**Лекція 4**

**4.1. Залежність головного вектора і головного моменту від вибору центра зведення**

Нехай маємо довільну систему сил $\left\{\vec{F}\_{i}\right\}\_{i=1}^{n}$, що прикладені до твердого тіла. Ця система сил зводиться до головного вектора

$\vec{F}\_{O}=\sum\_{i=1}^{n}\vec{F}\_{i},$ (1)

і головного моменту

$\vec{M}\_{O}=\sum\_{i=1}^{n}\left(\vec{r}\_{i}×\vec{F}\_{i}\right),$ (2)

прикладених у центрі зведення O.

Тепер перенесемо центр зведення у т. O1. Головний вектор системи сил для нового центру за побудовою залишиться тим же самим, тобто *головний вектор не залежить від вибору центра зведення*.

Вираз (2) для головного моменту при зміні центра зведення на O1 набуде вигляду

$\vec{M}\_{O\_{1}}=\sum\_{i=1}^{n}\left(\vec{r}\_{i}^{ʹ}×\vec{F}\_{i}\right),$ (3)

або, якщо врахувати, що

$\vec{r}\_{i}^{ʹ}=\vec{O\_{1}O}+\vec{r}\_{i}=\vec{ρ}+\vec{r}\_{i},$ (4)

отримаємо

$\vec{M}\_{O\_{1}}=\sum\_{i=1}^{n}\left(\vec{r}\_{i}^{ʹ}×\vec{F}\_{i}\right)=\sum\_{i=1}^{n}\left(\vec{ρ}+\vec{r}\_{i}\right)×\vec{F}\_{i}=\sum\_{i=1}^{n}\vec{r}\_{i}×\vec{F}\_{i}+\sum\_{i=1}^{n}\vec{ρ}×\vec{F}\_{i}= $

$=\sum\_{i=1}^{n}\vec{r}\_{i}×\vec{F}\_{i}+\vec{ρ}×\sum\_{i=1}^{n}\vec{F}\_{i}=\vec{M}\_{O}+\vec{ρ}×\vec{F}\_{O}.$

звідки маємо

$\vec{M}\_{O\_{1}}=\vec{M}\_{O}+\vec{ρ}×\vec{F}\_{O}.$ (5)

Таким чином доведено, що *при зміні центру зведення головний момент системи сил змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора, прикладеного у старому центрі зведення, відносно нового центру зведення.*

***4.2. Статичні інваріанти (незмінні)***

Із наведеного вище випливає, що головний вектор довільної системи сил є інваріантним (незмінним) стосовно вибору центра зведення. Тому головний вектор називають першим статичним інваріантом ( $I\_{1}$ ), тобто $I\_{1}=\vec{F}\_{O}$ .

Домножимо скалярно ліву і праву частини формули (5) на головний вектор цієї системи:

$$\vec{F}\_{O}∙\vec{M}\_{O\_{1}}=\vec{F}\_{O}∙\vec{M}\_{O}+\vec{F}\_{O}∙\left(\vec{ρ}×\vec{F}\_{O}\right),$$

звідки випливає, що

$\vec{F}\_{O}∙\vec{M}\_{O\_{1}}=\vec{F}\_{O}∙\vec{M}\_{O}$,

оскільки $\vec{F}\_{O}∙\left(\vec{ρ}×\vec{F}\_{O}\right)=0$ через те, що $\vec{F}\_{O}⊥\vec{ρ}×\vec{F}\_{O}$.

Таким чином, скалярний добуток головного вектора і головного моменту даної системи сил ($\vec{F}\_{O}∙\vec{M}\_{O}$) не залежить від вибору центра зведення і називається *другим статичним інваріантом* $(I\_{2})$**:**

$I\_{2}=\vec{F}\_{O}∙\vec{M}\_{O}$(6)

Тут мова йде про те, що для будь-якої просторової системи сил величина $I\_{2}$ є сталою. Також сталою і не залежною від вибору центра зведення буде проекція головного моменту на напрямок головного вектора

$$I\_{2}^{ʹ}=M\_{O}\cos(\left(\vec{F}\_{O}⩑\vec{M}\_{O}\right),)$$

що випливає з виразу (6), взявши до уваги, що модуль головного вектора є постійним для даної системи сил.

***4.3. Теорема про момент рівнодійної довільної системи сил*** (теорема Варіньона у загальному випадку)

**Теорема:** *якщо довільна просторова система сил зводиться до рівнодійної, тоді момент рівнодійної відносно центра O дорівнюватимє сумі моментів всіх сил відносно того ж центра.*

**Д о в е д е н н я**

Нехай довільна просторова система сил $\left\{\vec{F}\_{i}\right\}\_{i=1}^{n}$ зводиться до рівнодійної, тобто

$$\vec{R}=\sum\_{}^{}\vec{F}\_{i}=\vec{F}\_{O}.$$

Всі сили даної системи сил зведемо до вказаного центру O .

Тоді

$$\vec{M}\_{O}=\vec{M}\_{O}\left(\vec{R}\right)=\sum\_{}^{}\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)=\vec{0},$$

але

$$\vec{M}\_{O\_{1}}=\vec{M}\_{O}+\vec{ρ}×\vec{R}.$$

Тоді матимемо, беручи до уваги, що $\vec{M}\_{O}=\vec{0},$

$$\vec{M}\_{O\_{1}}=\vec{M}\_{O\_{1}}\left(\vec{R}\right)=\vec{ρ}×\vec{R}=\vec{ρ}×\left(\sum\_{}^{}\vec{F}\_{i}\right)=\sum\_{}^{}\vec{M}\_{O\_{1}}\left(\vec{F}\_{i}\right).$$

Теорема доведена.

Застосуємо теорему Варіньона до системи двох паралельних сил (одного і протилежних напрямків), які не утворюють пару. Виберемо точку O на лінії дії рівнодійної цих сил, тоді:

|  |  |
| --- | --- |
| А)  | $\vec{R}=\vec{F}\_{1}+\vec{F}\_{2}, R=F\_{1}+F\_{2};$ $M\_{O}\left(\vec{R}\right)=0; F\_{1}∙OO\_{1}-F\_{2}∙OO\_{2}=0,$ $\frac{F\_{1}}{F\_{2}}=\frac{OO\_{2}}{OO\_{1}}.$  |
| Б)  | $\vec{R}=\vec{F}\_{1}-\vec{F}\_{2}, R=F\_{2}+F\_{1};$ $M\_{O}\left(\vec{R}\right)=0; F\_{1}∙OO\_{1}-F\_{2}∙OO\_{2}=0,$ $\frac{F\_{1}}{F\_{2}}=\frac{OO\_{2}}{OO\_{1}}.$  |

Система двох паралельних сил, які не утворюють пару, має рівнодійну, яка паралельна цим силам, а її модуль дорівнює сумі модулів сил, якщо сили напрямлені в одну сторону, і різниці модулів у разі протилежного напрямку сил.

Лінія дії рівнодійної ділить відрізок O1O2 на частини, обернено пропорційні модулям сил, внутрішнім чином для сил одного напрямку, і зовнішнім чином для сил протилежних напрямків.

***4.4. Маса системи, центр ваги.***

*Масою системи* називається сума мас всіх точок, що входять до системи:

$m=\sum\_{i=1}^{n}m\_{i},$ (7)

*Центром мас або центром інерції* називається **геометрична** точка, радіус-вектор якої визначається за формулою:

$\vec{r}\_{C}=\frac{\sum\_{}^{}m\_{i}\vec{r}\_{i}}{m},$ (8)

де $\vec{r}\_{i}$ - радіус-вектор i -тої точки.



Положення центру мас є інваріантним (незмінним), тобто не залежить від вибору системи відліку. Доведемо це твердження.

Введемо дві системи відліку: інерціальну ( ***K*** ) і неінерціальну ( ***K′*** ).



Тут $\vec{r}\_{O}$ - радіус-вектор, який визначає положення системи O′x′y′z′ по відношенню до Oxyz.

Припустимо, що точка C є центром мас. Тоді матимемо

$\vec{r}\_{C}^{ʹ}=\frac{\sum\_{}^{}m\_{i}\vec{r}\_{i}^{ʹ}}{m}=\frac{\sum\_{}^{}m\_{i}\left(\vec{r}\_{i}-\vec{r}\_{O}\right)}{m}=\frac{\sum\_{}^{}m\_{i}\vec{r}\_{i}}{m}-\vec{r}\_{O}\frac{\sum\_{}^{}m\_{i}}{m}=\vec{r}\_{C}-\vec{r}\_{O}$

або остаточно $\vec{r}\_{C}^{ʹ}=\vec{r}\_{C}-\vec{r}\_{O}$, тобто кінці векторів $\vec{r}\_{C}^{ʹ}$ та $\vec{r}\_{C}$ вказують на одну й ту ж саму точку простору, що й доводить твердження про інваріантність положення центру мас.

***4.5. Приклад розв’язання задачі статики*** *(система двох тіл на прикладі складеної балки).*

Два стрижня AB і BC з’єднані шарніром B (проміжний шарнір). Визначити реакції в закладанні A , якщо відомі $\vec{F}\_{1}, \vec{F}\_{2}$ і α . Геометричні розміри наведені на рисунку.

**Дано:** $\vec{F}\_{1}, \vec{F}\_{2}$ ; ***a, b, c, d*** ; ***α***.

**Знайти**: ***RAx, RAy, MA*** .



**Р о з в ’ я з а н н я**

За методом перерізів розітнемо складену балку на дві частини по проміжному шарніру B і запишемо аналітичні умови рівноваги для кожної частини окремо. Спочатку розглянемо праву частину BC , для якої ліва частина AB є в’яззю. В’язь відкидаємо, замінюючи її дію відповідною реакцією (поданою двома складовими).

|  |  |
| --- | --- |
| 2)$\left\{\begin{array}{c}\sum\_{}^{}F\_{ix}=R\_{Ax}-R\_{Bx}=0,\\\sum\_{}^{}F\_{iy}=R\_{Ay}-R\_{By}-F\_{2}=0,\\\sum\_{}^{}M\_{A}\left(\vec{F}\_{i}\right)=M\_{A}-R\_{By}\left(a+b\right)-F\_{2}a=0.\end{array}\right.$З цієї системи рівнянь, враховуючи 1), матимемо$$R\_{Ax}=R\_{Bx}=F\_{1}\cos(α),$$$$R\_{Ay}=F\_{2}+R\_{By}=F\_{2}+\frac{F\_{1}d}{c+d}\sin(α),$$$$M\_{A}=F\_{2}a+R\_{By}\left(a+b\right)=$$$$=F\_{2}a+\frac{F\_{1}d\left(a+b\right)}{c+d}\sin(α).$$ | 1)$\left\{\begin{array}{c}\sum\_{}^{}F\_{ix}=-F\_{1}\cos(α+R\_{Bx}=0,) \\\sum\_{}^{}F\_{iy}=R\_{C}-F\_{1}\sin(α)+R\_{By}=0, \\\sum\_{}^{}M\_{B}\left(\vec{F}\_{i}\right)=R\_{C}\left(c+d\right)-F\_{1}h=0.\end{array}\right.$Звідси, беручи до уваги, що $h=c\sin(α)$, отримаємо$$R\_{Bx}=F\_{1}\cos(α),$$$$R\_{C}=\frac{F\_{1}h}{c+d}=\frac{F\_{1}d}{c+d}\sin(α), $$тоді$$R\_{By}=F\_{1}\sin(α)-R\_{C}=\frac{F\_{1}d}{c+d}\sin(α).$$ |

Таким чином, знайдені всі шукані величини.

Зауважимо, що проміжний шарнір знижує невизначеність задачі на одиницю. В подібних задачах завжди застосовуємо метод перерізів, тобто розтинаємо балку по проміжному шарніру.

**Контрольні запитання до лекції №1**

1. Як зміниться головний момент системи при зміні центра зведення?
2. Що називають другим інваріантом системи?
3. Чому дорівнює рівнодійна системи двох паралельних сил, які неуворюють пару сил?
4. Що таке центр мас?

Рекомендована література

**Основна**

1. Черниш О. М., В. Яременко М.Г. Теоретична механіка. - К.: Центр навчальної літератури, 2018. - 760 с.
2. Гайдайчук В.В., Гонтарь М.Г. Теоретична механіка. Загальні принципи механіки. - К.: КНУБА, 2018. - 260 с.
3. Дмитриченко М.Ф., Гончар М.О. Теоретична механіка. - К.: НТУ, 2018. - 364 с.
4. Булгаков В.М. Теоретична механіка. - К.: Центр навчальної літератури, 2017. - 640 с.
5. Кузьо І.В., Шпачук В. П., Цідило І. В. Теоретична механіка. - Харків : Фоліо, 2017. - 780 с.
6. Зінько Я. А., Кузьо І. В. Збірник задач з теоретичної механіки. Частина І: Статика. - Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2015. - 88 с.
7. Векерик В., Кузьо І., Левчук К. Теоретична механіка. Статика: підручник. - Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. - 325 с.

**Допоміжна**

1. Березін Л.М., Кошель С.О. Теоретична механіка. К.: Центр навчальної літератури, 2018. - 218 с.
2. Бережницький, Б. С. Теоретична механіка : метод. вказівки / Б. С. Бережницький. - Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. - 31 с.
3. Апостолюк О.С., Воробйов М.В. Теоретична механіка: Збірник задач. - К.: Техніка, 2011. - 400 с.