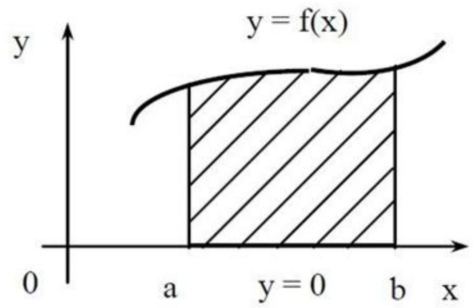
Застосування визначеного інтеграла

3.1. Обчислення площ плоских фігур

Як уже зазначалось, якщо на відрізку $[a;\ b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geqslant 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, знаходять за формулою

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{69}$$



Часто буває, що фігура, площу якої треба знайти, не є криволінійною трапецією. Якщо $f(x) \leqslant 0$ на $[a;\ b]$, то фігура aA_1B_1b лежить під віссю Ox (рис. 7.23). Площа цієї фігури дорівнює площі криволінійної трапеції aA_2B_2b, яка обмежена зверху кривою $-f(x) \geqslant 0$; тоді за формулою (69) маємо

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{70}$$

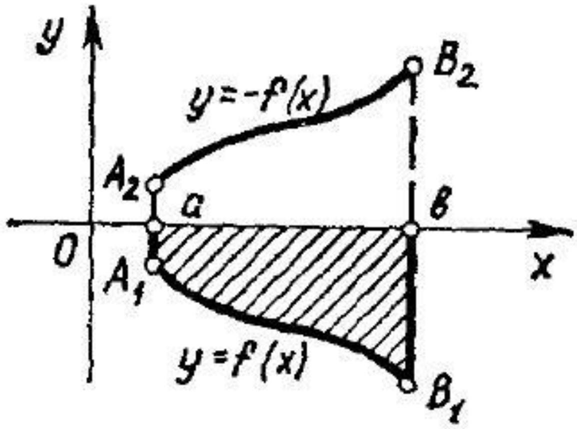


Рис. 7.23

Формули (69) і (70) можна об'єднати в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{71}$$

Ця формула залишається справедливою, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ скінченне число разів змінює знак (рис. 7.24):

$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

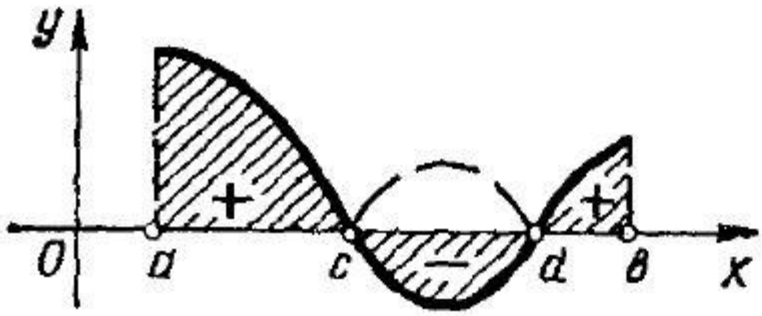


Рис. 7.24

Якщо треба обчислити площу фігури $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 7.25), то за формулою (69)

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx, \qquad (72)$$

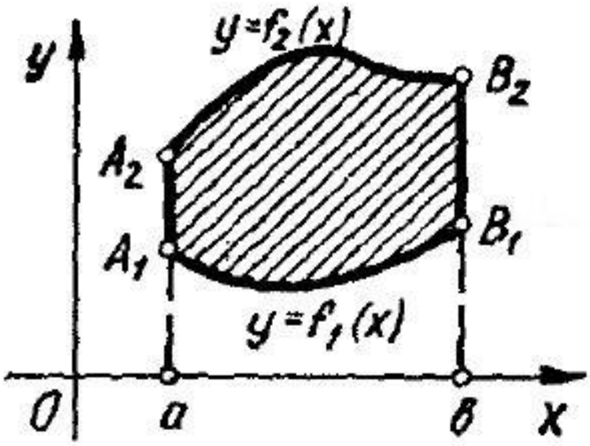


Рис. 7.25

тобто площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$ та $x = b$ за умови, що $f_2(x) \geqslant f_1(x)$, знаходять за формулою (72).

Якщо плоска фігура має складнішу форму (рис. 7.26), то прямими, паралельними осі Oy, її треба розбити на скінченну суму (різницю) криволінійних трапецій. Тоді площа фігури дорівнюватиме алгебраїчній сумі площ утворених трапецій.

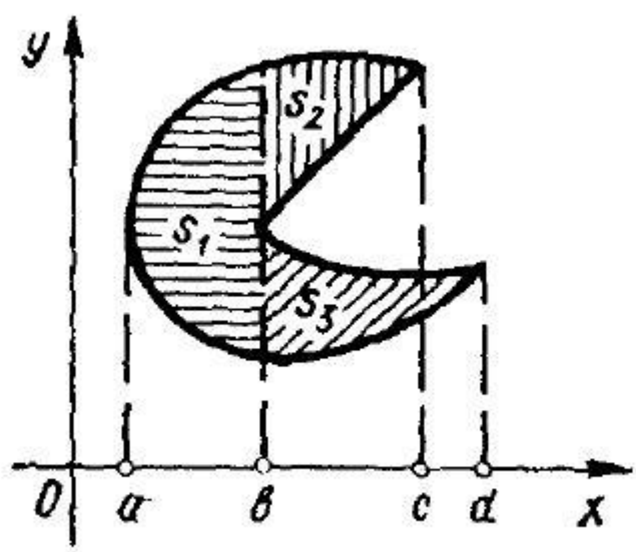
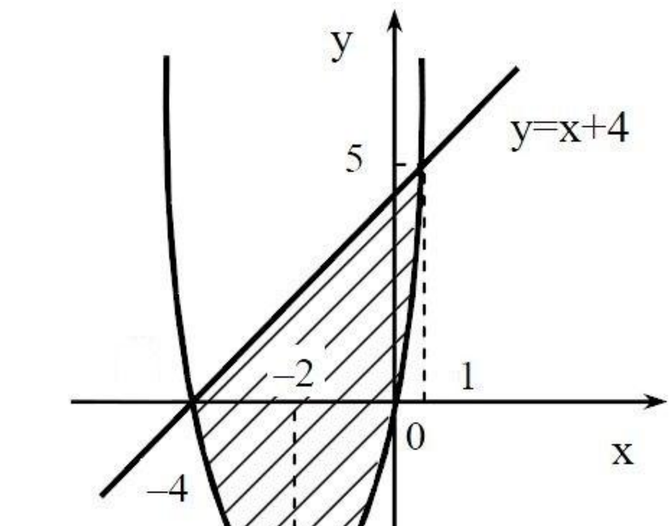


Рис. 7.26

Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$ і прямою $y = x + 4$.



Знайдемо точки перетину параболи з прямою і побудуємо шукану фігуру

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Таким чином, криві перетинаються в точках A(-4; 0) і B(1; 5) За формулою, де $f_1(x) = x^2 + 4x$, $f_2(x) = x + 4$,

$a = -4$, $b = 1$, маємо

$$S = \int_{-4}^{1} ((x + 4) - (x^2 + 4x))dx =$$

$$= \int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right) \Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \quad (\text{кв. од.})$$

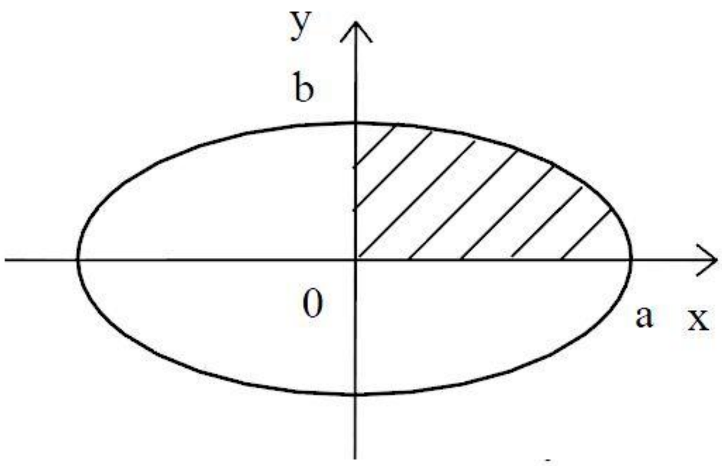
Розглянемо випадок, коли криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \end{cases}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — неперервні функції, які мають на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$. Тоді якщо $x(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ є монотонною, причому $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то для обчислення площі криволінійної трапеції досить в інтегралі (69) зробити заміну змінної $x = x(t)$, $dx = x'(t)\,dt$. Дістанемо формулу

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt. \tag{73}$$

Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

0x, 0y – осі симетрії, тому $S = 4\int_0^a f(x)dx$.

Знайдемо межі змінення параметра t, розв'язуючи рівняння:

$0 = a\cos t_1, \quad a = a\cos t_2,$

$\cos t_1 = 0 \qquad \cos t_2 = 1$

$t_1 = \frac{\pi}{2} \qquad t_2 = 0$

якщо x змінюється від 0 до a, то t змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt$$

$$S=4\int_0^a f(x)dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(a\cos t)'dt=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(-a\sin t)dt=$$

$$=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 tdt=-2ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos 2t)dt=-2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0=$$

$$=-2ab\left(\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)\right)=\pi ab\ .\ (\text{кв. од.})$$

Обчислення площі фігури в полярних координатах.

Розглянемо полярну систему координат.

Сукупність точки О і осі р будемо називати полярною системою координат, т. О – полюсом, р – полярною віссю (рис. 21).

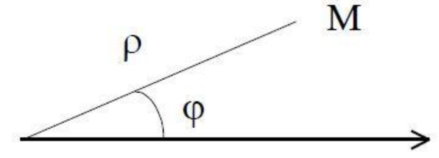


Рис. 21

Нехай М – довільна точка площини. Координата точки М задається двома числами М(ρ, φ): ρ – відстань від полюса О до точки М, ρ ≥ 0; φ – кут між полярною віссю р і радіусом-вектором $\overline{OM}$.

Встановимо зв'язок між декартовими і полярними координатами довільної точки М. Нехай початок декартової прямокутної системи координат 0xy співпадає з полюсом, а додатня піввісь абсцис – з полярною віссю. Точка М має декартові координати x і y та полярні координати ρ і φ (рис. 22). Тоді формули переходу від полярних до декартових координат мають вигляд $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}$ і навпаки

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

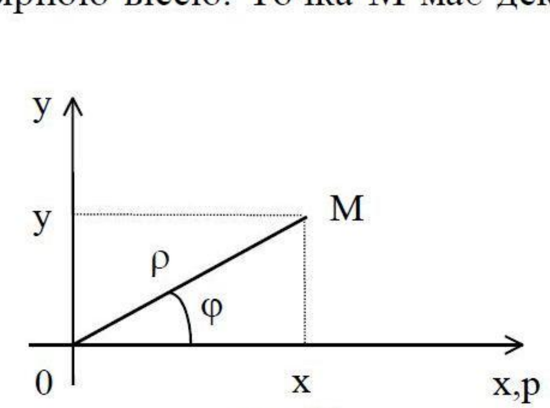


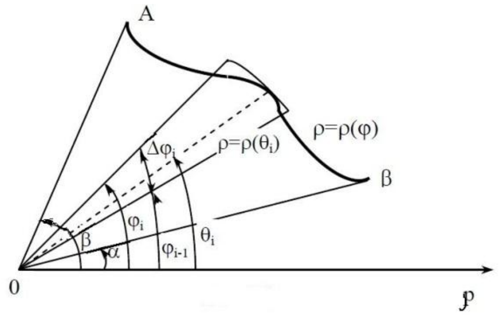
рис. 22

Нехай крива AB в полярній системі координат задана рівнянням

$$\rho = \rho(\varphi),$$

де $\rho(\varphi)$ – неперервна функція при $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Фігура, обмежена кривою AB і двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, називається криволінійним сектором Якщо крива AB є дуга кола радіуса ρ з центром на початку координат, то криволінійний сектор буде круговим сектором.



Розіб'ємо довільним чином відрізок $[\alpha, \beta]$ на n частин точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta$.

На кожному частковому відрізку $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ візьмемо довільну точку $\theta_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ і побудуємо кругові сектори з радіусами $\rho = \rho(\theta_i)$

Площа кругового сектора з радіусом $\rho = \rho(\theta_i)$ і центральним кутом $\Delta\varphi_i$ дорівнює

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho(\theta_i)\rho(\theta_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i.$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\theta_i)\Delta\varphi_i$ – інтегральна сума для функції $\rho=\rho(\varphi)$ на відрізку$[\alpha, \beta]$.

Границя цієї суми при $\lambda = \max\Delta\varphi_i \to 0$ і буде, очевидно, площею криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, якщо ця границя не залежить від способу розбиття і вибору точок θ_i.

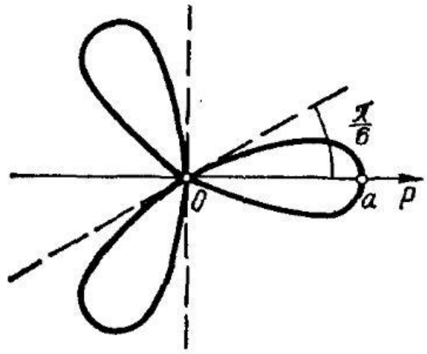
Функція $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна, тому за теоремою про існування визначеного інтеграла маємо

$$S = \lim_{\lambda\to 0} S_n \qquad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Приклад

Обчислити площу, обмежену «трипелюстковою розою» $\rho = a\cos 3\varphi$

Криві, що визначаються рівняннями $\rho = a\cos k\varphi$, $\rho = a\sin k\varphi$ (a, k – const, $a > 0$), називаються трояндами.



Знаходимо площу півпелюстки «рози» і множимо на шість. Тому за формулою

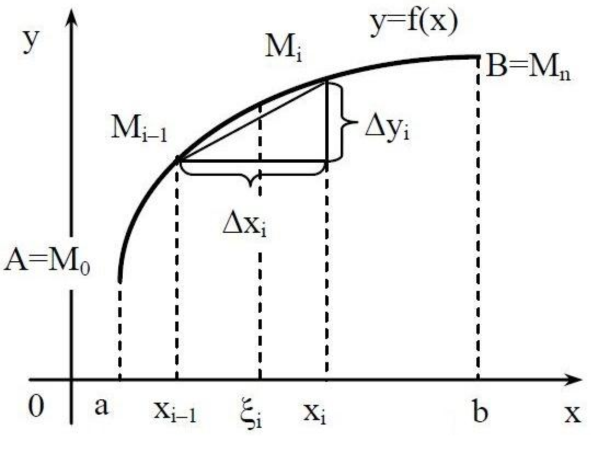
$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(a\cos 3\varphi)^2\,d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Довжина дуги кривої.

Розглянемо деяку неперервну однозначну і гладку на відрізку $[a; b]$ функцію $y = f(x)$.

Знайдемо довжину дуги AB кривої $y = f(x)$. Впишемо в неї довільну ламану $M_0M_1M_2...M_n$



Позначимо через Δl_i довжину однієї ланки $M_{i-1}M_i$ ламаної $\Delta l_i = |M_{i-1}M_i|$.

Довжина ламаної $M_0M_1M_2...M_n$ дорівнює

$$l_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i\,.$$

Означення 1. Будемо називати довжиною кривої y = f(x) на відрізку [a; b] границю довжини вписаної ламаної при max $\Delta l_i \to 0$, якщо границя існує і не залежить від способу розбиття

$$l = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} l_n = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \ .$$

Довжина і-ої ланки M_{i-1} M_i вписаної ламаної дорівнює

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i .$$

За теоремою Лагранжа $$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad \text{де} \quad \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$$

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$.

Тоді довжина дуги кривої дорівнює

$$l = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad (6)$$

Якщо крива y = f(x) задано параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt \qquad (7)$$

В даному випадку параметричні рівняння визначають деяку функцію y = f(x) неперервну разом із своєю похідною $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Формулу (7) дістаємо з формули (6) за допомогою заміни змінної:

$$1=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\left|\begin{matrix}x=\varphi(t), & a=\varphi(\alpha)\\ dx=\varphi'(t)dt, & b=\varphi(\beta)\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)dt=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

Приклад Обчислити довжину однієї арки циклоїди

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t), \quad t\in(-\infty;+\infty).\end{cases}$$

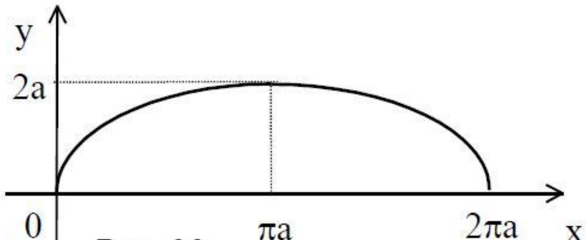


Рис. 28

t	x	y
0	0	0
π	πa	2a
2π	$2\pi a$	0

обчислимо довжину першої її арки при $t\in[0;2\pi]$. (рис. 28).

Знаходимо $\varphi'(t)=a(t-\sin t)'=a(1-\cos t)$, $\psi'(t)=a(1-\cos t)'=a\sin t$.

Застосовуючи формулу (7), дістаємо

$$1=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a\sin t)^2}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a.$$

Нехай тепер гладка крива задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, в полярних координатах. Якщо в рівностях $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ параметром вважати кут φ, то

за формулою

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

$$x'_{\varphi}=\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi,\quad y'_{\varphi}=\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi \text{ і } \sqrt{x'^2_{\varphi}+y'^2_{\varphi}}=$$

$$=\sqrt{\rho'^2\cos^2\varphi-2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+\rho'^2\sin^2\varphi+2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}=$$

$$=\sqrt{\rho^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)+\rho'^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2},$$

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$$

Об'єм тіла

Нехай треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад Ox: $S=S\ (x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ (рис. 7.29).

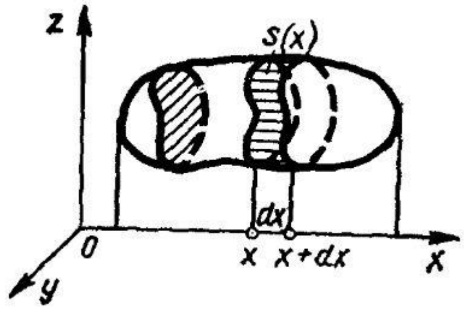


Рис. 7.29

Перетнемо тіло двома площинами, які проходять через точки x та $x+dx$, перпендикулярно до осі Ox. Тоді утворену між перерізами фігуру можна вважати циліндром з основою $S\ (x)$ і висотою dx, тому диференціал об'єму $dV=S\ (x)\,dx$, і якщо x змінюється від a до b, то об'єм тіла

$$V=\int_a^b S\ (x)\,dx. \tag{78}$$

Формула (78) називається *формулою об'єму тіла за площами паралельних перерізів.*

Розглянемо, зокрема, об'єм тіл обертання. Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y=f\ (x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. Якщо цю трапецію обертати навколо осі Ox, то утвориться просторова фігура, яка називається тілом обертання (рис. 7.30).

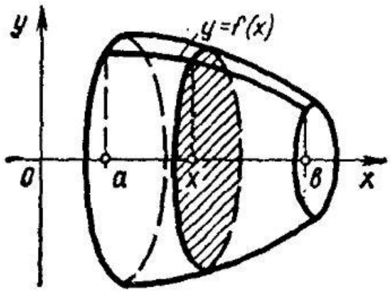


Рис. 7.30

Оскільки площа паралельного перерізу $S = \pi y^2 = \pi f^2(x)$, то, згідно з формулою (78), об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Ox,

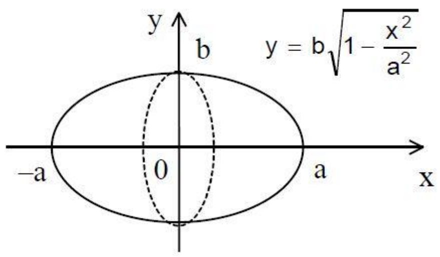
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{79}$$

Приклад Обчислити об'єм еліпсоїда обертання

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Тіло утворюється обертанням кривої $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ або

$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ навколо осі 0x



За формулою

$$V = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi b^2 \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2 \text{ (куб. од.)}$$

Площа поверхні обертання

Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, обертається навколо осі Ox. Перетнемо поверхню обертання двома площинами, які проходять через точки x та $x + dx$, паралельно Oyz. Замінимо утворену між перерізами фігуру зрізаним конусом, твірна якого дорівнює $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$, а радіуси основ дорівнюють $f(x)$ та $f(x + dx)$ (рис. 7.31).

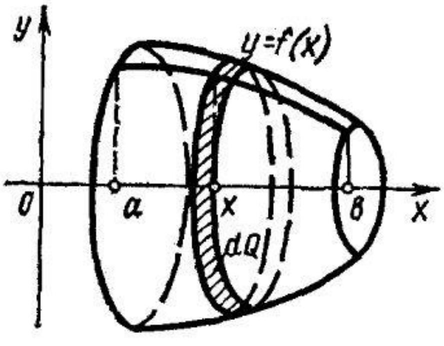


Рис. 7.31

Якщо висота конуса dx досить мала, то площа dQ бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса

$S = \pi(R + r)l$, де $R \approx r = f(x)$,

тобто маємо диференціал площі

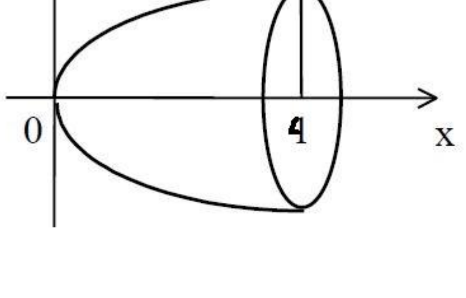
$$dQ = 2\pi f(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$Q = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Приклад

Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$, де $0 \leqslant x \leqslant 4$.



$$y=\sqrt{2x},\quad y'=\frac{1}{\sqrt{2x}};\quad \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\frac{1+2x}{2x}}.$$

$$Q=2\pi\int_0^4\sqrt{2x}\sqrt{\frac{1+2x}{2x}}\,dx=2\pi\int_0^4\sqrt{1+2x}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\pi\,(1+2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{52\pi}{3}$$