Лекція 4. Сиплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування

1. Загальна характеристика симплекс-методу
2. Методика побудови симплекс-таблиці
3. Методика отримання опорного плану та його покращення

1. Загальна характеристика симплекс-методу

Для розв'язування задач лінійного програмування взагалі використовують алгебраїчні методи (для $n > 3$ графічний метод використати трудно). Один з універсальних методів є симплексний метод (або метод послідовного поліпшення плану). Ідея цього методу була пропонована ще у 1939 р. академіком Конторовичем Л. В., але вперше метод був опублікований американським вченим Дж. Данцигом у 1947 р.

Розглянемо основну ідею симплекс-методу. Для цього проведемо деякі перетворення задачі лінійного програмування, виділимо основні вимоги алгоритму симплекс методу і введемо деякі спеціальні поняття і терміни.

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до стандартної форми – основної задачі лінійного програмування (ОЗЛП), де замість обмежень-нерівностей переходять до обмеження-рівностей. Такий запис умов – обмежень зручний для розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом.

Отже, кожне обмеження – нерівність виду

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (1)$$

або у розгорнутому виді:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \qquad (1а)$$

можна замінити рівністю, якщо ввести додаткову змінну x_{n+i}. Тоді маємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (2)$$

тобто

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (3)$$

Таким чином, система обмежень приймає вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_1 \ge 0,\ x_n \ge 0,\ x_{n+1} \ge 0, \end{cases} \qquad (4)$$

а цільову функцію можна записати так:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0 \cdot x_{n+i} \qquad (5)$$

Система рівнянь (4), (5) відповідає всім вимогам задач лінійного програмування і використовується для розв'язання симплекс-методом

Вимоги алгоритму симплекс-метода:

1) обмеження представляються у вигляді системи лінійних рівнянь;
2) вільні члени повинні бути не менше нуля: $(b_i \geq 0)$;
3) всі змінні повинні бути не менше нуля: $x_j \geq 0$.

Для запису алгоритму введемо поняття плану задачі та його різновидностей.

План задачі – будь-яке рішення (розв'язок) системи рівнянь $x^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\}$.

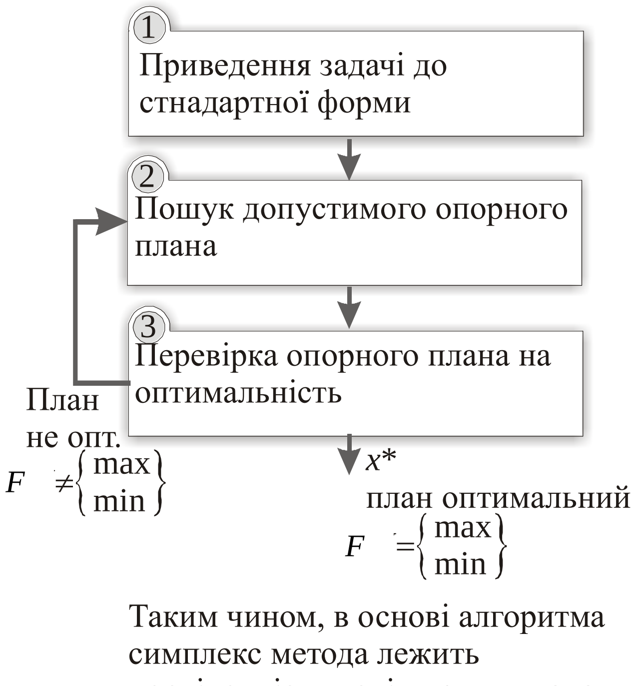
Компоненти плану – окремі значення змінних.

Допустимий план – план, всі компоненти якого неменше 0, тобто $x_j^* \geq 0$.

Опорний план – план, в якому кількість відмінних від нуля компонентів дорівнює числу рівнянь в системі основних обмежень.

Оптимальний план – допустимий план, при якому цільова функція $F \Rightarrow \begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix}$ приймає екстремальне значення.

Алгоритм симплекс-метода



Таким чином, в основі алгоритма симплекс метода лежить послідовність поліпшення плана до отримання оптимального.

2. Методика побудови симплекс-таблиці

Нехай дана система обмежень у стандартній формі: (див. (3)):

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = b_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ x_j \ge 0, \qquad x_{n+i} \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (3a)$$

де x_j - небазисні (вільні)змінні (НБЗ);

x_{n+1} - базисні змінні (БЗ).

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ * & \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right. & & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left. \right\| & & \\ & \textit{вільні змінні} & & \textit{базисні змінні} & & \end{array}$$

Аналогічно представимо ЦФ у вигляді: $F = 0 - \left(-\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j - 0 \cdot x_{n+i} \right)$.

У розгорнутому вигляді для $n = 2$ та $i = 1,2,3$ задача на $\max$:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \\ x_4 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \\ x_5 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \\ F_{\max} = 0 - (-c_1x_1 - c_2x_2) \\ \qquad x_j \ge 0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Відповідно системі (6) будуємо симплекс-таблицю:

БЗ	ЗБЗ (значення БЗ)	НБЗ		СВ (симплексне відношення)
		x_1	x_2	
x_3	b_1	a_{11}	a_{12}	$\frac{b_1}{aj}$
x_4	b_2	a_{21}	a_{22}	$\frac{b_2}{aj}$
x_5	b_3	a_{31}	a_{32}	$\frac{b_3}{aj}$
F	*0*	$-c_1$	$-c_2$	

Приклад.

Представимо модель задачі у вигляді системи (6)

$$\left.\begin{array}{l} F = 3x_1 + 2x_2, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 0x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{array}\right\}$$

у канонічній формі:

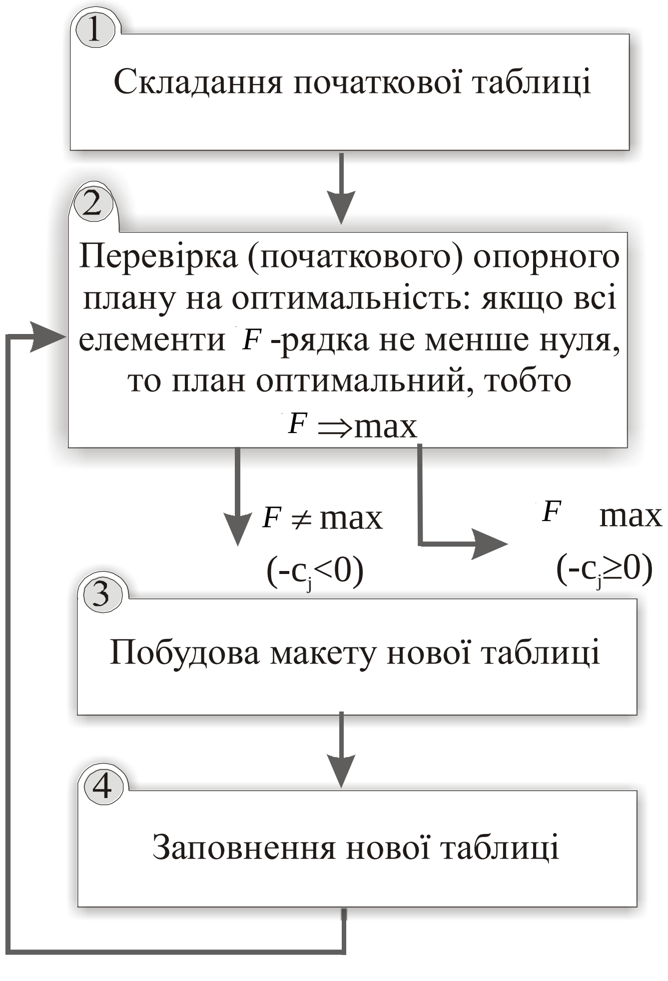
$$
\left.\begin{array}{l}
x_3 = 12 - 6x_1 - 3x_2, \\
x_4 = 10 - 2x_1 - 4x_2, \\
x_5 = \ \ 6 - 2x_1 - 0x_2, \\
F = 0 - (-3x_1 - 2x_2) \\
x_{1,2} \geq 0
\end{array}\right\} \tag{7}
$$

Таблиця 1

БЗ	ЗБЗ	НБЗ		СВ
		x_1	x_2	
x_3	12	6	3	$\frac{12}{6} = 2$
x_4	10	2	4	$\frac{10}{2} = 5$
x_5	6	2	0	$\frac{6}{2} = 3$
F	0	–3	–2	

3.Методика отримання опорного плану та його покращення

Алгоритм розв'язання задачі



Методика побудови макета нової таблиці

1) Вибір ключового стовпчика відповідно $\min$ значенню W-рядка.

2) Вибір ключового рядка відповідно $\min$ СВ, тобто $\min\left\{\frac{b_i}{a_{ijkn}}\right\}$.

Співвідношення обсягу b_i та норми витрат a_{ij} (чим менше $\Rightarrow$ 0, тобто, тим скоріше обсяг ресурсу закінчується і внесе свій вклад у реалізацію цілі $F(x)$ (ЦФ)), тобто ресурс є дефіцитним.

На перетині ключового стовпчика і ключового рядка знаходиться ключовий елемент.

3) Будується нова таблиця, де змінні ключових стовпця і рядка міняються місцями, тобто одна з базисних змінних виводиться із базису, а на її місце становиться небазисна змінна.

Таблиця 2

БЗ	ЗБЗ	НБЗ		СВ
		x_3	x_2	
x_1	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$2:\frac{1}{2}=4$
x_4	6	$-\frac{1}{3}$	3	$6:3=2$
x_5	2	$-\frac{1}{3}$	-1	$2:(-1)=-2$
F	6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

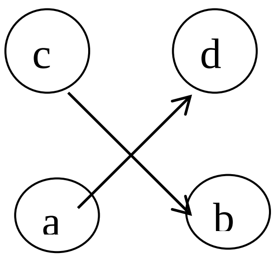
Методика заповнення нової таблиці (на основі алгоритму звичайних Жорданових вилучень).

1) На місці ключових елементів ставиться величина обернена ключовим елементам попередньої таблиці, тобто $\frac{1}{a_{ij\hat{e}\ddot{e}}}$.

2) Інші елементи ключового рядка поділити на ключовий елемент.

3) Інші елементи ключового стовпчика поділити на ключовий елемент і змінити знак на протилежний.

4) Решту елементів таблиці перераховуємо за правилом прямокутника:



$$\frac{a \cdot D - c \cdot b}{D}$$

Заповнюємо ноу таблицю:

1) Ключовий елемент $a_{11} = 6$, тому $\frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{6}$ ставимо на його місце у табл. 2.

2) $12 : 6 = 2;\ 3 : 6 = \frac{1}{2}$.

$-(2 : 6) = -\frac{1}{3};$

3) $-(2 : 6) = -\frac{1}{3};$

$-(-3 : 6) = \frac{1}{2}.$

4) Перший стовпчик (ЗБЗ):

$\frac{10 \cdot 6 - 2 \cdot 12}{6} = \frac{60 - 24}{6} = 6$

$\frac{6 \cdot 6 - 2 \cdot 12}{6} = \frac{36 - 24}{6} = 2$

$\frac{0 \cdot 6 - (-3) \cdot 12}{6} = 6$

Третій стовпчик (x_2):

$\frac{4 \cdot 6 - 2 \cdot 3}{6} = \frac{24 - 6}{6} = 3$

$\frac{0 \cdot 6 - 2 \cdot 3}{6} = -1$

$\frac{-2 \cdot 6 - (-3 \cdot 3)}{6} = \frac{-12 + 9}{6} = -\frac{1}{2}$

План неоптимальний згідно критерію, що елементи W - рядка повинні бути ≥ 0

Будуємо нову таблицю (нова ітерація):

БЗ	ЗБЗ	НБЗ		СВ
		x_3	x_2	
x_1	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{6}$	
x_2	2	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	
x_5	4	$-\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	
F	7	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	

Елементи ключового рядка: $\frac{6}{3} = 2;\ -\frac{1}{3} : 3 = -\frac{1}{9}$.

Елементи ключового стовпчика: $-\left(\frac{1}{2} : 3\right) = -\left(\frac{1}{6}\right);$

$$-\left(-1:3\right)=\frac{1}{3};$$

$$-\left(-\frac{1}{2}:3\right)=\frac{1}{6}.$$

Рядок (x_1): $\dfrac{2\cdot 3-6\cdot\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{6-3}{3}=1$

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot 3-\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}{3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{3}=\frac{2}{9}.$$

Рядок (x_5): $\dfrac{2\cdot 3-(-1\cdot 6)}{3}=4$

$$\frac{-\frac{1}{3}\cdot 3-\left(-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{3}=\frac{-1-\frac{1}{3}}{3}=-\frac{4}{9}.$$

W -рядок: $\dfrac{6\cdot 3-\left(-\frac{1}{2}\cdot 6\right)}{3}=\dfrac{18+3}{3}=7$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 3-\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{3}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}}{3}=\frac{4}{9}.$$

План оптимальний:

$F_{\max}=7;$

$x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=0;\ x_4=0;\ x_5=4.$