ознаках обсяг розрахунків такий великий, що доцільно здійснювати його на **ЕОМ**.

20. Історія розвитку економіко–математичного моделювання

У 1758 році лейб–медик короля Людовика XIV, доктор Франсуа Кене (1694-1774) опублікував працю “Економічна таблиця”, де зробив спробу кількісно описати національну економіку. Це була перша в світі модель народного господарства (економіки). Перший варіант його знаменитої “Економічної таблиці” отримав назву “Зігзаг”; другий варіант – “Арифметична формула” – був опублікований у 1766 році. Це була у вищій мірі геніальна ідея.

“Економічна таблиця” Ф. Кене представляє собою схему (графіко–числову модель). процесу суспільного відтворення. Вона розкриває основні стадії відтворення (виробництво, розподіл, перетворення, споживання та накопичення), рух складових частин суспільного продукту (за вартістю та матеріально–речовинним складом), взаємовідношення класів (землевласників, фермерів, ремісників, торговців) відносно виробництва та розподілу продукції і доходів. З моделі Кене випливає висновок, що нормальний хід суспільного відтворення може здійснюватись тільки при дотриманні визначених вартісних та матеріально–речовинних процесів. Вже в наш час “Економічна таблиця” Ф. Кене послужила основою для побудови і розвитку багатьох математичних моделей суспільного відтворення.

Нові математичні інтерпретації її пропоновані В.С. Немчиновим , Ж. Бернардом, А. Філлінсом , І. Хишиямою.

Виділяють три основні етапи розвитку економіко–математичних досліджень: математична школа в політекономії, статистичний напрямок, економетріка.

Математичною школою в політекономії називався особливий методологічний напрямок. Родоначальником математичної школи є французький вчений О. Курно (1801-1877), який у 1838 році опублікував книгу “Исследование математических принципов теории богатства”.

Видатними представниками математичної школи були: Г. Гюссен (1810-1858), Л. Вальрас (1834-1910), У. Джевонс (1835-1882), Ф. Еджворт (1845-1926), В. Парето (1848-1923), В. Дмитриєв. (1868-1913).

Представники математичної школи спробували досліджувати на основі математичного методу важливі проблеми економічної теорії. Але їх праця не мала практичного застосування.

Статистичні методи виникли протягом XX століття. Головною задачею їх було вивчення економічних циклів та прогнозування господарчої кон'юктури на основі методів статистики. Цю направленість називають ще статистичною економікою. В рамках цього напрямку була створена велика кількість математико–статистичних моделей економічних явищ. Наприклад, "Гарвардський барометр" – для передбачення економічної погоди. Це була сукупність трьох кривих: фонд ринку; товарний ринок; грошовий ринок.

Економетріка – цей термін ввів норвежський вчений Р. Фриш (1895-1973), який проголосив, що економетріка – є синтез економічної теорії, математики і статистики. У 1931 р. створено міжнародне економетричне суспільство розвитку економічної теорії та її зв'язку із статистикою та математикою. У 1933 р. воно створює журнал "Економетріка".

Немов би іншим полюсом економетріки є математична економія, що займається математичними дослідженнями теоретичних моделей економіки.

Видатним представником математичної економії був Джон фон Нейман (1903-1957). Йому належить цілий ряд фундаментальних результатів в математичних теоріях економічного росту, економічної рівноваги, у теорії ігор тощо.

Серед виданих у нас зарубіжних робіт з математичної економії можно відмітити:

- ✓ Карлин С. Математические методи в теории игр, программировании и экономике. – М:, Мир, 1964.
- ✓ Ланкастер К. Математическая экономика. – М:, Сов. радио", 1972.
- ✓ Никайдо. Х. Выпуклые структуры и математическая экономика – М:, Мир, 1972.

На Заході математичне моделювання стало найбільш престижним напрямком в економічній науці. Не випадково з моменту заснування Нобелівських премій по економіці (1969 р.) вони присуджуються, як правило, за економіко-математичні дослідження. Нобелівські лауреати: Р.Фріш, Я.Тинберген, П.Самуельсон, Д.Хікс, К.Ерроу, В.Лєонтьєв, Т.Кумпанс – економетріки.

В нашій Вітчизні з кінця XIX століття з'являються оригінальні економіко-математичні дослідження В.К.Дмітрієва, В.І.Борткевича, В.С.Войтинського, Р.І.Ворженецького, В.В.Самсонова, Н.А.Столярова, Н.Н.Шапошникова.

Відносно самостійним напрямком науки кінця XIX та початку XX століття. були дослідження по використанню математичної статистики. Провідну роль грав А.А.Чупров (1874-1926). Йому належать праці з кореляційного аналізу економічних явищ. Найбільш крупним економістом–математиком був В.К.Дмітрієв. Основна його праця "Экономические очерки", 1904р. "Формула В.К.Дмітрієва" через декілька років знайшла широке використання в моделюванні міжгалузевих зв'язків.

В історії економіко-математичних досліджень особливе місце належить Є.Є.Слуцькому (1880-1948). Його стаття "К теории сбалансированности бюджета потребителя" мала світову звісність. Ідеї Є.Є.Слуцького розвиваються і зараз.

Згодом були роботи М.Баренгольца, Я.Шатуновського. Спроби використати математичні методи для вивчення структури та створення народногосподарських витрат предприйняв Л.Лубни-Герцик. Г.А.Фельдман (1884-1958) розробив моделі економічного росту, а С.С.Бюшгенс та А.А.Конюс – моделі споживання, індекси цін та купівельної спроможності грошей (раніше у Є.Є.Слуцького).

Далі була перерва – 30-ті роки.

У1939 році ленінградський математик Л.В.Канторович (1912 р.народження) отримав завдання від фанерного тресту: вирішити задачу стосовно загрузки верстатів обладнанням так, щоб:

або

- збільшити випуск продукції при тих же витратах сировини,

або

- на ту ж кількість виготовлених виробів зменшити витрати сировини.

Для вирішення цього завдання Л.В.Канторович розробив метод послідовного покращення плану або метод розрішуючих множників. А наприкінці 40-х років лінійне програмування було перевідкрито в США Дж.Данцигом. На сьогодняшній день пріоритет Л.В.Канторовича визнан в усьому світі. В книзі ”Математические методы организации и планирования производства” (1939) Л.В.Канторович розкрив досвід використання лінійного програмування для вирішення різноманітних задач: розподіл робіт між видами обладнання; використання комплексної сировини; розкрою матеріалів; складання планів перевозок та ін.

В більш пізніх працях Л.В.Канторович розширив сферу використання лінійного програмування в економіці, сформулював задачі галузевого та народногосподарського оптимального планування. За ці досягнення Л.В.Канторович у 1975р. отримав Нобелівську премію.

У 1939р. майже одночасно з Л.В.Канторовичем ленінградський економіст В.В.Новожилов (1892-1970) опублікував свою крупну економіко-математичну працю “Методы соизмерения народнохозяйственной эффективности плановых и проектных вариантов”. В цей же період виконувались роботи по раціоналізації транспортних перевозок (А.Л.Лур’є та В.Н.Толстой). Слід відмітити розробку С.Г.Струміліна числових моделей праці та балансу народного господарства, але вони мало використовувались на практиці.

Новий етап у розвитку економіко-математичних методів почався у другій половині 50-х років. У 1957-58 р.р. в країні створюються перші спеціалізовані економіко-математичні підрозділи.

Видатну роль в організації і пропаганді економіко-математичних досліджень зіграв В.С.Немчинов (1894-1964).

За Немчиновим economіко-математична модель є концентрованим виразом загальних взаємозв’язків і закономірностей економічного явища в математичній формі.

Об’єднані зусилля Л.В.Канторовича та В.С.Немчинова були відзначені по заслугах. У 1964 році були удостоєні Ленінських премій їх праці:

- Л.В.Канторович “Економічний розрахунок найкращого використання ресурсів” (1959). В.В.Новожилов “Вимір витрат та їх результатів у соц. господарстві” (1959).
- В.С.Німчинов “Экономико-математические методы и модели” (1962).

Список літератури

1. Бережна Л.В., Снитюк О.І. Економіко – математичні методи та моделі в фінансах. – К: Кондор, - 2009. – 301 с.
2. Бродський Ю.Б., Білоконь С.Ф. Системний аналіз в економиці. Конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей. - Житомир: ДАЕУ, 2008. - 167с.
3. Власов М.П., Шимко П.Д. Моделирование экономических процессов. Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 409 с.
4. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. пос. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.
5. Голіков А.П. Економіко–математичне моделювання світогосподарських процесів: Навч. посіб. – 3–тє вид., переробл. і доповн. – К.:Знання. 2009. – 222 с.
6. Е. С. Вентцель. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1988.-208с.
7. А. М. Гатаулін та ін. Економіко-математичні методи в плануванні сільськогосподарського виробництва. – К.: Вища школа, 1989.
8. Браславец М.Е., Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М. «Колос», 1972.
9. Браславець М.Е., Гуревич Т.Ф. . Кибернетика, Киев «Высшая школа», 1977.
10. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М. «Наука», 1979.
11. Кобринский Н.В., Майминас Е.З., Смирнов А.Д. Введение в экономическую кибернетику. М. «Экономика», 1975.
12. Кравченко Р.Г., Скрипка А.Г. Основы кибернетики. М. «Экономика», 1974.
13. Крайзмер Л.П. Кибернетика. М. «Экономика», 1977.
14. Крушевский А.В., Баранов Е.В., Поддубный А.Р. Экономико математические модели в планировании и управлении народным хозяйством. Киев «Высшая школа», 1973.
15. Кравченко А.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. – М.: Колос, 1978, - гл.12.
16. Тунеев М.М., Сухоруков В.Ф. Экономико математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. – М.: Колос, 1977, - гл.12.
17. Гранберг А.Г. Математические модели в экономике. – М.: Экономика, 1988.
18. Л.В. Канторович, А.Б. Горстко. Оптимальные решения в экономике. – М.:, 1972.
19. Л.В. Канторович, А.Б. Горстко. Математическое оптимальное программирование в экономике. – М.:, 1968.
20. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. М: Статистика, 1979.
21. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами EXCEL 7.0. BHV – Санкт-Петербург, 1997.
22. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. М: Статистика, 1977.
23. Ланкастер К. Математическая экономика. – М.: Сов.радио, 1972.

Зміст