ЖИТОМИРСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРОЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра комп'ютерних технологій і моделювання систем

Бродський Ю. Б., Молодецька К. В., Николюк О. М.

КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ОБРОБКИ ЕКОНОМІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Конспект лекцій

Житомир 2015

Конспект лекцій розробили:

Бродський Ю. Б. – доцент кафедри комп’ютерних технологій і моделювання систем ЖНАЕУ, к.т.н., доцент;

Молодецька К. В. – доцент кафедри комп’ютерних технологій і моделювання систем ЖНАЕУ, к.т.н., доцент;

Николюк О. М. – доцент кафедри комп’ютерних технологій і моделювання систем ЖНАЕУ, к.е.н., доцент.

Рецензенти:

декан факультету обліку і фінансів ЖНАЕУ, к.е.н., доцент **Степура М.О.**;

доцент кафедри комп’ютерних технологій і моделювання систем ЖНАЕУ, к.т.н., доцент **Тимонін Ю.О.**

Схвалено і рекомендовано до друку вченою радою факультету обліку та фінансів, протокол № ___ від __ _______ року.

ЗМІСТ

ВСТУП

На сучасному етапі розвитку суспільства істотно зростає роль інформаційних технологій у процесі вивчення та дослідження економічних процесів і систем, що вимагає підготовки фахівців, які володіють апаратом розв'язування складних задач, своєчасного передбачення, обєктивного прогнозування та системного аналізу економічної ситуації. Метою вивчення дисципліни "Компютерні системи обробки економічної інформації" є ознайомлення студентів з методами і засобами обробки та аналізу економічної інформації для виконання конкретних функцій управлінської діяльності, автоматизації обробки даних, їх підготовки для прийняття управлінських рішень.

Дисципліна "Комп'ютерні системи обробки економічної інформації" є вибірковою дисципліною в системі підготовки бакалавра. Студентам надаються теоретичні та практичні підходи, які використовуються для підвищення ступеня обґрунтованості рішень у складноструктурованих проблемах наукового, соціального та економічного характеру. Завдання дисципліни "Комп'ютерні системи обробки економічної інформації" полягає у набутті студентами навичок здійснювати постановку задачі і вибір комп'ютерної підтримки для неструктурованих задач, застосовувати сучасні інформаційні технології у професійній діяльності.

Знання, здобуті студентами під час вивчення курсу, широко застосовуються при вивченні дисциплін "Економіко-математичне моделювання", "Економетрика", "Системний аналіз в економіці", "Бізнес-моделі підприємств", "Економіко-математичні моделі в управлінні і фінансах", а також в менеджменті, маркетингу, мікро- та макроекономіці, при виконанні творчих індивідуальних завдань, написанні курсових та дипломних робіт. Практичний досвід, набутий в процесі вивчення дисципліни, дозволить значно розширити можливості студентів при засвоєнні спеціальних дисциплін, а також в процесі роботи за фахом.

ЛЕКЦІЯ 1. Технологія обробки економічних даних в електронних таблицях

1.1. Базові інформаційні технології Excel для числових розрахунків

Формули Excel

Основними компонентами формули є оператори та операнди. *Операнди* – величини, над якими виконуються оператори. Операнди подаються у вигляді констант – текстові або числові значення, які вводяться у комірку і не змінюються упроцесі обчислення – або звертань – координати комірок або діапазонів. *Оператори* – символи, які позначають дію, тобто виконання конкретної операції. Їх поділяють на такі типи:

1) унарні оператори: "–" – заперечення; % – процент.

2) арифметичні оператори призначені для виконання основних арефметичних операцій: додавання "+", віднімання "–", множення "*", ділення "/", степінь числа "^". Порядок обчислення у формулах визначається законами алгебри.

3) текстовий оператор призначений для поєднання текстових величин і позначається символом "&" – амперсанд.

4) оператори порівняння формують як результат значення у вигляді "ИСТИНА" (TRUE) або "ЛОЖЬ" (FALSE). Для даних операцій використовують наступні знаки: "=" – дорівнює, ">" – більше, "<" – менше, "> =" – більше чи дорівнює, "< =" менше чи дорівнює, "< >" – нерівність.

5) оператори звертань, які використовують для позначення суміжних або несуміжних діапазонів у формулах та функціях:

6) ":" (двокрапка) – ореатор діапазона, формує звертання до комірок між двома операндами – суміжний діапазон (наприклад, B1:B4);

7) ";" (крапка з комою) – оператор поєднання, поєднує не менше двох звертань до комірок або діапазони, або несуміжний діапазон (наприклад, A1:B1; A4:B4).

Зручність використання операторів звертань в тому, що вони виставляють автоматично в процесі виділення суміжних та несуміжних діапазонів маніпулятори "миша".

Порядок введення формул:

1) виділити (активізувати) комірку. Формули можна вводити безпосередньо у комірку або у рядок формул;

2) ввести знак рівності "=";

3) ввести перший операнд (константу або звертання) будь-яким способом;

4) ввести оператор (наприклад, додавання "+");

5) ввести другий операнд і т.д.;

6) після введення останього операнда завершити операцію натисненням клавіші [Enter] або одинарною фіксацією курсора "миші" в області кнопки вводу даних "ν" рядка формул. Результат обчислення зявиться у комірці.

Розглянемо декілька прикладів використання формул.

Задача 1: отримати у комірці В1 результат додавання двох чисел, які записані у комірки А1 та А2 відповідно.

Розв'язок:

1) активізувати комірку В1 для результату;

2) ввести формулу у вигляді: =А1+А2 і завершити операцію кнопкою введення даних.

Задача 2: отримати у комірці В1 результат поєднання текстових даних – слово "біосистема", якщо комірка А1 містить комбінацію букв "біо", а комірка А2 – "система".

Розв'язок:

1) виділити комірку В1 для результата;

2) ввести формулу у вигляді : = А1 & А2 і завершити операцію кнопкою введення даних.

Задача 3: отримати у комірці В1 результат порівняння значення показника із допустимим, рівним 200, що, який занесений у комірку А1 із логічною змінною "ИСТИНА" або "ЛОЖЬ".

Розв'язок:

1) виділити комірку В1 для результата;

2) ввести формулу у вигляді: A1>200 і завершити операцію кнопкою введення даних.

Таким чином, зміст активної комірки, тобто формули, відображається у рядку формул, арезультат обчислення безпосередньо у комірці. В процесі копіювання формул, які містять операнди у вигляді звертань, виникає особливість, яка пов'язана з поняттям типа звертань: абсолютні (фіксовані) та відносні звертання.

Абсолютні звертання завжди адресують конкретні комірки (діапазони) незалежно від того, куди копіюється формула, тобто формула містить операнди у вигляді фіксованих координат комірок. Всі копії формули будуть користуватися даними для обчислення тільки з указаних, фіксованих комірок. Для фіксації звертань використовують знак абсолюта "$" наприклад, $C$3.

Відносні звертання вводяться звичайним способом (наприклад, C3). При копіюванні формули значення змінюються відносно позиції копії даної формули, тобто значення звертань змінюються пропорційно змінюваних координат комірки з формулою – копією відносно формули оригінала. Виділяють також комбіновані звертання для фіксації рядків або стовбчиків. Наприклад, $C3 – фіксований стовбчик; C$3 – фіксований рядок. Знак абсолюта "$" можна вводити у формулу безпосередньо перед кожною координатою комірки або використовувати клавішу F4 для виділеної формули або її фрагмента (окремих операндів). Для більшої зручності використання звертань у формулах існує спосіб надання коміркам і діапазонам власного імені, що надає вагомі переваги:

– указується конкретний зміст формули (замість "= A1 * A2", наприклад маємо "= швидкість * час");
– спрощує пошук помилок;
– спрощує пошук необхідної інформації на листах;
– імена перетворюють звертання на абсолютне (фіксоване).

Декілька варіантів присвоювання імені коміркам і діапазонам подані на рис. 1.1.

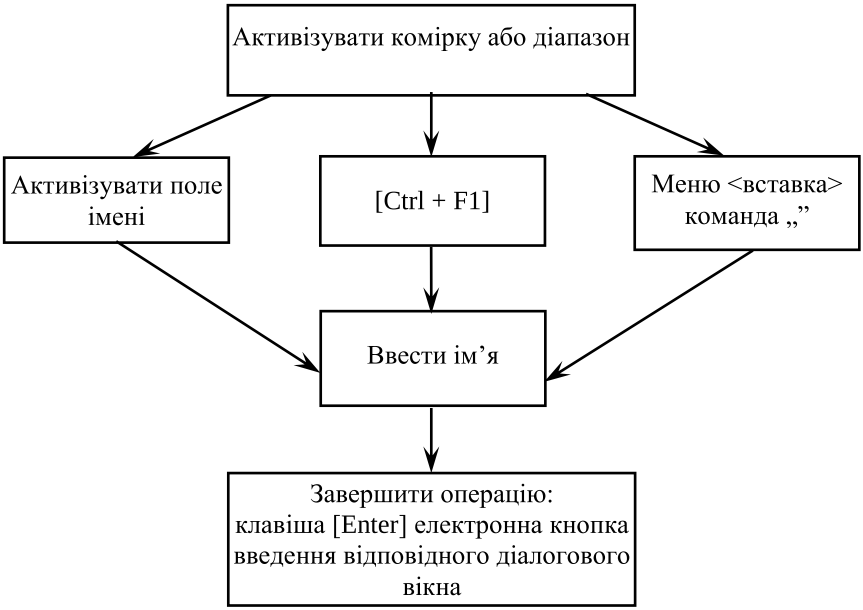


Рис. 1.1.

Для виконання однотипних операцій з масивами даних (як правило таблична інформація) використовують *формули масивів*. Перед звичайними формулами вони мають суттєві переваги: зменшується час введення формули та обробки даних процесором; більша економія ресурсів оперативної пам'яті при виконанні великої кількості обчислювальних операцій.

Важливою особливістю формул масивів є збіг розмірів та форми діапазонів операндів і діапазону виділеного для результата обчислення. Тобто формула масива виконує операції з відповідними елементами масивів операндів (даними відповідних комірок діапазонів) і результат розміщує у відповідні комірки діапазону результату. Крім того, для сприймання програмою Excel введеної формули як формули масива необхідно завершити операцію введення формули комбінацією із трьох клавіш [Ctrl + Shift + Enter]. Редагування формули масиву проводять звичайним способом, але тільки всього діапазону, оскільки система Excel сприймає формулу масива як єдиний обєкт. Розглянемо приклад введення формули масива.

Задача 4. Нехай потрібно обчислити суму викидів різних шкідливих речовин у технічні водойми підприємства за два останні місяці. Дані про щомісячні викиди зберігаються як два суміжні масиви A1:A8 та B1:B8.

Розв'язок:

1) виділити діапазон для результата, наприклад C1:C8 (зміниться фон виділеного діапазону);

2) ввести формулу у вигляді : = A1:A8 + B1:B8;

3) завершити операцію натисненням комбінації клавіш [Ctrl + Shift + Enter]. При цьому формула у рядку формул береться у фігурні дужки {= A1:A8 + B1:B8}, а діапазон комірок C1:C8 прийме значення результату обчислення.

Таким чином, формули програми Excel завжди починаються знаком дорівнює. Операція введення формул повинна завершуватись відповідною командою (клавіша [Enter], кнопка вводу даних "v" у рядку формул або комбінація клавіш для формул масивів). Зміст формули відображається у рядку формул, а результат обчислення у відповідній (активній) комірці або діапазоні.

Вбудовані функції Excel

Використання функцій програми Excel має свої переваги перед формулами по часу і точності введення формули та їх виконання. Функції можна вводити як формули, тільки точно витримати її синтаксис, але зручніше використовувати програму "Мастер функций", яка викликається за допомогою кнопки стандартної панелі інструментів "fx". Основні технічні можливості підпрограми "Мастер функций" дозволяють: відображати список функцій та їх опис; використовувати інструмент підказок при формуванні функції та її аргумента; редагувати функції; вставляти вибрану функцію у задану комірку. При використанні "Мастер функций" для вставки функції знак рівності вводиться автоматично.

Розглянемо загальну методику використання підпрограми "Мастер функцій" для введення функції:

1) виділити комірку для результату;

2) викликати "Мастер функций" за допомогою кнопки "*fx*" панелі інструментів (на екрані зявиться одноіменне діалогове вікно);

3) у вікні "Мастера функций" виділити потрібну із пропонованого списка (наприклад, математичні, статистичні тощо);

4) в полі "Функция" вибрати необхідну і виконати фіксацію курсора "миші" на кнопці "ОК" даного вікна;

5) використовуючи вікна підказок "Мастера функций" – панелі формул, ввести аргумент вибраної функції;

6) для завершення операції введення функції у задану комірку використати кнопку "готово" вікна "Мастер функций", після чого результат обчислення з'явиться у комірці а функція у рядку формул (наприклад, = СУММ (А1:А5)).

Існує також інша методика вставки функцій у формули:

1) виділити комірку для введення формули (або з формулою введення функцій).

2) ввести знак "=" дорівнює (або перейти в режим редагування формули в рядку формул). При цьому в області поля імені з'явиться кнопка вибору функції зі списком.

3) відкрити список функцій і вибрати необхідну. Якщо у списку потрібна функція відсутня, то вибрати пункт "Другие функции..." (наприкінці списку). Відкривається вікно "Мастера функций".

4) використовуючи загальну методику введення функції за допомогою програми "Мастер функций", ставити потрібно функцію у комірку (формулу).

При редагуванні функцій використовують стандартні способи (у комірці, рядку формул) або спеціальний спосіб за допомогою панелі формул:

1) виділити комірку з функцією;

2) функція на кнопці "=". З'явиться "Панель формул";

3) змінити аргумент функції або саму формулу;

4) завершити операцію: "OK" або " v ", чи [Enter].

В процесі виконання обчислюваних операцій може виникнути помилка, тоді у комірці з формулою з'явиться відповідне повідомлення:

– # ПУСТО! – заданий перетин двох діапазонів, які не містять загальних комірок (однакових звертань);

– # ДЕЛ/0! – ділення на нуль;

– # ЗНАЧ! – недопустимий тип аргумента або операнда;

– # ССЫЛКА! – недопустиме звертання до комірки (наприклад, на комірку, що вилучена або на комірку з результатом);

– # ИМЯ! – Excel не може розпізнати імені, що використовується у формулі;

– # ЧИСЛО! – проблеми з використанням чиселу формулах або функціях;

– # # # # # – комірка містить число, дату або час з кількістю знаків, яке перевищує ширину комірки, або у випадку, коли комірка містить дату або формулу, яка виводить відємний (заперечний) результат;

– # Н/Д – невизначені дані.

Таким чином, табличний процесор Excel має достатньо широкий набір формульних операторів і вбудованих функцій, які можна використовувати для розв'язування різноманітних задач від простіших арифметичних, логічних до складних задач статистики, лінійного та нелінійного програмування, а також моделювання процесів і системи різної природи.

Формули масивів. Для використання однотипних операцій з масивами даних призначені формули масивів. Перевагою таких формул є зменшення часу введення формул і обробки інформації. Особливості формул масивів наступні: всі операнди – масиви, а також масив результату, повинні бути однакових діапазонів комірок (одного розміру і формату). Технологія використання:

1. Виділити діапазон для результату;

2. Знак "=" ;

3. Діапазон першого операнду;

4. Оператор;

5. Діапазон наступного операнду і т. д.

6. Завершити операцію [Ctrl]+[Shift]+[Enter].

Засоби автоматизації введення та обробки даних

Аналіз зв'язків у формулах. Табличний процесор Excel містить засіб перевірки функціональних зв'язків у формулах – це панель інструментів "Зависимости", яка виводиться на екран командою меню "Сервис", "Зависимости", "Панель зависимостей".

Комірки електроної таблиці поділяються на *залежні* – такі, що містять формули та *впливаючі*, які містять компоненти формул (операнди, дані). Одна комірка може бути водночас залежною та впливаючою. Для аналізу залежностей комірок курсор встановлюють в комірку, що досліджується, викликається "Панель зависимостей", яка містить такі інструменти (кнопки):

– Влияющие ячейки – відображення стрілок до комірок (аргументів), від яких залежить значення поточної комірки (функції). Для перегляду всіх зв'язків виконують дві фіксації на кнопці.

– Зависимые ячейки – відображення стрілок до комірок (функції), які залежать від значення поточної комірки (аргумента).для перегляду всіх зв'язків виконують дві фіксації на кнопці.

– Источник ошибки – відображення всіх комірок, які впливають на комірку з помилкою (# ЧИСЛО або # ДЕЛ/0).

– Обвести неверные данные – відображення комірок, які не задовольняють умові перевірки (вкладка Данные, Проверка).

– Создать примечание – введення коментарів до комірок з формулами.

– Убрать все стрелки, Убрать стелки к влияющим ячейкам, Убрать стрелки к зависимым ячейкам.

Швидке заповнення комірок електронної таблиці виконується за допомогою вкладки Главная, групи Редактивание. Розглянемо різні способи автоматизації цього процесу.

Тиражування (автоматизація введення) окремої комірки. *Тиражуванням* називають повторення даних (формули) в декількох комірках. Якщо комірка містить текст або числові типи даних, то відбувається їх повторення (копіювання). Якщо комірка містить формулу, то при тиражуванні враховується характер звертань у формулі (абсолютні та відносні).При тиражуванні автоматично переноситься формат початкової комірки, а також вставляється її примітка (якщо вона є).

Технологія виконання операції тиражування окремої комірки містять декілька способів.

Спосіб 1. *Командний*, який полягає в наступному:

1) відділити діапазон, в якому перша комірка містить початкові дані;

2) кнопка Заполнение групи Редактирование на вкладці Главная;

3) вказати напрямок заповнення: Вправо/Влево (по рядку), Вниз/Вверх (по стовпцю).

Спосіб 2. Введення даних у діапазон:

1) виділити діапазон для тиражування;

2) ввести дані (значення або формулу);

3) завершити операцію клавішами [Ctrl + Enter].

Спосіб 3. Графічний, який полягає в протаскуванні маркера заповнення:

1) установити курсор на маркер заповнення – чорний квадратик у правому нижньому кутку активної комірки (комірки з даними для тиражування). Показчик курсора приймає вигляд маленького чорного хрестика "+" (знак плюс);

2) викликати протаскування (при натисненій лівій клавіші миші).

Спосіб 4. Графічний (спеціальне протаскування):

1) установити курсор на маркер заповнення;

2) виконати спеціальне протаскування (при натисненій правій клавіші миші);

3) в контекстному меню вибрати команду:

– "Копировать ячейки" – тиражування значень, формул зі своїми форматами;

– "Запомнить" – введення списка значень;

– "Запомнить форматы" – тиражування тільки форматів;

– "Запомнить значения" – тиражування значень.

Автозаповнення блоку комірок. Технологія виконання цієї операції містить графічні способи: протаскування та спеціальне протаскування маркера для заповнення виділеного блоку комірок. Особливості виконання для різних типів даних:

1) для масиву чисел (послідовність) або даних які закінчуються на цифру автоматично визначається крок послідовності, відповідно до якого повні комірки заповнюються числами (новою послідовністю);

2) якщо дані відповідають елементам списку, то виводиться весь список в заданій послідовності. Наприклад, дні тижня, місяці року тощо. Вкладка Списки містить засоби для створеня нових списків – кнопка Добавить, для імпорту списка із електронної таблиці – кнопка Импорт, а також вилучення списків – кнопка Удалить;

3) інші дані (текстові, формули, не списки) копіюються в область вставки;

4) заповнення числових рядків виконується такими способами:

Спосіб 1. *Тиражування*:

– ввести ряд чисел у рядок або стовпчик ;

– виділити блок комірок з рядом чисел;

– спеціальним протаскуванням маркера заповнення протягнути до необхідної кількості членів ряду;

– із контекстного меню вибрати команду: "Линейное приближение" або "Экспоненциальное приближение".

Спосіб 2. Використання *функцій категорії Статистические* – Рост і Тенденция.

Спосіб 3. *Прогресії* – дозволяє заповнювати великі блоки комірок числами, значення яких визначається арифметичною або геометричною прогресією. Для даних типу дата прогресія створюється з періодом (кроком) в день, місяць, рік, робочий день.

Можна вказати граничне значення. Технологія створення прогресії (рис. 1.2):

Ввести у комірку перше або останнє значення числового ряда;

Виділити суміжний діапазон для заповнення (разом із початковою коміркою);

Вкладка Главная, група Редактирование, Заполнить → Прогрессия;

Вказати параметри, як наведено на рис. 1.2.

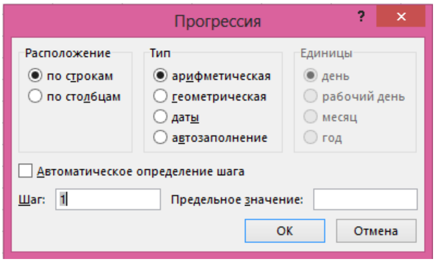


Рис. 1.2.

Автоматизація копіювання та переміщення комірок (даних). Операції копіювання та переміщення комірок виконуються стандартними способами: графічним (маніпулятор миша) та через буфер обміну. Особливістю останнього способу є використання замість команди Вставить, контекстної команди Специальная вставка правої клавіші миші з додатковим зазначенням, що копіювати: тільки формули, значення без формул, формати з рамкою або без рамки, примітки до комірок, умови для перевірки значень, що вводяться. Крім цього, можна виконати додаткову обробку даних.

Накладання даних, що копіюються – це процедура виконання арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення та ділення) над даними призначеними для копіювання та даними в області, куди виконується копіювання.

Технологія виконання (рис. 1.3):

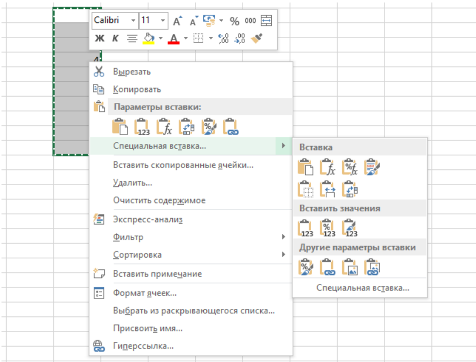
– виділити початковий діапазон даних;

– команда Копировать (вкладка Главная, група Буфер обмена → Копировать або контекстне меню);

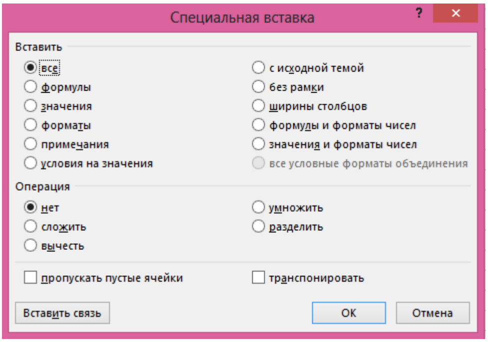
– виділити ідентичний діапазон для вставки;

– контекстне меню правої клавіші миші Специальная вставка;

– указати вид операції додавання, віднімання, множення та ділення і кнопка "ОК".



а)



б)

Рис. 1.3.

Особливістю цієї операції є те, що отриманий результуючий діапазон автоматично не оновлюється при змінюванні початкових даних.

Транспонування діапазону – аналог операції транспонування матриці. Виконується способами, наведеними нижче.

Спосіб 1. Використання контекстного меню:

1) виділити початковий діапазон (матрицю);

2) команда Копировать (в буфер обміну);

3) установити курсор в комірку першого елемента транспонованої матриці;

4) меню Правка, Специальная вставка;

5) указати Транспонировать і кнопка "ОК".

Спосіб 2. Використання функції ТРАНСП (масив), яка вводиться як формула масиву, де параметром-масивом виступає діапазон початкової матриці. Зв'язок копії з джерелом даних – це процедура підтримує зв'язок копії з початковими даними, що забезпечує автоматичне оновлення значень в разі змінювання початкових даних. Програма створює у комірках вставлення копії формули типу: "(= координата початкової комірки)".

Технологія (рис. 1.4):

– виділити негативний діапазон;

– Копировать (в буфер обміну);

– установити курсор в першу комірку діапазона для вставки;

– контекстне меню правої кнопки миші → Специальная вставка;

– пункт Вставить связь.

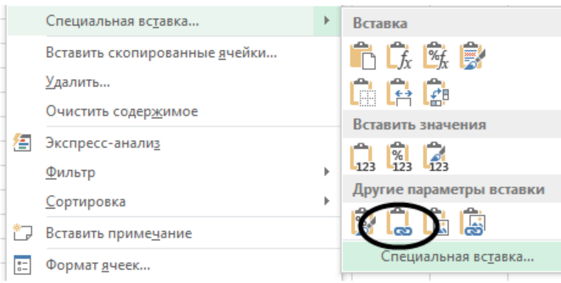


Рис. 1.4.

Підсумкові обчислення – це отримання числових характеристик, які описують визначений набір даних. Наприклад, обчислення суми значень, середнього значення, інших статистичних характеристик, кількості або частки елементів набору, яка задовільняє визначеним умовам. Проведення підсумкових обчислень виконується за допомогою вбудованих функцій. Особливість використання таких підсумкових функцій в тому, що програма "намагається вгадати" діапазон для підсумкового обчислення і задає параметри функції (масив) автоматично.

Автосума – єдина функція, яка містить окрему кнопку панелі інструментів "∑". Забезпечується функцією "СУММ" категорії Математические. Використовується декілька технологій підсумкового обчислення.

Спосіб 1:

– виділити діапазон для обчислення;

– кнопка Автосуми (результата поміщується автоматично в останню порожню комірку діапазону або в наступну комірку за виділеним діапазоном).

Спосіб 2:

– активізувати комірку знизу або праворуч діапазона для обчислення (приорітет надається діапазону зверху);

– кнопка Автосуми;

– [Enter] або кнопка введення "v" (при необхідності до завершення операції можна змінити діапазон).

Статистичні функції підсумкових обчислень вибираються і виконуються розглянутими раніше способами. Наприклад, ДИСП (дисперсія), МАХС (максимальне значення в діапазоні), СРЗНАЧ (середнє арефметичне значення), СЧЕТ (кількість комірок з числами в діапазоні) та ін. Функції підсумкових обчислень часто використовують в процедурах обробки бази даних системи Excel (фільтрація записів, створення зведених таблиць тощо).

1.2. Технологія підбору параметрів і таблиць підстановки

Процедура **підбору параметрів** виконується для прогнозування значень одного параметру при змінюванні іншого параметру. Розглянемо особливість процедури на принципі найпростішої моделі росту:

$$W = W_0 + bt, \tag{1.1}$$

де W – кінцеве значення; W_0 – початкове значення; t – час;

b – параметр функції росту, швидкість зростання $f(t) = k = bt$ – коефіцієнт зростання.

Початкова модель даної задачі має вигляд, як наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

№ з/п	A	B
1	W_0 ,	3
2	Час t	10
3	Параметр росту b	0,02
4	Функція росту $f(t)$	=B2*B3
5	W	=B1+B3

Нехай потрібно визначити, за який час t значення змінної W буде рівним 5. Алгоритм розвязання задачі такий:

1) виділити комірку В5;

2) вкладка Данные група Работа с данными $\rightarrow$ Анализ "что если" $\rightarrow$ Подбор параметра;

3) в поле Установить в ячейке встановити комірку В5;

4) в поле Значение ввести нове значення;

5) поле Изменения значения ячеек – вказати звертання до комірки, до параметра, який підбирається (для нашої задачі – це В2), та натиснути кнопку ОК.

Технологія **таблиці підстановки** призначена для отримання ряду значення результуючої функції, при зміні параметра (одного чи двох), які впливають на результуючу функцію. Розглянемо особливість техології для попереднього прикладу.

Нехай потрібно вивчити процес змінювання економічного показника W та функції росту $f(t)$ від параметра росту (b), а також іншу задачу – залежність економічного показника від параметрів росту і часу:

$$W = f(b,t).$$

Технологія розв'язування першої задачі:

Спосіб 1. Залежність двох функцій від одного параметру:

1) виконаємо нарощування початкової моделі;

2) виділити діапазон , який містить ряд параметрів та області для результата;

3) вкладка Данные, група Работа с данными → Анализ "что если" → Таблица данных. З'явиться вікно, куди необхідно ввести в поле Подставлять значения по строкам – звертання до комірки із значенням параметра початкової моделі;

4) натиснути кнопку ОК. В результаті потрібний діапазон буде заповнений обчисленими значеннями.

Спосіб 2. Залежність однієї функції від двох параметрів.

1) нарощування початкової моделі (табл. 1.2);

Таблиця 1.2

	C	D	E	F	G	H	I	K	L
1			Економічний показник	Час					
2			=B1+B2*B3	10	20	50	100	200	365
3		Параметр росту	0,01						
4			0,02						
5			0,03						
6			0,04						
7			0,05						
8			0,06						

2) виділити діапазон, який включає формулу функції, ряди параметрів і область для результату (E2:L8);

3) вкладка Данные, група Работа с данными → Анализ "что если" → Таблица данных → ввести в поле Подставлять значения по столбцам – B2, в поле Подставлять значение по строкам – B3;

4) натиснути кнопку "ОК".Результат отримаємо в діапазоні F3:L8.

Інформаційна технологія сценарного підходу при моделюванні складних задач, які містять до 32 параметрів можна виконати підпрограму Диспечер сценария, яка дозволяє створювати будь-яку кількість варіантів, необхідних для аналізу модельних задач типу "що-якщо".

1.3. Моделювання випадкових величин в Excel

Моделювання випадкових величин часто використовують у статистичному та системному аналізі для перевірки обчислювальних алгоритмів, комп'ютерному моделюванні.

Розглянемо інструментарій Excel для генерування випадкових чисел.

I. Функція СЛЧИС( ) – функція без аргументів категорії "Математические", обчислює випадкові числа, які рівномірно розподілені на інтервали [0,1].

Функцію СЛЧИС можна використовувати у формулах масивів для генерування діапазонів випадкових чисел:

- виділити діапазон;
- ввести функцію: «=СЛЧИС ( )»;
- завершити операцію [Ctrl + Shift + Enter].

Особливість: формули, які містять функцію СЛЧИС, перераховуються при кожному перерахунку робочого аркуша (наприклад, при введенні значень у комірку або вилучення, або при натисненні клавіші [F9]), що важливо для машинного моделювання. Для фіксації результуючих значень функції СЛЧИС, можна їх скопіювати "Специальная вставка", "Значения".

II. Функція СЛУЧМЕЖДУ (нижняя группа; верхняя группа) – виконує генерацію цілочисленних значень, підпорядкованих дискретному рівномірному розподілу. Функція знаходиться в категорії "Математичні та тригонометричні" і доступна тільки після підключення надбудови "Пакет анализа".

Технологія використання:

- ввести функцію;
- скопіювати в інші комірки для отримання діапазону випадкових чисел.

Особливості:

1) як і функція СЛЧИС, при кожному перерахунку функція СЛУЧМЕЖДУ змінює значення;

2) функція "не працює" у формулах масивів;

3) якщо значення аргументів дробні, то вони округлюються до найближчих цілих.

III. Засіб "Генерация случайных чисел" із надбудови "Пакет аналізу" призначений для отримання випадкових вибірок, тобто генерації значень випадкових чисел заданого розподілу: рівномірного, нормального, Бернуллі, біноміального, Пуассона, модельного та дискретного.

Розглянемо елементи вікна "Генерация случайных чисел" (рис. 1.5).

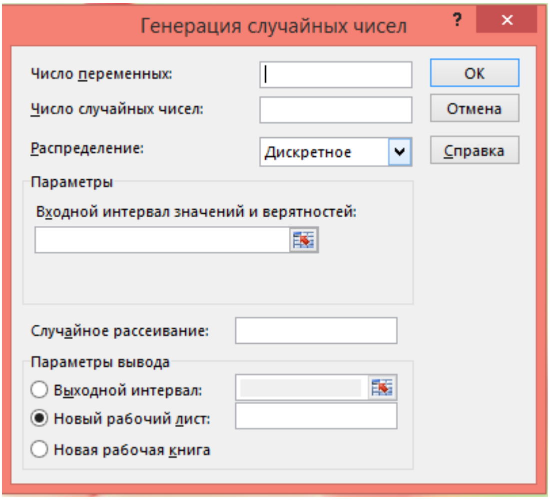


Рис. 1.5.

Поле введення "Число переменных" – вказується кількість виборок, що генеруються. Кожна вибірка розміщується у окремому стовпчику (їх максимальна кількість – 256). Якщо таке значення не введено, або, якщо в полі "Выходной интервал" вказаний діапазон, то будуть заповнені всі стовпці даного діапазону.

В полі "Число случайніх чисел" ввести кількість чисел вибірок (тобто обсяг вибірок, що генеруються) – для всіх вибірок однакове. Якщо число відсутнє, то буде утворено одне значення або, якщо у полі "Выходной интервал" вказаний діапазон, то будуть заповнені всі рядки діапазону.

Поле "Случайное рассеивание" активне для всіх типів розподілу, крім модельного та дискретного. Як правило, це поле залишають вільним, але можна ввести ціле значення із діапазону 1 – 32767, яке задасть початкове значення для алгоритму генерації випадкових чисел (будуть утворюватись однакові послідовності випадкових чисел).

Вибір розподілу здійснюють за допомогою кнопки зі списком відповідного поля "Распределение". Після вибору розподілу в області "Параметры" потрібно ввести відповідні характеристики:

– *рівномірний розподіл* – ввести нижню та верхню границі розподілу випадкових чисел;

– *нормальний розподіл* – значення середнього (математичне сподівання) і стандартного відхилення (середньоквадратичне відхилення);

– *розподіл Бернуллі* – імовірність «Р» появи «1» (наслідок, або успіх);

– *біноміальний розподіл* (генерується послідовність випадкових чисел, яка дорівнює кількості «1» в n незалежних іспитах. У результаті кожного іспиту з імовірністю Р може зявитися «1» та з імовірністю (1-Р) – «0») – необхідно задати число іспитів n та імовірність Р (у Excel функція «БИНОМРАСП»);

– *розподіл Пуассона* ($P(x = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}, k = 0,1,2...$) – ввести тільки параметр λ.

– *модельний розподіл* (генеруються не випадкові числа, а послідовність членів арифметичної прогресії) – задати нижню та верхню границі чисел, крок прогресії, кількість повторень значень у послідовності та кількість повторень самої послідовності;

– *дискретний розподіл* – задати вхідний інтервал значень випадкових величин та відповідних їм ймовірностей, тобто вказати діапазон із двох стовпчиків; перший – це ряд випадкових чисел, другий – відповідні імовірності.

Таким чином, способи обчислення випадкових величин за допомогою функцій та надбудови Пакет анализа мають такі відмінності:

1) функцію СЛЧИС можна безпосередньо використовувати у формулах (в тому числі і формулах масивів) як аргумент формул або іншої функції. Для використання у формулах випадкових чисел, отриманих засобами "Пакет анализа", необхідно їх записати у окремому діапазоні, а потім використовувати у формулах;

2) формули, які містять функцію СЛЧИС, перераховуються при кожному перерахунку робочого аркуша, а значення, які отримані за допомогою "Пакета анализа", фіксовані, тобто, для отримання нової вибірки на місці попередньої, необхідно ще раз використати засіб "Генерация случайных чисел".

Деякі технології використання функції СЛЧИС:

1) Моделювання випадкових величин, які рівномірно розподілені на довільному інтервалі $[a, b]$, виконується формулою:

$$=(b-a)^{*}\text{СЛЧИС}(\ )+a.$$

2) Генерування цілочислових значень, які рівномірно розподілені на інтервалі $[a, b-1]$ – це аналог функції СЛУЧМЕЖДУ, виконується формулою:

$$=\text{ЦЕЛОЕ}((b-a)^{*}\text{СЛЧИС}(\ )+a).$$

3) Використання перерахунку функції СЛЧИС для отримання результатів декількох експериментів, тобто значення характеристик, наприклад: середнє, дисперсія, мінімум, максимум тощо. Для цього можна використати технологію Таблица подстановки (рис. 1.6):

1) за допомогою {= СЛЧИС ( )} за формулою масиву отримати вибірку значень (стовпчик А);

2) стандартними функціями обчислити характеристики: середнє, дисперсію, мінімум, максимум (стовпчик В);

3) ввести номери експериментів 1, 2, 3, … N, наприклад, у стовпчик D;

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	вибірка	середнє						
2	0,991337	=СРЗНАЧ(A2:A10)		№ експеримента	сер	дисп	min	max
3	0,794601	дисп			=B2	=B4	=B6	=B8
4	...	=ДИСП(A2:A10)		1				
5	...	min		2				
6	...	=МИН(A2:A10)		3				
7	...	max		4				
8	...	=МАКС(A2:A10)		5				
9	0,128896			6				
10	0,103461			7				
11				8				
12				9				

Рис. 1.6.

4) у стовпчики E, F, G, H ввести формул из посиланнями до комірок з відповідними характеристиками;

5) виділити діапазон для Таблицы подстановки (D3: H10);

6) вкладка Данные → група Работа с данными → Таблица данных;

7) в полі Подставлять значения по строкам ввести посилання до будь-якої вільної комірки (наприклад, I2), оскільки числа, які позначають кількість експериментів (стовпчик D), в обчисленнях участі не приймають, а слугують "пусковим механізмом" для нового перерахунку формул, які містять функцію СЛЧИС;

8) кнопка "ОК", після чого, таблиця буде заповнена значеннями відповідних характеристик для кожного експеримента.

ЛЕКЦІЯ 2. Аналіз даних та елементи моделювання економічних процесів і систем в MS Excel

У дослідженні процесів і систем різної фізичної природи набули широкого використання математичні моделі, які містять різні функціональні залежності. Наприклад, цільові функції в задачах оптимізації; виробничі функції для розрахунків нормативних коефіцієнтів; функції регресії виду $\overline{y}=f\left(\overline{x},\overline{a}\right)$, які виражають співвідношення "вхід–вихід" будь-якої системи ($\overline{x}$ – вектор вхідних факторів; $\overline{a}$ – вектор параметрів моделі, що належить визначенню за експериментальними даними; $\overline{y}$ – вектор відгуків – вихідні фактори).

Модель будується для дослідження невідомих процесів у системах та оцінювання кількісних характеристик міжелементних зв'язків системи, наприклад $y=a_0+a_1x$ (рис. 2.1). Коефіцієнти a_0, a_1 характеризують поведінку системи і визначаються за експериментальними даними.

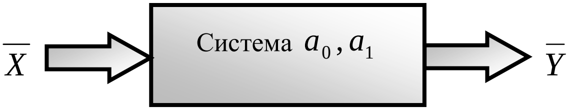


Рис. 2.1.

Щоб математичні моделі адекватно описували процеси і системи, необхідно використовувати досить адекватні функціональні залежності (математичні формули).

Таким чином, важливого значення набувають методи апроксимації – методи наближеного зображення реальних функцій такими стандартними аналітичними виразами, як, наприклад, алгебраїчні або тригонометричні багаточлени. Такі функції називають *апроксимуючими*.

Початкові дані про апроксимуючу функцію $y=f\left(\overline{x},\overline{a}\right)$ наводяться у вигляді ряду результатів вимірювань, спостережень або проведених обчислень на ПЕОМ.

У задачах апроксимації такими початковими даними є сукупність експериментальних або розрахованих значень $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ функції $y=f(x)$ у різних точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Інакше, початковою інформацією про функцію є вектор результатів вимірювань $\overline{y}=\left(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\right)^T$ на сітці $X=\left\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\right\}$.

Розв'язок кожної задачі апроксимації складається:

1) з підбору деякої множини допустимих апроксимуючих функцій;

2) з вибору найбільш узгодженої з початковими даними функції з цієї множини.

Обробка експериментальних даних (апроксимація даних) залежно від мети досліджень передбачає розв'язування наступних задач:

– задача *інтерполяції* – побудова неперервної функції $f(x_i)$, що з’єднує всі експериментальні точки $y_i(x_i)$;

– задача *екстраполяції* – побудова функції $f(x_{i+k})$ за границями відомого інтервалу значень – прогноз;

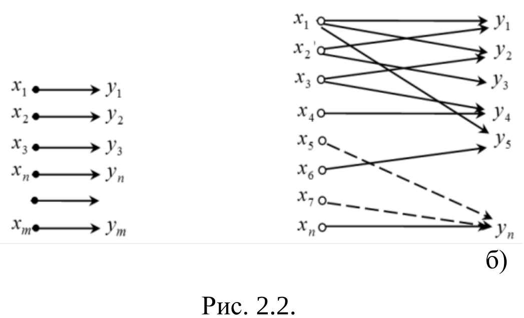
– задача *регресії* – побудова найближеної (усередненої) функції $\hat{f}(x_i)$ до $y_i(x_i)$;

– задача *фільтрації* – побудова апроксимуючої функції $\tilde{f}(x_i)$ для зниження систематичної похибки експериментальних даних.

Задачі 3 і 4 іноді називають згладжуванням даних.

2.1. Лінійна регресія за допомогою функцій, лінійного тренду і пакета аналізу

При дослідженні явищ, процесів, взагалі систем, важливу роль відіграють взаємозв’язки між елементами системи (в процесах, явищах). Зв’язки бувають різні за природою та характером. Розрізняють два види зв’язків: 1) детерміновані (рис. 2.2, а); 2) стохастичні (випадкові, ймовірнісні) (рис. 2.2, б).



а) б)

Рис. 2.2.

Окремим випадком стохастичного зв'язку є *кореляційний зв'язок* – за якого кожному значенню (або групі значень) фактора X відповідає середнє значення результату $\overline{Y}$. Основною характеристикою кореляційного зв'язку є *лінія регресії* – це функція, яка зв'язує середні значення результату $\overline{Y}$ зі значеннями фактора X .

Взагалі, *регресія* (або регресійний аналіз) – це група методів та прийомів визначення аналітичних виразів зв'язків у вигляді математичної функції (багаточлена). Лінія регресії може бути представлена аналітичним, табличним або графічним способами. Найчастіше використовують такі функції:

$y = a_0 + a_1 x -$ лінійна;

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 -$ параболічна;

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n -$ поліном n-го степеня;

$y = a_0 x^{a_1} -$ степенева;

$y = a_0 a_1^x -$ показникова,

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – параметри рівняння регресії (коефіцієнти регресії).

Параметри рівняння регресії визначається методом найменших квадратів (МНК). Термін "лінійна регресія" означає, що рівняння, які використовуються для опису даних, лінійні відносно своїх коефіцієнтів, тому графік лінії не обов'язково буде лінійним.

Лінійна регресія функціями Excel

Для простої регресії, коли залежність нагадує лінійну функцію $y = a_0 + a_1 x$, можна використовувати статистичні функції Excel:

НАКЛОН (значение Y; знач X) – визначає нахил лінії регресії (кутовий коефіцієнт (slope) – a_1);

ОТРЕЗОК (значение Y; знач X) – визначає точку перетину лінії регресії з віссю ординат "Y" (intercept) – коефіцієнт a_0;

КВПИРСОН (значение Y; значение *x*) – обчислює квадрат коефіцієнта кореляції (coefficient of determination) – R^2, або достовірність апроксимації (ступінь вірності розрахованих показників лінії регресії a_0 або a_1).

Приклад використання лінійної регресії наведений нижче.

Таблиця 2.1

	A	B	C	D
1	X – Період, міс	Y – Прибуток, тис. грн	Нахил a_1:	= НАКЛОН (B2:B11; A2:A11)
2	0	298	Відрізок a_0:	= ОТРЕЗОК (B2:B11; A2:A11)
3	1	299	Достовірність R^2	= КВПИРСОН (B2:B11; A2:A11)
4	2	301		
5	3	304		
6	4	306		
7	5	309		
8	6	312		
9	7	316		
10	8	319		
11	9	322		

Виконаємо обчислення й отримаємо такі результати: $a_1 = 2,7758$; $a_0 = 0,9864$ (максимальна достовірність $R^2 = 1$).

Лінія тренду

Трендом називається тривала тенденція змінювання показників. Побудова *лінії тренду* – це графічний метод регресійного аналізу, тобто наочне подання лінії регресії в графічній формі. Алгоритм побудови лінії тренду засобами табличного процесора Excel:

1. Виділити весь діапазон значень ряду X та Y разом із заголовками (для прикладу в табл. 6.3 – A1:B11).

2. Вкладка Вставка $\rightarrow$ Диаграммы $\rightarrow$ Вставить точечную или пузырьковую диаграмму.

3. За необхідності ввести параметри діаграми. Натиснути кнопку "Готово", з'явиться точкова діаграма.

4. Відкрити контекстне меню на будь-якій точці розподілу.

5. Вибрати пункт Добавить линию тренда

6. Вказати тип лінії (вибрати базову функцію апроксимації):

– лінійна: $y = a_0 + a_1 x$;

– логарифмічна: $y = a_0 + a_1 \ln(x)$;

– степенева: $y = a_0 x^{a_1}$;

– експоненціальна: $y = a_0 e^{a_1 x}$;

– поліноміальна (додатково вказати степінь поліному від 2 до 6):

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6.$$

7. Вкладка Параметри, встановити прапорці "Показать уравнение на диаграмме" та "Поместить на диаграмму величину достоверности апроксимации R^2". За необхідності можна додати інші параметри: змінити назву апроксимуючої функції; вказати прогноз вперед або назад на потрібну кількість одиниць; встановити прапорець "Пересечение кривой с осью Y" в точці O (на початку координат).

8. Кнопка "ОК" завершує операцію і на екрані з'являється лінія тренду, рівняння та достовірність R^2.

Пакет регресійного аналізу

Пакет регресійного аналізу надає більше можливостей аналізу даних ніж попередні два методи. Його використовують, коли необхідно отримати більш детальну інформацію про регресійний процес, яку неможливо отримати за допомогою лінії тренду або використавши будь-яку модель регресії (лінія тренду якої відсутня). Алгоритм роботи із пакетом такий:

1. Ввести початкові дані $\overline{X}$ та $\overline{Y}$. Кількість векторів $\overline{x}(\overline{x}_1, \overline{x}_2 ...)$ та значення величини $(\overline{x}_i, \overline{y})$ визначають тип моделі, наприклад:

$$\overline{x} = a_0 + a_1\overline{x};$$

$$\overline{y} = a_0 + a_1\overline{x} + a_2\overline{x}^2;$$

$$\overline{y} = a_0 + a_1 \sin(\overline{x}) + a_2 \tan(\overline{x}^2);$$

$$\overline{y} = a_0 \exp(\overline{\mathrm{x}}^{0.5}) + a_1 \ln(\overline{x});$$

$$\overline{y} = a_0 + a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + ... + a_i\overline{x}_i \text{ та інші.}$$

Всі моделі лінійні відносно коефіцієнтів a_i. Пакет регресійного аналізу в Excel дозволяє працювати з будь-якою лінійною моделлю.

2. Вкладка Данные $\rightarrow$ надбудова Анализ данных $\rightarrow$ Регрессия. З'явиться вікно, наведене на рис. 2.3.

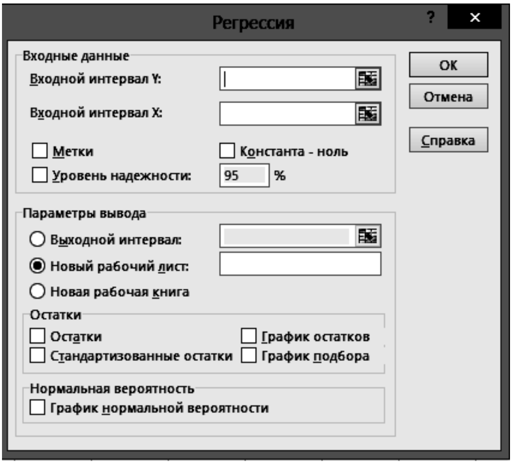


Рис. 2.3.

3. Ввести вхідні параметри:

– входной интервал Y;

– входной интервал X;

– при необхідності, щоб лінія регресії проходила через початок координат – встановити прапорець Константа – ноль.

4. Вказати параметри виводу:

– розміщення результатів аналізу: ключ Выходной интервал або ключ Новый рабочий лист чи ключ Новая рабочая книга;

– результати у графічному вигляді: прапорець График остатков, прапорець График подбора (лінія регресії).

Остаток (residual) – це різниця між значеннями $\overline{Y}$ – фактичними даними і значеннями $\overline{Y}_p$ – розрахованими для побудови лінії регресії. График остатков дозволяє виявити наочно неспівпадання значень: $\Delta_y = \overline{Y}_p - \overline{Y}$.

5. Кнопка "ОК". На екран виводиться:

– таблиці з підсумками регресії:

- Регрессионная статистика містить значення R, R^2, стандартну похибку, кількість спостережень;
- Дисперсионный анализ містить значення статистичних характеристик:

df – кількість ступенів свободи (незалежності значення, змінної);

SS – сума квадратів відхилень;

MS – дисперсія, як відношення SS/df;

F – відношення дисперсії регресії до дисперсії залишку;

- Значимость F – рівень значимості, який розраховується як $MS\_Регрессия / MS\_Остаток$. Рівняння регресії значиме (вагоме) для прогнозування, якщо вираз: 1 − Значимость $F \Rightarrow 1$;
- коефіцієнти $a_0, a_1 ... a_к$ та їх статистичні характеристики;

– графіки підбору (лінія тренда) та графік залишків ("остатков").

Таким чином, загальна методика використання пакету регресійного аналізу складається з таких процедур:

1. Вибір моделі лінійної регресії, введення початкових даних.
2. Виконання регресійного аналізу засобами Excel.
3. Розміщення результатів та їх аналіз.

Визначення коефіцієнтів рівнянь лінійної регресії
для багатофакторної задачі

Для отримання рівняння необхідно:

1) визначити значення a_0, a_i;

2) оцінити достовірність отриманого рівняння.

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Формат функції:

= ЛИНЕЙН (интервал значений y; блок значений x_i; константа; статистика).

	ИСТИНА	ЛОЖЬ
константа	$a_0 \neq 0$	$a_0 = 0$
статистика	оцінка достовірності	оцінки немає

Якщо константу не вказати, то результат буде поданий у формі, як при введенні ИСТИНА, тобто $a_0 \neq 0$. Якщо не призначати статистику, то результат буде таким, як при введенні ЛОЖЬ, тобто дані для оцінки достовірності подані не будуть. Приклад використання функції:

$$x_1 = \{120, 200, 300, 400, 500, 860\};$$
$$x_2 = \{450, 960, 145, 212, 265, 312\};$$
$$y = \{4500, 8000, 3000, 5500, 5400, 6500\}.$$

Необхідно визначити рівняння регресії типу:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Алгоритм розв’язку задачі (табл. 2.2) наведений нижче.

Визначити *min* і *max* значення змінних:

1) виділити комірку B11;

2) запустити фукцію Статистическая ⇒ МИН;

3) ввести інтервал B4:B9;

4) натиснути "Готово";

5) виділити комірку B12;

6) запустити функцію Статистическая ⇒ МАКС;

7) ввести івнтервал B4:B9;

8) скопіювати B11:B12 у C11:C12;

Таблиця 2.2

	A	B	C	D
	1. Ввести початкові дані			
	Об'єкт	*Вироблено продукції, тис. од.* x_1	*Витрати, тис. грн* x_2	*Ціна, грн* y
4	A_1	120	450	4500
5	A_2	200	960	8000
6	A_3	300	145	3000
7	A_4	400	212	5500
8	A_5	500	265	5400
9	A_6	860	312	6500
	2. Графічні значення:			
11	min	120	145	
12	max	860	960	
Результат:				
	3. Рівняння регресії:			
14		5,7	3,9	1721
15		1,26	1,41	933
16		0,88	769	# Н/Д
17		10,77	3	# Н/Д
18		12735231	1773102	# Н/Д

9) виділити блок B14:D18 (рядків завжди 5, стовпчиків n + 1 = 2 + 1 = 3);

10) ввести функцію : = линейн (D4: D9; B4:C9; истина; истина);

11) завершити операцію: [Shift] + [Ctrl] + [Enter].

На екрані отримаємо результат обчислень (табл. 2.3). Тут $\delta(a_2)$, $\delta(a_1)$, $\delta(a_0)$ – середньоквадратичне відхилення; R^2 – характеризує достовірність: $R^2 \to 0$ – низька достовірність, $R^2 \to 1$ – висока достовірність (тобто функціональна залежність існує); df – число ступенів свободи: $df = k-(n+1) = 3$, де k – кілька рядків початкових даних ($k = 6$), $n = 2$ (число аргументів); SS_{reg} – регресійна сума квадратів; SS_{resid} – залишкова сума квадратів.

Таблиця 2.3

	A	B	C	D
14		a_2	a_1	a_0
15		$\delta(a_2)$	$\delta(a_1)$	$\delta(a_0)$
16		R^2	$\delta(\partial)$	
17		$F_{розп}$	df	
18		SS_{reg}	SS_{resid}	

Таким чином, рівняння регресії має вигляд:

$$y = 1721 + 3{,}9x_1 + 5{,}7x_2 .$$

Зауваження. Це рівняння вірне в межах визначених min і max значень змінних

$$120 \le x_1 \le 860; 145 \le x_2 \le 960.$$

де $\delta[a_0], \delta[a_i]$ – середні квадратичні відхилення отриманих значень; $\delta(\partial)$ – залишкове середньоквадратичне відхилення; $F_{розп}$ – F-статистика використання для визначення, чи є випадковим взаємозв’язок між залежною і незалежною змінними, що спостерігаються, чи ні.

Оцінка достовірності рівняння регресії

Оцінка достовірності рівняння регресії поділяється на два етапи: 1) оцінка достовірності залежності y від x; 2) оцінка достовірності визначених величин a_0 та a_i.

Оцінка достовірності залежності y *від* x_i проводиться відносно величини R^2: $R^2 \to 0$ – відсутність залежності; $R^2 \to 1$ – наявність залежності. Визначають також достовірність самої величини R^2 за допомогою F-розподілу, який визначає P-ймовірність того, що залежність y від x_i відсутня, а $(1-P)$ –

ймовірність того, що залежність y від x_i має місце. Порядок обчислення такий:

1. Визначити комірку для результату "Р" (наприклад, F17).

2. Вкладка Формулы $\rightarrow$ Библиотека функций $\rightarrow$ Другие функции $\rightarrow$ Статистические $\rightarrow$ F РАСП.

Формат функції: = F РАСП (B17; 2; C17)	$\begin{cases} x = F_{расп} \text{ в комірку B17;} \\ \text{ступінь свободи 1 } = \text{ кількість аргументів} (n=2); \\ \text{ступінь свободи 2 } = df = \text{C17.} \end{cases}$

3. Натиснути "Готово".

4. Ввести $1-P$: в G17 = 1 – F17.

На екрані маємо: G17 = 0,96.

Оцінка достовірності визначених величин a_0 *та* a_i визначається за допомогою ймовірності розподілу Стьюдента. Виконується за алгоритмом:

1. Обчислити величини $t_i = \dfrac{a_i}{\delta_i}$ (наприклад, в B21:D21).

2. Визначити ймовірність β того, що значення a_i та δ_i не достовірні:

– курсор в B22;

– вкладка Формулы $\rightarrow$ Библиотека функций $\rightarrow$ Другие функции $\rightarrow$ Статистические $\rightarrow$ Стьюдент $\rightarrow$ ввести дані: $x = t_i$ в комірку B21; ступінь свободи $= df$ в C17; залишки – 2 (це ознака двостепеневого розподілу Стьюдента).

На екрані з'явиться результат: B22 = 0,02.

3. Визначити $(1-\beta)$ – ймовірність, що значення a_i достовірні:

– курсор в B23;

– ввести в B23 = 1 – B22.

Результат: 0,98.

4. Скопіювати B22:B23 у комірки C22:D23.

2.2. Згладжування даних і прогнозування

Табличний процесор Excel містить засоби фільтрації, які входять до складу пакета Анализ данных. Алгоритми фільтрації основуються на методах ковзного середнього та експоненціального згладжування.

Метод ковзного середнього (лінійного згладжування). Рівняння методу має вигляд:

$$y_{\phi i} = \frac{y_i + y_{i+1} + \ldots + y_{i+k-1}}{\Delta t},$$

де $y_{\phi i}$ – згладжене значення (фільтроване); y_i – початкові значення (точки вимірювань, спостережень тощо); K – кількість точок згладжування y_i; Δt – інтервал згладжування, визначається кількістю точок K (на практиці обирають $K = 3 \ldots 5$).

Метод реалізується в Excel інструментарієм Линия тренда та Пакет анализа. Лінія тренда дає можливість представляти результат фільтрації тільки у графічному вигляді (згладжуюча лінія). Перевага Пакета анализа – наявність фільтра, який дозволяє вивести результати не тільки у графічній, а й у табличній формі.

Фільтрація інструментом Линия тренда. Алгоритм побудови лінії тренда стандартний, тільки необхідно вибрати тип лінії – Линейная фильтрация та вказати кількість точок *К*, за якими буде проводитись згладжування (усереднення).

Лінійна фільтрація засобами Пакета анализа реалізується таким чином: вкладка Данные → Анализ данных → Скользящее среднее. Після активізації команди з'являється відповідне діалогове вікно (рис. 2.4), яке заповнюють потрібними параметрами:

– у поле Входной интервал ввести діапазон посилань до комірок з початковими даними y_i для згладжування;

– ключ (прапорець) Метки в первой строке активізують у випадку, коли в перший рядок введений підпис даних (атрибут, назва стовпчика);

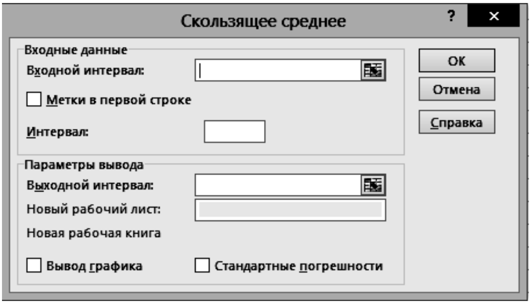


Рис. 2.4.

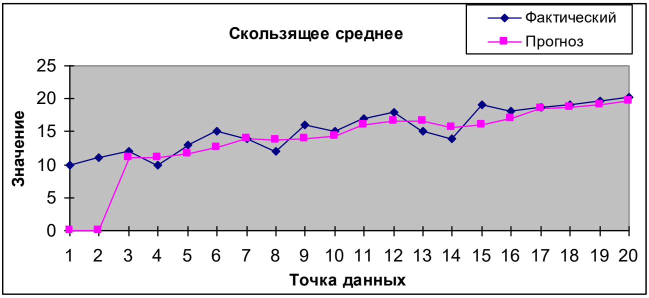
– у полі Интервал ввести кількість точок K , що аналізуються. Якщо поле не заповнене, то згідно замовченню використовується $K = 3$;

– у полі Выходной интервал ввести посилання до комірки, з якої почнеться заповнення результуючого діапазону;

– прапорці Вывод графика та Стандартные погрешности активізують процедури виводу графіків (фактичного і прогнозу), а також обчислюють стандартні похибки і розміщують у стовпчик праворуч значень ковзного середнього (згладжених значень $y_{ф_i}$), рис. 2.5 (а, б).

x	y		$y_{ковз. сер.}$	Стандартна похибка
1	10		#Н/Д	#Н/Д
2	11		#Н/Д	#Н/Д
3	12		11	#Н/Д
4	10		11	#Н/Д
5	13		11,66667	1,122167215
6	15		12,66667	1,65551827
7	14		14	1,551582227
8	12		13,66667	1,65551827
9	16		14	1,503083251
10	15		14,33333	1,551582227
11	17		16	1,347150628
12	18		16,66667	1,03637545
13	15		16,66667	1,360827635
14	14		15,66667	1,56347192
15	19		16	2,202691956
16	18,12381		17,04127	2,077632462
17	18,63095		18,58492	1,841558315

а)



б)

Рис. 2.5.

Метод експоненціального згладжування. Математичне рівняння (модель) методу можна записати таким чином:

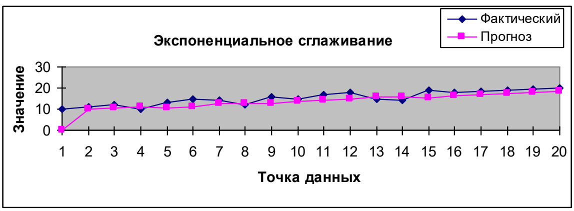
$$\hat{y}_{\phi_{i+1}} = \alpha y_i + (1-\alpha)\hat{y}_{\phi_i},$$

де y_i – фактичне значення із набору початкових даних; $\hat{y}_{\phi_i}$ – згладжене значення; $\hat{y}_{\phi_{i+1}}$ – згладжене значення наступного інтервалу; α – фактор згасання (коефіцієнт послаблення) визначається нерівністю $0 < \alpha < 1$; чим більше $\alpha(\alpha \to 1)$, тим більш значимі фактичні дані y_i та слабкіше згладжування; для сильного згладжування використовують значення $0{,}01 \le \alpha \le 0{,}3$ (у даному випадку більш значимі згладжені значення).

Технологія експоненціального згладження аналогічна методу лінійного згладжування (ковзного середнього):

1) у вікні Анализ данных активізувати команду Экспоненциальное сглаживание;

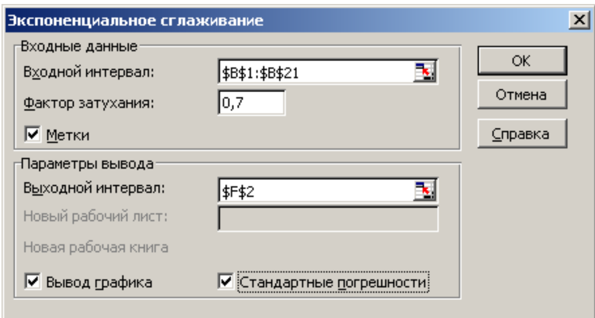
2) замість параметра Интервал використовується поле Фактор затухания, куди вводяться значення α , рис. 2.6.



а)

x	y		$y_{експ.згл.}$	Стандартна похибка
1	10		#Н/Д	#Н/Д
2	11		10	#Н/Д
3	12		10,3	#Н/Д
4	10		10,81	#Н/Д
5	13		10,567	1,231002302
6	15		11,2969	1,776287233
7	14		12,40783	2,600547289
8	12		12,88548	2,718298728
9	16		12,61984	2,382717742
10	15		13,63389	2,216948792
11	17		14,04372	2,16609086
12	18		14,9306	2,709942421
13	15		15,85142	2,583734489
14	14		15,596	2,509030635
15	19		15,1172	2,056965057
16	18,12381		16,28204	2,473073775
17	18,63095		16,83457	2,646726481
18	19,1381		17,37348	2,689192672
19	19,64524		17,90287	1,801200105
20	20,15238		18,42558	1,767927042

б)



в)

Рис. 2.6.

Апроксимація даних аналітичною залежністю із подальшим диференціюванням

Цей метод можна розглядати, як альтернативу методів фільтрації (згладжування). Використовують технології додавання лінії тренду (або регресію Пакета анализа). При додаванні лінії тренду вибирають, як правило, тип функції Поліноміальна вищого степеня (шостого – для точності) і поміщають на діаграму рівняння $y = \sum_{i=0}^{K-1} a_K x^K$. Далі рівняння диференціюють $\frac{dy}{dx}$ і отримують вираз для похідної, із якого можна обчислювати значення похідної для будь-якого значення x_i.

Прогнозування даних в Excel основується на статистичних методах, які використовують значення показників за попередні періоди, тобто спочатку вивчається стратегія процесу за минулі періоди, а далі на її основі будується прогноз. Цю стратегію ще називають базовою лінією даних.

Базова лінія є результатом спостережень, які проводились протягом тривалого часу. Точність прогнозу залежить від вимог до базової лінії:

– починати побудову базової лінії потрібно з результатів початкових спостережень і закінчувати останніми;

– всі часові періоди спостережень повинні бути однакові. Не слід змішувати дані за різні періоди. Наприклад, дані за день з середніми показниками за декілька днів.

– спостереження повинні фіксуватися в один і той же момент кожного часового періоду. Наприклад, при складанні базової лінії на основі добових (щоденних) спостережень дані фіксувати в один і той же час;

– пропущення даних не допускається. Тому, якщо відсутні дані спостережень за незначний період, доцільно буде доповнити їх наближеними даними.

Методи прогнозування враховують характер протікання процесів і значення випадкової величини часового ряду. Якщо варіація середніх значень незначна, для прогнозу на короткі інтервали часу використовують метод ковзного середнього. Якщо перші значення мають меншу значимість для прогнозу, а наступні більшу, то використовують метод експоненціального згладжування. Дані методи розглянуті вище.

Для прогнозування також використовуються статистичні функції Тенденция та Рост, які відносяться до функцій регресійного аналізу.

Функція Тенденция апроксимує прямою лінією, а функція Рост експонентою за методом найменших квадратів, масив відомих значень $\overline{Y}$ на сітці $\overline{x}$:

$$"\textit{Тенденция}" \Rightarrow \overline{y} = a_0 + a_1{}^* \overline{x};$$
$$"\textit{Рост}" \Rightarrow \overline{y} = a_0{}^* \exp\left(a_1 \overline{x}\right).$$

ТЕНДЕНЦИЯ (значення $\overline{Y}$; відомі значення $\overline{x}$; нові значення $\overline{x}$ для прогнозу; логічна константа: якщо "1" – a_0 обчислюється, якщо "0" – a_0 = 0). Алгоритм використання функцій:

1) ввести початкові дані (у стовпчик):

– значення сітки $\overline{x} = \{x_1, x_2, ...x_n\}$;

– значення $\overline{Y}$ (результати вимірювань, спостережень тощо) $\overline{y} = \{y_1, y_2, ...y_n\}$;

– за необхідності отримати згладжені значення $\overline{Y}_ф$ і виділити діапазон розміром $y_1...y_n$;

2) вкладка Формулы $\rightarrow$ Библиотека формул $\rightarrow$ Другие функции $\rightarrow$ Статистические $\rightarrow$ Тенденция або Рост;

– вказати перших два параметра;

– [Ctrl + Shift + Enter];

3) для отримання прогнозу на період $x_k > x_n$ (тобто x_{n+1}) використовують способи:

Спосіб 1. За допомогою формули масиву:

1. Виділити новий діапазон, розмір якого визначається кількістю нових значень x_K (тобто $K = n$);

2. Функція Тенденция або Рост;

3. В полі третього параметра додати діапазон нових значень $\overline{x} = x_{n+i}$;

4. [Ctrl + Shift + Enter].

Спосіб 2. Автозаповнення:

1. Виділити комірку;
2. Функція "Тенденция" або "Рост";
3. Додати третій параметр посилання до комірки зі значенням x_{n+1};
4. Маркером автозаповнення скопіювати формулу на необхідну кількість комірок.

Якщо для прогнозу використовуються тільки початкові (експериментальні, вимірювані) дані, то діапазони $\overline{x}$ та $\overline{y}$ необхідно зафіксувати абсолютними посиланнями (наприклад, $A$1:$A$20 та $B$1:$B$20).

Функція *Предсказ* – обчислює значення $y_{p_i} = a_0 + a_1 x_{p_i}$ для заданого значення x_{p_i} (або $\overline{y}_p$ для масиву значень $\overline{x}_p$), тобто функція передбачає значення змінної y_i. В основі її лежить алгоритм МНК, за яким будується регресійне рівняння для визначення значень y_i.

Синтаксис функції:

ПРЕДСКАЗ ((x_p або $\overline{x}_p$) значення $\overline{y}$; значення $\overline{x}$).

Якщо обчислюється масив значень $\overline{y}_p$, то функцію використовують як формулу масиву, тобто спочатку виділяють діапазон комірок відповідно кількості значень y_{p_i} масиву $\overline{y}_p$; перший параметр функції вводять як діапазон $\overline{x}_p$ і завершують операцію комбінацією клавіш [Ctrl + Shift + Enter].

ЛЕКЦІЯ 3. Практичні додатки диференціально-інтегрального числення в моделюванні соціально-економічних процесів

3.1. Похідна і продуктивність праці

Похідна використовується в різних областях науки і визначає миттєву швидкість точки, тобто швидкість точки в момент t_0. Позначається як $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. В соціально-економічних задачах поняття миттєвої швидкості застосовується при визначенні швидкості зростання обсягів продукції, працездатності населення та продуктивності праці, маржинального продукту, маржинальної корисності грошей тощо.

Термін "похідна" ввів у кінці XVIII ст. французький математик Лагранж Жозеф Луї (1736–1813 рр.). Знаходження похідної називається диференціюванням функції. Похідна функції позначається різними символами (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Позначення	Автор
$y'(x)$	Лагранж
$\dfrac{dy(x)}{dx}$	Лейбніц
$\dot{y}(x)$	Н'ютон
Dy	Коші

Опишемо за допомогою похідної *продуктивність праці* в момент часу t_0. Нехай функція $Q(t)$ визначає кількість виробленої продукції за час t. Тоді, за період часу від t до $t_0+\Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $Q(t_0)$ до $Q(t_0+\Delta t)$, тобто:

$$\Delta Q = Q(t_0+\Delta t) - Q(t_0).$$

Середня продуктивність праці за цей період часу $P_{cp}=\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$. Тоді продуктивність праці в момент t_0 – це граничне значення середньої продуктивності праці P_{cp} при $\Delta t \to 0$:

$$P(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0} P_{cp} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}. \qquad (3.1)$$

Таким чином, продуктивність праці – це швидкість зростання обсягу продукції.

Аналогічно можна визначити, наприклад, маржинальний продукт $MQ(x_0)$. Якщо функція $Q(x)$ позначає залежність кількості виробленої продукції від величини витрат x, то відношення $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ – це середня величина продукту, що відповідає величині витрат Δx. Тоді маржинальний продукт при витратах x_0 можна записати у вигляді:

$$MQ(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}. \qquad (3.2)$$

3.2. Принцип акселерації. Вплив інвестицій

Розглянемо задачу впливу інвестицій $u(t)$ на зростання виробництва продукції підприємства $y(t)$ в аналітичному вигляді. Нехай в початковий момент часу $t = 0$ інвестиції відсутні, тобто $u(t) = u_0 = 0$. Тоді виробництво залишається на попередньому рівні $y(t) = y(0) = y_0$ (рис. 3.1).

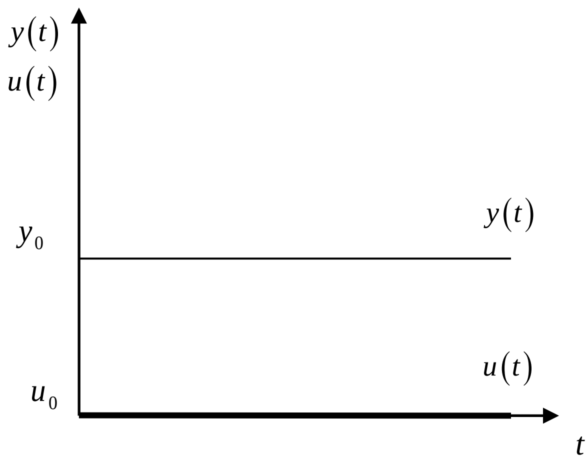


Рис. 3.1.

Якщо підприємство інвестується постійно $u(t) = u_0 > 0$, то виробництво постійно розвивається і випуск продукції повинен зростати лінійно: $y(t) = y_0 + ct$ (рис. 3.2).

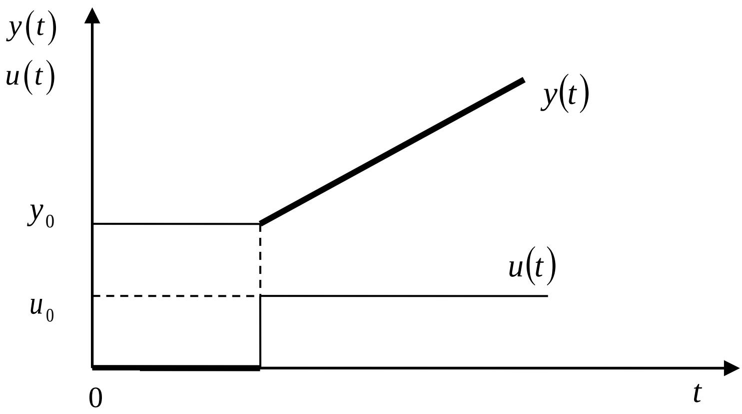


Рис. 3.2.

Опишемо динаміку випуску продукції $y(t)$ за допомогою диференціального рівняння:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \tag{3.3}$$

де k – деяка стала величина.

Проаналізуємо рівняння (3.3). Якщо обсяг інвестицій $u(t) = 0$, то із рівняння (3.3) отримаємо:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,$$

а це означає, що обсяг виробленої продукції $y(t) = const = y_0$.

Якщо обсяг інвестицій $u(t) = u_0 > 0$, то:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku_0. \tag{3.4}$$

Після інтегрування диференціального рівняння (3.4) отримаємо:

$$y(t) = y_0 + ku_0 t.$$

Отже, зростання інвестицій призводить не стільки до зростання обсягів продукції, скільки впливає на швидкість цього зростання, яка прямопропорційна збільшенню інвестицій (3.4).

Однак, в реальній економіці необхідність зростання обсягів продукції підприємства регулюється відповідним попитом $q(t)$. Підприємство повинне випускати обсяг продукції $y(t)$, який співпадатиме за величиною із попитом $q(t)$ на неї:

$$y(t) = q(t). \tag{3.5}$$

Для задоволення даним вимогам із рівнянь (3.3) і (3.5) отримаємо:

$$\frac{dq(t)}{dt} = ku(t). \tag{3.6}$$

Отже, інвестиції повинні задовольняти рівняння:

$$u(t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{dq(t)}{dt}, \tag{3.7}$$

тобто для задоволення попиту і реалізації своєї продукції підприємство повинне збільшувати інвестиції пропорційно швидкості зростання попиту (акселерації).

Коефіцієнт пропорційності $\frac{1}{k} = a$ називають *акселератом*. Виникає питання: чи потрібно збільшувати інвестиції, якщо попит на продукцію зростає? Відповідь дає знак другої похідної від функції попиту $q''(t)$ або $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$:

– якщо $q''(t) > 0$, то $\frac{dq(t)}{dt}$ збільшується і повинні зростати інвестиції $u(t)$;

– якщо $q''(t) < 0$ зростання попиту уповільнюється, то $\frac{dq(t)}{dt}$ зменшується та інвестиції повинні зменшуватися $u(t)$;

– якщо $q''(t)=0$ попит зростає з постійним темпом $\frac{dq(t)}{dt}=const$, інвестиції потрібно утримувати на рівні, який досягнули в даний момент часу, тобто $const = ku_0$.

Дане положення називають *принципом акселерації*.

3.3. Інтеграл в економічних задачах

Історично інтегральне числення виникло як задача визначення площі та об’єму в Давнбому Сході, Єгипті, Вавілоні, Давній Греції. Особливо великим є внесок Архімеда (близько 287–212 р. до н.е.), який розрахував площі фігур і об’єми великої кількості тіл на основі уявлення плоскої фігури у вигляді нескінченної множини прямих відрізків, а геометричного тіла у вигляді паралельних плоских перерізів. Систематичного розвитку методи інтегрування набули у XVII–XIX ст. німецьким астрономом Іоганом Кеплером (1571–1630 рр.), італійськими математиками Бонавентурою Кавальєрі (1598–1647 рр.), Еванджеліста Торрічеллі (1608–1647 рр.), французькими математиками П’єром Ферма (1601–1665 рр.), Блезом Паскалем (1623–1662 рр.), Леонардом Ейлером (1707–1783 рр.), Огюстеном Коші (1789–1857 рр.). Н'ютон і Лейбниць незалежно один від одного створили алгоритми диференціального та інтегрального числення.

Лейбніц запропонував позначати інтеграл так:

$$S=\int f(x)dx. \tag{3.8}$$

Французький математик і фізик Фур'є (1768–1830 рр.) удосконалив позначення Лейбніца і пропонував указувати початкове й кінцеве значення аргумента x у вигляді границь a та b:

$$S=\int_a^b f(x)\cdot dx. \tag{3.9}$$

Якщо ввести поняття інтегральної суми (рис. 3.3):

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i, \tag{3.10}$$

то інтеграл (3.9) можна записати :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{s=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i . \qquad (3.11)$$

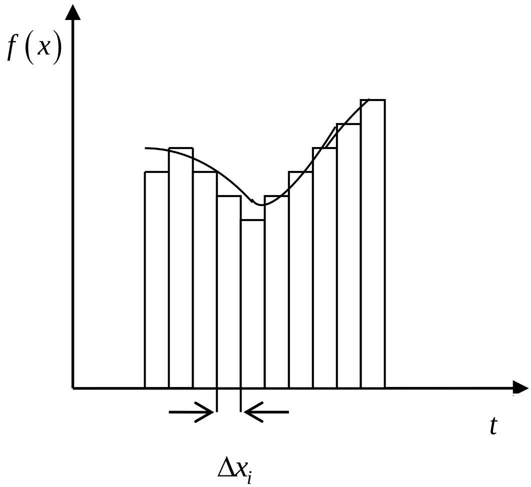


Рис. 3.3.

Доцільно нагадати, що невизначений та визначений інтеграли суттєво різні поняття. Невизначений інтеграл представляє собою функцію (сімейство функцій), а визначений інтеграл – це число.

Приклад 1. Загальна кількість грошей F, що надходить в банк за визначений термін $[0,T]$ визначається інтегралом :

$$F = \int_0^T f(t)dt , \qquad (3.12)$$

де $f(t)$ – кількість грошей, що надходить у банк в момент часу t.

Приклад 2. Обсяг продукції Q за визначений період часу $[0,T]$:

$$Q = \int_0^T P(t)dt , \qquad (3.13)$$

де $P(t)$ – продуктивність праці в момент часу t. Нехай $T=8$ год., а $P(t)$ описується емпіричною формулою:

$$P(t)=-0,3t^2+0,6t+10.$$

Тоді обсяг продукції за робочий день (3.13) складе:

$$Q=\int_0^8 P(t)dt=\int_0^8\left(-0,3t^2+0,6t+10\right)dt=\left(-0,1t^3+0,3t^2+10t\right)\Big|_0^8=$$

$=48$ *од. прод.*

<u>Приклад 3</u>. Розрахунок коефіцієнта Джині для визначення степені нерівності за кривою Лоренця (рис. 3.4) (Каррадо Джині (1884–1965 рр.) – італійський економіст, статистик, демограф; Макс Лоренц (1876–1959 рр.) – американський економіст і статистик).

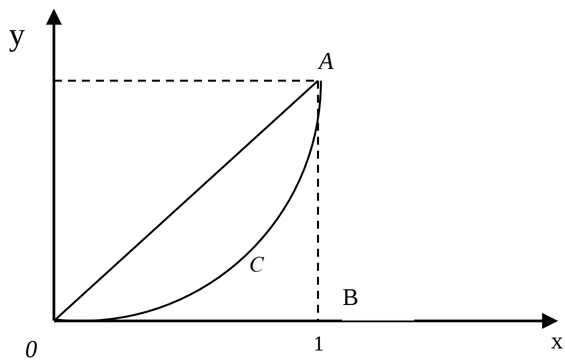


Рис. 3.4.

Вісь *Ox* позначає долю населення, *Oy* – долю доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца є лінійною функцією $y=x$ (лінія *OA* це бісектриса), при нерівномірному – кривою *OCA*. Коефіцієнт Джині визначається відношенням площ:

$$k_{дж}=\frac{S_{OAC}}{S_{OAB}},$$

і лежить в межах $[0,1]$.

Якщо $k=0$ – рівність в доходах населення; $0<k<0,3$ – незначна нерівність; $0,3\le k\le 0,7$ – значна нерівність; $0,7\le k\le 1$ – сильна нерівність.

Нехай крива Лоренца описується рівнянням $y=\frac{3}{4}x^2$, тоді:

$$S_{OAC}=\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4},$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}S_{ODAB}=\frac{1}{2},$$

$$k=\frac{S_{OAC}}{S_{OAB}}=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5,$$

Отже, $0,3\le k\le 0,7$, тому існує значна нерівність доходів населення.

<u>Приклад 4</u>. Дисконтування грошового потоку, тобто визначення початкової суми (дисконтованої суми) S_0 за час t по її кінцевій величині $S(t)$ і процентній ставці P.

Згадаємо формули нарахування процентів. Прості:

$$S(t)=S_0\left(1+\frac{P}{100}t\right), \tag{3.14}$$

звідки дисконтована сума:

$$S_0=\frac{S(t)}{1+\frac{P}{100}t}. \tag{3.14a}$$

Складні проценти:

$$S(t)=S_0\left(1+\frac{P}{100}t\right), \tag{3.15}$$

де $t\in N$ – ціле число періодів;

$$S_0=\frac{S(t)}{\left(1+\frac{P}{100}\right)^t}. \tag{3.15a}$$

Неперервне нарахування процентів:

$$S(t)=S_0e^{\frac{P\cdot t}{100}}, \qquad (3.16)$$

Відповідно, дисконтована (початкова) сума до моменту часу t:

$$S_0=S(t)e^{-\frac{P\cdot t}{100}}. \qquad (3.16а)$$

Розглянемо ситуацію грошового потоку, коли гроші надходять в банк не одноразово S_0, а у вигляді неперервного потоку, функція $S_0(t)$. Тоді загальну суму S_d, що покладена в банк за період часу $[0,T]$ можна записати у вигляді:

$$S_d(T)=\int_0^T S_0(t)dt=\int_0^T S(t)\,e^{-\frac{P\cdot t}{100}}dt, \qquad (3.17)$$

де $S(t)$ – щорічний дохід.

Нехай потрібно визначити, яку суму потрібно внести за період $[0,T]$ в банк під 10% річних, щоб щорічний дохід складав 1 тис. грн. Проценти нараховуються неперервно.

За умовою $S(t)=1$ тис. грн при $t\in[0,T]$ за формулою (3.17) отримаємо:

$$S_d(T)=\int_0^T 1\cdot e^{-\frac{P\cdot t}{100}}dt=\left(-10e^{-\frac{t}{10}}\right)\Bigg|_0^T=-10e^{-\frac{T}{10}}+10 \text{ (тис. грн).}$$

Якщо $T=3$ роки: $S_d(3)\approx 2{,}59$ тис. грн.

Отже, для щорічного доходу 1 тис. грн протягом трьох років (тобто 3 тис. грн за три роки) потрібно зробити внесок на суму 2,59 тис. грн. Прибуток, який отримаємо за три роки:

3 – 2,59 = 0,41 (тис.грн).

ЛЕКЦІЯ 4. Диференціальні рівняння в соціально-економічній сфері

4.1. Процеси природного зростання в економіці

В різноманітних системах: природних, соціальних, економічних тощо, зустрічається велика кількість процесів, в яких деякі величини за однакові проміжки часу Δt змінюють своє значення в одне і теж число разів – це, так звані, процеси природного зростання (ядерна реакція, бактерії, рослини, тварини, населення Землі, грошові вклади та ін.).

Якщо припустити, що проміжок часу Δt наближається до нуля $\Delta t \to 0$ і значення величини, що розглядається (позначимо її $y(t)$) змінюється миттєво, то маємо процес, при якому швидкість $\dot{y}(t)$ зміни величини $y(t)$ в момент часу t пропорційна значенню цієї величини в той самий момент часу:

$$\dot{y}(t) = ky(t) \text{ або } \frac{dy(t)}{dt} = ky(t)\,. \tag{4.1}$$

Отже, диференціальне рівняння (4.1), яке вперше отримав Я. Бернуллі (1654–1705 рр.), описує процеси природного зростання.

Приклад 1. Задача про кредитування (розв'язок Я. Бернуллі). Нехай кредитор отримує p % від суми кредиту S_o за рік. Знайти суму $S(t)$, яку отримує кредитор за кожну одиницю суми кредиту протягом року (або t років), якщо проценти збільшуються неперервно?

Оскільки проценти нарощуються неперервно, то швидкість змінювання величини боргу можна описати рівнянням:

$$\frac{dy(t)}{dt} = kS(t). \tag{4.2}$$

Розв'яжемо рівняння (4.2): виконаємо розділення змінних:

$$\frac{dS(t)}{St} = kdt;$$

після інтегрування лівої і правої частини:

$$S\,\frac{dS(t)}{St} = Skdt,$$

маємо:

$$\ln\left|S(t)\right| = k \cdot t + \ln c, \quad c = const; \tag{4.3}$$

$$S(t)=e^{kt+\ln c}=e^{kt}\cdot e^{\ln c};$$

$$S(t)=ce^{kt}.$$

За умовою задачі: $S(0)=S_o, K=\dfrac{P\%}{100}.$

Тоді сума, яку отримає кредитор від наданого кредиту S_o за t років, складає:

$$S(t)=S_0e^{\frac{P\cdot t}{100}}. \tag{4.4}$$

Отже, від кожної одиниці S_0 кредитор отримує $S_1(t)=\exp(Pt/100)$. За рік. $t=1$, $S_1(1)=\exp(Pt/100)$ грош. од.

Приклад 2. Зростання грошового вкладу.

Рівняння (4.4) можна використовувати для наближеної оцінки накопиченої суми грошового вкладу. Нехай початковий вклад 1 грн під 10%. Скільки отримаємо через 10, 100, 500, 1000 років?

Із (4.4) маємо:

$$S(10)=1\cdot\exp(10\cdot 10/100)\approx 2,72 \textit{ грн;}$$

$$S(100)=\exp(10)\approx 22026,47 \textit{ грн;}$$

$$S(500)=\exp(50)\approx 5,18\cdot 10^{21} \textit{ грн;}$$

$$S(1000)=\exp(100)\approx 2,69\cdot 10^{43} \textit{ грн.}$$

Останні дві величини набагато перевищують всі грошові запаси Земної кулі. Даний приклад ілюструє одну із причин проведення грошових реформ: борги банків вкладникам зростають достатньо швидко, а збільшення грошової маси для їх погашення призводить до інфляції.

Приклад 3. Темп інфляції та рівень цін.

Загальний рівень цін можна обчислювати за формулою природного зростання (4.4):

$$Z(t)=Z_0\exp\left(\frac{P\cdot t}{100}\right).$$

При подвоєнні рівня цін отримаємо:

$$Z(t)=2Z_0.$$

Прирівняємо ці вирази:

$$2Z_0 = Z_0 \exp\left(P \cdot t / 100\right);$$

$$2 = \exp(P \cdot t / 100),$$

прологарифмуємо останнє рівняння і виразимо t:

$$\ln 2 = \frac{P \cdot t}{100};$$

$$t = \frac{100 \cdot \ln^2}{P}.$$

Оскільки $\ln 2 \approx 0,7$, отримаємо "правило величини 70":

$$t \approx \frac{70}{P}.$$

Якщо рівень інфляції $P = 10\%$ – рівень цін подвоїться через 7 років; якщо $P = 20\%$ – $t \approx 3,5$ роки.

Приклад 4. Модель природного зростання випуску дефіцитної продукції.

Позначимо: $x(t)$ – кількість продукції виробленої в момент часу t; c – фіксована ціна реалізації продукції; $c \cdot x(t)$ – дохід в даний момент часу t. Нехай для розширення виробництва використовується частина доходу g_u (інвестиції у виробництво $u(t)$):

$$u(t) = \frac{C}{g_u} x(t).$$

Постійні інвестиції у виробництво приведуть до пропорційного зростання швидкості випуску продукції $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = aU(t) = \frac{ac}{g_u} x(t) = k_u x(t), \qquad (4.5)$$

де a – коефіцієнт пропорційності; $k_u = \frac{ac}{g_u}$.

Розв’язком рівняння (4.5) є функція:

$$x(t) = x_o e^{k_u t}, \qquad (4.6)$$

яка показує процес зростання обсягів виробництва при виділенні частини доходу для розширення виробництва.

Модель природного зростання (4.5) покладена в основу моделі Харрода–Домара (Рой Харрод (1900–1978 рр.) – англійський економіст, Євсей Дейвид Домар (нар. 1914) – американський економіст) про стійкість темпів зростання виробництва, що забезпечується: природним зростанням населення, продуктивності праці, розміром накопичення капіталу (норма накопичення – $const$).

Приклад 5. Зростання населення (модель динаміки популяції Мальтуса).

В ідеальних умовах, тобто коли середовище не лімітує розмноження (рівняння Томаса Мальтуса, 1802 р.) – це значить, що є в достатку їжа, життєвий простір, густина розселення достатня для утворення пар, температура оптимальна тощо, можна скористатися рівнянням (4.1):

$$\frac{dN}{dt} = rN, \tag{4.7}$$

де r – коефіцієнт швидкості розмноження популяції (природного зростання).

Розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд експоненти (рис. 4.1):

$$N = N_0 \exp(rt), \tag{4.8}$$

де N_0 – початкова чисельність популяції (населення).

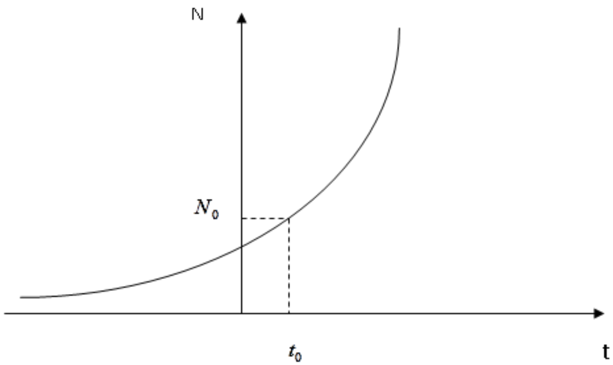


Рис. 4.1.

Якщо вибрати обмежуючі умови для моделі (4.7), що населення не повинно перевищувати $N = 40$ млрд чол., швидкість зростання 1,25 % на рік $(r = 0{,}0125)$, $N_0(t_0 = 1999\,рік)$ = 6 млрд чол., то можна визначити, коли границя насичення буде досягнута (за моделлю Мальтуса), рівняння (4.8):

$$40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9 \exp(0{,}0125 \cdot t),$$

звідки знаходимо t:

$$t = \frac{1}{0{,}0125} \cdot \ln\frac{40}{6} \approx 150\,\text{років}.$$

4.2. Моделі логістичного зростання

Розглянуті прості моделі (4.1)– (4.8) лінійні, тому для них справедливий так званий **принцип суперпозиції**, який означає, що будь-яка лінійна комбінація розв’язків (наприклад, їх сума) також є розв’язком задачі. Користуючись принципом суперпозиції можна оцінювати властивості загальної ситуації (випадку, розв’язку) по властивостям частинної – різниця між двома розв'язками характеризується тільки кількісно.

Тобто, в лінійних моделях відгук об’єкта моделювання на змінювання умов буде пропорційним величині даного змінювання. Саме принцип суперпозиції надає лінійним моделям популярність їх використання, а також, в першому наближенні до реальності, обґрунтовує доцільність лінеаризації процесів (об’єктів, систем тощо), які вивчаються.

Однак, більшість реальних процесів, явищ та відповідних їм математичних моделей нелінійні, тобто не підпорядковані принципу суперпозиції. При використанні моделей природного зростання необхідно враховувати механізми насиченості та відповідно скорегувати лінійні моделі, в основі яких лежить рівняння Якоба Бернуллі (4.1):

$$\dot{y}(t) = ky(t)\,.$$

Припущення Дж. К’ютелета, що коефіцієнт k рівняння (4.1) повинен бути не сталою, а спадаючою функцією, яка залежить від $y(t)$, перетворює рівняння (4.1) на нелінійне:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k(y(t)) \cdot y(t)\,, \tag{4.9}$$

що дозволяє описувати механізм насичення в різних прикладних задачах.

Ця ідея була покладена в основу багатьох моделей логістичного типу: модель динаміки популяції (зростання населення) за рівнянням Ферхюльста (учень Дж. К'ютелета), випуск продукції в умовах конкуренції та насиченості ринку, моделі "соціальної дифузії" (поведінки, моди, ринку інформації, рекламної кампанії, новацій тощо), модель росту виробництва з урахуванням інвестицій та ін.

Оскільки саме модель Ферхюльста застосовується при моделюванні не тільки природних, а й соціально-економічних явищ, розглянемо детальніше рівняння, що покладено в її основу (воно суттєво корегує і доповнює Мальтуса (4.7) – модель динаміки популяції).

Отже, у 1836 р. Ферхюльст пропонував використати для опису процесу зростання населення рівняння, яке враховує реальний ефект саморегуляції чисельності N в умовах обмеженості ресурсів, внутрішньої боротьби (конкуренції) в популяції:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{k}N^2, \tag{4.10}$$

де від'ємний нелінійний елемент $-\frac{r}{k}N^2$ описує ефект саморегуляції; $k = N_{\max}$ – максимально можлива чисельність популяції (угрупування).

Рівняння (4.10) часто записують у вигляді:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right). \tag{4.11}$$

Знайдемо розв'язок рівняння (4.11). Спочатку розділимо змінні:

$$\frac{dN}{N(1 - \frac{N}{k})} = rdt. \tag{4.12}$$

Врахуємо наступне співвідношення:

$$\frac{1}{N\left(1-\frac{N}{k}\right)}=\frac{1}{N\left(\frac{k-N}{k}\right)}=\frac{k}{N(k-N)}=\left\| \begin{array}{l}\text{у чисельник додати і}\\ \text{відняти } N:+N-N\end{array}\right\|=$$

$$\frac{k+N-N}{N(k-N)}=\frac{(k-N)+N}{N(k-N)}=\frac{k-N}{N(k-N)}+\frac{N}{N(k-N)}=\frac{1}{N}+\frac{1}{k-N},$$

і запишемо (4.12) після інтегрування у вигляді:

$$\int\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{k-N}\right)dN=\int rdt,$$

$$\ln N-\ln(k-N)=rt+\ln a,$$

де $\ln a=\mathrm{const}$.

Звідки отримаємо:

$$\ln\frac{N}{k-N}=rt+\ln a,$$
$$\frac{N}{k-N}=ae^{rt}. \qquad (4.14)$$

Якщо відомо, що при $t=0$ число особин було $N=N_0$, то з (4.14) маємо:

$$a=\frac{N_0}{k-N_0}. \qquad (4.15)$$

Розв'яжемо (4.14) для отримання функції $N(t)$:

$$N=(k-N)ae^{rt}=kae^{rt}-Nae^{rt},$$

$$N+Nae^{rt}=ake^{rt},$$

$$N(1+ae^{rt})=ake^{rt},$$

$$N=\frac{a\cdot ke^{rt}}{1+ae^{rt}}. \qquad (4.16)$$

Розділимо праву частину (чисельник і знаменник) на e^{rt}, врахуємо (4.15) і позначимо $N=N(t)$. Тоді (4.16) можна переписати у вигляді:

$$N(t) = \frac{ak}{a+e^{rt}} = \frac{k}{1+e^{-rt}\cdot a^{-1}} = \frac{k}{1+e^{-rt}\cdot\dfrac{k-N_0}{N_0}} = \frac{N_0 k}{N_0+(k-N_0e^{-rt})}. \quad (4.17)$$

Властивості отриманого рішення:

1) при малих значеннях чисельності популяції (або біомаси) зростання відбувається за експоненціальним законом (як в ідеальній моделі Мальтуса);

2) при необмеженому зростанні часу чисельність популяції асимптотично наближається до значення $N = k$ ($k -$ ємність середовища).

3) можна показати аналітично, що при $t \to \infty$ величина $N(t) = k$:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{ake^{rt}}{1+ae^{rt}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to\infty}\frac{\left(ake^{rt}\right)'}{\left(1+ae^{rt}\right)'} = \lim_{t\to\infty}\frac{akre^{rt}}{are^{rt}} = k\ ,$$

або із (4.12):

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ak}{a+e^{-rt}} = \frac{\infty}{\infty} = \left|e^{-rt} \to 0\right| = \frac{ak}{a} = k = N_{\max}.$$

Розглянута модель Ферхюльста застосовується до інших соціально-економічний явищ. Перепишемо вираз (4.11) в позначеннях рівняння (4.9): $\dot{y}(t) = k(y(t))y(t)$, якщо $r = k_o, K = y_{\max}$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_0\left(1-\frac{y(t)}{y_{\max}}\right)y(t), \quad (4.18)$$

де $k(y(t)) = k_0\left(1-\dfrac{y(t)}{y_{\max}}\right)$; k_0 – коефіцієнт пропорційності (швидкості); $y_{\max}$ – максимальне значення $y(t)$, що визначає лінію (границю) насичення.

Далі буде наведено декілька моделей, отриманих на основі рівняння (4.18), що описують процеси соціально-економічної області (моделі "соціальної дифузії", забезпеченість новаціями, новою продукцією, інформацією тощо).

Приклад 6. Моделювання рекламної кампанії.

Рекламну кампанію можна поділити на три етапи:

1) *початковий етап*, коли витрати на рекламу можуть перевищувати прибуток внаслідок невеликої інформованості потенційних покупців про нові товари – попит маленький;

2) *розвинутий* – етап швидкого збільшення попиту (реалізації продукції);

3) *етап насичення* – попит задовольняти кількість продаж зменшується, тому рекламувати товари недоцільно.

Отже, весь процес організації реклами можна подати у вигляді логістичної кривої (функції з насиченням).

В основу побудови математичної моделі покладена ідея "насичення", тобто швидкість змінювання (зростання) з часом t будь-якої величини $y\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)$ пропорційна добутку поточного значення цієї величини $y(t)$ та різниці граничного (максимального, насиченого) $y_н = y_{\max}$ і поточного $y(t)$ значення:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx y(t) \cdot \left(y_н - y(t)\right). \tag{4.19}$$

В моделі також потрібно врахувати витрати на рекламу в залежності від часу $a(t)$ та степінь контактів (спілкування, взаємодії) потенційних покупців $b(t)$. Причому, коефіцієнт $b(t)$ повинен визначатись кількістю контактів в одиницю часу $k(t)$ та рівнем агітації ξ, який (рівень агітації) буде змінюватись в границях $\xi \in [0;1]$: якщо $\xi = 1$ – агітація має максимальний успіх (100 % покупець, "наш клієнт").

Тоді загальна модель рекламної компанії буде мати вигляд:

$$b(t) = \xi - k(t). \tag{4.20}$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left(a(t)+\xi k(t)\right)\cdot\left(y_н-y(t)\right)\cdot y(t)\,. \tag{4.21}$$

<u>Приклад 7.</u> Модель зростання виробництва з урахуванням інвестицій $u(t,y(t))$.

Перепишемо рівняння (4.18) з урахуванням функції $u(t,y(t))>0$:

$$\frac{dy(t)}{dt}=k_0y(t)\left(1-\frac{y(t)}{y_{\max}}\right)+u\left(t,y(t)\right). \tag{4.22}$$

Якщо для зручності позначити $y(t)=y_t$, де індекс t величини y_t буде визначати залежність випуску продукції від часу t, то рівняння (4.22) можна записати у спрощеному вигляді:

$$\frac{dy(t)}{dt}=k_0y_t\left(1-\frac{y_t}{y_{\max}}\right)+u\left(t,y_t\right). \tag{4.23}$$

Розглянемо спрощену ситуацію інвестування у виробництво на числовому прикладі. Припущення: початкова умова $y(0)=0$ – в початковий момент часу $t=0$ продукція не випускається; в кінцевий момент часу t інвестор робить вклад в сумі $u(t)$, який, в першому наближенні, одразу впроваджується у виробництво (випуск продукції). Тоді кількість випущеної продукції можна записати спрощеним рівнянням:

$$\frac{dy(t)}{dt}=u(t)\,. \tag{4.24}$$

Оцінимо перевагу одної із двох схем фінансування (сума інвестиції 20 тис. грн):

1) кожен рік по 10000 грн;

2) в перший рік всі 20000 грн.

Схема 1. Для періоду $0<t<2$ інвестиції $u(t)=10000$ грн. Із (4.24) маємо:

$$\frac{dy(t)}{dt}=u(t)=10000\,. \tag{4.25}$$

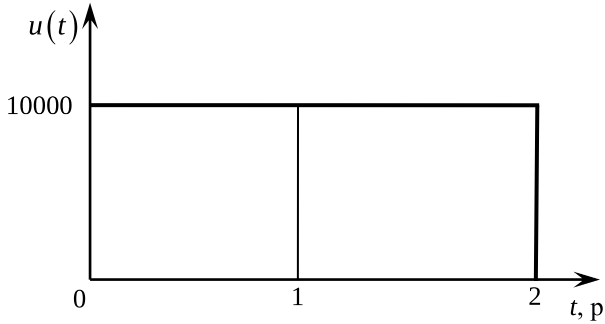


Рис. 4.2.

Тоді при умові $y(0)=0$ отримаємо розв'язок:

$$y(t)=10000t\,. \tag{4.26}$$

Графічно вираз (4.26) представляє собою лінію (рис. 4.3).

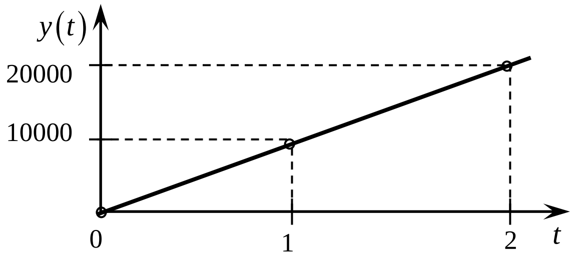


Рис. 4.3.

Об'єм виробленої продукції Vy_1 за два роки дорівнює площі фігури, обмеженої лінією $y(t)$ на рис. 4.3.

$$Vy_1=\int_0^2 y(t)dt=\int_0^2 10000\,tdt=10000\int_0^2 tdt=10000\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^2= \\ =10000\cdot\frac{4}{2}=20000\ \textit{грн.} \tag{4.27}$$

Схема 2. Для періоду $0<t<1$ інвестиції $U(t)=20000$ грн, для періоду $1<t<2$ інвестиції $U(t)=0$ грн.

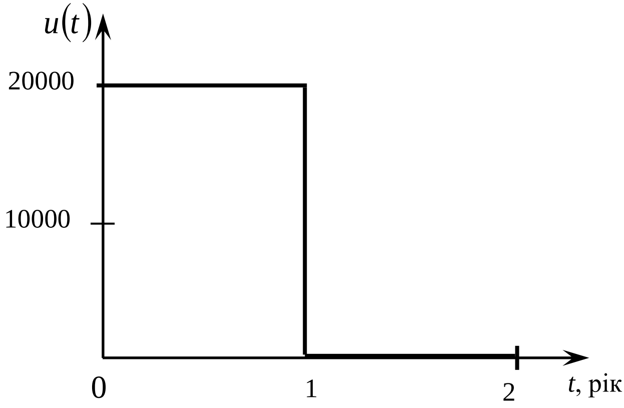


Рис. 4.4.

Тоді при умові $y(0)=0$ отримаємо: для $0<t<1$, $\dfrac{dy(t)}{dt}=20000$, звідки $y(t)=20000t$; а при умові $y(1)=20000$ для $1<t<2$, $\dfrac{dy(t)}{dt}=0$, звідки $y(t)=const=y(t)=20000$ (рис. 4.5).

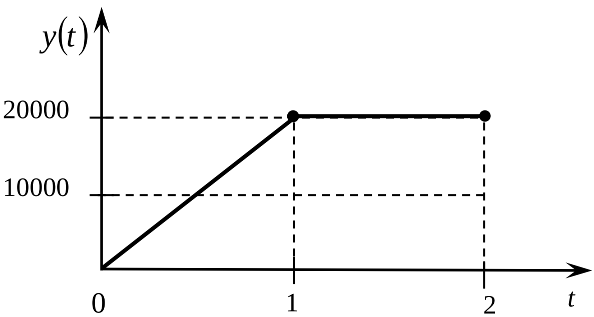


Рис. 4.5.

Об'єм продукції протягом двох років за другою схемою інвестування розраховується аналогічно (4.27):

$$Vy_2=\int_0^1 20000tdt+\int_1^2 20000dt=20000\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1+20000t\Big|_1^2=10000+20000=30000\textit{грн.}$$

Отже, друга схема інвестування більш вигідна, особливо на початковому етапі.

ЛЕКЦІЯ 5. Технологія розв'язування задач економіки інструментами пакету комп'ютерної математики MathCad

5.1. Загальні відомості про систему MathCad

MathCad – спеціалізований математично-орієнтований програмний засіб для наукових та інженерних розрахунків. У склад MathCad входять декілька інтегрованих між собою компонентів: потужний текстовий редактор для введення та редагування тексту і формул, обчислювальний процесор – для проведення розрахунків та символьний процесор, як елемент системи штучного інтелекту. Сполучення цих компонентів дає можливість розв'язувати ряд задач, а саме:

– введення математичних виразів та тексту за допомогою вбудованого редактора MathCad;

– проведення математичних розрахунків;

– підготовки графічних об'єктів з результатами розрахунків;

– введення та виведення даних у файли різних форматів;

– друкування документів MathCad, або збереження у форматі RTF для подальшого редагування спеціалізованими засобами (наприклад, Word);

– підготовки Web-документів;

– поєднання розроблених документів в електронні книги, які дозволяють зберігати математичну інформацію та виконувати розрахунки, залишаючись MathCad–програмами;

– символьний процесор, який дозволяє виконувати аналітичні перетворення, а також отримувати довідкову математичну інформацію.

Інтерфейс користувача MathCAD схожий з іншими додатками Windows і складається із компонентів: рядок меню (menu bar); панелі інструментів (Toolbars) – Стандартна (Standard), Форматування (Formatting), Ресурси (Resources), Управління (Control); панель інструментів Math та доступні через неї додаткові математичні панелі; робоча область (Worksheet); рядок стану; контекстне меню; діалогові вікна (рис. 5.1).

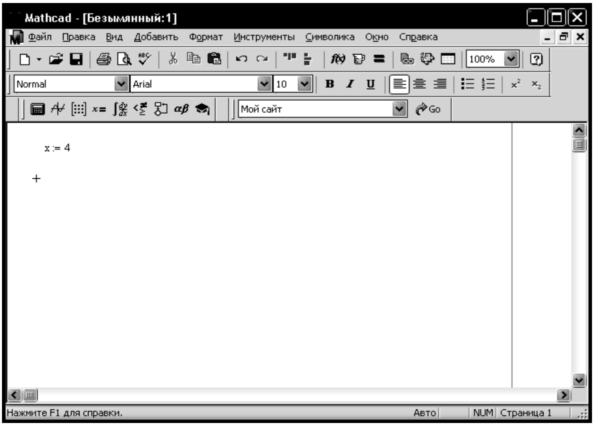


Рис. 5.1

Розглянемо детальніше панель Math, яка складається з дев'яти додаткових панелей, рис. 5.2–5.3.

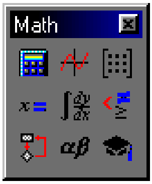


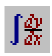
Рис. 5.2.

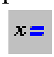
1. Калькулятор (Calculator) – вставка основних математичних функцій, операторів, чисел; 

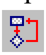
2. Графік (Graph) – вставка діаграм, графіків; 

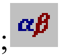
3. Матриця (Matrix) – вставка матриць та матричних операторів; 

4. Обчислення (Evaluation) – вставка операторів управління обчисленням; 

5. Числення, розрахунки (Calculus) – вставка операторів диференціювання, інтегрування, додавання, добутку, границь; 

6. Логіка (Boolean) – вставка логічних операторів; 

7. Програмування (Programming) – засоби програмування в MathCad; 

8. Грецька (Greek) – вставка грецьких символів; 

9. Символьна (Symbolic) – вставка символьних операторів. 

Позиціонування курсора на заданому операторі панелі викликає підказку з поясненням, а в деяких випадках сполучення клавіш для вставки відповідного оператора.

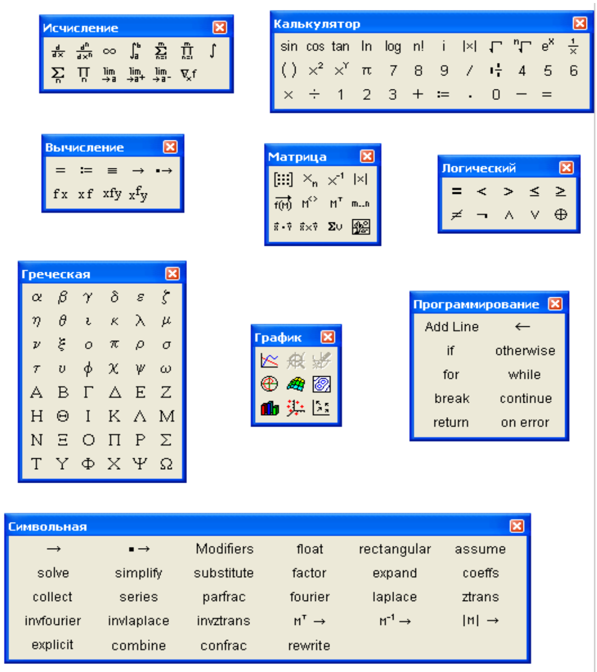


Рис. 5.3.

Введення та редагування даних виконується із використанням інтерфейсу редагування:

– показчик "миші";

– курсор введення + (червоний хрестик) – показує позицію для введення тексту або формули;

– лінія введення:

1) "___|" – горизонтальна і вертикальна синього кольору виділяє у тексті або формулі визначену частину;

2) " | " – вертикальна лінія введення тексту;

– місцезаповнювачі:

1) символа █ (чорний прямокутник);

2) оператора □ (чорна рамка).

Ведення формул:

1) указати позицію для введення;

2) ввести формулу з клавіатури та за допомогою панелей інструментів.

При введенні формули утворюється математична область (math region).

Управління лініями введення:

– маніпулятором "миша";

– клавішами переміщення курсора (стрілочками), пробіл та "Ins".

Введення і редагування тексту. Текст використовується для двох цілей: коментування та оформлення документів для створення звітів.

Для введення тексту необхідно створити текстову область одним із способів:

Спосіб 1: вказати місце; клавіша $\boxed{\text{"}}$ (лапки).

Спосіб 2: вказати місце; меню "Вставка / Текстовая область" (Insert/Text Region).

Для розміщення формули всередині текстової області потрібно:

– клацнути в заданій позиції текстової області;

– меню "Вставка / Математическая область" (Insert/Math Region) або клавіші [Ctrl + Shift +A] – утворюється пустий місцезаповнювач посеред тексту;

– ввести формулу.

Особливості:

1. Математична область посеред тексту впливає на обчислення так само, як і без тексту;

2. Для відключення математичної області від розрахунків в режимі редагування формули – команда меню "Формат/Свойства/Вычисления", прапорець "Выкл. вычисления".

В MathCad змінні, функції та оператори реалізовані традиційно (як у математиці). Допустимі символи в іменах змінних та функцій наступні:

– великі та малі літери: MathCad розрізнює регістр та шрифт символів;

– числа 0 ÷ 9;

– символ нескінченності ∞. Способи вставки: [Ctrl+Shift+Z] або Панель інструментів "Исчисления " (Calculus) → штрих [Ctrl+F];

– грецькі літери – панель "Греческие символы" (Greek);

– символ підкреслення;

– символ відсотків %;

– нижній індекс – для вставки нижнього індексу ввести крапку "·", після чого лінія введення основного рівня переміститься на лінію введення нижнього рівня (не плутати з індексом векторної змінної).

Обмеження на імена змінних та функцій в MathCad:

1. Ім'я не повинно починатись з: цифри; символу підкреслення; штриха; процента;

2. Символ нескінченності " ∞ " повинен бути першим в імені змінних (функцій);

3. Всі літери імені не повинні співпадати з іменами вбудованих функцій, констант і розмірностей. Однак, можна перевизначати функції (константи, розмірності), але тоді вбудовані функції втрачають своє первинне призначення;

4. MathCad не розрізнює імена змінних і функцій. Наприклад, якщо спочатку визначити функцію *f(x)*, а потім змінну *f*, то решта документа втратить доступ до функції *f(x)*.

Функції вводяться у звичайній формі:

ім'я функції (список змінних)

наприклад, $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$.

У системі MathCad розрізнюють функції двох типів: вбудовані функції та функції, що визначаються користувачем. Створення імен, що містять оператори та спецсимволи (наприклад, a + b = 1):

Спосіб 1: залучити у квадратні дужки:

1) [Ctrl+Shift+J] – з'являється пара квадратних дужок з місцезаповнювачем всередині: [■] : = 1;

2) ввести послідовність символів та операторів: [а + в]: = 1.

Спосіб 2. Ім'я без квадратних дужок (напр., а + в):

1) ввести перший символ "а";

2) [Ctrl+Shift+K] – ця комбінація клавіш переводить систему в "текстовий" режим редагування;

3) ввести оператор "+";

4) [Ctrl + Shift + K] повернення в математичний режим редагування;

5) Ввести другий символ "в" а + в : = 1.

Якщо потрібно, щоб ім'я починалось зі спецсимвола (наприклад $: = 1), то необхідно використати "Спосіб 2", тільки спочатку ввести будь-який символ, а по завершенні – вилучити його.

Оператори присвоювання та виводу значень

Оператор присвоювання " := " вставляється трьома способами:

1) клавішею ":";

2) з панелі "Калькулятор" (Calculator);

3) з панелі "Вычисления" (Evaluation).

Ввести нове значення змінної (функції) можна у вигляді числа або математичного виразу, а також для змінних можна використовувати рядкові значення:

$$x := 1$$
$$y := x^2 + \cos x$$
$$z := "KUKU".$$

Якщо змінна створюється в документі вперше, то для введення оператора присвоювання допускається використовувати символ дорівнює "=", який автоматично змінюється на ": =". Оператор виводу числових значень " = " вставляється: клавішею " = "; з панелі "Калькулятор" (Calculator); з панелі "Вычисления" (Evaluation). Особливість:

1) перед обчисленням виразу потрібно визначити значення кожної змінної (присвоїти);

2) при визначенні функцій користувача потрібно визначити змінні перед введенням функції або ввести їх у список змінних даної функції.

Приклад 5.1.

$$x := 2 \qquad f(x, y) := x^2 \cdot (\cos(x+y) - \sin(x+y))$$
$$y := x^2 + 1 \qquad f(x, y) = 0.388$$
$$x \cdot y = 10 \qquad f(1,2) = -1.131$$
$$x = 2 \qquad x := 1.5$$
$$y = 5 \qquad y := 2.2$$
$$f(x, y) = -0.716$$

Оператор виводу символьних значень (аналітичного обчислення значень виразу) підключає символьний процесор (система штучного інтелекту), який проводить аналіз тексту математичного виразу, виконує аналітичне обчислення і видає результат у символьному вигляді. Оператор позначається символом "→" і вставляється одним із способів:

1) [Ctrl + ·];

2) панель "Символьная" (Symbolic);

3) панель "Вычисления" (Evaluation).

Особливість: для символьного обчислення змінні можна не визначати. Якщо змінним були присвоєні раніше деякі значення, то символьний процесор підставить їх у спрощену формулу і видасть результат з урахуванням цих значень.

Приклад 5.2.

$$x := 2 \quad y := 5$$
$$f(x, y) := x^2 \cdot (\cos(x+y) - \sin(x+y))$$
$$f(x, y) \to 4 \cdot \cos(z) - 4 \cdot \sin(z)$$
$$\sin(2z) \to \sin(2z)\text{expand} \to 2 \cdot \cos(z) \cdot \sin(z)$$
$$(a^2 \cdot \sin(2z) + \frac{1}{a}) \cdot a^3 \cdot \frac{1}{\cos(z)} \to \frac{a^3(\frac{1}{a} + a^2 \cdot \sin(2z))}{\cos(z)}\text{simplify} \to$$
$$2 \cdot \mathrm{a}^5 \cdot \sin(z) + \frac{a^2}{\cos(z)}$$

Оператор глобального присвоювання "≡" вставляється з панелі "Вычисления" (Evaluation) і призначений для визначення змінних, констант або функцій в будь-якій частині документа на відміну від оператора локального присвоювання ": =", який впливає тільки на "нижню" частину документа. Взагалі процес визначення змінних (констант, функцій), тобто операція присвоєння, в MathCad проходить в два етапи:

I етап – розпізнаються всі оператори глобального присвоювання і всі вирази в документі (зверху до низу та зліва направо) обчислюються відповідно до них;

II етап – аналізуються оператори локального присвоювання і всі вирази обчислюються з поправкою до них.

Арифметичні оператори вводять з панелі інструментів Калькулятор (Calculator) або за допомогою відповідних клавіш.

Обчислювальні оператори вводять з панелі інструментів "Логика" (Boolean). Результатом обчислення є одна з двох числових констант – 1 (істина, True) та 0 (ложь, False).

Матричні оператори – панель інструментів "Матрица" (Matrix) – призначені для операцій над векторами і матрицями, більшість з яких реалізує чисельні алгоритми.

Оператори *користувача* (*бінарні та унарні*) – панель інструментів "Вычисления" (Evaluation) – "fx","xf","xfy", "$x^f y$".

В системі MathCad реалізовані два режими обчислень:

1) автоматичний режим;

2) примусовий (ручний) режим.

При створенні нового документа по замовченню встановлюється автоматичний режим обчислень. Взагалі, режим обчислень можна вибрати за допомогою команди меню "Инструменты/вычислить" (Tools/Calculate) способом установки або виключення прапорця "Автоматическое вычисление" (Automatic Calculation). Якщо вибраний "ручний" режим, то запуск обчислення можна виконати так:

1) для обчислення формул видимої частини документа: клавіша [F9] або кнопка "=" стандартної панелі інструментів чи команда меню "Инструменты/Вычислить/Вычислить сейчас";

2) для обчислення всіх формул документа: клавіші [Ctrl + F9]; команда меню "Инструменты/Вычислить/Вычислить рабочий лист" (Tools/Calculate/Calculate Worksheet).

При необхідності виконання переривання обчислювального процесу користуються клавішею [Esc]; для оновлення (продовження) обчислень – [F9] або відповідна команда меню. Для блокування обчислення окремої формули – контекстне меню на формулі вибрати команду "Отключить вычисления" (Disable Evaluation). При цьому формула буде позначена чорним прямокутним маркером в позиції верхнього індекса. Зворотну операцію (розблокувати формулу) виконують аналогічно, тільки вибирають команду "Разрешить вычисления". Режим оптимізації обчислень – режим прискорення числових обчислень за рахунок застосування елементів символьної математики (спрощення виразів символьним процесором). Режим оптимізації підключають до окремих формул або до всього документа (робочого аркуша):

Спосіб 1 – команди меню "Инструменты/ Оптимизация/ Формула, Документ" (Tools/ Optimize/ Equation, WorkSheet);

Спосіб 2 – контекстне меню на формулі, команда "Оптимизировать".

Для перегляду процесу оптимізації вибрати відповідну команду "Показать оптимизацию" (Show Optimization).

Типи даних

До основних типів даних, які обробляються процесорами системи MathCad, відносять:

1) числа – дійсні, комплексні, вбудовані константи (система MathCad зберігає всі числа у форматі подвійної точності з плаваючою крапкою);

2) рядки – будь-який текст у лапках;

3) масиви – упорядкуванні послідовності чисел або рядків, в тому числі ранжировані змінні, вектори та матриці.

Розглянемо особливості використання різних типів даних, їх введення-виведення, представлення у заданих форматах. Дійсні числа можна вводити (виводити) у вигляді:

– десяткових, де роздільником цілої і дробової частини чисел використовується "." (крапка);

– з порядком, наприклад, 1.23 × 104.

Формати подання числових результатів можна установити додатково (в меню "Формат/Результат"), наприклад, десятковий (Decimal), науковий (Scientific) – "1.23×103", інженерний (Engineering) – "1.23E+003", дробовий (Fraction) – "$1\frac{23}{100}$". Для введення комплексних чисел (Re+jIm) використовують уявну одиницю (imaginary unit) за допомогою символів "i" або "j", наприклад, ввести комплексне число $x = 2 + i3$:

$$x := 3i + 2.$$

Вбудовані константи та змінні поділяються на два типи:

1) математичні – значення деяких математичних символів;

2) системні змінні – визначають роботу чисельних алгоритмів.

Математичні константи:

– нескінченність;

– основа натурального логарифма – *e* (клавіша "*e*");

– число "π" ([Ctrl + Shift + P]);

– уявна одиниця *i*, *j* (клавіші [1+i], [1+j]);

– символ процента %.

Системні змінні (system variables):

1. TOL – точність чисельних методів;

2. CTOL – точність виконання виразів;

3. ORIGIN – номер початкового індекса в масивах;

4. PRNPRECISION – установка формата даних при виводі у файл;

5. PRNCOLWIDTH – установка формата стовпчика при виводі з файла;

6. CWD – рядкове подання шляху до поточної робочої папки.

Значення системних змінних установлені по замовчуванню (CTOL=1×10-3, ORIGIN = 0 і т.д).

Перевизначити системні змінні можна за допомогою команди "Инструменты/Параметры рабочего листа/Встроенные переменные (вікна "Настройки рабочего листа")" (Tools/Worksheet Options/Built-in Variables).

Виділяють масиви двох типів: вектори (одноіндексні масиви), матриці (двоіндексні масиви) і тензори (багатоіндексні масиви); ранжовані змінні – вектори, елементи яких деяким чином залежать від індекса. Існує декілька способів створення масивів: введення всіх елементів командою "Добавить/Матрицу" (Insert/Matrix); визначення окремих елементів масиву; створення таблиці даних і введення чисел; використання вбудованих функцій створення масивів; створення зв'язку з іншими програмами (Excel, Matlab); читання із зовнішнього файла даних.

Створення розмірних величин можна виконати декількома способами:

1) за допомогою команди меню "Добавить/Единицу измерения…" (Insert/Unit);

2) [Ctrl + U];

3) кнопкою панелі інструментів "Стандартные" у вигляді склянки.

5.2. Організація виводу даних у графічній формі

Система MathCad містить досить потужний інструментарій створення та оброблення графічних об'єктів. Дані засоби можна підключити для використання наступними способами:

1) панель інструментів "Графік" (Graph);

2) команда меню "Вставка/Графики" (Insert/Graph);

3) команда меню "Вставка/Объект" та вибрати потрібний тип діаграми або малюнка Microsoft Graph, Excel, Word, Paintbrush тощо;

4) команда меню "Формат/Графики" (Format/Graph);

5) команда меню "Вставка/Графики/Мастер графиков" (Insert/Graph/Plot Wizard);

6) контекстне меню в області графічного об'єкта.

Алгоритм створення графічного об'єкта:

– підготувати початкові дані (для елементарних функцій без заданих діапазонів змінювання аргумента – не обов'язково);

– указати курсором місце вставки графічного об'єкта;

– вибрати потрібний графік: панель інструментів або меню "Вставка/Графики";

– ввести у місцезаповнювачі імена змінних або функцій та їх аргументи;

– завершити операцію: клавіша [Enter] або "клацнути" за межами графічного об'єкта.

Система MathCad дає можливість побудувати декілька типів графіків. Двомірні графіки: x-y графік (x-y Plot) – [Shift + 2]; полярний графік (Polar Plot) – [Ctrl + 7]. Тримірні графіки: поверхні (Surface Plot) – [Ctrl + 2]; контурний – ліній рівня (Contour Plot) – [Ctrl + 5]; 3D полос (3D Bar Plot); 3D множини точок (3D Seatter Plot); векторне поле (Vector Field Plot).

Двовимірні графіки

Розглянемо способи побудови графіків в декартовій системі координат (x-y графіки). Спосіб 1 – створити два ряда даних (x, y) у вигляді матриць-векторів або стовпчиків (рядків) таблиці і ввести імена векторів у місцезаповнювачі відповідних осей графіка. MathCad автоматично визначає границі графіка згідно діапазону значень елементів векторів (рис. 5.4).

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \\ 16 \\ 18 \\ 23 \end{pmatrix}$$

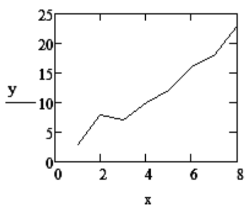


Рис. 5.4.

Спосіб 2 – використати ранжировану змінну, причому, другу вісь потрібно позначити або виразом, що містить саму ранжировану змінну, або елементом вектора з індексом ранжированої змінної (рис. 5.5).

$$i := 1..20 \qquad x_i := i \cdot 0.5 \qquad y_i := \cos(x_i)$$

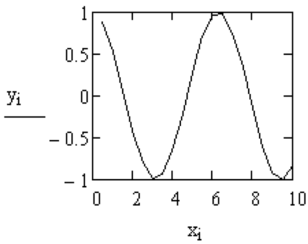


Рис. 5.5.

Спосіб 3 – "швидкої побудови графіка функції". Необхідно ввести функцію та ім'я аргументу функції у місцезаповнювачі відповідних осей. Автоматично створюється графік функції у діапазоні значень аргументу [-10…10] по замовчуванню (рис. 5.6).

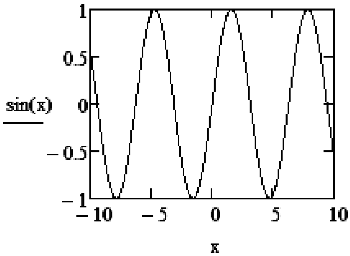


Рис. 5.6.

Спосіб 4 – виконати дискретизацію значень функції, присвоїти ці значення вектору і побудувати його графік (рис. 5.7).

Особливість: необхідно враховувати, що попереднє присвоювання значень аргументу функції буде впливати на результат побудови графіка.

Способи побудови графіків в полярних координатах аналогічні. Особливість зв'язана лише з вибором відповідного об'єкта панелі "Графік" (Graph) – " Полярний графік Ctrl+7" (Photo

Plot) та координат: радіус-вектор (лівий місцезаповнювач) та кут (нижній місцезаповнювач), рис. 5.8.

$i := 1..30 \quad x_i := i \cdot 0.2 \quad y_i := \sin(x_i)$

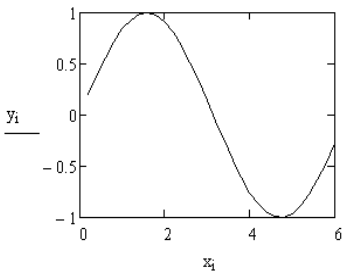


Рис. 5.7.

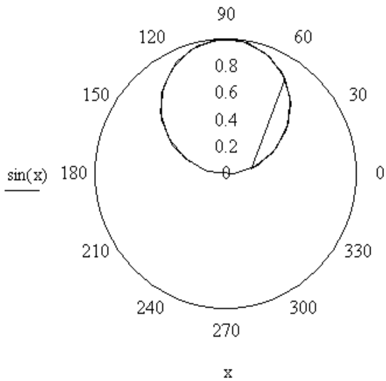


Рис. 5.8.

Форматування двомірних графіків виконується інструментальними засобами: команда меню "Формат / Графики"; подвійне клацання в області графіка; контекстне меню в області графічного об'єкта, команда "Формат…" (рис. 5.9).

Виділимо деякі особливості обробки двомірних графічних об'єктів. Для побудови (додавання) декількох рядів даних (MathCad дозволяє до 16 різних залежностей) потрібно: активізувати графічний об'єкт (клацнути на графіку); розмістити лінії введення так, щоб вони охопили вираз у надпису осі "Y" (використати маніпулятор "миша" і клавіші управління курсором – "стрілочка →"); ввести кому "," і з'явиться місцезаповнювач для введення нового виразу; ввести вираз; завершити операцію (клацнути "мишею").

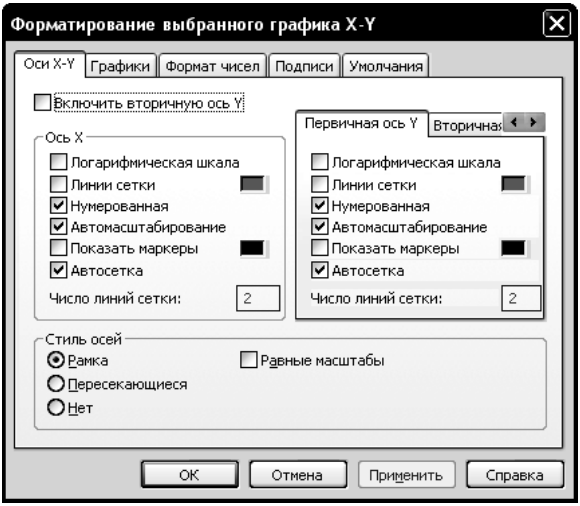


Рис. 5.9.

При необхідності додати залежності різних аргументів, потрібно виконати дану операцію із заповненням відповідними мітками (виразами, функціями та їх аргументами) обох осей (рис. 5.10).

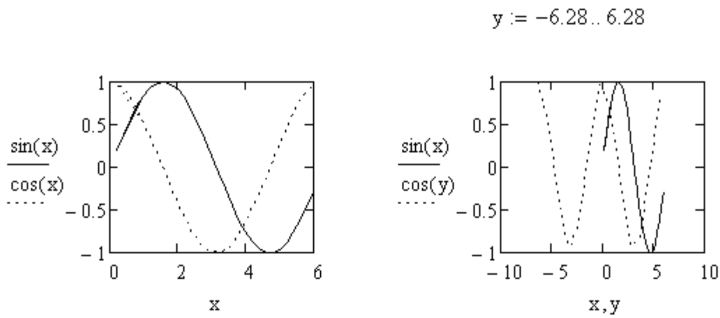


Рис. 5.10.

Операції *трасування* та збільшення фрагментів графічного об'єкта дозволяють точно вивчати будову графіків. Інструменти управління даними операціями знаходяться в меню "Формат/Графики/Трассировка… Масштаб…" (Trace…Zoom…)

або відповідні команди контекстного меню, або панелі "Графики" (Graph) (рис. 5.11).

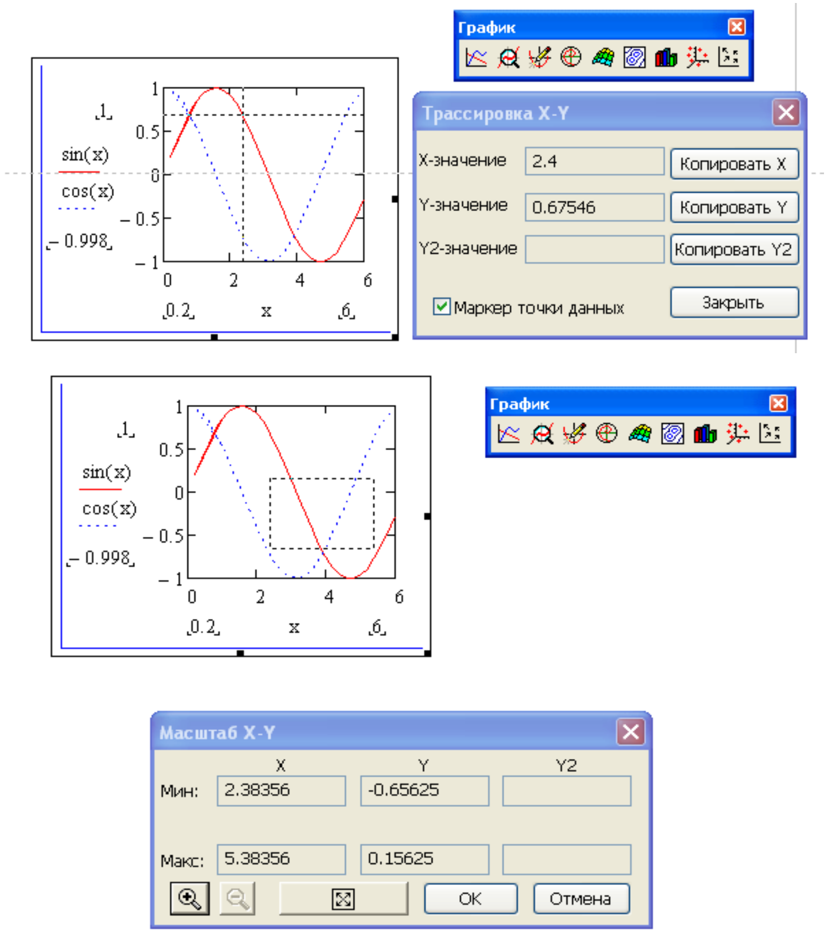


Рис. 5.11.

Тривимірні графіки

Дані для побудови тримірних графічних об'єктів подаються у вигляді функції двох змінних *z(x, y)* або імені матричної змінної, яка задасть розподіл даних (рис. 5.12). Покращати тримірне зображення графічного об'єкта можна засобами інтерполяції даних. Форматування тримірних графічних об'єктів виконується за допомогою інструментів вікна "Формат 3-D графіка" (3-D Plot

Format), яке викликається за допомогою подвійної фіксації (клацання) в області графіка або команди меню "Формат/Графіки/3-D графік…" при активному (виділеному) графічному об'єкті.

$$z(x,y) := x^2 + y^2 \qquad\qquad q := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

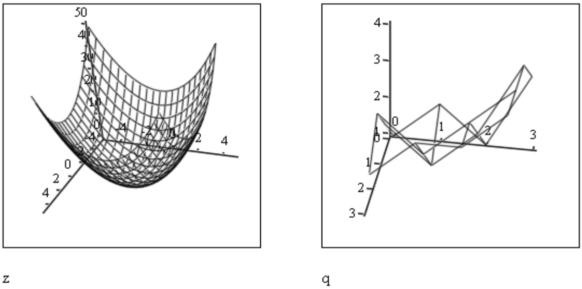


Рис. 5.12.

Деякі атрибути форматування можна підключити за допомогою контекстного меню ("Туман", "Освещение", "Оси", тощо). Приклади наведені на рис. 5.13.

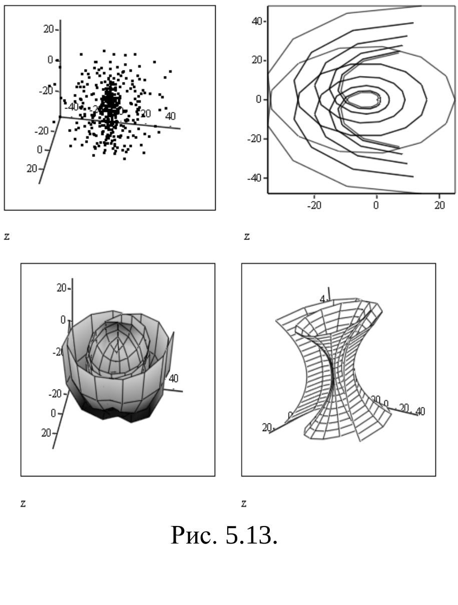


Рис. 5.13.

5.3. Економічні розрахунки в MathCad

Розв'язок алгебраїчних рівнянь

Алгебраїчні рівняння $\left(f(x)=0, f(x,y)=0\right)$ та систему рівнянь в MathCad можна розв'язувати різними методами і способами. Наприклад, безпосередньо математичним методом ("вручну"), графічно, за допомогою спеціальних функцій тощо. Розглянемо тільки ефективні методи та відповідні способи, алгоритми розв'язування алгебраїчних рівнянь різного типу (рис. 5.14).

Рис. 5.14.

Графічний метод розв'язування алгебраїчних рівнянь:

1. Побудувати графік функції $f(x)$.
2. На графіку в контекстному меню вибрати команду "Масштаб" (Zoom).
3. Вказати область на графіку поблизу кореня ($(f(x)=0)$, збільшити її та завершити операцію масштабування.
4. На графіку в контекстному меню вибрати команду "Трассировка" (Trace).
5. Виконати операцію трасування в точці перетину графіка та осі x ($f(x)=0$).
6. Скопіювати значення x (кнопка "копировать x" вікна "Трассировка $X-Y$").
7. За рамками графіка виконати присвоювання змінній x значення кореня (команда "Вставить").

Чисельний метод розв'язування рівнянь ґрунтується на використанні спеціальних функцій: *root* (корінь), *polyroots*, *find* (пошук рішення системи рівнянь), *lsolve* (лінійний розв'язок системи, матричний спосіб), *minerr* (наближене рішення з мінімізацією похибки), *maximize* та *minimize* (екстремум функції). В алгоритми розв'язування рівнянь системи MathCad закладений ітераційний метод, тому потрібно задавати початкові умови для всіх коренів.

Функція *root* розв'язує рівняння ітераційним методом січних та виконує обчислення методом спуску; виводить один корінь, найближчий до початкового значення. Тому, доцільно спочатку побудувати графік $f(x)$, і, якщо точок перетину з віссю x декілька (декілька коренів рівняння), потрібно задавати початкові умови для кожного кореня. Якщо точки перетину відсутні, то корені рівняння можуть бути тільки уявними числами.

В залежності від типу задачі, функція ***root*** містить два, або чотири аргументи:

$root\ (f(x), x)$ – потребує присвоєння початкового значення змінній x;

$root(f(x), x, a, b)$ пошук кореня буде використовуватись в рамках інтервалу $\left[a, b\right]$ альтернативним чисельним методом Ріддера або Брента.

Особливості:

1) вид функції $f(x)$ можна визначити безпосередньо в області параметрів функції ***root***: наприклад, $(\sin(x), x)$;

2) всередині інтервалу $\left[a, b\right]$ повинен знаходитись тільки один корінь;

3) значення границь a і b, як правило, повинні мати різні знаки, наприклад, ***root*** $(\sin x, x, -1,1)$;

4) якщо рівняння не містить дійсних коренів, початкове значення вводять в комплексній формі, наприклад, $x := -i$.

Приклад 5.4. Пошук кореня рівняння $\sin x = 0$ на інтервалі $\left[-1;1\right]$ та рівняння $\cos x = 0$ на інтервалі $\left[-2;1\right]$.

$$x := 0.5$$

$$f(x) := \sin(x)$$

$$F := root(f(x), x)$$

$$F = 3\times 10^{-13}$$

Рівняння зі змінними параметрами

Для рівняння зі змінними параметрами складається функція $f(a,x)$ або $f(b,c,x)$ в залежності від кількості параметрів, що змінюються, на базі стандартної функції *root*. Для її обчислення задається діапазон значень параметрів. Початкова умова (початкове наближення x) вводиться один раз, оскільки результат попереднього обчислення є початковим наближенням для наступного. При використанні двох параметрів (b,c) значення одного з них задається константою, а іншого – дискретною змінною (дискретним рядом).

Системи рівнянь

Системи рівнянь у MathCad розв'язуються за допомогою обчислювального блоку, який визначається ключовим словом "Given" ("Дано") та функції "find", і дозволяє розв'язувати від 1 до 200 рівнянь чисельним або символьним методом. Алгоритм розв’язання рівняння:

1. Ввести початкові наближення (умови) для всіх змінних: $x_1, x_2, ..., x_n$ (в скалярній або матричній формі).

2. Ключове слово "Given" .

3. Ввести систему рівнянь (в скалярній чи матричній формі), знак "=" із панелі Boolean ("Логический"), або <Ctrl + = >;

4. Якщо необхідно, додати обмеження нерівності (MathCad дозволяє застосовувати подвійні нерівності типу $a \le x \le b$);

5. Ввести вираз, що містить функцію *find* ($x_1, x_2, ..., x_n$).

В результаті отримаємо вектор розв'язку системи рівнянь (нерівностей). Функція *find* реалізує градієнтні чисельні методи (контекстне меню на слові "find"):

а) лінійний метод (Linear) – метод дотичної;

б) нелінійні методи (Nonlinear):

1) метод спряжених градієнтів (Conjugate Gradiente);

2) Квазі-Ньютоновський метод (Quasi – Newton);

3) метод Левенберга-Марквайра (Levenberg – Marquardt).

Крім того, можна вибрати додаткові параметри (Advanced Options): оцінку похідної розміщувати схемами, виконати оцінку змінної та перевірку лінійності. Для розв'язування систем рівнянь в матричній формі ($A*X=B$) застосовують також функцію *lsolve* (A, B)

Приклад 5.8.

$$x:=1 \quad y:=1$$

Given

$$x^2+y^2=16 \quad x+y=2$$

$$f:=Find(x,y)$$

$$f=\begin{pmatrix}-1.646\\ 3.646\end{pmatrix}$$

Наближений розв'язок рівнянь

За відсутності точного розв'язку рівняння, система MathCad дозволяє знайти наближений розв'язок з мінімальним відхиленням за допомогою функції "Minerr", яка використовує обчислювальний алгоритм аналогічний функції "find". Для наближеного розв'язку системи рівнянь застосовується обчислювальний блок "Given-minerr".

Пошук екстремума функції

Дана операція передбачає знаходження локального та глобального екстремумів. MathCad дозволяє визначати тільки локальні екстремуми (пошук глобального виконується шляхом порівняння локальних) за допомогою функцій: root, minerr, maximize, minimize, для умовних екстремумів блоку "Given". Способи пошуку екстремуму функції:

Спосіб 1. Для неперервної функції:

1) ввести (присвоїти) вираз функції $y(x)$;

2) побудувати графік функції $y(x)$;

3) указати початкове значення ближче до екстремуму функції;

4) записати оператор з функцією "*root*":

$$x_{\max} := root\left(\frac{d}{dx}y(x), x\right);$$

5) вивести значення точки $x_{\max}$ та екстремальне значення функції:

$$x_{\max} = \ ; \ y(x_{\max}) = \ .$$

Спосіб 2. Для неперервних функцій зручно використовувати функції minimize та maximize, які вводяться аналогічно функції *find*.

Спосіб 3. Для з ступінчастої функції використовують функцію minerr:

1) ввести функцію;

2) побудувати графік;

3) вибрати число більше (менше) за екстремальне значення і записати його умовою-обмеженням в блоці "Given-minerr";

4) вивести екстремальне значення x та функції $y(x)$.

Спосіб 4. Для ступінчастих функцій доцільно застосовувати функцію-програму $F_{\max}(F, L_n, L_k, N)$, яка реалізує метод перебору значень функції. Параметри функції: F – ім'я; L_n, L_k – початок та кінець інтервалу пошуку екстремуму; N – кількість точок всередині інтервалу, для яких визначається функція.

Символьні обчислення

Основою символьних обчислень в MathCad є формули та правила їх перетворення, які реалізовані на базі алгоритмів системи символьної математики програми Maple (в MathCad впроваджено всього близько 6% символьних функцій Maple 5). Символьні обчислення в MathCad можна використовувати за допомогою команд меню "Символика" (Symbolics) або оператора символьного виводу "$\rightarrow$", ключових слів символьного процесора та звичайних формул (символьні обчислення в реальному часі – live symbolic evaluation).

Перший спосіб застосовують для швидкого отримання аналітичного результату за однократного використання (хід обчислення не зберігається) і тільки для одного, виділеного в даний момент, виразу. Другий спосіб більш наочний, дозволяє вводити вирази в традиційній математичні формі та зберігати символьні обчислення. Крім того, оператор символьного виводу враховує в результаті весь попередній зміст документа.

В символьних обчисленнях допускається використання більшості вбудованих функцій MathCad. Меню "Символіка" поєднує математичні операції: обчислити (Evaluate), спростити (Simplify), розгорнути (Expand), розкладання на множники (Factor), приведення подібних (Collect) тощо. Для реалізації другого способу використовують: оператор символьного виводу "$\rightarrow$", панелі "Калькулятор", "Вычисление", "Символьная".

Інтегрування та диференціювання. Способи розв'язку диференціальних рівнянь

Інтегрування та диференціювання в MathCad реалізовано у вигляді обчислювального оператора за принципом "як пишеться, так і вводиться". Обчислювальні оператори знаходяться на панелі інструментів "Исчисление" (Calculus). Для операції диференціювання необхідно визначити точку (початкову умову) для знаходження похідної, наприклад $x := 1$, перед введенням оператора диференціювання.

Приклад 5.9.

$$x := 1$$

$$\frac{d}{dx}e^{2x} = 14.778 \qquad \frac{d^2}{dx^2}e^{2x} = 29.556$$

$$\frac{d}{dx}e^{2x} \rightarrow 2 \cdot e^2 = 14.778$$

$$\int_0^{\pi} \cos(y)dy = 0 \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z)dz \rightarrow 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \int \sin(y)dy \rightarrow -\cos(y)$$

Система MathCad надає досить великі можливості розв'язування звичайних диференціальних рівнянь і дуже обмежені для рівнянь з частинними похідними. Обчислювальний процесор MathCad працює тільки зі стандартною формою, яку можна подати у вигляді: $y'(t) = f(y(t),t)$, тобто розв'язати алгебраїчно відносно похідної вищого порядку. Крім того, оскільки розв'язок диференціального рівняння основується на інтегруванні, необхідно задавати додаткові умови для визначення сталих інтегрування. Отже, MathCad розв'язує диференціальні рівняння (ДР) двох типів:

1) задача Коші – ДР з початковими умовами: додаються значення функції та її похідних в початковій точці інтервалу інтегрування;

2) краєві задачі – ДР з граничними умовами: задаються значення функції та її похідних на початку та наприкінці інтервалу інтегрування.

Для чисельного інтегрування ДР (або системи ДР) використовують блок Given-Odesolve, або можна застосовувати вбудовані функції попередніх версій MathCad: rkfixed, Rkadapt, Bulstoer. Обчислювальний блок Given – Odesolve реалізує чисельний метод Рунге–Кутта і складається з трьох частин:

Given – ключове слово.

ДР та початкові (граничні) умови у вигляді $y(t_o) = C$, де $C - const$;

Given – Odesolve (t, C_{tk}, n) – функція, де t – змінна, відносно якої розв'язується рівняння, C_{tk} – кінець інтервалу інтегрування, n – необов'язковий параметр, що визначає кількість кроків інтегрування.

Приклад 5.10. Розв'язати ДР $y'(t) = 2y(t) - y^2(t)$.

Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = 2y(t) - y(t)^2$$

$$y(0) = 0.2$$

$$y := odesolve(t, 10)$$

Приклад 5.11. Розв'язати рівняння $y'''(x) - 2y'(x) = x \cdot \cos x$.

Given

$$\frac{d^3}{dx^3} y(x) - 2\frac{d}{dx} y(x) = x\cos(x)$$

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1 \qquad y''(0) = -0{,}3$$

$$y := odesolve\,(x, 3)$$

Приклад 5.12. Розв'язати рівняння $y''(x) + 0{,}1y'(x) + y(x) = 0$:

Given

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 0.1\frac{d}{dx} y(x) + y(x) = 0$$

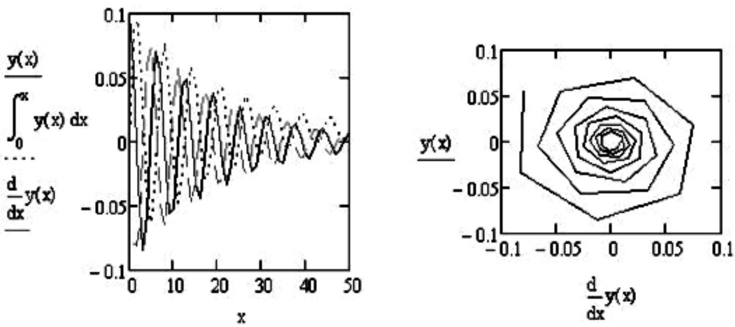
$$y(0) = 0.1 \qquad y'(0) = 0$$

$$y := odesolve\,(x, 42)$$

Given $\quad \frac{d^2}{dx^2}y(x) + 0.1\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + y(x) = 0$

$y(0) = 0.1 \quad y'(0) = 0$

$y := \text{Odesolve}(x, 50) \qquad x := 0, 1 .. 50$



Системи диференціальних рівнянь

Розв'язування системи ДР в MathCad можна виконувати за допомогою блоку Given-Odesolve ($\bar{x}_i, t, C_{tk}, n$), де $\bar{x}_i$ – вектор імен невідомих змінних, або за допомогою функцій: *rkfixed* – шукає розв’язок методом Рунге-Кутта фіксованим кроком; *rkadapt* – зі змінним кроком; *bulstoer* – метод Булирше-Штера; *adams* – метод Адамса; *BDF* – використовує формули зворотного диференціювання (для жорстких систем); *Adams BDF* – автоматично вибирає метод розв'язування системи ДР відповідно введеної системи рівнянь; *radau* – для жорстких систем.

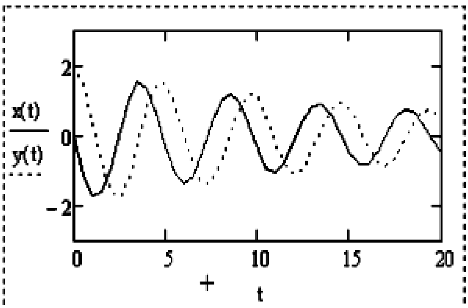
Блок Given–Odesolve містить в собі всі основні можливості розв’язку ДР попередніх версій MathCad, перетворює введені ДР до стандартного вигляду, що використовуються функціями *rkfixed* та *rkadapt* і розв'язує за допомогою цих функцій систему ДР (або для рівняння) з початковими умовами.

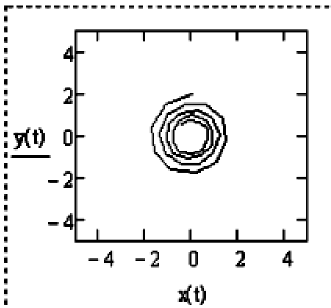
В результаті розрахунку отримаємо масив значень функції та її похідних. Далі застосовуються функції інтерполяції *lspline* та *interp*, які перетворюють масив розв'язків системи ДР в функцію, яку потім можна диференціювати або інтегрувати. За допомогою контекстного меню функції *Odesolve* можна вибрати метод розв'язку: з фіксованим кроком *fixed* (функція *rkfixed*), зі змінним кроком *adaptiv* (функція *rkadapt*) жорсткої системи рівнянь (функція *radau*) або Adams/BDF, останній спосіб підключається по замовчуванню.

Given $\quad \frac{d}{dt}x(t) = -1.2\,y(t) \qquad x(0) = 0$

$$\frac{d}{dt}y(t) = 1.4\cdot x(t) - 0.1\cdot y(t) \qquad y(0) = 2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t, 20\right] \qquad t := 0, 0.5 .. 20$$





5.4. Обробка експериментальних даних

Лінійна інтерполяція виконується за допомогою функції $linterp(x, y, t)$, де X – вектор значень (даних) аргументу, тобто незалежної змінної; y – вектор експериментальних даних (залежної змінної); t – значення аргументу, за яким обчислюється інтерполююча функція (рис. 5.15).

$$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7)^T$$

$$y := (4.2\ \ 3.5\ \ 5.2\ \ 4.7\ \ 6.3\ \ 7.1\ \ 8.2)^T$$

$$Y1(t) := linterp(x, y, t) \qquad t := 1, 1.2..7$$

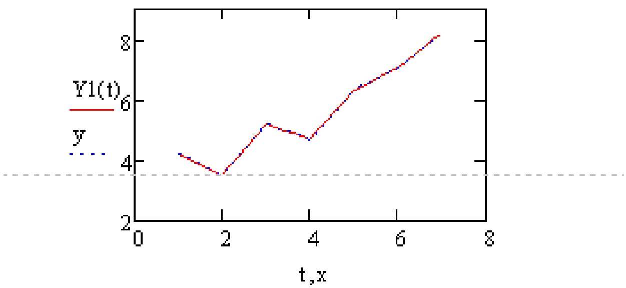


Рис. 5.15.

Сплайн-інтерполяція. На практиці доцільно з'єднувати експериментальні точки не ламаною лінією, а згладженою кривою. Тому частіше використовують сплайн-інтерполяцію (лінійну, квадратичну, кубічну). Для реалізації в MathCad перед застосуванням функції $interp(s, x, y, t)$ потрібно визначити вектор похідних другого степеня S: $lspline(x, y)$ – створює вектор значень коефіцієнтів кривої, що наближається до прямої лінії в граничних точках, коефіцієнти лінійного сплайна; $pspline\ (x, y)$ – вектор значень коефіцієнтів квадратичного сплайна; $cspline(x, y)$ – вектор значень кубічного сплайна; x, y – вектори даних; t – значення аргументу, за яким обчислюється функція.

Вибір функції сплайн-коефіцієнтів впливає на інтерполяцію поблизу кінцевих точок інтервалу (рис. 5.16).

```
x := (1  2  3  4  5  6  7)^T
y := (4.2  3.5  5.2  4.7  6.3  7.1  8.2)^T
s := cspline(x,y)
Ys(t) := interp(s,x,y,t)
Yl(t) := interp(lspline(x,y),x,y,t)
Yp(t) := interp(pspline(x,y),x,y,t)
```

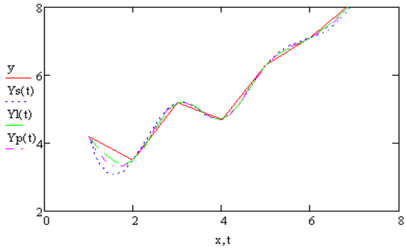


Рис. 5.16.

B-сплайн-інтерполяція (поліноміальна) відрізняється способом з'єднання ("зшивання") сплайнів не в точках x_i, а в точках u_i, координати яких вводить користувач (рис. 5.17). Вектор значень коефіцієнтів B-сплайна задається функцією $bspline(x, y, u, n)$, де u – вектор значень аргументу, в яких виконується ("зшивання") сплайнів, задається користувачем; n – порядок поліномів сплайн-інтерполяції (1, 2 або 3).

```
x := (1  2  3  4  5  6  7)^T
y := (4.2  3.5  5.2  4.7  6.3  7.1  8.2)^T
u := (1  2.1  3.2  4.1  5.4  7)^T
b := bspline(x,y,u,2)
Yb(t) := interp(b,x,y,t)
```

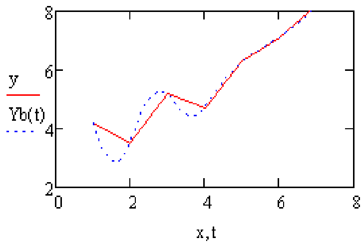


Рис. 5.17.

Екстраполяція даних. Для екстраполяції даних в MathCad передбачена функція *predict* (y, m, n), де y – вектор заданих значень функції, аргумент якої змінюється через однакові інтервали; m – кількість послідовних елементів вектора y для виконання екстраполяції; n – кількість точок екстраполяції (прогнозуючих елементів вектора y) (рис. 5.18).

$$k := 80 \qquad i := 0..k$$

$$y_i := 2 \cdot e^{-0.02 \cdot i} \cdot \sin(0.15 \cdot i)$$

$$m := 70 \qquad n := 60 \qquad Ypr := \mathrm{predict}(y, m, n) \qquad j := 0..n$$

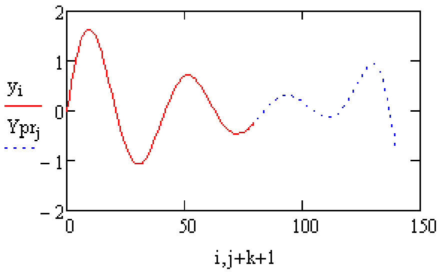


Рис. 5.18.

Функція *predict* ґрунтується на лінійному алгоритмі прогнозування поведінки функції і використовується в задачах аналізу даних з наявністю закономірності (тенденції), в основному осцилюючого характеру.

Лінійна регресія. Інструментарій виконання лінійної регресії в MathCad базується на двох методах (рис. 5.19):

$$x := (1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 6 \ \ 7)^T$$

$$y := (4.2 \ \ 3.5 \ \ 5.2 \ \ 4.7 \ \ 6.3 \ \ 7.1 \ \ 8.2)^T$$

$$\mathrm{line}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.7 \\ 0.725 \end{pmatrix} \qquad f1(t) := \mathrm{line}(x, y)_0 + \mathrm{line}(x, y)_1 \cdot t$$

$$\mathrm{intercept}(x, y) = 2.7 \qquad f2(t) := \mathrm{intercept}(x, y) + \mathrm{slope}(x, y) \cdot t$$

$$\mathrm{slope}(x, y) = 0.725$$

$$\mathrm{medfit}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.433 \\ 0.725 \end{pmatrix} \qquad f3(t) := \mathrm{medfit}(x, y)_0 + \mathrm{medfit}(x, y)_1 \cdot t$$

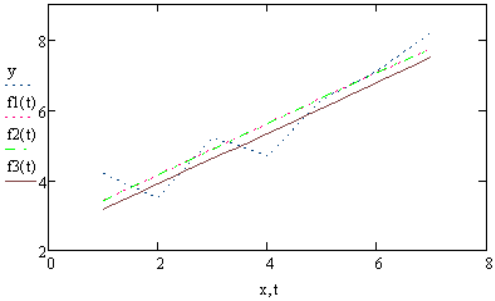


Рис. 5.19.

1) *метод найменших квадратів*, алгоритм якого реалізовується функціями: $line(x, y)$ – обчислює вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ коефіцієнтів лінійного рівняння $y = b + ax$; $intercept(x, y)$ – розраховує коефіцієнт b; $slope(x, y)$ – обчислює коефіцієнт a;

2) *метод медіан*: $medfit(x, y)$ – обчислює вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ коефіцієнтів лінійного рівняння $y = b + ax$.

Поліноміальна регресія. Поліноміальна регресія в MathCad реалізована методами:

1) Наближення поліномом k-го степеню $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_k x^k$, при кількості точок початкових даних (вибірки) $n \geq k + 1$. Даний алгоритм використовує функції (приклад 5.20): $regress\ (x, y, k)$ – вектор коефіцієнтів полінома, де k – степінь полінома; $interp\ (s, x, y, t)$ – результат інтерполяції, де $s = regress(x, y, k)$; t – значення аргументу полінома регресії.

2) Регресія відрізками поліномів. Алгоритм даного способу застосовує функції *loess* та *interp* (приклад 5.21): $loess(x, y, span)$ – вектор коефіцієнтів для побудови регресії даних відрізками поліномів; $span \in [0,2; 2]$ – параметр, що визначає розмір відрізків поліномів, тобто вказує степінь згладжування даних.

$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7)^T$

$y := (4.2\ \ 3.5\ \ 5.2\ \ 4.7\ \ 6.3\ \ 7.1\ \ 8.2)^T$

$k := 1$ $\quad P1(t) := interp(regress(x,y,k),x,y,t)$

$k := 2$ $\quad P2(t) := interp(regress(x,y,k),x,y,t)$

$k := 4$ $\quad P4(t) := interp(regress(x,y,k),x,y,t)$

$k := 6$ $\quad P6(t) := interp(regress(x,y,k),x,y,t)$

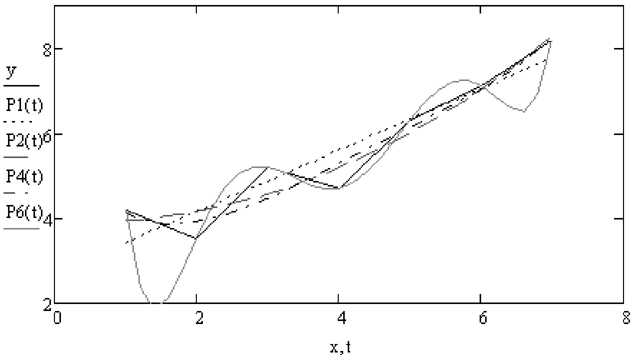


Рис. 5.20.

$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7)^T$

$y := (4.2\ \ 3.5\ \ 5.2\ \ 4.7\ \ 6.3\ \ 7.1\ \ 8.2)^T$

$s1 := loess(x,y,0.9)$ $\qquad s2 := loess(x,y,2)$

$F1(t) := interp(s1,x,y,t)$ $\qquad F2(t) := interp(s2,x,y,t)$

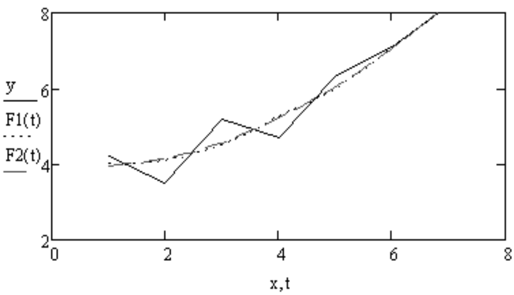


Рис. 5.21.

Регресія на базі нелінійних математичних функцій реалізована таким чином (рис. 5.22):

$$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7)^T \qquad g := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y := (4.2\ \ 3.5\ \ 5.2\ \ 4.7\ \ 6.3\ \ 7.1\ \ 8.2)^T$$

$$C := \mathrm{expfit}(x, y, g)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.917 \\ 0.26 \\ 2.646 \end{pmatrix} \qquad fe(t) := C_0 \cdot e^{C_1 \cdot t} + C_2$$

$$D := \mathrm{lgsfit}(x, y, g)$$

$$D = \begin{pmatrix} 6.893 \times 10^{13} \\ 2.194 \times 10^{13} \\ 0.135 \end{pmatrix} \qquad fl(t) := \frac{D_0}{\left(1 + D_1 \cdot e^{-D_2 \cdot t}\right)}$$

Рис. 5.22.

$expfit(x, y, g)$ – регресія експонентою $f(t) = ae^{bt} + c$;

$lgsfit(x, y, g)$ – регресія логістичною функцією $f(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-ct}}$;

$sinfit(x, y, g)$ – регресія синусоїдою $f(t) = a\sin(t + b) + c$;

$pnfit(x, y, g)$ – регресія степеневою функцією $f(t) = at^b + c$;

$logfit(x, y, g)$ – регресія логарифмічною функцією $f(t) = a\ln(t + b) + c$;

$g = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ – вектор початкових значень;

$lnfit(x, y)$ – регресія двопараметричною логарифмічною функцією $f(t) = a\ln t + b$.

Регресія загального вигляду. Якщо задачу регресії розв’язувати за допомогою стандартних функцій неможливо, то застосовують функції регресії загального вигляду *linfit* та *genfit* (рис. 7.23): $linfit(x, y, F)$ – повертає вектор параметрів лінійної комбінації деяких функцій $y = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + ... + a_n f_n(x)$; F – вектор функцій $\left(f_0(x)\; f_1(x)... f_n(x) \right)^T$; $genfit(x, y, g, H)$ – вектор параметрів, що апроксимує дані за допомогою функції загального виду $f(x)$; g – вектор початкових значень; H – векторна функція розмірності $N+1$, що складається із функції користувача $f(x)$ та її N частинних похідних відносно невідомих параметрів.

Реалізація згладжуючих алгоритмів

В процесі аналізу даних часто виникає необхідність їх фільтрації (згладжування). Задача фільтрації передбачає вилучення деяких складових залежності $y(x_i)$: фільтрація швидких варіацій $y(x_i)$, які частіше обумовлені шумом (завадами, помилками) – в результаті отримаємо згладжену залежність, тобто без швидких осциляцій (більш низькочастотну).

$$x := (1\;\;2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7)^T$$

$$y := (4.2\;\;3.5\;\;5.2\;\;4.7\;\;6.3\;\;7.1\;\;8.2)^T$$

$$F(x) := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x+1} \\ e^{0.2x} \\ x \end{pmatrix} \qquad C := linfit(x, y, F) \qquad C = \begin{pmatrix} 4.882 \\ 0.768 \\ 0.639 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := C_1 \cdot e^{0.2 \cdot x} + C_2 \cdot x + \frac{C_0}{x+1}$$

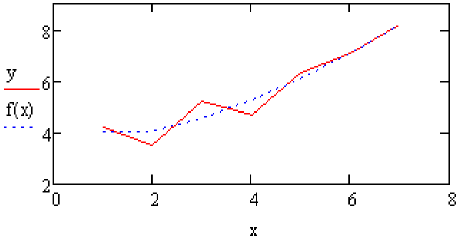


Рис. 5.23.

Часто розглядають протилежну задачу фільтрації – вилучення повільних осциляцій з метою дослідження високочастотної складової (задача вилучення тренда), а іноді розв’язують змішану задачу – вилучення високочастотних та низькочастотних складових для дослідження середньомасштабних варіацій (задача смугової фільтрації).

Розглянемо реалізацію згладжуючих алгоритмів на основі вбудованих у MathCad функцій (рис. 5.24):

$medsmooth(y,b)$ – згладжування алгоритмом "ковзної медіани", де b – ширина вікна згладжування. Функція передбачає, що дані розміщені рівномірно (x – рівномірна послідовність чисел);

$ksmooth(x,y,b)$ – згладжування на основі функції Гауса, де b – параметр управління вікном згладжування;

$supsmooth(x,y)$ – згладжування адаптивним алгоритмом за методом найменших квадратів з аналізом найближчих "сусідів" кожної пари даних.

$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15)^T$

$y := (4.2\ \ 3.5\ \ 5.2\ \ 4.7\ \ 6.3\ \ 7.1\ \ 8.2\ \ 7\ \ 6.4\ \ 6\ \ 4.1\ \ 3.1\ \ 3.3\ \ 5.9\ \ 6.7)^T$

z1 := medsmooth(y,3) s1 := cspline(x,z1) f1(t) := interp(s1,x,z1,t)

z2 := ksmooth(x,y,3) s2 := cspline(x,z2) f2(t) := interp(s2,x,z2,t)

z3 := supsmooth(x,y) s3 := cspline(x,z3) f3(t) := interp(s3,x,z3,t)

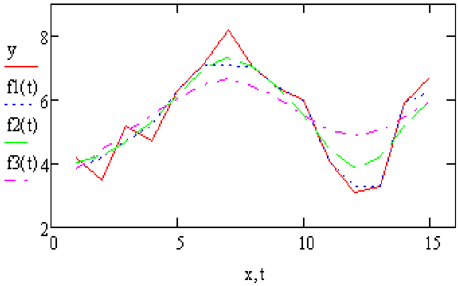


Рис. 5.24.

Всі функції містять аргумент x та y – масиви даних і видають в результаті вектор згладжених даних. Тому, доцільно виконувати згладжування разом з інтерполяцією або регресією.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бродський Ю. Б. Інформатика та системологія : навчальний посібник / Ю. Б. Бродський, К. В. Молодецька; Житомирський національний агроекологічний університет. – Житомир : "Житомирський національний агроекологічний університет", 2014. – 276 с.

2. Бродський Ю. Б. Основи використання інструментарію MathCad для математичних розрахунків та моделювання : методичні рекомендації та завдання для самостійної роботи студентів / Ю. Б. Бродський; Житомирський національний агроекологічний університет. – Житомир : "Житомирський національний агроекологічний університет", 2012. – с.91.

3. Осетрова И. С. Microsoft Excel 2010 для аналитиков / И.С. Осетрова, Н.А. Осипов; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики. – СПб. : НИУ ИТМО, 2013. – 65 с.

4. Ларин Рональд У. Инженерные расчёты в Excel [пер. с англ.] / Ларин Рональд У. – М.: Вильямс, 2002. – 544 с.

5. Волков В. Б. Информатика: учебник для вузов / В. Б. Волков, Н. В. Макарова. – СПб. : Питер, 2011. – 576 с.

6. Зудилова Т.В. Работа пользователя в Microsoft Excel 2010 / Т. В. Зудилова, С. В. Одиночкина, И. С. Осетрова и др.; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики. – СПб. : НИУ ИТМО, 2012. – 213 с.

7. Макаров Е. Г. MathCad : [Учебный курс] / Макаров Е. Г. – СПб. : Питер, 2009. – 384 с.