## Лабораторна робота №4

**Тема:** «Лінійні відображення».

**Мета:** Визначення власних значень та власних векторів лінійних операторів. Проведення обчислень в середовищі Mathcad та Python.

**Час виконання:** 2 години.

**Навчальні питання:**

1). Поняття лінійного оператора. Відображення;

2). Власні значення та власні вектори лінійних операторів.

Теоретичні відомості для виконання лабораторної роботи:

**1.** В лінійному просторі L задана векторна функція **A** векторного аргумента $\vec{x}$, якщо кожному вектору $\vec{x}$ цього простору поставлений у відповідність деякий вектор $\vec{u} = A(\vec{x})$ цього ж простору. Векторна функція **A** називається лінійною, якщо вона має наступні властивості:

$A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}),\quad A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$, де $\vec{x}$ і $\vec{y}$ – два довільних вектори простору L і α – довільне дійсне число. Лінійну вектор – функцію називають також лінійним перетворенням простору L, або **лінійним оператором** в цьому просторі. В подальшому, будемо при визначенні лінійної вектор – функції ігнорувати дужки аргументу. Тобто представляти вектор – функцію в наступному вигляді:

$$\vec{u} = A\vec{x} \tag{1}$$

Розглянемо двомірний випадок відображення площини P саму в себе. Тобто $P \to \overline{P}$. Вважатимемо, що на площині P введено декартову систему координат.

Якщо точка $M(x_1;x_2)$ при відображенні переходить в точку $\overline{M}(y_1;y_2)$ то існують функції $y_1 = \varphi_1(x_1;x_2),\ \ y_2 = \varphi_2(x_1;x_2)$. Якщо зазначені функції є лінійними відносно своїх аргументів, то відображення є **лінійним**.

Таким чином при лінійному відображені координати перетворюються за таким законом:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{cases} \tag{2}$$

$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ b_1,\ b_2$ – деякі постійні числа. В подальшому під поняттям лінійне відображення, будемо розуміти відображення при якому початок введеної системи координат знаходиться в точці $\overline{O}(b_1;b_2)$.Тоді лінійне відображення матиме вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{3}$$

Тоді матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається матрицею відображення.

Відповідно $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ називається визначником матриці А.

Виходячи з вищевикладеного можна зробити висновок, що $\det A$ характеризує коефіцієнт зміни площі фігур при відображенні. Так, наприклад квадрат з вершинами O(0; 0), A(1; 0), B(1; 1), C(0; 1) при лінійному відображені з матрицею А, перейде в паралелограм побудований на векторах $\overrightarrow{OA} = a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}$ .

У випадку тривимірного простору, матриця відображення матиме вигляд:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Якщо $\det A = 0$, то відображення називається виродженим.

У випадку заміни базису, матриця лінійного відображення матиме відповідно інший вигляд. При дослідженні динамічних систем це має особливе значення.

Наприклад система звичайних диференціальних рівнянь в одному базисі може мати простіший вигляд ніж в іншому базисі, що спрощує її розв'язок.

**2.** При лінійному відображені існують вектори лінійного простору L які під впливом лінійного оператора **A** не відображаються в інші вектори, а лише «деформуються» уздовж свого напрямку (тобто залишаються паралельними самі собі при відображені). Такі вектори називаються **власними векторами оператора A**.

Розглянемо питання знаходження власних векторів оператора А в заданому базисі для тривимірного простору.

При визначеному базисі, координати вектора перетворюються наступним чином:

$\vec{y} = A\vec{x}$. Для того, щоб вектор $\vec{x}$ був власним вектором оператора А, повинна виконуватись умова $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ тобто:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad (4)$$

Відповідно числа λ при яких виконується умова (4) називаються **власними значеннями** оператора А.

Визначимо в загальному вигляді власні вектори та власні числа лінійного оператора А для тривимірного простору. Розгорнута умова (4) матиме вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \qquad (5)$$

Після перетворень, отримаємо:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Таким чином, для знаходження власних векторів маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (6). Щоб дана система мала розв’язок, необхідно і достатньо рівності нулю визначника системи (6), тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Або в такій формі:

$$\det(A-\lambda I)=0, \qquad (8)$$

де $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця.

Рівняння (7) і (8) називається **характеристичним рівнянням матриці А**.

Визначивши характеристичні (власні) числа λ, знайдемо відповідно власні вектори $\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ оператора А.

**Приклад 1.**

Знайти власні вектори та власні значення матриці A (розв’язати в середовищі Mathcad і Python):

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 2.35 \\ 4.333 & 1.488 \end{pmatrix}.$$

Лістинг розв’язку в середовищі Mathcad:

матриця оператора

$$A1 := \begin{pmatrix} 0.5 & 2.35 \\ 4.333 & 1.488 \end{pmatrix}$$

власні значення оператора

$$\lambda := \text{eigenvals}(A1) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -2.235 \\ 4.223 \end{pmatrix}$$

кількість власних значень row

$$row := 2$$

знаходимо власні вектори оператора A1для кожного власного значення λ

$$VECS := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..\,row-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v1_{i,0} \leftarrow \text{eigenvec}\left(A1, \lambda_{i,0}\right) \\ v1 \end{array} \right. \\ v1 \end{array} \right.$$

$$VECS = \begin{pmatrix} \{2,1\} \\ \{2,1\} \end{pmatrix} \qquad VECS_{0,0} = \begin{pmatrix} -0.652 \\ 0.758 \end{pmatrix} \qquad VECS_{1,0} = \begin{pmatrix} 0.534 \\ 0.846 \end{pmatrix}$$

ПЕРЕВІРКА ПРАВИЛЬНОСТІ РОЗРАХУНКІВ

$$PR := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..\,row-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow \lambda_{i,0} \cdot VECS_{i,0} \\ s \leftarrow A1 \cdot VECS_{i,0} \\ ch_i \leftarrow \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} \end{array} \right. \\ ch \end{array} \right.$$

$$PR_{0,0} = \begin{pmatrix} \{2,1\} \\ \{2,1\} \end{pmatrix} \qquad \left(PR_{0,0}\right)_{0,0} = \begin{pmatrix} 1.457 \\ -1.695 \end{pmatrix} \qquad \left(PR_{0,0}\right)_{1,0} = \begin{pmatrix} 1.457 \\ -1.695 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} \{2,1\} \\ \{2,1\} \end{pmatrix}$$

$$PR_{1,0} = \begin{pmatrix} \{2,1\} \\ \{2,1\} \end{pmatrix} \qquad \left(PR_{1,0}\right)_{0,0} = \begin{pmatrix} 2.254 \\ 3.571 \end{pmatrix} \qquad \left(PR_{1,0}\right)_{1,0} = \begin{pmatrix} 2.254 \\ 3.571 \end{pmatrix}$$

**Використання середовища Python та бібліотеки Numpy для обчислення коренів характеристичного рівняння матриці**

```
>>> A = np.matrix("1 4 1; 0 2 2 ; 0 0 3")
>>> A
matrix([[1, 4, 1],
        [0, 2, 2],
        [0, 0, 3]])
>>> w, v = np.linalg.eig(A)
>>> w
array([1., 2., 3.])
```

**Завдання №1 (теоретичне)**

Встановити вигляд матриці лінійного оператора $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ в базисі з власних векторів.

**Завдання №2**

Визначити власні значення та власні вектори наступних операторів А в середовищі Mathcad і Python:

1). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2). $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

3). $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 4 \\ 4 & 7.5 & 9.8 & 10 \\ 17 & 3.3355 & 1.8 & 2 \\ 11 & 0.5 & 14 & 21 \end{pmatrix}$;

4). $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Захист лабораторної роботи передбачає виконання практичних завдань поставлених в роботі, та виконання завдань теоретичного характеру.