§ 5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Розглянемо деякі інтеграли від ірраціональних функцій, які за допомогою підстановок зводяться до раціональних функцій, що завжди інтегруються.

1. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$,

де R – раціональна функція своїх аргументів, зводяться до інтегралів від дробово-раціональних функцій підстановкою: $x = t^p$, $dx = pt^{p-1}dt$, де p – найменше спільне кратне чисел n_1, ..., n_k, т.б. $p = НСК\{n_1, ..., n_k\}$.

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = t, \ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 6(t - \mathrm{arctg}\, t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \mathrm{arctg}\, \sqrt[6]{x}) + C.$$

2. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$, де

R – раціональна функція своїх аргументів, зводяться до інтегралів від дробово-раціональних функцій підстановкою:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p, \text{ де } p = НСК\{n_1, ..., n_k\}.$$

Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x+1)^{2/3} - (x+1)^{1/2}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Найменшим спільним кратним чисел 2 і 3 є число 6. Застосуємо підстановку

$$z^6 = x+1, \ x = z^6 - 1, \ dx = 6z^5 dz.$$

Отже, інтеграл набирає вигляду

$$\int \frac{dx}{(x+1)^{2/3} - (x+1)^{1/2}} = 6\int \frac{z^5 dz}{z^4 - z^3} = 6\int \frac{z^2 dz}{z-1} = 6\int \frac{(z^2-1)+1}{z-1} dz = 6\int (z+1)dz + 6\int \frac{dz}{z-1} =$$

$$= 6\left(\frac{z^2}{2} + z\right) + 6\ln|z-1| + C = 6\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} + \sqrt[6]{x+1}\right) + \ln\left|\sqrt[6]{x+1} - 1\right| + C.$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$$

Виконаємо підстановку $\dfrac{1-x}{1+x}=t^2 \Rightarrow 1-x=t^2+t^2x$, $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$dx=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)' dt=\frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1+t^2)'(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=\frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}.$$

Маємо: $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}=\int t \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2}\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)dt=-4\int \frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}$.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}=-4\int \frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}=-2\int \frac{(t^2-1)+(1+t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)}dt=2\int \frac{dt}{1+t^2}+$$

$$+2\int \frac{dt}{t^2-1}=2\text{arctg}\, t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+C=$$

$$=2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+C.$$

2. *Інтегрування диференціальних біномів.* Вираз виду $x^m(a + bx^n)^p$, де m, n, p — сталі раціональні числа, а a і b — довільні сталі числа, називається *диференціальним біномом.* Справедлива така *теорема Чебишева.*

Теорема. *Інтеграл від диференціального бінома*

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:

1) p *— ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку* $x = t^s$, *де* s *— найменший спільний знаменник дробів* m і n;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ *— ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку* $a + bx^n = t^r$, *де* r *— знаменник дробу* p;

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ *— ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку* $ax^{-n} + b = t^r$, *де* r *— знаменник дробу* p.

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається [12].

Знайти інтеграл $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Р о з в ' я з а н н я. Під інтегралом маємо біномний диференціал. Тут $p = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$. Випадок 1 не підходить, оскільки p — дробове число. Розглянемо число $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$ — ціле.

Отже, маємо випадок 2. Застосовуємо підстановку

$$1 + \sqrt[4]{x} = z^3.$$

Тоді

$$x = \left(z^3 - 1\right)^4; \; dx = 12\left(z^3 - 1\right)^3 z^2 dz.$$

Таким чином,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 12\int \frac{\left(z^3-1\right)^3 z^3}{\left(z^3-1\right)^2}\,dz = 12\int z^3\left(z^3-1\right)dz =$$

$$= 12\int\left(z^6 - z^3\right)dz = \frac{12}{7}z^7 - 3z^4 + C = \frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7} - 3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4} + C.$$

ПІДСТАНОВКИ ЕЙЛЕРА

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx.$$

Першу підстановку Ейлера застосовують тоді, коли $a > 0$, і вона має вигляд

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = z - \sqrt{a}x.$$

Другу підстановку Ейлера застосовують тоді, коли в квадратному тричлені $c > 0$. Підстановка має вигляд

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = zx + \sqrt{c}$$

(можна брати $-\sqrt{c}$).

Третю підстановку Ейлера застосовують тоді, коли квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має дійсні й різні корені. Нехай α і β — дійсні корені цього тричлена $(\alpha \neq \beta)$. Тоді квадратний тричлен розкладається на лінійні множники і його можна записати у вигляді

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Застосуємо підстановку

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = z(x - \alpha)$$

(можна застосовувати підстановку $\sqrt{ax^2 + bx + c} = z(x - \beta)$). Маємо

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = z^2(x - \alpha)^2$$

або

$$a(x - \beta) = z^2(x - \alpha).$$

Знайти інтеграл $\int\sqrt{x^2-2x-1}dx$.

Розв'язання. Тут $a=1>0$. Застосуємо підстановку

$$\sqrt{x^2-2x-1}=z-x.$$

Підносимо до квадрата обидві частини попередньої рівності. Маємо

$$x^2-2x-1=z^2-2xz+x^2$$

або

$$x=\frac{z^2+1}{2(z-1)}.$$

Тоді

$$dx=\frac{1}{2}\frac{(z-1)2z-(z^2+1)}{(z-1)^2}dz=\frac{1}{2}\frac{z^2-2z-1}{(z-1)^2}dz.$$

Знаходимо

$$\sqrt{x^2-2x-1}=z-x=z-\frac{z^2+1}{2(z-1)}=\frac{z^2-2z-1}{2(z-1)}.$$

Підставивши значення $\sqrt{x^2-2x-1}$ та dx в інтеграл, дістанемо

$$\int\sqrt{x^2-2x-1}dx=\int\frac{z^2-2z-1}{2(z-1)}\frac{1}{2}\frac{z^2-2z-1}{(z-1)^2}dz=\frac{1}{4}\int\frac{(z^2-2z-1)^2}{(z-1)^3}dz.$$

Маємо інтеграл від раціональної функції відносно z. Застосувавши до цього інтеграла метод інтегрування раціональних функцій, матимемо

$$\frac{1}{4}\int\frac{(z^2-2z-1)^2}{(z-1)^3}dz=\frac{(z-1)^2}{8}-\frac{1}{2(z-1)^2}-\ln|z-1|+C.$$

Підставивши значення

$$z=\sqrt{x^2-2x-1}+x,$$

знайдемо заданий інтеграл.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ

Тип інтеграла:	Підстановка:
а) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t\quad (x=a\cos t)$, $dx=a\cos t\,dt$, $a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2 t=a^2(1-\sin^2 t)=a^2\cos^2 t$.
б) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$	$x=a\,\mathrm{tg}t\quad (x=a\,\mathrm{ctg}\,t)$, $dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt$, $a^2+x^2=a^2+a^2\mathrm{tg}^2t=a^2(1+\mathrm{tg}^2t)=\dfrac{a^2}{\cos^2 t}$.
в) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=\dfrac{a}{\cos t}\quad (x=\dfrac{a}{\sin t})$, $dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt=\dfrac{a\,\mathrm{tg}t}{\cos t}dt$, $x^2-a^2=\dfrac{a^2}{\cos^2 t}-a^2=a^2(\dfrac{1}{\cos^2 t}-1)=a^2\mathrm{tg}^2t$.

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$$

Маємо інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$, де a = 2, тому виконуємо підстановку: x = 2 sin t, dx = 2 cos t dt, $4-x^2 = 4\cos^2 t$.

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 2\int dt + 2\int \cos 2t\,dt = 2t + \sin 2t + C = \left(x = 2\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{2},\right.$$

виразимо sin 2t через sin t, $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$,

$$\left.\sin 2t = 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right) = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Для обчислення інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ зручно використовувати відповідно такі підстановки:

а) $t = \cos x$, якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

б) $t = \sin x$, якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

в) $t = \operatorname{tg} x$, якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int R(\sin x)dx\ .$$

Підінтегральна функція парна відносно sin x.

Підстановка: $\operatorname{tg} x = t \;\Rightarrow\; x = \operatorname{arctg} t$,

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Відомо, що $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$;

$$\sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x) + C.$$

УНІВЕРСАЛЬНА ТРИГОНОМЕТРИЧНА ПІДСТАНОВКА

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \ \ (-\pi < x < \pi)$$

Тригонометричні функції sin x, cos x виражаються через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ таким чином:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \ \Rightarrow \ x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int\frac{dx}{2+\sin x} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int\frac{dt}{t^2+t+1} = I_1$$

Універсальна тригонометрична підстановка: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$t^2+t+1 = t^2+2\cdot\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4} = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

$$I_1 = \int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Тоді $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$