§ 1. Визначений інтеграл як границя суми та його властивості.

Розглянемо на відрізку [a, b] деяку неперервну функцію $y = f(x)$. Розіб'ємо відрізок [a, b] довільним чином на n частин точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, де $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – точки розбиття. Довжину кожного часткового відрізка будемо позначати через Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. У кожному частковому відрізку виберемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ та обчислимо $f(\xi_i)$ – значення функції f(x) в цій точці. Для даного розбиття складемо суму:

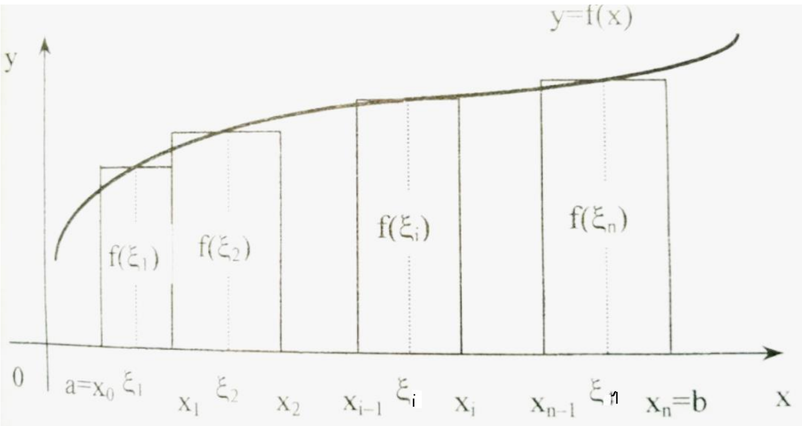


Рис. 1

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

<u>Означення 1.</u> Сума S_n(1) називається інтегральною сумою функцій f(x) на [a, b].

Геометрично сума S_n(1) являє собою алгебраїчну суму площ прямокутників з основами $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ та висотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$, якщо $f(x) \geq 0$ (рис. 1).

Сума (1) залежить від способу розбиття відрізка [a, b] на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ і від вибору точок ξ_i. Якщо змінювати розбиття [a, b] і спосіб вибору точок ξ_i, то будемо отримувати нове значення суми S_n, т.б. отримаємо числову послідовність інтегральних сум: $\{S_n\}$.

Позначимо через λ довжину найбільшого часткового відрізка розбиття: $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$. Будемо розглядати такі розбиття, де $\lambda \to 0$ (при цьому число відрізків n необмежено зростає $(n \to \infty)$).

Означення 2. Визначеним інтегралом функції f(x) на відрізку [a, b] називається скінченна границя інтегральної суми S_n за умови, що довжина найбільшого часткового відрізка прямує до нуля ($\lambda = \max \Delta x_i \to 0$), яка не залежить від способу розбиття та вибору точок ξ_i і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

В цьому випадку підінтегральна функція f(x) називається інтегрованою на відрізку [a, b].

$\int_a^b f(x)dx$ читається: «визначений інтеграл від a до b f(x) на dx»,

де $f(x)dx$ – підінтегральний вираз,

[a, b] – відрізок інтегрування,

число a – нижня межа інтегрування,

b – верхня межа інтегрування,

x – змінна інтегрування.

З означення 2 випливає, що величина визначеного інтеграла залежить тільки від функції f(x) та від чисел a, b. Введення поняття визначеного інтеграла і дослідження області його застосування належить видатному німецькому математику Б. Ріману, тому границю (2) ще називають визначеним інтегралом Рімана, а функцію f(x), для якої ця границя існує, – інтегровною за Ріманом.

Теорема 1. (про існування визначеного інтеграла). Якщо функція y = f(x) неперервна на відрізку [a, b], то вона інтегровна на [a, b], тобто границя інтегрально суми (2) існує і не залежить від способу розбиття [a, b] на часткові відрізки Δx_i і вибору точок ξ_i.

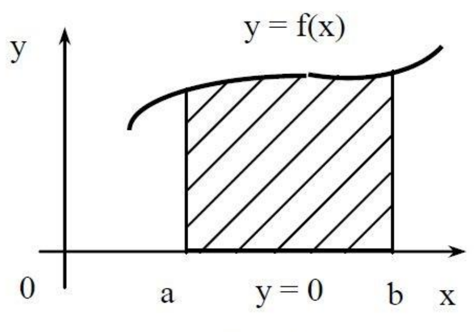


Рис. 2

З'ясуємо геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо $f(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криво-лінійної трапеції, обмеженої графіком функції y = f(x), віссю 0x та прямими x = a, x = b:

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ (рис. 2)}$$

Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадки, коли a>b та a = b. За означенням 2 маємо

якщо a > b, то $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx,$ (3)

якщо a = b, то $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$ (4)

<u>Основні властивості визначеного інтеграла.</u>

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтеграла: якщо A = const, то

$$\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx\,. \qquad (5)$$

$\int\limits_a^b Af(x)dx =$ (за означенням 2) $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\Delta x_i =$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0} A\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A\int\limits_a^b f(x)dx$ ■

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів. Так, у випадку двох доданків.

$$\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx \qquad (6)$$

$\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx =$ (за означенням 2) $=$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) \pm f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0}[\sum\limits_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum\limits_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i] = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i =$

$= \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$ ■

3. Якщо всюди на відрізку [a, b], де a < b функція f(x) ≥ 0, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Доведення очевидно.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda=0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Якщо для $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \ge 0$, то $f(\xi_i) \ge 0$.

З умови $a < b \Rightarrow \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$ $(i = 1, 2 \ldots, n)$.

Отже, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$. Переходячи до границі (при $\lambda \to 0$) інтегральної суми, дістаємо $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ ■

4. Якщо всюди на відрізку [a, b], де a < b функції f(x) та $\varphi(x)$ задовільняють умові $f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (7)$$

За умовою

$$f(x) \le \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) - f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx \ge 0$$

(за властивістю 3), $\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx \ge 0 =$ (за властивістю 2) =

$$= \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx.$$

Отже, $\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx.$ ■

Проілюструємо властивість 4 геометрично для випадку, коли $f(x) > 0$ та $\varphi(x) > 0$. Якщо $f(x) \le \varphi(x), \quad \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$, тобто площа криволінійної трапеції aA_1B_1b не перевищує площі криволінійної трапеції aA_2B_2b (рис. 3)

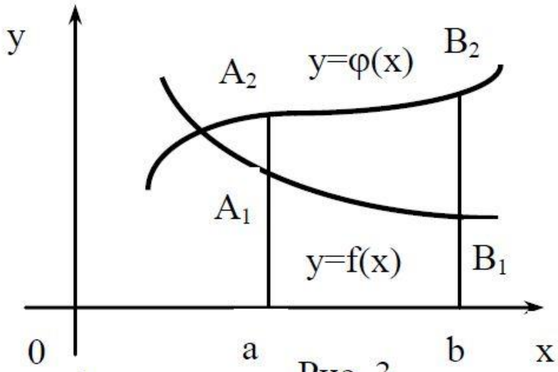


Рис. 3

$$\left(S_1 = \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx = S_2\right).$$

5. Оцінка визначеного інтеграла: якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції y = f(x) на відрізку [a,b], де a < b, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (8)$$

За умовою, для $\forall x \in [a, b]$ маємо $m \le f(x) \le M$.

Тоді, за властивістю 4 $\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$,

застосуємо властивість 1 $m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$.

Розглянемо $\int_a^b dx$ = (за означенням 2) =

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

$f(\xi_i) = 1$ тому, що підінтегральна функція f(x) = 1. Враховуючи те, що $\int_a^b dx = b - a$, отримуємо нерівності

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \blacksquare$$

6. Теорема про середнє: якщо функція y = f(x) неперервна на відрізку [a, b], то
на цьому відрізку існує точка $\xi \in [a, b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (9)$$

Функція f(x) неперервна на відрізку [a, b] – це означає, що вона досягає на цьому відрізку найменшого і найбільшого значень, т.б. ∃ числа m, M такі, що

$$m \le f(x) \le M, \qquad (\forall x \in [a, b])$$

За властивістю 5 маємо:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \quad \text{де} \quad b - a > 0$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Позначимо $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu, \ \ m \le \mu \le M$.

Функція f(x) неперервна на [a, b], тому вона приймає всі значення інтервалу [m, M], т.б. існує така точка $\xi \in [a, b]$, що $f(\xi) = \mu$.

Тоді $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ■

Значення $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ називається середнім значенням функції y = f(x) на відрізку [a, b].

Проілюструємо властивості 5, 6 геометрично для випадку, коли $f(x) \ge 0$ (рис. 4).

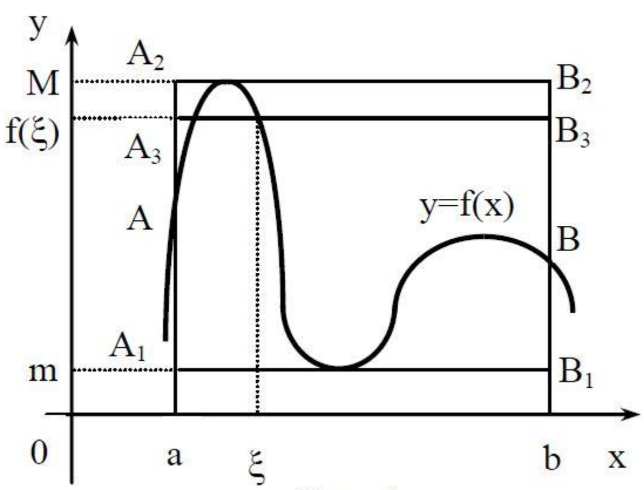


Рис. 4

Геометричний зміст власти-вості 5: $\int_a^b f(x)dx$ є площа криволінійної трапеції aABb, обмеженої графіком функції y=f(x), віссю Ox, прямими x=a, x = b, яка заключена між площами прямокутників з основою b – a та висотами відповідно m і M:

$$S_{aA_1B_1b} \le S_{aABb} \le S_{aA_2B_2b}.$$

Геометричний зміст властивості 6: $\int\limits_a^b f(x)dx$ є площа криволінійної трапеції S_{aABb}, а $f(\xi)(b-a)$ є площа прямокутника з основою b – a і висотою $f(\xi)$, т.б. $S_{aA_3B_3b}$.

Рівність $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ означає, що $S_{aABb} = S_{aA_3B_3b}$.

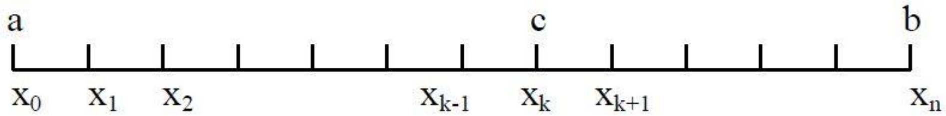
7. Якщо для функції y = f(x) існують інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^c f(x)dx$, $\int\limits_c^b f(x)dx$, де a, b, c – довільні числа, то має місце рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \qquad (10)$$

Розглянемо випадок, коли c міститься між a та b: a < c < b. За умовою, для функції f(x) існує інтеграл

$$\int\limits_a^b f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Враховуючи той факт, що границя інтегральної суми існує і не залежить від способу розбиття відрізку [a, b] та вибору точок ξ_i, розіб'ємо [a, b] на частини таким чином, щоб точка c була точкою розбиття (рис. 5)



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = c < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$$

Тоді сума $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, що відповідає відрізку [a, b], складається з двох сум:

суми $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$, що відповідає відрізку [a, c] і

суми $\sum_{i=k+1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$, що відповідає відрізку [c, b]

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i \qquad (11)$$

За умовою, функція f(x) на відрізках [a, c] і [c, b] інтегровна

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^c f(x)dx, \qquad \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_c^b f(x)dx.$$

Тому перейдемо в рівності (11) до границі при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

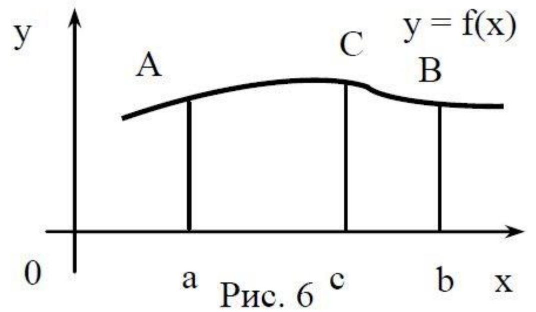


Рис. 6

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Проілюструємо властивість 7 геометрично для випадку, коли f(x) > 0 і a < c < b (рис. 6).

Площа криволінійної трапеції aABb дорівнює сумі площ криволінійних трапецій aACc і cCBb: $S_{aABb} = S_{aACc} + S_{cCBb}$.

§ 2. Обчислення визначеного інтегарла. Формула Ньютона-Лейбніца.

Похідна від інтеграла по змінній верхній межі.

Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Нижню межу інтегрування – a зафіксуємо, а верхню межу – b будемо вважати змінною і позначимо через x. Тоді буде змінюватися і величина інтеграла, тобто інтеграл зі змінною верхньою межею є функція від своєї верхньої межі x. Позначимо цю функцію Ф(x):

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (a = \text{const})$$

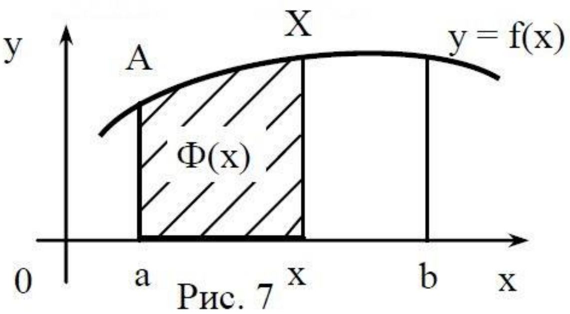


Рис. 7

Якщо $f(x) > 0$, то геометрично величина Ф(x) дорівнює площі криволінійної трапеції aAXx (рис. 7), яка змінюється в залежність від зміни x. Функція Ф(x) зростаюча (з збільшенням x збільшується S_{aAXx}).

<u>Теорема 1.</u> Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку [a,b], то визначений інтеграл із змінною верхньою межею

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ є первісною для функції f(x), т.б. $\Phi'(x) = f(x)$.

Доведемо, що похідна функції Ф(x) існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в верхній межі інтегрування

$$\Phi'(x) = f(x)$$

$\Phi'(x) =$ (за означенням похідної) $= \lim\limits_{\Delta x \neq 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}$, тому

1) надамо $\forall x \in [a,\ b]$ приріст $\Delta x \neq 0$ $(x + \Delta x \in [a,\ b])$;

2) приріст функції $\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_{a}^{x} f(t)dt =$

$=$ (за властивістю 7) $= \int\limits_{a}^{x} f(t)dt + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_{a}^{x} f(t)dt = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$

$\Delta\Phi = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$. За умовою функція f(x) неперервна на [a, b], а тому f(x) неперервна на $[x,\ x + \Delta x] \subset [a,\ b]$. Застосуємо теорему про середнє (властивість 6):

3) знайдемо відношення приросту функції до приросту аргумента

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi);$$

4) $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) =$ (якщо $\Delta x \to 0$, то $\xi \to x$) $=$

$= \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) =$ (в наслідок неперервності f(x)) = f(x). Отримали

$$\Phi'(x) = f(x)$$

Функція $\Delta\Phi = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ є первісною для функції f(x). ■

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x, \text{ де } \xi \in [x,\ x + \Delta x];$$

3) знайдемо відношення приросту функції до приросту аргумента

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi);$$

4) $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) =$ (якщо $\Delta x \to 0$, то $\xi \to x$) $=$

$= \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) =$ (в наслідок неперервності f(x)) = f(x). Отримали

$$\Phi'(x) = f(x)$$

Функція $\Delta\Phi = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ є первісною для функції f(x). ■

Проілюструємо геометрично теорему 1 (рис. 8). Якщо аргументу x надати приросту $\triangle x$, то приріст функції $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ дорівнює

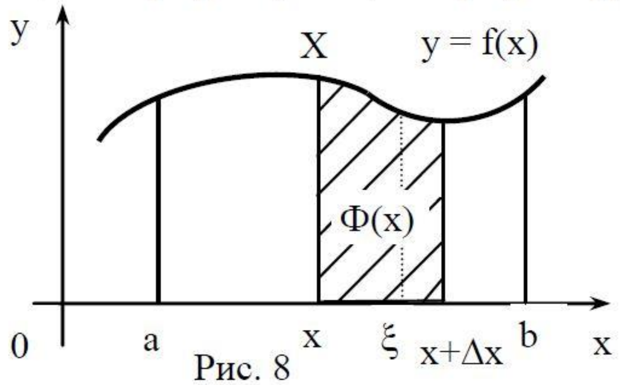


Рис. 8

площі криволінійної трапеції з основою $\triangle x$, а похідна $\Phi(x) = f(x)$ дорівнює довжині відрізка xX.

<u>Формула Ньютона-Лейбніца.</u>

Теорема 2. Якщо F(x) – деяка первісна неперервної на [a, b] функції f(x), то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

яка називається формулою Ньютона-Лейбніца, ($\Big|_a^b$ – знак подвійної підстановки).

Нехай F(x) – деяка первісна функції f(x). За теоремою 1

функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ також первісна функції f(x). Якщо Φ(x) та F(x) – дві первісні функції f(x) на [a, b], то різниця між ними дорівнює сталому числу, тобто

$$\Phi(x) - F(x) = C, \qquad x \in [a, b]$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Визначимо константу C. Покладемо x = a, тоді $\Phi(x) = \int_a^a f(t)dt =$ =

(за формулою 4) = 0, 0 = F(a) + C ⇒ C = -F(a).

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Покладемо x = b, отримаємо

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad \blacksquare$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -2$$

якщо функція f(x) – непарна, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$

якщо функція f(x) – парна, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

Так, у прикладі $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ – парна, та межі інтегрування протилежні тому

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{1} = 2(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

§ 3. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Нехай необхідно обчислити визначений інтеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ від неперервної функції f(x). Виконаємо заміну $x = \varphi(t)$.

Якщо виконуються умови:

1) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $\alpha \le t \le \beta$;
2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
3) $f(\varphi(t))$ неперервна на $[\alpha, \beta]$,

то справедлива формула

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$2. \int_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left| \begin{array}{ll} 1+\ln x = t, & t_1 = 1+\ln 1 = 1, \\ d(1+\ln x) = dt, & t_2 = 1+\ln e^3 = \\ \dfrac{dx}{x} = dt, & = 1+3\ln e = 4 \end{array} \right| = \int_{1}^{4}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_{1}^{4} =$$

$$= 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2$$

§ 4. Інтегрування частинами.

Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ і їх похідні $u'(x)$, $v'(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, то $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ – формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v du = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$