

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

## **Вища математика**

**Варіанти завдань та методичні вказівки  
для самостійної роботи студентів**

### **Частина 2**

Функції двох змінних  
Невизначений інтеграл  
Визначений інтеграл  
Диференціальні рівняння

Житомир 2014

Вища математика: Варіанти завдань та методичні вказівки  
для самостійної роботи студентів. Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ,  
2014. – 98 с.

Укладач: Бондарчук Василь Миколайович.

## Функції двох змінних

**Завдання 1.** Знайти частинні похідні 1-го і 2-го порядку функції  $z = f(x, y)$ .

1.1.  $z = e^x y - x^4 y + y^2 + 3y - x - 4$ .

1.2.  $z = 4x^3 \cos y - 3xy + 2y^2 + y - 7x + 1$ .

1.3.  $z = x^5 y - x^2 y + 2 \cos y + 3x + y + 4$ .

1.4.  $z = 5x^3 - 3xy + y^2 + 2 \operatorname{tg} y - 4x - 1$ .

1.5.  $z = 3e^x + 2x^3 y^2 - y^2 + x - 2y + x - 7$ .

1.6.  $z = 2y \sin x - x^3 y^2 + 4y^3 + y - 3x - 5$ .

1.7.  $z = 3xe^y + x^2 y + 2 \cos y + x - y + 3$ .

1.8.  $z = 2x^3 \cos y + 3x^5 y^4 - y^3 + x - 4$ .

1.9.  $z = x^3 y + y^2 \cos x + 2y^3 - 5y + 7$ .

1.10.  $z = 5e^x y^3 - 2xy^3 + 5y - 4x + 1$ .

1.11.  $z = 4x^3 - 2xy^2 + \ln y + 3x + 5$ .

1.12.  $z = 3 \ln x - x^2 y^4 + 2y + 5x - 4$ .

1.13.  $z = 2x^4 y - y^2 + 5y - 7x + 2$ .

1.14.  $z = x^3 y^2 - 3x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5$ .

1.15.  $z = 2x^5 - 3x^2 y^4 + y^3 + 5y - x - 3$ .

1.16.  $z = x^4 - 3x^3 y^2 + 4x + 2y - 3$ .

1.17.  $z = x^3 - 2xy^3 + \ln y + 3y - x + 1$ .

$$1.18. z = 3e^x y^2 + x^2 - y^3 + 2e^y - 4.$$

$$1.19. z = 4x^5 - x^4 y + \ln y - e^x + 3.$$

$$1.20. z = 5x^2 - 2x^3 y^4 + 4x - 3 \ln y.$$

$$1.21. z = x^2 y + 2 \ln x + 7 \ln y + 3x + y.$$

$$1.22. z = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2 + 7y - 2.$$

$$1.23. z = 2x^2 y - 3x + 4y^2 + \frac{4x}{y}.$$

$$1.24. z = 3x^4 + y^2 - xy + x + y.$$

$$1.25. z = 4x^3 - 3x^2 y + 2y^3 + 5 \ln x - 6.$$

$$1.26. z = e^x - x^3 y^2 + 4y^2 + 3y - x - 1.$$

$$1.27. z = 5x^3 y^2 - 3x + y^2 + \frac{2x}{y^3} - 3.$$

$$1.28. z = xy^4 - x^3 y + 2 \sin y - x + 3.$$

$$1.29. z = 4x^2 - xy^3 + 3 \ln y - e^x + 2.$$

$$1.30. z = 2x^2 y - \ln x + 3y^2 + \frac{4}{x}.$$

**Завдання 2.** Знайти диференціал функції  $z = f(x, y)$ .

$$2.1. z = \cos(x^3 - 3y).$$

$$2.2. z = \frac{3x + 2y}{3x - 2y}.$$

$$2.3. z = \sqrt{x^4 + 2y^3}.$$

$$2.4. z = x \ln \frac{x^2}{y}.$$

$$2.5. z = \frac{xy + 1}{x + y}.$$

$$2.6. z = e^{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}.$$

$$2.7. z = \ln(x^2 + xy + y^2).$$

$$2.8. z = e^{3x-y^2}.$$

$$2.9. z = \arctg \frac{y}{x}.$$

$$2.10. z = x \ln(x^3 y).$$

$$2.11. z = 4e^{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

$$2.12. z = \sin(5x^2 + y).$$

$$2.13. z = \ln(x^3 + y^3).$$

$$2.14. z = \frac{x^2 + 3y^2}{x + y}.$$

$$2.15. z = \frac{xy}{x + y + 1}.$$

$$2.16. z = \cos \sqrt{x + y}.$$

$$2.17. z = \operatorname{tg}(x^3 y^4).$$

$$2.18. z = \frac{3x + y}{x - 3y}.$$

$$2.19. z = e^{x^2 + y^2 + xy}.$$

$$2.20. z = y \ln \frac{2y}{x^3}.$$

$$2.21. z = \arcsin(x + 3y).$$

$$2.22. z = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

$$2.23. z = \arccos \frac{y}{x}.$$

$$2.24. z = \frac{y}{y^2 - 9x^2}.$$

$$2.25. z = \sqrt{3x^2 + 2y^2}.$$

$$2.26. z = y \ln \frac{x}{y^2}.$$

$$2.27. z = e^{\frac{y}{x}}.$$

$$2.28. z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}.$$

$$2.29. z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

$$2.30. z = \ln(x^3 - 2y^2).$$

**Завдання 3.** Знайти частинні похідні 1-го порядку функції  $z = f(x, y)$ , заданої неявно.

$$3.1. x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$

- 3.2.  $e^x y - xyz + y^3 - 4xz^2 = 0$ .
- 3.3.  $2x^2 y - \ln x + 3y^2 z + 2xe^z - 4 = 0$ .
- 3.4.  $3ye^x + 2z^3 y^2 - y^2 + xz - 2x - 7 = 0$ .
- 3.5.  $5x^3 - 3xy + z^2 + 2tgy - 4xyz - 1 = 0$ .
- 3.6.  $x^3 y - z^2 y + 2x \cos y + 3x + z - 3 = 0$ .
- 3.7.  $3e^x y^3 - 2xy^3 z + 5y - 4z^3 + 1 = 0$ .
- 3.8.  $xy \sin z - x^3 y + 4xz^3 + y - 3z = 0$ .
- 3.9.  $x^4 - 3x^3 yz + 4 \ln x + 2yz^2 - 3 = 0$ .
- 3.10.  $e^z y - x^4 y + z^2 + 4y - x - 3 = 0$ .
- 3.11.  $5x^2 y - 2x^3 z^4 + 4xy^2 z - 3 \ln z = 0$ .
- 3.12.  $2x^3 \cos y + 3x^5 z^4 - y^3 + \operatorname{tg} z - 4 = 0$ .
- 3.13.  $3e^z y^2 + x^2 - xy^3 + 2 \ln z - 1 = 0$ .
- 3.14.  $x^3 - 2xy^3 + x \ln z + 3y - 2z + 1 = 0$ .
- 3.15.  $3e^z + 2x^3 y^2 - z^2 + 3x - 2z + 4 = 0$ .
- 3.16.  $4x^3 - 3x^2 yz + 2z^3 + 5 \ln x - 6 = 0$ .
- 3.17.  $4x^5 y - y^4 z + \ln x - e^z + 3 = 0$ .
- 3.18.  $5x^2 y - 3xz^2 + 2y^2 + \frac{z}{y} = 0$ .
- 3.19.  $x^3 - 3x^2 y + 2y^2 + \ln z - 4xz + 5 = 0$ .
- 3.20.  $xe^z - x^3 y^2 + 4z^2 + 3xy - x - 1 = 0$ .
- 3.21.  $x^2 y + 2x \ln y + 7 \ln z + 3x + e^z = 0$ .
- 3.22.  $5x^3 y^2 - 3xz^2 + y^2 + \frac{2z}{y^3} - 3 = 0$ .

**3.23.**  $x^3 \cos z - 3xy + 2y^2 + z - 4x + 1 = 0$ .

**3.24.**  $5x^3 - 2x^2yz + \ln z + 3x - 4 = 0$ .

**3.25.**  $3x^4 + y^2z - xy^2 + \sin z + y = 0$ .

**3.26.**  $5 \ln x - x^2z^4 + 2 \cos y + 3z - 1 = 0$ .

**3.27.**  $2xe^y + z^2y + 2 \cos z + x + 3y = 0$ .

**3.28.**  $4x^3y - 6yz^2 + 3y^2 + 7 \cos z - 2 = 0$ .

**3.29.**  $4x^2z - xy^3 + 3 \ln z - e^y + 2 = 0$ .

**3.30.**  $xy^4z - x^3y + 2 \sin z - y + 3 = 0$ .

**Завдання 4.** Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial u}$  і  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

**4.1.**  $z = x^3 \cdot \ln y$ , де  $x = \frac{u}{v}$ ,  $y = 3u - 2v$ .

**4.2.**  $z = \operatorname{tg} x - 2x \cos y$ , де  $x = v \sin u$ ,  $y = 3v - 2uv$ .

**4.3.**  $z = xy^2 + \frac{x}{y}$ , де  $x = v^2u - 4v$ ,  $y = \frac{2v}{u}$ .

**4.4.**  $z = e^x y + \ln x$ , де  $x = uv$ ,  $y = u^2 - 3v$ .

**4.5.**  $z = x^2 y - 2 \cos y$ , де  $x = u \ln v$ ,  $y = 4u^2 v$ .

**4.6.**  $z = \cos x - 2y^3$ , де  $x = \frac{u^2}{v}$ ,  $y = 3u \sin v$ .

**4.7.**  $z = y \ln x - 4x$ , де  $x = 2v^2 - 4u$ ,  $y = u - 3v^2$ .

**4.8.**  $z = \operatorname{tg} x - 2 \ln y$ , де  $x = 2uv$ ,  $y = 4u - 5v^3$ .

**4.9.**  $z = 2x^3 \ln y$ , де  $x = v \cos u$ ,  $y = 3u - \sin v$ .

**4.10.**  $z = x^2 y + 2y$ , де  $x = 5u^2 v$ ,  $y = uv^3$ .

- 4.11.  $z = x^2 \sin y$ , де  $x = 3uv$ ,  $y = u^3 - 2v$ .
- 4.12.  $z = \cos y - 3x^2$ , де  $x = 2u - v$ ,  $y = \frac{3u}{v^2}$ .
- 4.13.  $z = xy^3 + \ln x$ , де  $x = v + 3u^2$ ,  $y = 5uv$ .
- 4.14.  $z = x^4 - 3 \sin y$ , де  $x = u - 4v^2$ ,  $y = v - u^3$ .
- 4.15.  $z = \arcsin x + 3 \ln y$ , де  $x = 5uv$ ,  $y = u + v$ .
- 4.16.  $z = y \ln x - x$ , де  $x = 4v - u$ ,  $y = \frac{v}{2u}$ .
- 4.17.  $z = \operatorname{arctg} y - 3x^2$ , де  $x = 2uv$ ,  $y = u^2 - 3v$ .
- 4.18.  $z = x^4 y - \cos x$ , де  $x = u - 5v$ ,  $y = 3uv^2$ .
- 4.19.  $z = xy + x^2 y^3$ , де  $x = 5u + 2v$ ,  $y = v \sin u$ .
- 4.20.  $z = \ln x - 2x \sin y$ , де  $x = uv$ ,  $y = v^2 - 2u$ .
- 4.21.  $z = xy^3 - \operatorname{tg} y$ , де  $x = v - u$ ,  $y = -2uv$ .
- 4.22.  $z = \operatorname{ctg} x + 2e^y$ , де  $x = 2u + v$ ,  $y = u^v$ .
- 4.23.  $z = x^3 - 2x \ln y$ , де  $x = u \cos v$ ,  $y = v - 3u$ .
- 4.24.  $z = e^x - 2xy^3$ , де  $x = ve^u$ ,  $y = 2u + v$ .
- 4.25.  $z = 3e^y + xy$ , де  $x = v - \sin u$ ,  $y = 3ve^u$ .
- 4.26.  $z = 2x^3 \cos y$ , де  $x = 5u - v$ ,  $y = uv^2$ .
- 4.27.  $z = \ln(xy)$ , де  $x = ue^v$ ,  $y = 3v - u$ .
- 4.28.  $z = x^4 - 2 \cos y$ , де  $x = \sin u - 2v$ ,  $y = ve^u$ .
- 4.29.  $z = xy^3 - \ln y$ , де  $x = v \ln u$ ,  $y = v - 2u$ .
- 4.30.  $z = x^4 y^3 + \frac{3x^2}{y}$ , де  $x = v^2 + u$ ,  $y = \frac{\sin v}{u}$ .



**Завдання 5.** Знайти похідну функції  $z = f(x, y)$  у точці  $P_1(x_1; y_1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $P_2(x_2; y_2)$ .

**5.1.**  $z = x^4 - 3x^2y^2 + 2xy + 1, P_1(1; -1), P_2(5; 2)$ .

**5.2.**  $z = 3x^2 - 2xy^2 + y - 3, P_1(2; -2), P_2(6; 1)$ .

**5.3.**  $z = 2x^3 - 3x^2y + 2x - y + 1, P_1(2; 3), P_2(-2; 6)$ .

**5.4.**  $z = 3x^2 - 4xy^2 + 3y - 5, P_1(1; 3), P_2(-3; 0)$ .

**5.5.**  $z = 4x^2y - y^3 + 2x + 4, P_1(0; 1), P_2(3; -3)$ .

**5.6.**  $z = x^4 + 2x^2y^2 - 3x + 1, P_1(1; 1), P_2(5; -2)$ .

**5.7.**  $z = 2x^3 - 3xy^2 + 2x - y, P_1(2; 1), P_2(-2; -2)$ .

**5.8.**  $z = xy^4 - 3y^2 - 2x + y + 4, P_1(1; 2), P_2(5; -1)$ .

**5.9.**  $z = x^3 + 2x^2y + x - 3y + 1, P_1(-1; 1), P_2(2; -3)$ .

**5.10.**  $z = 4x^2 - 3xy^2 + 2x + 5y + 1, P_1(1; 1), P_2(4; -3)$ .

**5.11.**  $z = e^x - 3x^2y^2 + 2xy - 3, P_1(0; 2), P_2(4; -1)$ .

**5.12.**  $z = \cos x - 2x^2y + y^3 - 3, P_1(0; -1), P_2(4; 2)$ .

**5.13.**  $z = x^4 + 2xy^2 - y^3 + 1, P_1(1; 1), P_2(5; -2)$ .

**5.14.**  $z = 3x^2 + 4xy^2 + 2y - 1, P_1(2; 0), P_2(5; -4)$ .

**5.15.**  $z = x^5 - x^2y + 2xy^2 - 3, P_1(1; -1), P_2(5; 2)$ .

**5.16.**  $z = x^3 + x \cos y - y^2 - 2, P_1(1; 0), P_2(-3; 3)$ .

**5.17.**  $z = 2x^3 - 4x^2y + 3x - y + 1, P_1(1; 1), P_2(4; -3)$ .

5.18.  $z = x^4 - 4xy + 2y^2 - 3$ ,  $P_1(1; 3)$ ,  $P_2(-3; 0)$ .

5.19.  $z = 3x^2y - y^2 + 2x + 3$ ,  $P_1(1; -1)$ ,  $P_2(5; 2)$ .

5.20.  $z = x^3 - 2xy^2 + e^y - 3$ ,  $P_1(2; 0)$ ,  $P_2(-1; 4)$ .

5.21.  $z = xy^2 - 2x^3y + 4x - 3$ ,  $P_1(2; -3)$ ,  $P_2(5; 1)$ .

5.22.  $z = 2x^3 - 3y^2 + 4x - 5$ ,  $P_1(1; 2)$ ,  $P_2(5; -1)$ .

5.23.  $z = x^3 - 2x^2y^2 + 4y - x$ ,  $P_1(1; 3)$ ,  $P_2(-3; 0)$ .

5.24.  $z = 3x^4 - 2x^2y + 3y - 4$ ,  $P_1(2; -2)$ ,  $P_2(6; 1)$ .

5.25.  $z = 4e^x + 2xy^2 - x \ln y + 5$ ,  $P_1(0; 1)$ ,  $P_2(-3; 5)$ .

5.26.  $z = x^4 + 3x^2y - 2y^3 - 1$ ,  $P_1(1; 1)$ ,  $P_2(-2; 5)$ .

5.27.  $z = 7x^2 - 2xy^3 + y - 3x$ ,  $P_1(1; -2)$ ,  $P_2(-3; 1)$ .

5.28.  $z = x^3 - 2x \sin y + 5y - 4$ ,  $P_1(2; 0)$ ,  $P_2(6; -3)$ .

5.29.  $z = 3 \cos x - 4xy^3 + 2y - 1$ ,  $P_1(0; -2)$ ,  $P_2(4; 1)$ .

5.30.  $z = 3x^2y - xy^2 + 5y - 3x$ ,  $P_1(-1; -2)$ ,  $P_2(2; 2)$ .

**Завдання 6.** Знайти градієнт функції  $z = f(x, y)$  у точці  $P(x; y)$ .

6.1.  $z = \frac{xy+1}{x+y}$ ,  $P(1; 3)$ .

6.2.  $z = \frac{x^2 - y^2}{x+y+1}$ ,  $P(1; 1)$ .

6.3.  $z = \frac{xy+x+y}{x-y}$ ,  $P(1; -2)$ .

6.4.  $z = \frac{x^2+y}{x+y^2}$ ,  $P(2; -1)$ .

6.5.  $z = \frac{2xy}{x-y}$ ,  $P(3; 2)$ .

6.6.  $z = \frac{x^2 - xy + y^2}{x-y}$ ,  $P(1; 2)$ .

6.7.  $z = \frac{x^2 + xy}{x-y}$ ,  $P(2; 3)$ .

6.8.  $z = \frac{x^2 + y^2}{x+y}$ ,  $P(1; -3)$ .

$$6.9. z = \frac{x^2 + 2xy}{3x - 2y}, P(1; 2).$$

$$6.10. z = \frac{xy}{x + 2y}, P(1; -1).$$

$$6.11. z = \frac{xy + y}{x^2 - y}, P(2; -2).$$

$$6.12. z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}, P(1; -1).$$

$$6.13. z = \frac{x^2 - 2y}{2x + 3y}, P(2; -2).$$

$$6.14. z = \frac{x + 2y}{2x + y}, P(-1; 3).$$

$$6.15. z = \frac{x - y}{1 + xy}, P(2; -1).$$

$$6.16. z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}, P(1; -1).$$

$$6.17. z = \frac{2 - xy}{x + 2y}, P(1; 3).$$

$$6.18. z = \frac{x^2 y - xy^2}{x + y}, P(-1; -1).$$

$$6.19. z = \frac{x + y^2}{x^2 - y}, P(1; -2).$$

$$6.20. z = \frac{x^3 + y^2}{x + y^2}, P(2; -1).$$

$$6.21. z = \frac{xy^2}{x^2 - y}, P(3; 4).$$

$$6.22. z = \frac{xy - y^2}{x^2 - y}, P(1; 2).$$

$$6.23. z = \frac{2x^2 + 3xy}{3x - 2y}, P(2; 3).$$

$$6.24. z = \frac{3x + y^2}{x^2 + 4y}, P(1; -2).$$

$$6.25. z = \frac{3x - y^3}{x^3 + y}, P(1; 3).$$

$$6.26. z = \frac{2x + y^2}{x^2 + 3y}, P(2; -1).$$

$$6.27. z = \frac{xy + y^2}{x^2 - xy}, P(2; -1).$$

$$6.28. z = \frac{4x - y^2}{x^2 + 3y}, P(-1; 1).$$

$$6.29. z = \frac{x - 5y}{4x + 3y}, P(2; -2).$$

$$6.30. z = \frac{x + y^2}{x^2 - y}, P(1; -3).$$

**Завдання 7.** Дослідити функцію  $z = f(x, y)$  на екстремуми.

$$7.1. z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

$$7.2. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

- 7.3.  $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$ .
- 7.4.  $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$ .
- 7.5.  $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ .
- 7.6.  $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ .
- 7.7.  $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ .
- 7.8.  $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ .
- 7.9.  $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ .
- 7.10.  $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$ .
- 7.11.  $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ .
- 7.12.  $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$ .
- 7.13.  $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$ .
- 7.14.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .
- 7.15.  $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$ .
- 7.16.  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$ .
- 7.17.  $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$ .
- 7.18.  $z = xy(12 - x - y)$ .
- 7.19.  $z = xy - x^2 - y^2 + 9$ .
- 7.20.  $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ .
- 7.21.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ .
- 7.22.  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ .
- 7.23.  $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ .
- 7.24.  $z = xy(6 - x - y)$ .

7.25.  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ .

7.26.  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .

7.27.  $z = (x-1)^2 + 2y^2$ .

7.28.  $z = xy - 3x^2 - 2y^2$ .

7.29.  $z = x^2 + 3(y+2)^2$ .

7.30.  $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$ .

**Завдання 8.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = f(x, y)$  в області  $D$ , що обмежена заданими лініями.

8.1.  $z = 3x + y - xy$ ,  $D: y = x, y = 4, x = 0$ .

8.2.  $z = xy - x - 2y$ ,  $D: x = 3, y = x, y = 0$ .

8.3.  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ,  $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ .

8.4.  $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ ,  $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ .

8.5.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ ,  $D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$ .

8.6.  $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ ,  $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$ .

8.7.  $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ ,  $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$ .

8.8.  $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ ,  $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ .

8.9.  $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ ,  $D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$ .

8.10.  $z = x^2 + 2xy - 10$ ,  $D: y = 0, y = x^2 - 4$ .

8.11.  $z = xy - 2x - y$ ,  $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$ .

8.12.  $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ ,  $D: y = 8, y = 2x^2$ .

8.13.  $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ ,  $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$ .

8.14.  $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ ,  $D: y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ ,  $y = 0$ .

8.15.  $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ ,  $D: x = -3$ ,  $y = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$ .

8.16.  $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ ,  $D: x = 5$ ,  $y = 0$ ,  $x - y - 1 = 0$ .

8.17.  $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ ,  $D: y = 2x$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ .

8.18.  $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ ,  $D: x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ .

8.19.  $z = xy - 3x - 2y$ ,  $D: x = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ ,  $y = 4$ .

8.20.  $z = x^2 + xy - 2$ ,  $D: y = 4x^2 - 4$ ,  $y = 0$ .

8.21.  $z = x^2y(4 - x - y)$ ,  $D: x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 6 - x$ .

8.22.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ,  $D: x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $y = 2$ .

8.23.  $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ ,  $D: x + 2y = 4$ ,  $x - 2y = 4$ .

8.24.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ ,  $D: x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $y = x + 1$ .

8.25.  $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ ,  $D: x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ .

8.26.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ ,  $D: y = x + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ .

8.27.  $z = 4 - 2x^2 - y^2$ ,  $D: y = 0$ ,  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

8.28.  $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ ,  $D: x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $y = 1$ .

8.29.  $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ ,  $D: x + y + 2 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

8.30.  $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$ ,  $D: x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 6$ .

**Завдання 9.** Знайти екстремуми функції  $z = f(x, y)$  за умови, що змінні  $x$  і  $y$  задовольняють рівняння  $\varphi(x, y) = 0$ .

- 9.1.  $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$  за умови  $x - 3y + 2 = 0$ .
- 9.2.  $z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108x - 3$  за умови  $3y - x - 4 = 0$ .
- 9.3.  $z = 5x^3 + 7xy^2 - 3y^2 - 15x - 4$  за умови  $2x + 4y + 1 = 0$ .
- 9.4.  $z = 6y^3 + 10x^2y + 2x^2 - 2y + 9$  за умови  $3x - y + 5 = 0$ .
- 9.5.  $z = 7x^3 + 6xy^2 + y^2 - \frac{21}{4}x + 1$  за умови  $4x - 3y + 1 = 0$ .
- 9.6.  $z = 5y^3 + 7x^2y - 3x^2 - 15y + 2$  за умови  $2y - 2x - 3 = 0$ .
- 9.7.  $z = 6x^3 + 10xy^2 + 2y^2 - 2x + 7$  за умови  $x + 2y - 2 = 0$ .
- 9.8.  $z = 3y^3 + \frac{3}{2}x^2y - 2x^2 - 25y + 3$  за умови  $y - 3x - 1 = 0$ .
- 9.9.  $z = 2x^3 + 5xy^2 + 8y^2 - 24x - 10$  за умови  $2y - 3x + 2 = 0$ .
- 9.10.  $z = 2y^3 + 5x^2y + 8x^2 - 24y + 8$  за умови  $4x + 2y - 3 = 0$ .
- 9.11.  $z = 4x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 108x - 6$  за умови  $2y - 4x + 3 = 0$ .
- 9.12.  $z = y^3 + 4x^2y + 5x^2 - 48y + 7$  за умови  $x + 2y - 1 = 0$ .
- 9.13.  $z = 3x^3 - 4y^2 + 2xy^2 - 49x + 4$  за умови  $2y - 6x - 3 = 0$ .
- 9.14.  $z = 7y^3 + 6x^2y + x^2 - \frac{21}{4}y + 4$  за умови  $3x + 2y + 3 = 0$ .
- 9.15.  $z = 3x^3 + \frac{3}{2}xy^2 - 2y^2 - 25x - 5$  за умови  $2x - 4y - 3 = 0$ .
- 9.16.  $z = 8y^3 + 2y^3 + 5x^2y - 24y - 3$  за умови  $x + 4y - 4 = 0$ .
- 9.17.  $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$  за умови  $x - 3y + 2 = 0$ .
- 9.18.  $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$  за умови  $3x + 2y - 4 = 0$ .
- 9.19.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$  за умови  $2x - 3y - 3 = 0$ .
- 9.20.  $z = y^3 + x^2 - 6xy - 39y + 18x + 5$  за умови  $x - 2y + 4 = 0$ .

- 9.21.  $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$  за умови  $x + 2y - 3 = 0$ .
- 9.22.  $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$  за умови  $x - 3y + 2 = 0$ .
- 9.23.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$  за умови  $2y - 2x + 3 = 0$ .
- 9.24.  $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$  за умови  $x - 3y + 2 = 0$ .
- 9.25.  $z = 3x^3 + 2xy^2 - 49x + 4$  за умови  $2y - 6x - 3 = 0$ .
- 9.26.  $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$  за умови  $x - 3y + 2 = 0$ .
- 9.27.  $z = x^3 + 6y^2 - 4x + 5$  за умови  $4x - 3y + 5 = 0$ .
- 9.28.  $z = x^2 + y^3 + 5y^2 + 48x + 2$  за умови  $2x - 4y + 3 = 0$ .
- 9.29.  $z = x^3 + 3xy^2 + 4y^2 - 5x + 2$  за умови  $3x - 4y + 1 = 0$ .
- 9.30.  $z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 6x + 7$  за умови  $5x + y - 3 = 0$ .

### *Невизначений інтеграл*

**Завдання 10.** Знайти інтеграл.

- |   |   |
|---|---|
| 10.1. $\int \left( 3x^5 + \cos x - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx$ .  | 10.2. $\int (4x^3 - 5e^x + 1) dx$ .   |
| 10.3. $\int \left( \frac{3}{4}\sqrt{x} + 3^x - \sin x \right) dx$ . | 10.4. $\int \left( \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} + 4\operatorname{tg}x - 9 \right) dx$ . |
| 10.5. $\int \left( 8x - \frac{9}{\cos^2 x} + 2 \right) dx$ .        | 10.6. $\int \left( 2x^3 - \sqrt{x} + \frac{4}{x} \right) dx$ .                      |
| 10.7. $\int (\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg}x + 3) dx$ .           | 10.8. $\int \left( 3x^2 - \frac{5}{\sin^2 x} + 4 \right) dx$ .                      |
| 10.9. $\int \left( 5x^4 - 3e^x + \frac{8}{x^3} \right) dx$ .        | 10.10. $\int \left( \cos x - \frac{4}{x^2 + 16} + x \right) dx$ .                   |



$$10.11. \int \left( 5x - 3\operatorname{ctgx} + \frac{4}{x^3} \right) dx .$$

$$10.12. \int \left( 4^x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx .$$

$$10.13. \int \left( x^2 - \frac{3}{\sin^2 x} - 5 \right) dx .$$

$$10.14. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx .$$

$$10.15. \int \left( 2x^3 - \frac{4}{\sqrt{5+x^2}} + 7 \right) dx .$$

$$10.16. \int \left( 4x^5 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx .$$

$$10.17. \int \left( 7\sqrt[4]{x^3} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx .$$

$$10.18. \int (3x^2 - 5\operatorname{tg}x + 2) dx .$$

$$10.19. \int \left( 7x^6 + \frac{3}{x^2 - 9} + 2 \right) dx .$$

$$10.20. \int \left( 5x^4 + 4\sin x - \frac{2}{x} \right) dx .$$

$$10.21. \int \left( \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx .$$

$$10.22. \int \left( 2x^3 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx .$$

$$10.23. \int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx .$$

$$10.24. \int \left( 3\sqrt{x} - \frac{5}{x^4} + 2 \right) dx .$$

$$10.25. \int \left( \sqrt[5]{x^3} - \frac{4}{x^5} + 2\sin x \right) dx .$$

$$10.26. \int \left( 3x - \frac{5}{x^2 + 4} - 1 \right) dx .$$

$$10.27. \int \left( 3\operatorname{tg}x - \frac{2}{x^4} + 5 \right) dx .$$

$$10.28. \int \left( 4x^3 - \cos x + \frac{6}{x^3} \right) dx .$$

$$10.29. \int \left( \frac{3}{5+x^2} - \frac{7}{x^3} + 5x \right) dx .$$

$$10.30. \int (3\operatorname{ctgx} - 5\sqrt[3]{x^2} + 2^x) dx .$$

**Завдання 11.** Знайти інтеграл.

$$11.1. \int \sqrt{3+x} dx .$$

$$11.2. \int \sin(3x-2) dx .$$

$$11.3. \int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx .$$

$$11.4. \int \frac{dx}{\cos^2(4x-3)} .$$

$$11.5. \int \frac{dx}{\sin^2(3x+7)}.$$

$$11.7. \int (5-4x)^7 dx.$$

$$11.9. \int \sin(5+3x) dx.$$

$$11.11. \int \frac{3}{\sqrt{5-4x}} dx.$$

$$11.13. \int \operatorname{ctg}(4x-3) dx.$$

$$11.15. \int \frac{dx}{(5x+6)^2}.$$

$$11.17. \int \frac{5}{\cos^2(4x+7)} dx.$$

$$11.19. \int \sin(7x-5) dx.$$

$$11.21. \int \frac{dx}{(2+x)^3}.$$

$$11.23. \int e^{5x+4} dx.$$

$$11.25. \int \frac{2 dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$$

$$11.27. \int \sqrt{3-4x} dx.$$

$$11.29. \int \operatorname{ctg}(7x+4) dx.$$

$$11.6. \int e^{2x+3} dx.$$

$$11.8. \int \operatorname{tg}(2+3x) dx.$$

$$11.10. \int \sqrt[3]{2+5x} dx.$$

$$11.12. \int \frac{dx}{\sin^2(2x-5)}.$$

$$11.14. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}.$$

$$11.16. \int 3^{2x-5} dx.$$

$$11.18. \int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}.$$

$$11.20. \int \frac{dx}{(3x-5)^4}.$$

$$11.22. \int \operatorname{ctg}(5-3x) dx.$$

$$11.24. \int \sqrt[5]{(6-5x)^2} dx.$$

$$11.26. \int \sin(4x+3) dx.$$

$$11.28. \int \frac{7 dx}{\sin^2(2x-5)}.$$

$$11.30. \int \frac{6 dx}{2x+5}.$$

**Завдання 12.** Знайти інтеграл, використовуючи відповідну заміну змінної.

$$12.1. \int \frac{dx}{(3x+2)\ln^2(3x+2)}.$$

$$12.2. \int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$12.3. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x}.$$

$$12.4. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}.$$

$$12.5. \int \frac{5}{\operatorname{ctg}^4 x \sin^2 x} dx.$$

$$12.6. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$12.7. \int \frac{5}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

$$12.8. \int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

$$12.9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}.$$

$$12.10. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$12.11. \int \cos x e^{\sin x} dx.$$

$$12.12. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$12.13. \int \frac{2}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx.$$

$$12.14. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{\cos x}}.$$

$$12.15. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx.$$

$$12.16. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$$12.17. \int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx.$$

$$12.18. \int \frac{3 dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}}.$$

$$12.19. \int \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$12.20. \int \frac{4}{(1+x^2)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

$$12.21. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$12.22. \int \cos x \sqrt{\sin^3 x} dx.$$

$$12.23. \int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5} dx .$$

$$12.24. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx .$$

$$12.25. \int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg}^4 x} .$$

$$12.26. \int \frac{\sqrt[3]{\log_2(x-8)}}{x-8} dx .$$

$$12.27. \int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{3x^2} dx .$$

$$12.28. \int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{x^3-4}} .$$

$$12.29. \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

$$12.30. \int 5x \operatorname{tg}(1+x^2) dx .$$

**Завдання 13.** Знайти інтеграл за формулою інтегрування частинами.

$$13.1. \int (2x-7)\cos x dx .$$

$$13.2. \int (3x-4)e^x dx .$$

$$13.3. \int (x-5)\ln x dx .$$

$$13.4. \int 3\arcsin x dx .$$

$$13.5. \int (4x+3)\sin x dx .$$

$$13.6. \int x^3 \ln x dx .$$

$$13.7. \int (2x-9)3^x dx .$$

$$13.8. \int x \operatorname{arctg} x dx .$$

$$13.9. \int 4x^3 \ln x dx .$$

$$13.10. \int (3x+5)\sin x dx .$$

$$13.11. \int x^2 e^{-x} dx .$$

$$13.12. \int \operatorname{arctg} x dx .$$

$$13.13. \int (x-3)\log_2 x dx .$$

$$13.14. \int (3x+4)\cos x dx .$$

$$13.15. \int (6x+2)e^x dx .$$

$$13.16. \int 3x^2 \ln x dx .$$

$$13.17. \int \arccos x dx .$$

$$13.18. \int (5x-2)3^x dx .$$

$$13.19. \int (5x+4)\cos x dx .$$

$$13.20. \int 7x \ln x dx .$$

$$13.21. \int (2x+3)\log_3 x dx .$$

$$13.22. \int (3x-5)\sin x dx .$$

$$13.23. \int (3x-4)e^x dx .$$

$$13.25. \int x \cos(x+6) dx .$$

$$13.27. \int \ln(2x-1) dx .$$

$$13.29. \int (5x-4)3^x dx .$$

$$13.24. \int 4x \arctg x dx .$$

$$13.26. \int (3x^2-4) \ln x dx .$$

$$13.28. \int (2x+3) \sin x dx .$$

$$13.30. \int 2x \operatorname{arccctg} x dx .$$

**Завдання 14.** Знайти інтеграл.

$$14.1. \int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx .$$

$$14.3. \int \frac{5x-1}{3x^2-2x+6} dx .$$

$$14.5. \int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx .$$

$$14.7. \int \frac{5x+3}{2x^2-6x-8} dx .$$

$$14.9. \int \frac{5x-2}{3x^2-5x+2} dx .$$

$$14.11. \int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx .$$

$$14.13. \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx .$$

$$14.15. \int \frac{x dx}{2x^2+2x+5} .$$

$$14.17. \int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx .$$

$$14.2. \int \frac{2x-5}{3x^2+x+1} dx .$$

$$14.4. \int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}} dx .$$

$$14.6. \int \frac{x+4}{4x^2-7x+1} dx .$$

$$14.8. \int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx .$$

$$14.10. \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx$$

$$14.12. \int \frac{x+1}{3x^2-2x-3} dx .$$

$$14.14. \int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx .$$

$$14.16. \int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx .$$

$$14.18. \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx .$$

$$14.19. \int \frac{2x+6}{3x^2+x+4} dx.$$

$$14.21. \int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

$$14.23. \int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx.$$

$$14.25. \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx.$$

$$14.27. \int \frac{3x+8}{4x^2+6x-13} dx.$$

$$14.29. \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx.$$

$$14.20. \int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx.$$

$$14.22. \int \frac{3x-7}{4x^2-4x+5} dx.$$

$$14.24. \int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx.$$

$$14.26. \int \frac{x dx}{2x^2+x+5}.$$

$$14.28. \int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx.$$

$$14.30. \int \frac{3x+5}{2x^2+3x-4} dx.$$

**Завдання 15.** Знайти інтеграл.

$$15.1. \int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx.$$

$$15.3. \int \frac{8x dx}{(x^2+6x+5)(x+3)}.$$

$$15.5. \int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx.$$

$$15.7. \int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx.$$

$$15.9. \int \frac{6x dx}{x^3+2x^2-x-2}.$$

$$15.11. \int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx.$$

$$15.2. \int \frac{43x-67}{(x-1)(x^2-x-12)} dx.$$

$$15.4. \int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)} dx.$$

$$15.6. \int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)} dx.$$

$$15.8. \int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx.$$

$$15.10. \int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)} dx.$$

$$15.12. \int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)} dx.$$

$$15.13. \int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx.$$

$$15.14. \int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx.$$

$$15.15. \int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)} dx.$$

$$15.16. \int \frac{7x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)} dx.$$

$$15.17. \int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)} dx.$$

$$15.18. \int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)} dx.$$

$$15.19. \int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3} dx.$$

$$15.20. \int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx.$$

$$15.21. \int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2} dx.$$

$$15.22. \int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)} dx.$$

$$15.23. \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx.$$

$$15.24. \int \frac{4x dx}{(x^2-1)(x+1)}.$$

$$15.25. \int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx.$$

$$15.26. \int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2} dx.$$

$$15.27. \int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1} dx.$$

$$15.28. \int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)} dx.$$

$$15.29. \int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2} dx.$$

$$15.30. \int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x} dx.$$

**Завдання 16.** Знайти інтеграл.

$$16.1. \int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}.$$

$$16.2. \int \frac{\sqrt{x} dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$16.3. \int \frac{x dx}{\sqrt{x-4}}.$$

$$16.4. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

$$16.5. \int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}.$$

$$16.6. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}.$$

$$16.7. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$$

$$16.9. \int \frac{\sqrt[5]{x+3} dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}} .$$

$$16.11. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt[3]{x}} .$$

$$16.13. \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx .$$

$$16.15. \int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}} .$$

$$16.17. \int \frac{(\sqrt{x}-1) dx}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}} .$$

$$16.19. \int \frac{\sqrt[6]{x-1} dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}} .$$

$$16.21. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt[4]{x}} .$$

$$16.23. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} .$$

$$16.25. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}} .$$

$$16.27. \int \frac{(x+1) dx}{x\sqrt{x-1}} .$$

$$16.29. \int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}} .$$

$$16.8. \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[5]{x})} dx .$$

$$16.10. \int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$$

$$16.12. \int \frac{x dx}{\sqrt[5]{x+1}} .$$

$$16.14. \int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx .$$

$$16.16. \int \frac{\sqrt{x+3} dx}{1+\sqrt[3]{x+3}} .$$

$$16.18. \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} .$$

$$16.20. \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}} dx .$$

$$16.22. \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx .$$

$$16.24. \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx .$$

$$16.26. \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+1}} dx .$$

$$16.28. \int \frac{x^3}{\sqrt{x+2}} dx .$$

$$16.30. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx .$$



**Завдання 17.** Знайти інтеграл.

$$17.1. \int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}.$$

$$17.3. \int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}.$$

$$17.5. \int \frac{dx}{3+6\sin x-2\cos x}.$$

$$17.7. \int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}.$$

$$17.9. \int \frac{dx}{4+3\sin x-2\cos x}.$$

$$17.11. \int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.13. \int \frac{dx}{7+6\sin x-5\cos x}.$$

$$17.15. \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$$

$$17.17. \int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$$

$$17.19. \int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.21. \int \frac{dx}{5+4\sin x+6\cos x}.$$

$$17.23. \int \frac{dx}{7-3\sin x+2\cos x}.$$

$$17.25. \int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.2. \int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}.$$

$$17.4. \int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$$

$$17.6. \int \frac{dx}{3+4\sin x+2\cos x}.$$

$$17.8. \int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}.$$

$$17.10. \int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}.$$

$$17.12. \int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}.$$

$$17.14. \int \frac{dx}{5-3\sin x+6\cos x}.$$

$$17.16. \int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.18. \int \frac{dx}{7+4\sin x+6\cos x}.$$

$$17.20. \int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}.$$

$$17.22. \int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}.$$

$$17.24. \int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$$

$$17.26. \int \frac{dx}{2+3\sin x-2\cos x}.$$

$$17.27. \int \frac{dx}{1 - \sin x + 3 \cos x}.$$

$$17.28. \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x - 5 \sin x}.$$

$$17.29. \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}.$$

$$17.30. \int \frac{4 dx}{3 + 2 \sin x - 5 \cos x}.$$

### Визначений інтеграл

**Завдання 18.** Обчислити інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца.

$$18.1. \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{5}} \frac{4 dx}{x^2 + 5}$$

$$18.2. \int_{-3}^0 \frac{3 dx}{\sqrt{25 + 5x}}$$

$$18.3. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7 dx}{4 \sin^2 3x}$$

$$18.4. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$$

$$18.5. \int_{-\pi}^{\pi} 3 \sin \frac{x}{2} dx$$

$$18.6. \int_3^8 6\sqrt{x+1} dx$$

$$18.7. \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12 \operatorname{ctg} 3x dx$$

$$18.8. \int_0^1 \frac{2 dx}{\sqrt{4-3x}}$$

$$18.9. \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$$

$$18.10. \int_1^e \left( 3 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$18.11. \int_1^2 \frac{3 dx}{2\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$18.12. \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{7 dx}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$18.13. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 \cos^2 5x}$$

$$18.14. \int_3^5 \frac{5 dx}{3 - x^2}$$

$$18.15. \int_{-\pi}^{\pi} \left( 2x + \cos \frac{x}{3} \right) dx$$

$$18.16. \int_0^7 \sqrt[3]{x+1} dx$$

$$18.17. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (3x - 2 \operatorname{tg} x) dx$$

$$18.18. \int_{-2}^2 \frac{4 dx}{11 + x^2}$$

$$18.19. \int_{-1}^0 \left( 4 + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$$

$$18.20. \int_1^3 \left( 4 + \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$18.21. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 dx}{5 \cos^2 x}$$

$$18.22. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-2}}$$

$$18.23. \int_0^1 (3x^2 - 2^x) dx$$

$$18.24. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$18.25. \int_0^1 (3e^x - 2\sqrt{7x}) dx$$

$$18.26. \int_1^2 (4x+9)^3 dx$$

$$18.27. \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} (4x - 3 \operatorname{tg} 2x) dx$$

$$18.28. \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4x + 3 \cos 5x) dx$$

$$18.29. \int_1^2 \frac{6 dx}{x^2 - 9}$$

$$18.30. \int_1^2 \left( 3x + \frac{4}{x^3} \right) dx$$

**Завдання 19.** Обчислити інтеграл, використовуючи відповідну заміну змінної.

$$19.1. \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt[3]{1+x^2} dx .$$

$$19.2. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}} .$$

$$19.3. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 2}.$$

$$19.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx.$$

$$19.7. \int_0^{-3} \frac{4x dx}{\sqrt{25 + 3x^2}}.$$

$$19.9. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$19.11. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 - \cos x}.$$

$$19.13. \int_0^1 x^3 \sqrt{4 + 5x^4} dx.$$

$$19.15. \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

$$19.17. \int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx.$$

$$19.19. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}.$$

$$19.21. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}.$$

$$19.23. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4 - 3x^2}}.$$

$$19.4. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$19.6. \int_0^1 \frac{3x dx}{x^2 + 1}.$$

$$19.8. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 4}}.$$

$$19.10. \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx.$$

$$19.12. \int_2^5 \frac{(x-2) dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}.$$

$$19.14. \int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos x dx.$$

$$19.16. \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$19.18. \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$19.20. \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx.$$

$$19.22. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x \sqrt{x^2 + 1} dx.$$

$$19.24. \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{12 \operatorname{ctg} 3x}{\sin^2 3x} dx.$$

$$19.25. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x \, dx .$$

$$19.26. \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x \, dx}{\sqrt{4-x^2}} .$$

$$19.27. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx .$$

$$19.28. \int_{-1}^0 \frac{2x^2 \, dx}{4x^3 - 9} .$$

$$19.29. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x \, dx .$$

$$19.30. \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x \, dx}{\cos^2(x^2)} .$$

**Завдання 20.** Обчислити інтеграл за формулою інтегрування частинами.

$$20.1. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (x-7) \cos 2x \, dx .$$

$$20.2. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \arccos \frac{x}{3} \, dx .$$

$$20.3. \int_1^2 (3x+5) e^{3x} \, dx .$$

$$20.4. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (x-4) \cos 2x \, dx .$$

$$20.5. \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x \, dx .$$

$$20.6. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (x+2) \sin \frac{x}{2} \, dx .$$

$$20.7. \int_6^7 \ln(x-5) \, dx .$$

$$20.8. \int_0^2 (4x-9) 3^x \, dx .$$

$$20.9. \int_0^{\pi} (3x+4) \cos \frac{x}{2} \, dx .$$

$$20.10. \int_1^e x^3 \ln x \, dx .$$

$$20.11. \int_{-1}^2 (2x-5) e^{-x} \, dx .$$

$$20.12. \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} 6 \operatorname{arctg} 3x \, dx .$$

$$20.13. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin 2x \, dx .$$

$$20.14. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 4x \operatorname{arctg} x \, dx .$$

$$20.15. \int_1^3 (5x+2) \ln x \, dx .$$

$$20.16. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+4) \cos x \, dx .$$

$$20.17. \int_0^1 \arccos x \, dx .$$

$$20.18. \int_0^1 (2x-3) e^x \, dx .$$

$$20.19. \int_{\frac{1}{2}}^1 (6x+7) e^{2x} \, dx .$$

$$20.20. \int_1^4 \sqrt{x} \ln x \, dx .$$

$$20.21. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3x-2) \sin x \, dx .$$

$$20.22. \int_1^3 (2x+5) e^x \, dx .$$

$$20.23. \int_2^4 x \ln(x-1) \, dx .$$

$$20.24. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \cos x \, dx .$$

$$20.25. \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx .$$

$$20.26. \int_{-7}^1 \ln(x+8) \, dx .$$

$$20.27. \int_1^2 \ln(2x-1) \, dx .$$

$$20.28. \int_{1/2}^1 \arccos x \, dx .$$

$$20.29. \int_0^3 (x-5) 2^x \, dx .$$

$$20.30. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (x-4) \sin x \, dx .$$

**Завдання 21.** Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність.

$$21.1. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1},$$

$$\text{б) } \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

$$21.2. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx,$$

$$\text{б) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

$$21.3. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{x^2} dx.$$

$$21.4. \text{ a) } \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5},$$

$$\text{б) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$$

$$21.5. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}},$$

$$\text{б) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} dx.$$

$$21.6. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}},$$

$$\text{б) } \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

$$21.7. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx,$$

;

$$\text{б) } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$$

$$21.8. \text{ a) } \int_4^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx.$$

$$21.9. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{7 dx}{x^2 - 4x},$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^2}.$$

$$21.10. \text{ a) } \int_{-1}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[5]{(1-\sin 3x)^5}} dx.$$

$$21.11. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{5 \operatorname{arctg} 2x}{3(1+4x^2)} dx,$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$21.12. \text{ a) } \int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{dx}{(1+9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x},$$

$$\text{б) } \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

$$21.13. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5},$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}.$$

$$21.14. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx,$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$21.15. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx,$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

$$21.16. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

$$21.17. \text{ a) } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}},$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \ln x dx.$$

$$21.18. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-3} \frac{x dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\text{б) } \int_{\frac{3}{4}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$$

$$21.19. \text{ a) } \int_1^{+\infty} \frac{3 dx}{x(1+\ln^2 x)},$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

$$21.20. \text{ a) } \int_0^{+\infty} x \sin x dx,$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$$

$$21.21. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2 - 4x},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$



$$21.22. \text{ а) } \int_{1/3}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\arctg^3 x},$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

$$21.23. \text{ а) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\arcsin x},$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

$$21.24. \text{ а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)},$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$$

$$21.25. \text{ а) } \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx,$$

$$\text{б) } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-2x}}.$$

$$21.26. \text{ а) } \int_0^{+\infty} x \cos x dx,$$

$$\text{б) } \int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}.$$

$$21.27. \text{ а) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1},$$

$$\text{б) } \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$$

$$21.28. \text{ а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x},$$

$$\text{б) } \int_0^4 \frac{3x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}.$$

$$21.29. \text{ а) } \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2},$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}.$$

$$21.30. \text{ а) } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2},$$

$$\text{б) } \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

**Завдання 22.** Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

$$22.1. y = x^2 - 2x + 4, y = 3x - 2.$$

$$22.2. y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = 0, x = 1, x = 2.$$

$$22.3. y = x^2 - 3x + 2, y = x + 2.$$

$$22.4. y = x^2 - 2, y = 3x + 2.$$

- 22.5.  $y = x^2, y = 3 - x$ .                      22.6.  $y = x^2 + 1, y = x - 1, x = 0, x = 3$ .
- 22.7.  $y = \frac{1}{1+x^2}, y = x, x = 0, x = 2$ .    22.8.  $y = \sqrt{x}, y = x^3$ .
- 22.9.  $y = 2x^2, y = x + 6$                       22.10.  $y = e^x, y = x, x = -1, x = 1$ .
- 22.11.  $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$ .              22.12.  $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$ .
- 22.13.  $y = \frac{1}{3+x^2}, y = \frac{x^2}{4}$ .                      22.14.  $y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$ .
- 22.15.  $y = 2\sqrt{x}, y = 2x^2$ .                      22.16.  $y = 3^x, y = 0, x = 1, x = 2$ .
- 22.17.  $y^2 = 9x, y = 3x$ .                      22.18.  $y = 6x - x^2 + 3, y = x^2 + 3$ .
- 22.19.  $x = \sqrt{4-y^2}, x = 0, y = 0, y = 1$ .    22.20.  $y^2 = 4x, x^2 = 4y$ .
- 22.21.  $y = 3x^2 - 1, y = 4x + 3$ .              22.22.  $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 3$ .
- 22.23.  $y = -2x^2 + 1, y = -2x - 3$ .            22.24.  $y = (x-1)^2, y^2 = x - 1$ .
- 22.25.  $y = x^3, y = 1, x = 0$ .                      22.26.  $y = x + 1, y = \cos x, y = 0$ .
- 22.27.  $xy = 6, x + y - 7 = 0$ .                      22.28.  $x^2 = 4y, y = \frac{8}{x^2 + 4}$ .
- 22.29.  $y = x^2, y = 2 - x^2$ .                      22.30.  $y = \sqrt[3]{x} + 2, y = \frac{1}{2}x + 2$ .

**Завдання 23.** Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

- 23.1.  $\rho = \frac{1}{2} - \sin \varphi$ .                      23.2.  $\rho = 3 \cos 2\varphi$ .
- 23.3.  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ .                      23.4.  $\rho^2 = \frac{3}{2} \cos 3\varphi$ .
- 23.5.  $\rho = 2 \sin 3\varphi$ .                      23.6.  $\rho = 4 + \cos \varphi$ .

$$23.7. \rho^2 = 3 \sin 2\varphi .$$

$$23.8. \rho = \frac{1}{2}(1 + \sin \varphi) .$$

$$23.9. \rho = 1 + \cos 2\varphi$$

$$23.10. \rho = \frac{2}{5}(1 + \cos \varphi) .$$

$$23.11. \rho = 5 \sin 4\varphi .$$

$$23.12. \rho = 2 + \sin 4\varphi .$$

$$23.13. \rho^2 = 1 + \cos 2\varphi .$$

$$23.14. \rho = 1 + \cos \varphi .$$

$$23.15. \rho = 3 \cos^2 \varphi .$$

$$23.16. \rho^2 = \frac{3}{2} \sin 4\varphi .$$

$$23.17. \rho = 1 + \sin \varphi .$$

$$23.18. \rho = 5 + \frac{2}{3} \cos 4\varphi$$

$$23.19. \rho = 5 \sin 2\varphi .$$

$$23.20. \rho = \frac{1}{2} \cos 3\varphi .$$

$$23.21. \rho^2 = 1 + \cos 2\varphi$$

$$23.22. \rho = 1 + \sin \varphi .$$

$$23.23. \rho = 1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi .$$

$$23.24. \rho = \frac{3}{2} \cos 4\varphi .$$

$$23.25. \rho = 2 - \sin 5\varphi .$$

$$23.26. \rho^2 = 2 + \sin 3\varphi .$$

$$23.27. \rho = 1 + \cos 3\varphi .$$

$$23.28. \rho^2 = \frac{2}{3} \cos \varphi .$$

$$23.29. \rho = \frac{1}{4} \cos 7\varphi$$

$$23.30. \rho = 4 \sin 3\varphi .$$

**Завдання 24.** Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури  $\Phi$  навколо вказаної осі координат.

$$24.1. \Phi: y^2 = 4 - x, \quad x = 0, \quad Oy .$$

$$24.2. \Phi: y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad Ox .$$

$$24.3. \Phi: y^2 = 9x, \quad y = -x, \quad Oy .$$

- 24.4.  $\Phi: y^2 = 2x, x = \frac{3}{2}, Ox$ .
- 24.5.  $\Phi: y = x^3, y = 0, x = 2, Oy$ .
- 24.6.  $\Phi: y = 2x - x^2, y = 2 - x, Ox$ .
- 24.7.  $\Phi: y = 4x - x^2, y = x, Ox$ .
- 24.8.  $\Phi: y^2 = x, x^2 = y, Ox$ .
- 24.9.  $\Phi: y^2 + x - 4 = 0, x = 0, Ox$ .
- 24.10.  $\Phi: y = x^2, 8x = y^2, Oy$ .
- 24.11.  $\Phi: y^2 = 4x, x^2 = 4y, Ox$ .
- 24.12.  $\Phi: y = 2 - x, x^2 + y^2 = 4, Ox$ .
- 24.13.  $\Phi: y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi, Ox$ .
- 24.14.  $\Phi: y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1, Ox$ .
- 24.15.  $\Phi: y^2 = \frac{4}{3}x, x = 3, Ox$ .
- 24.16.  $\Phi: y = 2x - x^2, y = 0, Ox$ .
- 24.17.  $\Phi: y = \frac{x^3}{3}, x = -2, x = 2, Ox$ .
- 24.18.  $\Phi: xy = 4, y = 1, y = 2, x = 0, Ox$ .
- 24.19.  $\Phi: y = \frac{x^2}{4} - 1, y = 0, Ox$ .
- 24.20.  $\Phi: y^2 = x, y = \frac{x}{2}, Ox$ .
- 24.21.  $\Phi: xy = 4, 2x + y - 6 = 0, Ox$ .
- 24.22.  $\Phi: y^2 = \frac{3}{2}x, x^2 + y^2 = 1, Ox$ .

- 24.23.  $\Phi: y = 2 - x^2, y = x^2, Ox$ .
- 24.24.  $\Phi: y = 8 - x^2, y = x^2, Ox$ .
- 24.25.  $\Phi: y = \operatorname{tg}x, y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, Ox$ .
- 24.26.  $\Phi: y = x^3, x = 0, y = 8, Oy$ .
- 24.27.  $\Phi: y = 2^x, y = 4^x, x = 1, Ox$ .
- 24.28.  $\Phi: 2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0, Ox$ .
- 24.29.  $\Phi: y = x - x^2, y = 0, Ox$ .
- 24.30.  $\Phi: y = 2 - \frac{x^2}{2}, x + y = 2, Oy$ .

### *Диференціальні рівняння*

**Завдання 25.** Розв'язати диференціальне рівняння.

- |   |  |
|---|--|
| 25.1. $xy' = 1 + y^2$ .                       | 25.2. $yy'\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+y^2}$ .    |
| 25.3. $y' = \frac{x^2 y + y}{\sqrt{4+y^2}}$ . | 25.4. $x + xy + y'(y + xy) = 0$ .            |
| 25.5. $(y - x^2 y)y' = 4x - 5xy^2$ .          | 25.6. $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .      |
| 25.7. $y' \operatorname{tg}x = y$ .           | 25.8. $(e^{2x} + 5)y' = ye^{2x}$ .           |
| 25.9. $e^{2x}(2y - 1)y' = y$ .                | 25.10. $(x + 4)y' = y^2 - 1$ .               |
| 25.11. $(1 + e^x)yy' = e^x$ .                 | 25.12. $\sqrt{4 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$ .   |
| 25.13. $(e^x + 8)y' = ye^x$ .                 | 25.14. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0$ . |

$$25.15. y' \operatorname{ctgx} = y^4 .$$

$$25.17. (2x - xy^2) dx = (y + yx^2) dy .$$

$$25.19. xy' + y = y^2 .$$

$$25.21. xy' - 2y = yx^3 .$$

$$25.23. (3 + e^x) yy' = e^x .$$

$$25.25. y' \sin x = y \ln y .$$

$$25.27. yy' = e^x (4 + y^2) .$$

$$25.29. y' \operatorname{ctgy} = x^3 .$$

$$25.16. y'y\sqrt{1-x^2} = \sqrt{5+y^2} .$$

$$25.18. y \ln y + xy' = 0 .$$

$$25.20. \sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0 .$$

$$25.22. xy' = y(1 + \ln y) .$$

$$25.24. \sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} yy' = 0 .$$

$$25.26. (1 + e^x) yy' = e^x .$$

$$25.28. \sqrt{4-x^2} y' = 3x + xy^2 .$$

$$25.30. y' = 2\sqrt{y} \ln x .$$

**Завдання 26.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$26.1. y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2 .$$

$$26.3. y' = \frac{x+y}{x-y} .$$

$$26.5. y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 8 .$$

$$26.7. xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x .$$

$$26.9. y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4 .$$

$$26.11. xy' + 2\sqrt{xy} = y .$$

$$26.2. y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} .$$

$$26.4. y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} .$$

$$26.6. y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x} .$$

$$26.8. y' = \frac{x+2y}{2x-y} .$$

$$26.10. xy' = y \left( 1 + \ln \frac{y}{x} \right) .$$

$$26.12. xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y .$$

$$26.13. y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 5.$$

$$26.15. xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y.$$

$$26.17. y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 9.$$

$$26.19. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$26.21. y' = 2\frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 1.$$

$$26.23. xy' = 3\sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$26.25. xy' = y + x\sin^2 \frac{2y}{x}.$$

$$26.27. y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 1.$$

$$26.29. y' = 3\cos^2 \frac{2y}{x} + \frac{y}{x}.$$

$$26.14. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$26.16. xy' = y + 2x\sin^2 \frac{3y}{x}.$$

$$26.18. y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$$

$$26.20. xy' - y = y \ln \frac{y}{x}.$$

$$26.22. xy' = y + 2x \operatorname{tg} \frac{3y}{x}.$$

$$26.24. xy' = y + x\cos^2 \frac{y}{x}.$$

$$26.26. y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 16.$$

$$26.28. xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$26.30. y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 4.$$

**Завдання 27.** Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задану початкову умову.

$$27.1. y' - \frac{y}{x} = x^2,$$

$$y(1) = 0.$$

$$27.2. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$27.3. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$y(0) = 0.$$

- 27.4.  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ .
- 27.5.  $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$ ,  $y(-1) = \frac{3}{2}$ .
- 27.6.  $y' - \frac{x}{x+1} y = e^x (x+1)$ ,  $y(0) = 1$ .
- 27.7.  $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .
- 27.8.  $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$ ,  $y(2) = 4$ .
- 27.9.  $y' + \frac{y}{2x} = x^2$ ,  $y(1) = 1$ .
- 27.10.  $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ .
- 27.11.  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ ,  $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ .
- 27.12.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$ ,  $y(1) = e$ .
- 27.13.  $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}$ ,  $y(1) = 1$ .
- 27.14.  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ ,  $y(1) = 1$ .
- 27.15.  $y' + \frac{2}{x} y = x^3$ ,  $y(1) = -5/6$ .
- 27.16.  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2$ ,  $y(1) = 3$ .
- 27.17.  $y' + \frac{y}{x} = 3x$ ,  $y(1) = 1$ .



$$27.18. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

$$27.19. \quad y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$$

$$27.20. \quad y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$27.21. \quad y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$27.22. \quad y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$$

$$27.23. \quad y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

$$27.24. \quad y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$27.25. \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$27.26. \quad y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$$

$$27.27. \quad y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$27.28. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$27.29. \quad y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0.$$

$$27.30. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$$

**Завдання 28.** Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

$$28.1. \quad y''' = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

$$28.2. y''' = \frac{1}{x},$$

$$y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = y''(1) = 0.$$

$$28.3. y'' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y(0) = 1, y'(0) = \frac{3}{5}.$$

$$28.4. y''' = \frac{6}{x^3},$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1.$$

$$28.5. y'' = 4 \cos 2x,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$28.6. y'' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$28.7. xy''' = 2,$$

$$y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = y''(1) = 0.$$

$$28.8. y''' = e^{2x},$$

$$y(0) = \frac{9}{8}, y'(0) = \frac{1}{4}, y''(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$28.9. y''' = \cos^2 x,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{8}, y''(0) = 0.$$

$$28.10. y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

$$28.11. y'' = \frac{1}{\sin^2 2x},$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$28.12. y'' = x + \sin x,$$

$$y(0) = -3, y'(0) = 0.$$

$$28.13. y'' = 2 \sin x \cos 2x,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$28.14. y'' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x},$$

$$y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 0.$$

$$28.15. y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1,$$

$$y(0) = 8, y'(0) = 5, y''(0) = 2.$$

$$28.16. y'' = \frac{x}{e^{2x}},$$

$$y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = -\frac{1}{4}.$$

$$28.17. y'' = \sin^2 3x,$$

$$y(0) = -\frac{\pi^2}{16}, y'(0) = 0.$$

$$28.18. y''' = x \sin x,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$$

$$28.19. y''' \sin^4 x = \sin 2x,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$28.20. y'' = \cos x + e^{-x},$$

$$y(0) = -e^{-\pi}, y'(0) = 1.$$

$$28.21. y'' = \sin^3 x,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9}, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$28.22. y''' = \sqrt{x} - \sin 2x,$$

$$y(0) = -\frac{1}{8}, y'(0) = \frac{1}{8} \cos 2, y''(0) = \frac{1}{2}.$$

$$28.23. y'' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$28.24. y'' = 2 \sin x \cos^2 x,$$

$$y(0) = -\frac{5}{9}, y'(0) = -\frac{2}{3}.$$

$$28.25. y'' = \sin^2 x \cos x,$$

$$y(0) = \frac{1}{9}, y'(0) = 1.$$

$$28.26. y'' = \arctg x,$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

$$28.27. y'' = -2 \cos x \cos 2x,$$

$$y(0) = \frac{2}{3}, y'(0) = \frac{2}{3}.$$

$$28.28. y'' = x - \ln x,$$

$$y(1) = -\frac{5}{12}, y'(1) = \frac{3}{2}.$$

$$28.29. y'' = \frac{1}{x^2},$$

$$y(1) = 3, y'(1) = 1.$$

$$28.30. y''' = \cos 4x,$$

$$y(0) = 2, y'(0) = \frac{15}{16}, y''(0) = 0.$$

**Завдання 29.** Розв'язати диференціальне рівняння.

29.1.  $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ .

29.2.  $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ .

29.3.  $x^3y'' + x^2y' = 1$ .

29.4.  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$ .

29.5.  $y''x \ln x = y'$ .

29.6.  $xy'' - y' = x^2e^x$ .

29.7.  $y''x \ln x = 2y'$ .

29.8.  $x^2y'' + xy' = 1$ .

29.9.  $y'' = -\frac{x}{y}$ .

29.10.  $xy'' = y'$ .

29.11.  $y'' = y' + x$ .

29.12.  $xy'' = y' + x^2$ .

29.13.  $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$ .

29.14.  $xy'' + y' = \ln x$ .

29.15.  $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$ .

29.16.  $y'' + 2x(y')^2 = 0$ .

29.17.  $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ .

29.18.  $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ .

29.19.  $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$ .

29.20.  $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$ .

29.21.  $y'' + 4y' = 2x^2$ .

29.22.  $xy'' - y' = 2x^2e^x$ .

29.23.  $x(y'' + 1) + y' = 0$ .

29.24.  $y'' + 4y' = \cos 2x$ .

29.25.  $y'' + y' = \sin x$ .

29.26.  $x^2y'' = (y')^2$ .

29.27.  $2xy'y'' = (y')^2 - 4$ .

29.28.  $y'''x \ln x = y''$ .

29.29.  $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$ .

29.30.  $(1+x^2)y'' = 2xy$ .

**Завдання 30.** Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

30.1.  $y'' = y'e^y$ ,

$y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

- 30.2.  $(y')^2 + 2yy'' = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.3.  $yy'' + (y')^2 = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.4.  $y'' + 2y(y')^3 = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = \frac{1}{3}$ .
- 30.5.  $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$ ,  $y(1) = \frac{\pi}{2}$ ,  $y'(1) = 2$ .
- 30.6.  $2yy'' = (y')^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.7.  $yy'' - (y')^2 = y^4$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.8.  $y'' = -\frac{1}{2y^3}$ ,  $y(0) = \frac{1}{2}$ ,  $y'(0) = \sqrt{2}$ .
- 30.9.  $y'' = 1 - (y')^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .
- 30.10.  $(y'')^2 = y'$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.11.  $2yy'' - (y')^2 + 1$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.12.  $y'' = 2 - y$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 2$ .
- 30.13.  $y'' = \frac{1}{y^3}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .
- 30.14.  $yy'' - 2(y')^2 = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .
- 30.15.  $y'' = y' + (y')^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.16.  $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.17.  $y''(1+y) = 5(y')^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 30.18.  $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ .

$$30.19. 4(y'')^2 = 1 + (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$30.20. 2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.21. 1 + (y')^2 = yy'', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$30.22. y'' + y(y')^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.23. yy'' - (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.24. yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$30.25. y'' - \frac{(1 + \ln y)(y')^2}{y(1 - \ln y)} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$30.26. y''(1 + y) = (y')^2 + y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.27. y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$30.28. y^3 y' y'' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

$$30.29. yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$30.30. y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

**Завдання 31.** Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку.

- 31.1.**  $y'' - 2y' + 3y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (2x-1)e^{2x}$
  - в)  $f(x) = 3\sin x$ .
- 31.2.**  $y'' - 2y' + 5y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$

- 31.3.**  $y'' - 2y' - 8y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (3x+1)e^{-x}$   
 в)  $f(x) = 4\cos x$
- 31.4.**  $y'' - 12y' + 36y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (5x-3)e^{-2x}$   
 в)  $f(x) = 2\sin x$
- 31.5.**  $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (x-4)e^{3x}$   
 в)  $f(x) = 5\cos x$
- 31.6.**  $y'' - 6y' + 10y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (34-12x)e^{-x}$   
 в)  $f(x) = 2\sin 3x$
- 31.7.**  $y'' + 5y' - 6y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (7x-4)e^{-x}$   
 в)  $f(x) = 4\cos 2x$
- 31.8.**  $y'' + 6y' + 10y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (3x-5)e^{-2x}$   
 в)  $f(x) = 3\sin 4x$
- 31.9.**  $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (2x+5)e^{3x}$   
 в)  $f(x) = \cos 5x$
- 31.10.**  $y'' + 6y' + 9y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (5x+3)e^{2x}$   
 в)  $f(x) = 5\sin 2x$
- 31.11.**  $y'' + 4y' + 8y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (48x+8)e^x$   
 в)  $f(x) = 3\cos 4x$
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (4x-3)e^{2x}$

- 31.12.  $y'' - 5y' - 6y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (3x - 2)e^x$   
 в)  $f(x) = 3 \cos 2x$ .
- 31.13.  $y'' - 8y' + 12y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (16x - 2)e^{3x}$   
 в)  $f(x) = 7 \sin 3x$ .
- 31.14.  $y'' + 8y' + 25y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (x + 3)e^{5x}$   
 в)  $f(x) = 3 \sin 4x$ .
- 31.15.  $y'' - 9y' + 20y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (8x - 5)e^{-2x}$   
 в)  $f(x) = 3 \cos 5x$ .
- 31.16.  $y'' - 4y' + 3y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (2x - 5)e^{5x}$   
 в)  $f(x) = 4 \sin x$ .
- 31.17.  $y'' + 2y' + 2y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (-4x + 3)e^{3x}$   
 в)  $f(x) = 2 \cos x$ .
- 31.18.  $y'' + 2y' - 24y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (3x + 7)e^{2x}$   
 в)  $f(x) = \sin 2x$ .
- 31.19.  $y'' + 6y' + 13y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (5x + 3)e^{-x}$   
 в)  $f(x) = 4 \cos 5x$ .
- 31.20.  $y'' + 5y' + 4y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (3x - 4)e^{4x}$   
 в)  $f(x) = 5 \sin 2x$ .



- 31.21.**  $y'' - 4y' + 29y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (5x + 2)e^{5x}$
  - в)  $f(x) = 3\sin 6x$ .
- 31.22.**  $y'' - 4y' + 5y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (2x - 3)e^x$
  - в)  $f(x) = \cos 2x$ .
- 31.23.**  $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (3x + 5)e^{4x}$
  - в)  $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ .
- 31.24.**  $y'' + 9y' + 8y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (9x - 7)e^{2x}$
  - в)  $f(x) = \frac{1}{3}\cos 2x$ .
- 31.25.**  $y'' - 12y' + 40y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (2x + 5)e^{3x}$
  - в)  $f(x) = \frac{1}{5}\sin 3x$ .
- 31.26.**  $y'' + 4y' - 5y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (3x + 7)e^{2x}$
  - в)  $f(x) = \frac{2}{5}\cos 3x$ .
- 31.27.**  $y'' + 2y' + y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (5x + 6)e^x$
  - в)  $f(x) = \sin 4x$ .
- 31.28.**  $y'' + 2y' + 37y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$
  - б)  $f(x) = (5x - 8)e^{6x}$
  - в)  $f(x) = \frac{3}{2}\cos x$ .
- 31.29.**  $6y'' - y' - y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$

- 31.30.  $2y'' + 7y' + 3y = f(x)$ , якщо
- а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (5x + 3)e^{2x}$   
 в)  $f(x) = 2\sin 3x$   
 а)  $f(x) = 0$   
 б)  $f(x) = (3x - 4)e^{-2x}$   
 в)  $f(x) = \frac{3}{4}\cos 2x$ .

**Завдання 32.** Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

$$32.1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$$

$$32.2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

$$32.3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

$$32.4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$$

$$32.5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$32.6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$$

$$32.7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$32.8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y. \end{cases}$$

$$32.9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y. \end{cases}$$

$$32.10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$32.11. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$$

$$32.12. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$32.13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$$

$$32.14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$$

$$32.15. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$32.16. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$32.17. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$$

$$32.18. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

$$32.19. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$$

$$32.20. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$$

$$32.21. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

$$32.22. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$$

$$32.23. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$$

$$32.24. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

$$32.25. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$$

$$32.26. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$$

$$32.27. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x + 4y. \end{cases}$$

$$32.28. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

$$32.29. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$$

$$32.30. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$$

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

### Функції двох змінних

#### Частинні похідні функції двох змінних

За означенням частинні похідні функції двох змінних  $z = f(x, y)$  у точці  $P(x, y)$  обчислюються за формулами:

по змінній  $x$  –

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

по змінній  $y$  –

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями  $z'_x$  та  $z'_y$  використовують також інші позначення – відповідно  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $f'_x(x, y)$  та  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $f'_y(x, y)$ .

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

**Приклад 1.** Знайти частинні похідні функції  $z = 5x^4y^2 + 3x^2 - 4y^3 + 7$ .

▮ Вважаючи  $y$  сталою, знаходимо

$$\begin{aligned} z'_x &= 5y^2 \cdot (x^4)'_x + 3(x^2)'_x - 4(y^3)'_x + (7)'_x = \\ &= 5y^2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x - 0 + 0 = 20x^3y^2 + 6x. \end{aligned}$$

Вважаючи  $x$  сталою, знаходимо

$$\begin{aligned} z'_y &= 5x^4 \cdot (y^2)'_y + (3x^2)'_y - 4(y^3)'_y + (7)'_y = \\ &= 5x^4 \cdot 2y + 0 - 4 \cdot 3y^2 + 0 = 10x^4y - 12y^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти частинні похідні функції  $z = \arccos \frac{x^2}{y}$ .

▮ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\begin{aligned} z'_x &= \left( \arccos \frac{x^2}{y} \right)'_x = - \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{y} \right)^2}} \cdot \left( \frac{x^2}{y} \right)'_x = - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x^2)'_x = \\ &= - \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x = - \frac{2xy}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y} = - \frac{2x}{\sqrt{y^2 - x^4}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left( \arccos \frac{x^2}{y} \right)'_y = - \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{y} \right)^2}} \cdot \left( \frac{x^2}{y} \right)'_y = - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} \cdot x^2 \cdot \left( \frac{1}{y} \right)'_y = \\ &= - \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot x^2 \cdot \left( - \frac{1}{y^2} \right) = \frac{x^2y}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y^2} = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2 - x^4}}. \quad \square \end{aligned}$$

Частинними похідними другого порядку функції  $z = f(x, y)$  називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

**Приклад 3.** Знайти частинні похідні другого порядку функції  $z = 3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1$ .

$$\square z'_x = (3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1)'_x = 3y^4 + 15x^2,$$

$$z'_y = (3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1)'_y = 12xy^3 - 4y,$$

$$z''_{xx} = (3y^4 + 15x^2)'_x = 30x,$$

$$z''_{xx} = (12xy^3 - 4y)'_y = 36xy^2 - 4,$$

$$z''_{xy} = (3y^4 + 15x^2)'_y = 12y^3,$$

$$z''_{yx} = (12xy^3 - 4y)'_x = 12y^3. \quad \lrcorner$$

### *Диференціал функції двох змінних*

Диференціал функції  $z = f(x, y)$  обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

**Приклад 4.** Знайти повний диференціал функції  $z = \ln(x^2 + y^2)$

┌ Знайдемо частинні похідні функції  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  та підставимо їх у вираз

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x^2 + y^2))'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x^2 + y^2))'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy \quad \lrcorner$$

### *Диференціювання неявно заданих функцій*

Якщо рівняння  $F(x, y, z) = 0$ , де  $F(x, y, z)$  – диференційовна функція змінних  $x, y$  і  $z$ , визначає  $z$  як функцію незалежних змінних  $x$  і  $y$  і  $F'_z(x, y, z) \neq 0$ , то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

**Приклад 5.** Знайти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , якщо  $x^3y - 2y^2 + 3z^2 - y \cos z + 7 = 0$ .

┌ Позначимо  $F(x, y, z) = x^3y - 2y^2 + 3z^2 - y \cos z + 7$ .

Знайдемо частинні похідні:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2y,$$

$$F'_y(x, y, z) = x^3 - 4y - \cos z,$$

$$F'_z(x, y, z) = 6z + y \sin z.$$

За формулами  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2y}{6z + y \sin z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^3 - 4y - \cos z}{6z + y \sin z}. \quad \rfloor$$

### Диференціювання складних функцій

Якщо  $z$  є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад,  $z = f(x, y)$ , де  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  ( $u, v$  – незалежні змінні;  $f, \varphi, \psi$  – диференційовні функції), то частинні похідні  $z$  по  $u$  і  $v$  знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

**Приклад 6.** Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , якщо  $z = x^2y - y^2x$ , де  $x = u \cdot \cos v$ ,  
 $y = u \cdot \sin v$ .

┌ Знайдемо похідні з правих частин формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^2 - y^2x)'_x = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y - y^2x)'_y = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot \cos v)'_u = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot \cos v)'_v = -u \sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (u \cdot \sin v)'_u = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = (u \cdot \sin v)'_v = u \cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули для диференціювання складних функцій. Тоді, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= (2xy - y^2) \cdot \cos v + (x^2 - 2xy) \cdot \sin v = \\ &= (2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v) \cdot \cos v + \\ &+ (u^2 \cos^2 v - 2u \cos v \cdot u \sin v) \cdot \sin v = \\ &= u^2 \sin v \cos v (2 \cos v - \sin v) + u^2 \sin v \cos v (\cos v - 2 \sin v) = \\ &= u^2 \sin v \cos v (2 \cos v - \sin v + \cos v - 2 \sin v) = \\ &= u^2 \sin v \cos v (3 \cos v - 3 \sin v) = 3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= (2xy - y^2) \cdot (-u \sin v) + (x^2 - 2xy) \cdot u \cos v = \\ &= (2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v) \cdot (-u \sin v) + (u^2 \cos^2 v - 2u^2 \cos v \sin v) \times \\ &\times u \cos v = -u^3 \sin^2 v (2 \cos v - \sin v) + u^3 \cos^2 v (\cos v - 2 \sin v) = \\ &= u^3 \left( \underline{-2 \sin^2 v \cos v} + \underline{\sin^3 v} + \underline{\cos^3 v} - \underline{2 \cos^2 v \sin v} \right) = \\ &= u^3 \left[ -2 \sin v \cos v (\sin v + \cos v) + (\sin v + \cos v) \times \right. \\ &\left. \times (\sin^2 v - \sin v \cos v + \cos^2 v) \right] = u^3 (\sin v + \cos v) (1 - 3 \sin v \cos v). \quad \square \end{aligned}$$

### Похідна функції за напрямом

Похідною функції  $z = f(x, y)$  у точці  $P(x, y)$  за напрямом  $\vec{e} = \overline{PP_1}$  називається

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \lim_{PP_1 \rightarrow 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{PP_1},$$

де  $f(P)$  і  $f(P_1)$  – значення функції у точках  $P$  і  $P_1$ ,  $PP_1$  – відстань між цими точками.

Якщо функція  $z$  диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$



де  $\alpha$  – кут, що утворює вектор  $\vec{e}$  з віссю  $Ox$ .

**Приклад 7.** Знайти похідну функції  $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$  у точці  $P(2; -1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $N(5; 2)$ .

▮ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці  $P$  :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 = 27;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \cdot (-1) = -24.$$

Знайдемо координати вектора  $\vec{a} = \overline{PN}$  :  $\vec{a} = \{5 - 2; 2 - (-1)\} = \{3; 3\}$ .

Знайдемо координати орта  $\vec{a}_0$  вектора  $\vec{a}$  :

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}, \quad \vec{a}_0 = \left\{ \frac{3}{3\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\text{Звідси } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

За формулою  $\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$  :

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 27 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-24) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad \perp$$

### Градiєнт функції

Градiєнтом функції  $z = f(x, y)$  у точці  $P(x; y)$  називається вектор, проєкціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overline{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}.$$

**Приклад 8.** Знайти градiєнт функції  $z = x^2y$  у точці  $P(1; 1)$ .

▮ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці  $P$  :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1.$$

Отже,  $\overline{\text{grad}} z = 2\vec{i} + \vec{j}$ .  $\square$

*Рівняння дотичної площини і нормалі*

Дотичною площиною до поверхні у точці  $M$  (точка дотику) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці  $M$  до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі  $z = f(x, y)$ , де  $f(x, y)$  – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці  $M(x_0; y_0; z_0)$  поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

**Приклад 9.** Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$z = \frac{x^2}{2} - y^2 \text{ у точці } M(2; -1; 1).$$

$\square$  Рівняння дотичної площини у точці  $M(x_0; y_0; z_0)$  поверхні має вигляд  $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ .

Рівняння нормалі має вигляд  $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$ .

Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці  $M$  :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_M = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_M = 2.$$

Звідси маємо:

$z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$  або  $2x + 2y - z - 1 = 0$  – рівняння дотичної площини;

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} \text{ – рівняння нормалі. } \perp$$

*Локальний екстремум функції двох змінних*

Функція  $f(x, y)$  має локальний максимум (мінімум)  $f(a, b)$  у точці  $P(a; b)$ , якщо для всіх відмінних від  $P$  точок  $P'(x; y)$  з деякого околу точки  $P$  виконується нерівність  $f(a, b) > f(x, y)$  (відповідно  $f(a, b) < f(x, y)$ ). Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція  $f(x, y)$  може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки даної системи називають стаціонарними точками.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці  $P(a; b)$  знаходимо

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b), \quad \Delta = AC - B^2.$$

Тоді: 1) якщо  $\Delta > 0$ , то функція має екстремум у точці  $P(a; b)$ , а саме – максимум, якщо  $A < 0$ , і мінімум, якщо  $A > 0$ ;

2) якщо  $\Delta < 0$ , то екстремуму в точці  $P(a; b)$  немає;

3) якщо  $\Delta = 0$ , то потрібні подальші дослідження.

**Приклад 10.** Дослідити на екстремуми функцію  $z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108y - 3$ .

┌ Знайдемо частинні похідні і складемо систему  $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12y + 3x^2 - 108,$$

$$\begin{cases} 6xy - 4x = 0 \\ 12y + 3x^2 - 108 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x(6y - 4) = 0 \\ 12y + 3x^2 - 108 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо три стаціонарні точки:  $P_1\left(0; \frac{5}{6}\right)$ ,  
 $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$ ,  $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

Знайдемо похідні 2-го порядку  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12$  і  
 обчислимо  $\Delta = AC - B^2$  для кожної стаціонарної точки.

1) Точка  $P_1\left(0; \frac{5}{6}\right)$ :  $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_P = 6 \cdot \frac{5}{6} = 5$ ,  $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_P = 6 \cdot 0 = 0$ ,  
 $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_P = 12$ .

$$\Delta = AC - B^2 = 5 \cdot 12 - 0 = 60.$$

Оскільки  $\Delta > 0$  і  $A > 0$ , то у точці  $P_1$  функція має мінімум.

2) Точка  $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$ :  $A = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ ,  $B = 6 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$ ,  $C = 12$ ;

$$\Delta = 4 \cdot 12 - (20\sqrt{3})^2 = 48 - 1200 = -1152.$$

Оскільки  $\Delta < 0$ , то у точці  $P_2$  функція не має екстремуму.

3) Точки  $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$ :  $A = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ ,  $B = 6 \cdot \left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = -20\sqrt{3}$ ,  
 $C = 12$ ;  $\Delta = 4 \cdot 12 - (-20\sqrt{3})^2 = 48 - 1200 = -1152$ .

Оскільки  $\Delta < 0$ , то у точці  $P_3$  екстремуму немає.  $\perp$

### Умовний екстремум

Умовним екстремумом функції  $f(x, y)$  називають екстремум цієї функції за умови, що її аргументи пов'язані рівнянням зв'язку  $\varphi(x, y) = 0$ . Для знаходження умовного екстремуму функції  $f(x, y)$  за умови  $\varphi(x, y) = 0$  складають функцію Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

де  $\lambda$  – невизначений сталий множник. Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\lambda_0$  – розв’язок системи. Складемо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Якщо  $\Delta < 0$ , то функція  $f(x, y)$  має у точці  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  умовний максимум; якщо  $\Delta > 0$  – умовний мінімум.

**Приклад 11.** Знайти екстремуми функції  $z = 6 - 4x - 3y$  за умови, що змінні  $x$  і  $y$  задовольняють рівняння  $x^2 + y^2 = 1$ .

Г Геометрично задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень аплікати  $z$  площини  $z = 6 - 4x - 3y$  для точок її перетину із циліндром  $x^2 + y^2 = 1$ .

Складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\text{Маємо } \frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1.$$

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв’язуючи яку знаходимо

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{3}{5} \text{ і } \lambda_2 = -\frac{5}{2}, x_2 = -\frac{4}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

При  $\lambda = \frac{5}{2}, x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$  маємо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1,4 \\ 0 & 5 & 1,2 \\ 1,4 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Отже, у точці  $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$  функція має умовний мінімум.

При  $\lambda = -\frac{5}{2}, x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}$  маємо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

Отже, у точці  $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$  функція має умовний максимум.

Таким чином,

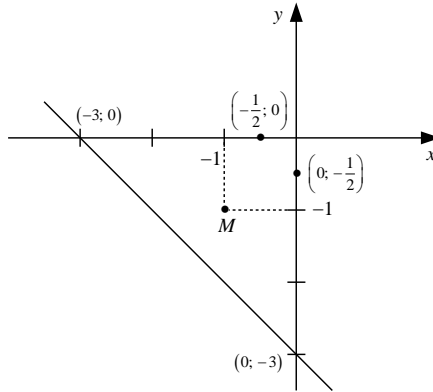
$$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11, \quad z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1. \quad \square$$

### *Найбільше і найменше значення функції*

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

**Приклад 12.** Визначити найбільше і найменше значення функції  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$  в області  $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ .

□ Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки:  $z'_x = 2x - y + 1$ ,  $z'_y = 2y - x + 1$ ,  
 $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$ . Розв'язуючи систему, знаходимо  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ . Точка  $M(-1; -1)$   
належить області.

У точці  $M$  значення функції  $z(M) = -1$ . Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо  $x = 0$ , то  $z = y^2 + y$  і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку  $-3 \leq y \leq 0$ . Похідна функції:

$z' = (y^2 + y)' = 2y + 1$ . Знаходимо критичні точки з умови  $z' = 0$ :  
 $2y + 1 = 0$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ . Ця точка належить відрізку  $[-3, 0]$ . Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При  $y = 0$  маємо  $z = x^2 + x$ . Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку  $-3 \leq x \leq 0$ .

$$z' = (x^2 + x)' = 2x + 1.$$

$$z' = 0: 2x + 1 = 0, x = -\frac{1}{2} \in [-3, 0].$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При  $x + y = -3$ , або  $y = -3 - x$  маємо функцію  
 $z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$  на відрізьку  
 $-3 \leq x \leq 0$ . Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$$z' = (3x^2 + 9x + 6)' = 6x + 9.$$

$$z' = 0: 6x + 9 = 0, x = -\frac{3}{2} \in [-3, 0].$$

$$z\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -\frac{3}{4},$$

$$z(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 6 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 + 6 = 6.$$

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції  $z$ . Робимо висновок, що  
 $z_{\text{найб.}} = 6$  у точках  $(0; -3)$  і  $(-3; 0)$ ;  
 $z_{\text{найм.}} = -1$  у стаціонарній точці  $M(-1; -1)$ .  $\square$



### Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом  $\int f(x)dx$  функції  $f(x)$  (на проміжку  $X$ ) називають вираз  $F(x)+C$ , де  $F(x)$  – одна з первісних функцій  $f(x)$ , тобто  $F'(x) = f(x)$  ( $x \in X$ );  $C$  – довільна стала.

**Приклад 13.**  $\int \frac{dx}{9-x^2}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{9-x^2} &= \int \frac{dx}{-(x^2-4)} = -\int \frac{dx}{x^2-3^2} = -\frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C \end{aligned}$$

(скористалися властивістю 1<sup>о</sup> табличним інтегралом 11 при  $a=3$ ).  $\square$

**Приклад 14.**  $\int (4x^3 + 5 \cos x) dx$ .

$\square$  Застосуємо послідовно властивості 2<sup>о</sup> та 1<sup>о</sup>:

$$\int (4x^3 + 5 \cos x) dx = \int 4x^3 dx + \int 5 \cos x dx = 4 \int x^3 dx + 5 \int \cos x dx.$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли відповідно 1 ( $n=3$ ) та 4 і остаточно дістаємо

$$\int (4x^3 + 5 \cos x) dx = 4 \frac{x^4}{4} + 5 \sin x + C = x^4 + 5 \sin x + C. \quad \square$$

**Приклад 15.**  $\int \left( 4x - \frac{5}{x^2} + \frac{3^x}{2} \right) dx$ .

$\square$  Застосуємо послідовно властивості 2<sup>о</sup>, 1<sup>о</sup> і табличні інтеграли 1, 3:

$$\begin{aligned} \int \left( 4x - \frac{5}{x^2} + \frac{3^x}{2} \right) dx &= \int 4x dx - \int 5x^{-2} dx + \int \frac{1}{2} 3^x dx = \\ &= 4 \int x dx - 5 \int x^{-2} dx + \frac{1}{2} \int 3^x dx = 4 \frac{x^2}{2} - 5 \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{2} 3^x \ln 3 + C = \\ &= 2x^2 + \frac{5}{x} + \frac{3^x \ln 3}{2} + C. \quad \square \end{aligned}$$

### Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C,$$

де  $F(x)$  – первісна функції  $f(x)$ ;  $\varphi'(x)$  – похідна функції  $\varphi(x)$ .

При застосуванні формули на практиці зручно перейти до нової змінної  $t$ , поклавши  $t = \varphi(x)$ . Розглядаючи  $t$  як функцію змінної  $x$ , запишемо диференціал  $dt = \varphi'(x) dx$ . В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної  $t$ :  $\int f(t) dt = F(t) + C$ . Поклавши у правій частині цієї рівності  $t = \varphi(x)$ , дістаємо остаточно  $F(\varphi(x)) + C$ .

Якщо маємо інтеграл  $\int p(x) dx$ , то його обчислення методом заміни змінної зручно оформляти в загальному випадку наступним чином:

$$\begin{aligned} \int p(x) dx &= \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left. \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \\ &= \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C. \end{aligned}$$

**Приклад 16.**  $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ .

┌ Оскільки  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , то дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C \quad \text{┐}$$

**Приклад 17.**  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$ .

┌ Оскільки  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ , то дістанемо

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

(скористалися табличним інтегралом **3** при  $a = e$ ). ┐

**Приклад 18.**  $\int \frac{x \, dx}{x^2 - 1}$ .

┌ Оскільки  $(x^2 - 1)' = 2x$ , то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{2x \, dx}{2(x^2 - 1)} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

### Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

де  $u$  та  $v$  – функції змінної  $x$ ;  $du = u'(x) \, dx$ ,  $dv = v'(x) \, dx$ .

Якщо потрібно обчислити інтеграл  $\int f(x) \, dx$ , то підінтегральний вираз  $f(x) \, dx$  слід представити у вигляді  $u \, dv$  так, щоб інтеграл у правій частині формули був простішим за заданий  $\int f(x) \, dx = \int u \, dv$ . Зауважимо, що функція  $v$ , яка фігурує у правій частині, знаходиться за очевидною формулою  $v = \int v'(x) \, dx = \int dv$ , яка означає, що функція  $v(x)$  є первісною своєї похідної  $v'(x)$ .

**Приклад 19.**  $\int x \cos 2x \, dx$ .

┌ Покладемо  $u = x$ ,  $dv = \cos 2x \, dx$ . Тоді  $du = (x)' \, dx = 1 \cdot dx = dx$ ,  $v = \int dv = \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2}$  (беремо заради простоти  $C = 0$ ). Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x \, dx &= x \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \, dx = \\ &= \frac{x \sin x}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{-\cos 2x}{2} \right) + C = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

**Приклад 20.**  $\int (5x-2)e^x dx$ .

┌ Покладемо  $u = 5x-2$ ,  $dv = e^x dx$ . Тоді  $du = (5x-2)' dx = 5dx$ ,  
 $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$ . Застосовуючи формулу інтегрування частинами,  
дістанемо

$$\begin{aligned} \int (5x-2)e^x dx &= (5x-2)e^x - \int e^x 5 dx = (5x-2)e^x - 5 \int e^x dx = \\ &= (5x-2)e^x - 5e^x + C = e^x(5x-7) + C. \quad \lrcorner \end{aligned}$$

**Приклад 21.**  $\int \arcsin x dx$ .

┌ Покладемо  $u = \arcsin x$ ,  $dv = dx$ . Тоді  $du = (\arcsin x)' dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ,  
 $v = \int dx = x$ . За формулою інтегрування частинами

$$\int \arcsin x dx = \arcsin x \cdot x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Тоді,

$$\int \arcsin x dx = \arcsin x \cdot x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

**Приклад 23.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$ .

┌ Спочатку виділимо повний квадрат відносно  $x$ :

$$\begin{aligned} 5+2x-x^2 &= -(x^2-2x+1-6) = -\left[(x^2-2 \cdot x \cdot 1+1^2)-6\right] = \\ &= -\left[(x-1)^2-6\right] = 6-(x-1)^2 \end{aligned}$$

(скористалися формулою  $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$ ).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - (x-1)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C \quad ]$$

## **Інтегрування раціональних функцій**

Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дроби, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

**Приклад 24.**  $\int \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} dx$ .

┌ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину:

$$- \frac{x^4 + 2x}{x^4 + 8x} \Big| \frac{x^3 + 8}{x} ; \quad \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} = x - \frac{6x}{x^3 + 8}.$$

$$\text{Звідси, } \int \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} dx = \int \left( x - \frac{6x}{x^3 + 8} \right) dx = \int x dx + \int \frac{6x}{x^3 + 8} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{6x}{x^3 + 8} dx$$

Обчислимо інтеграл  $\int \frac{6x}{x^3 + 8} dx$ . Розкладемо підінтегральну функцію на доданки. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \frac{6x}{x^3 + 8} &= \frac{6x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2 - 2x + 4} = \\ &= \frac{A(x^2 - 2x + 4) + (Bx+C)(x+2)}{x^3 + 8} = \frac{x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A+2C}{x^3 + 8} \end{aligned}$$

Тоді,  $6x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A+2C$ . Маємо систему

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \begin{cases} 0 = A+B \\ 6 = -2A+2B+C \\ 0 = 4A+2C \end{cases} \text{ Звідси, } \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases}.$$

Тоді,

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4} \right) dx = \ln|x+2| - \int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3} = \ln|x+2| - \int \frac{\frac{1}{2}(2(x-1)+6)dx}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \\ & = \ln|x+2| - \left( \frac{1}{2} \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2} dx + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2} \right) = \\ & = \ln|x+2| - \ln \sqrt{x^2-2x+4} - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C = \\ & = \ln|x+2| - \ln \sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

Отже,  $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln \sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \quad \square$

### Інтегрування функцій, що містять ірраціональності

Інтегрування функцій, що містять ірраціональності, зокрема виду  $\sqrt[m]{kx+b}$  ( $k \neq 0$ ). У цьому випадку слід покласти  $\sqrt[m]{kx+b} = t$ , звідки  $x = \frac{1}{k}(t^m - b)$ ,  $dx = \frac{m}{k} t^{m-1} dt$ .

**Приклад 22.**  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-3}$ .

$$\begin{aligned} \square \int \frac{\sqrt{x} dx}{x-3} &= \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 2t dt}{t^2-3} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-3} = 2 \int \frac{(t^2-3)+3}{t^2-3} dt = \\ &= 2 \int \left( 1 + \frac{3}{t^2-3} \right) dt = 2 \left( \int dt + 3 \int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{3})^2} \right) = 2 \left( t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) + C = \\ &= 2t + \sqrt{3} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + C = 2\sqrt{x} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \right| + C \quad \square \end{aligned}$$

*Універсальна тригонометрична підстановка*

Оскільки в знаменник дробу функції  $\sin x$  і  $\cos x$  входять лінійно, то для алгебраїчної раціоналізації підінтегральної функції зручно використати універсальну тригонометричну підстановку:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad \text{Так як } x = 2\operatorname{arctg} t, \text{ то } dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

**Приклад 25.**  $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} &= \left. \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right| dx = \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{4t - (1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{6t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C. \quad \square \end{aligned}$$

## Визначений інтеграл

### Формула Ньютона-Лейбніца.

Визначений інтеграл функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  – це число, яке позначають  $\int_a^b f(x) dx$ . Тут  $f(x)$  – підінтегральна функція;  $[a, b]$  – відрізок інтегрування;  $a$  та  $b$  – відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де  $F(x)$  – первісна функції  $f(x)$ , тобто  $F'(x) = f(x)$ . Для знаходження первісної доцільно використати відповідний невизначений інтеграл –  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

**Приклад 26.**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ .

З таблиці невизначених інтегралів  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ . Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1. \quad \square$$

**Приклад 27.**  $\int_0^1 5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2} dx &= \left[ 5e^x - 10 \frac{x^5}{5} + \arctg x \right]_0^1 = \\ &= (5e^1 - 2x^5 + \arctg x) \Big|_0^1 = (5e^1 - 2 \cdot 1^5 + \arctg 1) - (5e^0 - 2 \cdot 0^5 + \arctg 0) = \\ &= 5e - 2 + \frac{\pi}{4} - (5 - 0 + 0) = 5e + \frac{\pi}{4} - 7. \quad \square \end{aligned}$$



*Заміна змінної у визначеному інтегралі*

Якщо у визначеному інтегралі  $\int_a^b f(x) dx$  вводиться нова змінна

$t = t(x)$   
 $\int_a^b dt = t'(x) dx$ , то слід змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування

$t_1$  визначається як значення введеної змінної в точці  $x = a$ , а верхня межа  $t_2$

– в точці  $x = b$ , тобто  $\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$ .

**Приклад 28.**  $\int_0^2 x e^{x^2} dx$ .

Нехай  $t = x^2$ . Тоді  $dt = (x^2)' dx = 2x dx$  або  $x dx = \frac{1}{2} dt$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = 0^2 = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = 2^2 = 4.$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x e^{x^2} dx &= \int_0^2 e^{x^2} \cdot x dx = \int_0^4 e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^4 = \\ &= \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e^4 - 1). \quad \square \end{aligned}$$

**Приклад 29.**  $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ .

Покладемо  $\sqrt{x} = t$ . Тоді  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ . Межі інтегрування нової

змінної:  $\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_2^3 f(t) dt$ . Маємо

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_2^3 \frac{1}{t+1} \cdot 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t}{t+1} dx = 2 \int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1} dx = \\ &= 2 \int_2^3 \frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} dt = 2 \int_2^3 1 - \frac{1}{t+1} dt = 2(t - \ln|t+1|) \Big|_2^3 = \\ &= 2(3 - \ln|3+1|) - 2(2 - \ln|2+1|) = 6 - 2 \ln 4 - 4 + 2 \ln 3 = \\ &= 2 + 2(\ln 3 - \ln 4) = 2 + 2 \ln \frac{3}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

## Інтегрування частинами

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

**Приклад 30.**  $\int_0^1 x e^x \, dx.$

Покладемо  $u = x$ ,  $dv = e^x \, dx$ . Тоді  $du = (x)' \, dx = dx$ ,  $v = \int dv = \int e^x \, dx = e^x$ . Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, дістанемо

$$\int_0^1 x e^x \, dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = (1 e^1 - 0 e^0) - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1. \quad \square$$

**Приклад 31.**  $\int_1^e x^2 \ln x \, dx.$

Покладемо  $u = \ln x$ ,  $dv = x^2 \, dx$ . Тоді  $du = (\ln x)' \, dx = \frac{1}{x} \, dx$ ,  $v = \int dv = \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}$ . Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1^3}{3} \ln 1 - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \, dx = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9} \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9} \frac{1^3}{3} = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}. \quad \square \end{aligned}$$

## Невласні інтеграли

### Невласні інтеграли I роду

За означенням *невласні інтеграли I роду* обчислюються за формулами:

$$1) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx ;$$

$$2) \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx ;$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx .$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невластні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невластні інтеграли називають збіжними.

Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох границь), то відповідні невластні інтеграли називають розбіжними.

**Приклад 32.**  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) \Big|_1^b =$$
$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{1}) .$$

Так як  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{b} = +\infty$ , то  $\lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{b} - 2) = +\infty$ .

Отже, заданий інтеграл розбіжний.  $\square$

### Невласні інтеграли II роду

Невластний інтеграл II роду є узагальненням визначеного інтеграла  $\int_a^b f(x) dx$  на випадок, коли підінтегральна функція  $f(x)$  необмежена на відрізку  $[a, b]$ .

Розрізняють три випадки:

1)  $f(x)$  необмежена у точці  $x = a$  ( $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ ). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Тут і далі  $\varepsilon > 0$ , тобто  $\varepsilon$  прямує до нуля справа.

2)  $f(x)$  необмежена у точці  $x = b$  ( $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ ). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (\varepsilon > 0)$$

3)  $f(x)$  необмежена у точці  $c \in (a, b)$  ( $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ ). Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (\varepsilon > 0)$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку 3) сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають збіжними. Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку 3) хоча б одна з двох), то відповідні невласні інтеграли називають розбіжними.

**Приклад 33.**  $\int_3^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} dx$ .

Підінтегральна функція необмежена у точці  $x = 3$ . Знаходимо

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} dx &= \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \int_{3+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} dx = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left( 2\sqrt[3]{x-3} \right) \Big|_{3+\varepsilon}^4 = \\ &= \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left( 2\sqrt[3]{4-3} - 2\sqrt[3]{3+\varepsilon-3} \right) = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left( 2\sqrt[3]{1} - 2\sqrt[3]{\varepsilon} \right) = 2 - 0 = 2. \quad \square \end{aligned}$$

**Приклад 34.**  $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$ .

Так як  $\ln 1 = 0$ , то підінтегральна функція необмежена у точці  $x = 1$ .

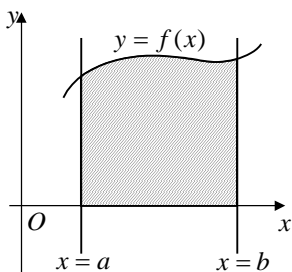
$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x \ln x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ \text{межі } t_1 = \ln 2 \\ t_2 = \ln(1+\varepsilon) \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{1}{t} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \ln |t| \Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left( \ln \ln 2 - \ln \ln(1+\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Оскільки  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(1 + \varepsilon) = -\gamma$ , то заданий інтеграл розбіжний.  $\square$

## Застосування визначеного інтеграла

### Обчислення площ плоских фігур

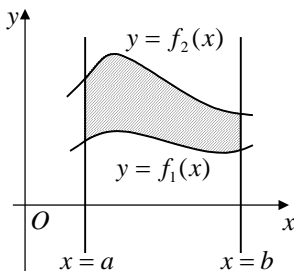
1. Якщо на відрізку  $[a, b]$  функція  $y = f(x)$  неперервна і  $f(x) \geq 0$ , то площа *криволінійної трапеції* (рис. 1), обмеженої графіком функції  $y = f(x)$ , прямими  $x = a$ ,  $x = b$  та віссю  $Ox$ , обчислюється за формулою



$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Рис. 1

2. Площа фігури (рис. 2), обмеженої знизу графіком функції  $y = f_1(x)$ , зверху –  $y = f_2(x)$  та прямими  $x = a$ ,  $x = b$ , обчислюється за формулою



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Рис. 2

Відрізки, які обмежують зліва та справа фігуру на рис. 2, можуть вироджуватись у точки.

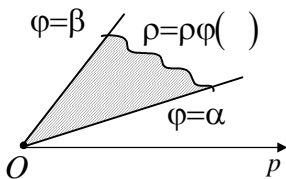
3. Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично

де  $x = x(t)$ ,  
 $y = y(t)$ , прямими  $x = a$ ,  $x = b$  та віссю  $Ox$ , то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b y(t) dx(t)$$

де  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$  і  $y(t) \geq 0$ .

4. Площа криволінійного сектора (рис. 3), обмеженого у полярній системі координат неперервною кривою  $\rho = \rho(\varphi)$  та променями  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$ , обчислюється за формулою

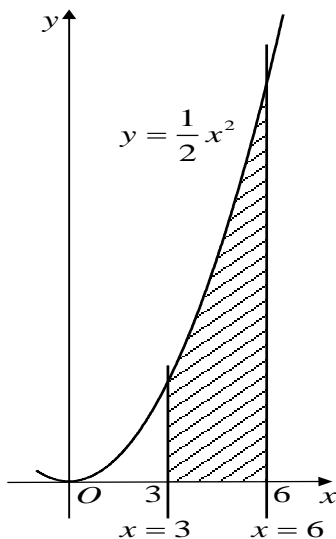


$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Рис. 3

**Приклад 35.** Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою  $y = \frac{1}{2}x^2$ , прямими  $x = 3$ ,  $x = 6$  та віссю  $Ox$ .

Г Криволінійна трапеція позначена на рисунку штрихуванням.



Знайдемо її площу за формулою  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ :

$$S = \int_3^6 \frac{1}{2} x^2 - 0 dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_3^6 = \frac{1}{6} (6^3 - 3^3) = \frac{1}{6} (216 - 27) = \frac{1}{6} (6^3 - 3^3) = \frac{1}{6} (216 - 27) = \frac{63}{2} = 31,5 \text{ (кв. од.)} \quad \lrcorner$$

**Приклад 36.** Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій  $y = 6 - x^2$ ,  $y = x$ .

Г  $y = 6 - x^2$  – парабола, вітки якої направлені вниз. Заповнимо таблицю для зображення параболі:

$x$	0	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$
$y = 6 - x^2$	6	0	0

Для знаходження абсцис ( $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ) точок перетину параболи з прямою розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \text{м} y &= 6 - x^2 \\ \text{н} \text{ю} 6 - x^2 &= x, \\ \text{о} y &= x \end{aligned}$$

$$\text{або } x^2 + x - 6 = 0.$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25,$$

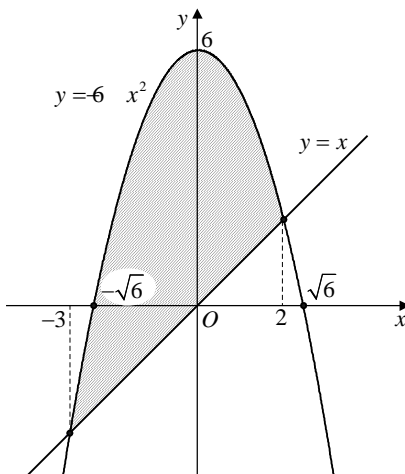
$$x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3,$$

$$x_2 = b = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2.$$

Шукана фігура обмежена знизу прямою, а зверху – параболою.

Тому за формулою (8) отримаємо

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^2 ((6 - x^2) - x) dx = \left[ 6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^2 = \left( 6 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) - \\ &= \left( 6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} \right) = 12 - \frac{8}{3} - 2 + 18 - 9 + \frac{9}{2} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6} \text{ (кв. од.). } \quad \square \end{aligned}$$



## Диференціальні рівняння

### Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну  $x$ , невідому функцію  $y = y(x)$  та її похідну  $y'$ :

$$F(x, y, y') = 0.$$

Диференціальне рівняння виду  $y' = f(x) \cdot g(y)$  називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Права частина рівняння є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від  $x$ , а друга – лише від  $y$ .



Схема розв'язання диференціального рівняння. Так як  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то маємо

$y' = f(x) \cdot g(y)$ , або  $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ . Помножимо обидві частини рівності

на вираз  $\frac{dx}{g(y)}$  (припускаємо, що  $g(y) \neq 0$ ). Отримаємо рівняння з

відокремленими змінними  $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$ .

У лівій частині рівності маємо диференціал деякої функції по змінній  $y$ , а у правій – по змінній  $x$ .

Інтегруючи рівняння  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$ , отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) диференціального рівняння.

**Приклад 37.**  $y' = \frac{y}{x^2}$ .

┌ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:  
 $y' = \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot y$ . Оскільки  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x^2} dx.$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на  $dx$  і поділимо на  $y$ . Отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}$ ,  $\ln|y| = -\frac{1}{x} + C$ , звідки знаходимо загальний розв'язок

заданого диференціального рівняння –  $y = e^{-\frac{1}{x} + C}$ . ┘

**Приклад 38.**  $y' = y3^x$ .

┌ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = y3^x, \quad \frac{dy}{y} = 3^x dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int 3^x dx, \quad \text{звідки знаходимо загальний}$$

$$\text{розв'язок } \ln|y| = \frac{3^x}{\ln 3} + C. \quad \lrcorner$$

**Приклад 39.**  $y\sqrt{1+x^2}y' + x\sqrt{1+y^2} = 0.$

┌ Розв'яжемо задане рівняння відносно  $y$ :

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

Підставимо  $y\check{y} = \frac{dy}{dx}$  і відокремимо змінні, помноживши рівняння на

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dx:$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C, \text{ або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}. \quad \lrcorner$$

### Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння  $y' = f(x, y)$  називають однорідним, якщо функція  $f(x, y)$  є однорідною функцією нульового виміру, тобто для будь-якого  $t > 0$  виконується рівність:  $f(tx, ty) = f(x, y)$ .

Рівняння можна записати у вигляді  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Для розв'язання рівняння введемо допоміжну невідому функцію  $u = u(x)$ , поклавши  $\frac{y}{x} = u$  або  $y = ux$ , і перетворимо однорідне рівняння у

рівняння з відокремлюваними змінними. Звідси, знаходимо  $y' = u'x + u$ .  
Тому задане рівняння запишеться у вигляді

$$u + xu' = g(u), \text{ або } x \frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Відокремимо змінні:  $\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$ .

Проінтегрувавши рівняння, одержимо  $\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + C$ .

Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість  $u$  вираз  $\frac{y}{x}$ ,  
отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

**Приклад 40.**  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ .

┌ Права частина рівняння – функція  $f(x, y) = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$  є однорідною  
функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + \sin \frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ .

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sin \frac{ux}{x}, \quad u'x + u = u + \sin u, \quad u'x + u - u = \sin u,$$

$$u'x = \sin u, \quad u' = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| = \ln C|x|, \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = Cx,$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2x} = Cx. \quad \rfloor$$

**Приклад 41.**  $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ .

┌ Права частина даного рівняння – функція  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$  є  
однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ :

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{1+u^2}{2}, \quad u'x = \frac{1+u^2}{2} - u,$$

$$u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2}, \quad u'x = \frac{(u-1)^2}{2}, \quad u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Диференціальне рівняння, яке ми отримали – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \quad \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння  $u = \frac{y}{x}$ :

$$\frac{-2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln C|x|, \quad \frac{-2x}{y-x} = \ln C|x|, \quad \text{звідки знаходимо загальний}$$

$$\text{розв'язок заданого диференціального рівняння} - y = x - \frac{2x}{\ln C|x|}.$$

### Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x),$$

де  $P(x)$  і  $Q(x)$  – неперервні функції на деякому інтервалі  $(a, b)$ , називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

У випадку, коли  $P(x) = \pm Q(x)$  або  $Q(x) = 0$ , рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання лінійних диференціальних рівнянь. Розглянемо один із них – метод Бернуллі. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v,$$

де  $u = u(x)$  і  $v = v(x)$  – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з заданим рівнянням.

Знаходимо похідну функції  $y$ :  $y' = u'v + uv'$ . Підставляючи  $y$  та  $y'$  в задане рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Виберемо функцію  $v$  так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0.$$

Звідси, маємо: 
$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \\ u'v = Q(x) \end{cases}.$$

Знаходимо  $v$  з першого рівняння системи, яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx, \quad \text{звідки } \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad \text{або}$$

$v = e^{-\int P(x)dx}$ . Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функцій  $P(x)$ .

Знаючи  $v$ , знаходимо  $u$  з другого рівняння системи:

$$v \frac{du}{dx} = Q(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx, \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Підставляємо знайдені функції  $u$  та  $v$  у формулу і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

**Приклад 41.**  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ .

┌ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді  $y = uv$ . Тоді  $y' = u'v + uv'$ . Підставляємо  $y$  та  $y'$  у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3.$$

Виберемо функцію  $v$  так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0.$$

Знаходимо  $v$ :

$$v' = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = 2 \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2 \ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln x^2, \text{ звідки } v = x^2.$$

Підставляючи знайдену функцію  $v$  в отримане рівняння, отримуємо рівняння для знаходження  $u$ :  $u' \cdot x^2 = 2x^3$ ,  $u' = \frac{2x^3}{x^2}$ ,

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x dx, \quad \int du = \int 2x dx, \quad u = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

Знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння –  $y = uv = (x^2 + C)x^2$ . ┘

**Приклад 42.**  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ .

┌ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді  $y = uv$ . Тоді  $y' = u'v + uv'$ .

$$u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \cos^2 x,$$

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \cos^2 x.$$

Виберемо функцію  $v$  так, щоб  $v' + v \operatorname{tg} x = 0$ . Знаходимо  $v$ :

$$v' + v \operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -v \operatorname{tg} x, \quad \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \operatorname{tg} x dx,$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x|, \text{ звідки } v = \cos x.$$

Підставляючи знайдену функцію  $v$  в рівняння, отримуємо рівняння для знаходження  $u$ :  $u' \cdot \cos x = \cos^2 x$ ,  $u' = \frac{\cos^2 x}{\cos x}$ ,  $\frac{du}{dx} = \cos x$ ,  $du = \cos x dx$ ,

$$\int du = \int \cos x dx, \text{ звідки } u = \sin x + C.$$

Знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння –  $y = uv = (\sin x + C)\cos x$ . ┘

*Диференціальні рівняння другого порядку.*

Диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну  $x$ , невідому функцію  $y$  та першу і другу похідні цієї функції:  $F(x, y, y', y'') = 0$ ,

Загальним розв'язком диференціального рівняння є функція  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ , яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність при довільних фіксованих значеннях сталих  $C_1$  та  $C_2$ .

Найпростіше диференціальне рівняння другого порядку має вигляд  $y'' = f(x)$ , де функція  $f(x)$  – задана. Розв'яжемо задане рівняння. За

означенням другої похідної  $y'' = (y')' = \frac{d(y')}{dx}$ . Тоді маємо  $\frac{d(y')}{dx} = f(x)$ .

Звідси,  $d(y') = f(x) dx$  і  $y' = \int f(x) dx + C_1$ , де  $C_1$  – довільна стала.

Аналогічно знаходимо  $\frac{dy}{dx} = \int f(x) dx + C_1$  або  $dy = (\int f(x) dx + C_1) dx$ ,

звідки  $y = \int (\int f(x) dx) dx + C_1 x + C_2$ .

**Приклад 42.**  $y'' = x^2 - 2x$ .

┌ Це диференціальне рівняння другого порядку виду  $y'' = f(x)$ .

Послідовно дістанемо  $\frac{d(y')}{dx} = x^2 - 2x$ ,  $d(y') = (x^2 - 2x) dx$ ,

$$y' = \int (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1.$$

Отже,  $y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$ ,  $dy = (\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1) dx$ ,

$$y = \int (\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1) dx = \frac{1}{3} \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2.$$

Отже,  $y = x^4 - x^3 + 4x^2 + C_1 x + C_2$ . ┘

**Приклад 43.**  $y'' = \sin 5x$ , якщо  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$ .

Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння. Це рівняння виду  $y'' = f(x)$ . Послідовно дістанемо  $\frac{d(y')}{dx} = \sin 5x$ ,

$$d(y') = \sin 5x dx, \quad y' = \int \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + C_1.$$

Остаточно маємо  $y' = -\frac{1}{5} \cos 5x + C_1$ ,  $dy = \left(-\frac{1}{5} \cos 5x + C_1\right) dx$ ,

$$y = \int \left(-\frac{1}{5} \cos 5x + C_1\right) dx = -\frac{1}{25} \sin 5x + C_1 x + C_2.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з умовами  $y(0) = 2$  і  $y'(0) = -1$ :

$$y(0) = -\frac{1}{25} \sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 2$$

$$y'(0) = -\frac{1}{5} \cos 0 + C_1 = -1,$$

$$\begin{aligned} C_2 = 2, \quad C_1 = -1 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } y = -\frac{1}{25} \sin 5x - \frac{4}{5}x + 2. \quad \square$$

*Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять  $y$ .*

Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду  $F(x, y', y'') = 0$ , або  $y'' = f(x, y')$ , яке не містить явно шуканої функції  $y = y(x)$ . Зробимо заміну  $y' = z(x)$ , тоді  $y'' = z'$ . Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, z, z') = 0, \text{ або } z' = f(x, z),$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок  $z = z(x, C_1)$  рівняння, то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку  $y' = z(x, C_1)$ . Звідси маємо загальний розв'язок  $y = \int z(x, C_1) dx + C_2$ .



**Приклад 44.**  $y''x \ln x = y'$ .

┌ Дане рівняння запишемо у вигляді  $y'' = \frac{y'}{x \ln x}$  і отримаємо диференціальне рівняння другого порядку виду  $y'' = f(x, y')$ . Зробимо заміну  $y' = z$ . Тоді  $y'' = z'$ . Дістанемо рівняння з відокремленими змінними  $z' = \frac{z}{x \ln x}$ . Розв'язуємо його:

$$\frac{dz}{z} = \frac{z}{x \ln x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1,$$

$$\ln|z| = \ln|C_1 \ln x|, \quad z = C_1 \ln x.$$

Але  $z = y'$ . Тому маємо

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \ln x, \quad dy = C_1 \ln x dx, \quad \int dy = C_1 \int \ln x dx, \quad \text{звідки}$$

$$y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2. \quad \_$$

*Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять  $x$ .*

Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду  $F(y, y', y'') = 0$ , або  $y'' = f(y, y')$ , яке не містить явно незалежну змінну  $x$ . Зробимо заміну  $y' = p(y)$ , де  $p$  вважається функцією від  $y$ . Тоді  $y'' = (y')' = p' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p = p' p$ . Тому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(y, p, p p') = 0, \quad \text{або} \quad p p' = f(y, p).$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок рівняння  $p = p(y, C_1)$ , то отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$y' = p(y, C_1), \quad \frac{dy}{dx} = p(y, C_1), \quad \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx, \quad \int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2.$$

**Приклад 45.**  $y'' = -\frac{2}{y^5}$ , якщо  $y(-1) = 1$ ,  $y'(-1) = 1$ .

┌ Маємо рівняння виду  $y'' = f(y, y')$ . Зробимо заміну  $y' = p(y)$ ,  $y'' = p p'$ . Дістанемо рівняння з відокремленими змінними:  $p p' = -\frac{2}{y^5}$ .

Розв'яжемо його:

$$p \frac{dp}{dy} = -\frac{2}{y^5}, \quad p dp = -\frac{2}{y^5} dy, \quad \int p dp = -2 \int y^{-5} dy, \quad \frac{p^2}{2} = -2 \frac{y^{-4}}{-4} + C_1,$$

$$p^2 = y^{-4} + 2C_1, \quad p^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1, \quad (y\check{y})^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1.$$

Так як потрібно знайти тільки такий частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, то можливо одразу знайти  $C_1$  (підставляючи в отриману рівність умови  $y(-1) = 1$ ,  $y\check{y}(-1) = 1$ ):

$$1 = 1 + 2C_1 \text{ ьт } C_1 = 0.$$

Тому маємо  $(y\check{y})^2 = \frac{1}{y^4}$ , звідки  $y\check{y} = \frac{1}{y^2}$  (врахували початкову умову

$$y\check{y}(-1) = 1).$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}, \quad y^2 dy = dx, \quad \int y^2 dy = \int dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = x + C_2 \text{ ьт } y^3 = 3x + 3C_2.$$

Підставляємо початкову умову  $y(-1) = 1$  і знаходимо:  $1^3 = 3(-1) + 3C_2$ ,  $3C_2 = 4$ ,  $C_2 = \frac{4}{3}$ . Тоді  $y^3 = 3x + 4$ . Остаточню маємо  $y = \sqrt[3]{3x + 4}$ .  $\square$

**Приклад 46.**  $y\check{y}(1+y) - 5(y\check{y})^2 = 0$ .

$\square$  Маємо рівняння виду  $F(y, y\check{y}, y\check{y}) = 0$ . Зробимо заміну  $y' = p(y)$ ,  $y\check{y} = p\check{y}$ . Дістанемо рівняння  $p\check{y}(1+y) - 5p^2 = 0$ . Виносимо спільний множник  $p$  за дужки:

$$p(p\check{y}(1+y) - 5p) = 0.$$

Можливі два випадки.

1)  $p = 0$ , тоді  $y' = 0$ ,  $y = \text{const}$ .

2)  $p\check{y}(1+y) - 5p = 0$ . Це рівняння з відокремленими змінними.

Розв'яжемо його:

$$(1+y) \frac{dp}{dy} = 5p, \quad \frac{dp}{p} = \frac{5dy}{y+1}, \quad \int \frac{dp}{p} = 5 \int \frac{dy}{y+1}, \quad \ln|p| = 5 \ln|y+1| + \ln C_1,$$

$$\ln|p| = \ln|C_1 (y+1)^5|, \quad p = C_1 (y+1)^5, \quad y\check{y} = C_1 (y+1)^5.$$

Це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:  $\frac{dy}{dx} = C_1(y+1)^5$ ,  $\frac{dy}{(y+1)^5} = C_1 dx$ ,  $\int (y+1)^{-5} dy = C_1 \int dx$ ,

$$\frac{(y+1)^{-4}}{-4} = C_1 x + C_2, \quad \frac{1}{4(y+1)^4} = C_1 x + C_2, \quad (y+1)^4 = \frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Зауважимо, що розв'язок  $y = \text{const}$  дістаємо із загального розв'язку при  $C_1 = 0$ .  $\perp$

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Маємо рівняння виду (30). Запишемо його характеристичне рівняння:  $k^2 - 5k + 4 = 0$ . Розв'яжемо його:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0, \text{ тоді } k_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ і } k_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Тому за формулою (32) загальний розв'язок диференціального рівняння –  $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ .  $\perp$

### *Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*

Рівняння виду  $y'' + py' + qy = 0$ , де  $p$  і  $q$  – дійсні числа, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Квадратне рівняння  $k^2 + pk + q = 0$  називається відповідним характеристичним рівнянням. Загальний розв'язок рівняння залежить від значень коренів характеристичного рівняння. Можливі три випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто  $k_1 \neq k_2$ , то загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто  $k_1 = k_2 = k$ , то

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x).$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ( $D = p^2 - 4q < 0$ ), тобто  $k_1 = \alpha + i\beta$ ,  $k_2 = \alpha - i\beta$ , де  $i = \sqrt{-1}$  (уявна

одиниця),  $\alpha = -\frac{p}{2}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$ , то

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

**Приклад 47.**  $y'' + 8y' + 16y = 0$ .

┌ Це рівняння виду  $y'' + py' + qy = 0$ . Його характеристичне рівняння має вигляд  $k^2 + 8k + 16 = 0$ , або  $(k + 4)^2 = 0$ . Тому  $k_1 = k_2 = -4$ , тобто маємо загальний розв'язок диференціального рівняння:  $y = e^{-4x} (C_1 + C_2 x)$ . ┘

**Приклад 48.**  $y'' + 4y' - 5y = 0$ .

┌ Маємо рівняння виду  $y'' + py' + qy = 0$ . Записуємо відповідне характеристичне рівняння:  $k^2 + 4k - 5 = 0$ . Розв'язуємо його:  
 $D = 4^2 - 4 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$ ,  $k_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$ ,  
 $k_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$ . тобто маємо загальний розв'язок диференціального рівняння:  $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x$ . ┘

**Приклад 49.**  $y'' + 2y' + 10y = 0$ .

┌ Маємо рівняння виду  $y'' + py' + qy = 0$ . Записуємо відповідне характеристичне рівняння:  $k^2 + 2k + 10 = 0$ . Розв'язуємо його:  
 $D = 2^2 - 4 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$ ,  $k_1 = \frac{-2 - \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$ ,  
 $k_2 = \frac{-2 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$ . Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. При цьому  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 3$ . Маємо загальний розв'язок диференціального рівняння:  $y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ . ┘

### Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$
 де коефіцієнти  $a_{ij}$  –

сталі,  $t$  – незалежна змінна,  $x(t)$ ,  $y(t)$  – невідомі функції, називається однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Задача Коші для системи полягає у знаходженні функцій  $x(t)$  і  $y(t)$ , що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Розв'язання системи виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи  $a_{12} \neq 0$ , виразимо в ньому  $y$  через  $x$ :

$$y = \frac{1}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x.$$

Продиференціюємо цю рівність по  $t$ :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt}.$$

Підставляючи отримані вирази в друге рівняння системи, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt} &= a_{21}x + a_{22} \left( \frac{1}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x \right), \\ \frac{1}{a_{12}} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{dx}{dt} + \frac{a_{22}}{a_{12}} \frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} a_{22} x &= 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) x &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами з незалежною змінною  $t$  і невідомою функцією  $x(t)$ . Розв'язуємо його відносно  $x(t)$ . Після цього знаходимо функцію  $y(t)$  і записуємо остаточну відповідь.

**Приклад 50.**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + 5y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y. \end{aligned}$$

Маємо систему двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. З першого рівняння виражаємо  $y$ :

$$\frac{dx}{dt} = -x + 5y, \quad 5y = \frac{dx}{dt} + x, \quad y = \frac{1}{5} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{5} x.$$

Диференціюємо останню рівність по  $t$  і отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5} \frac{dx}{dt}.$$

Підставимо знайдені  $y$  та  $\frac{dy}{dt}$  в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{5} \frac{dx}{dt} = x + 3 \frac{1}{5} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{5} x_{\text{II}}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 5x + 3 \frac{dx}{dt} + 3x,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 8x = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду. Коренями його характеристичного рівняння  $k^2 - 2k - 8 = 0$  є  $k_1 = -2$  і  $k_2 = 4$ . Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд:  $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}$ , де  $C_1$  і  $C_2$  – довільні сталі. Так як

$$\frac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{4t}, \text{ то підставляючи знайдені } x(t) \text{ та } \frac{dx}{dt} \text{ у вираз для } y$$

$$(y = \frac{1}{5} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{5} x), \text{ отримаємо}$$

$$y(t) = \frac{1}{5} (-2C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{4t}) + \frac{1}{5} (C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}), \quad y(t) = -\frac{1}{5} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}.$$

Запишемо тепер загальний розв'язок системи:

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{5} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}. \quad \square$$

## Таблиця похідних основних елементарних функцій

1.  $(c)' = 0$  ( $c$  – сталє число)

2.  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  ( $n$  – будь-яке дійсне число)

3.  $(a^x)' = a^x \ln a$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

Зокрема, при  $a = e$ :  $(e^x)' = e^x$

4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

Зокрема, при  $a = e$ :  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

5.  $(\sin x)' = \cos x$

6.  $(\cos x)' = -\sin x$

7.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

12.  $(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

*Основні правила диференціювання функцій*

1°.  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ , де  $c$  – стала.

2°.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ , де  $u = u(x)$ ;  $v = v(x)$ .

Це правило узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$(u \pm v \pm w \pm \dots \pm z)' = u' \pm v' \pm w' \pm \dots \pm z'.$$

**3°.**  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$

**4°.**  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$

**5°.** Нехай  $y = f[u(x)]$  – складна функція, тобто  $y = f(u)$ , де  $u = u(x)$ . Тут  $u$  – проміжний аргумент,  $x$  – незалежна змінна. Тоді

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$



## Таблиця основних невизначених інтегралів

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

Зокрема, при  $n = 0$ :  $\int dx = x + C$

Зокрема, при  $n = 1$ :  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

Зокрема, при  $n = -\frac{1}{2}$ :  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

$$2. \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Зокрема, при  $a = e$ :  $\int e^x dx = e^x + C.$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$9. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при  $a = 1$ :  $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при  $a = 1$ :  $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

Зокрема, при  $a = 1$ : 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C \quad (a \neq 0).$$

Зокрема, при  $a = 1$ : 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| + C = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + C.$$

### ***Властивості невизначеного інтеграла***

1°. 
$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k - \text{стала, } k \neq 0).$$

2°. 
$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_m(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_m(x) dx.$$

3°. Якщо  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то для будь-яких сталих  $k$  та  $b$  ( $k \neq 0$ )

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

Частинні випадки властивості 3° (відповідно при  $b = 0$  та  $k = 1$ ):

3.1°. 
$$\int f(kx) dx = \frac{1}{k} F(kx) + C;$$

3.2°. 
$$\int f(x + b) dx = F(x + b) + C.$$