Тема I. **Невизначений інтеграл**

§ 1. Первісна функції і невизначений інтеграл

Властивості невизначеного інтегралу

Основною задачею диференціального числення є визначення для заданої функції $F(x)$ її похідної $F'(x) = f(x)$ чи її диференціала $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

Обернена задача, що полягає в відшуканні такої функції $F(x)$ для якої відома її похідна $f(x)$ чи диференціал $f(x)dx$, є основною задачею інтегрального числення.

Операції диференціювання та інтегрування взаємно обернені.

<u>Означення.</u> Функція $F(x)$ називаються первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, якщо на цьому відрізку виконується рівність $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

Приклад 1. Знайти первісну функції $f(x) = x^2$.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \text{ тому, що } \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Приклад 2. Знайти первісну функції $f(x) = \sin x$.

$$F(x) = -\cos x \quad \text{тому, що} \quad (-\cos x)' = \sin x.$$

<u>Теорема 1.</u> Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C – довільна стала (число), також первісна функції $f(x)$.

$$\Rightarrow \quad (F(x)+C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x) \quad \blacksquare$$

<u>Теорема 2.</u> Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – дві первісні функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то різниця між ними дорівнює сталому числу, тобто $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C$.

$\Rightarrow$ За означенням первісної $F_1'(x) = f(x)$

$F_2'(x) = f(x)$, $\quad \forall x \in [a; b]$.

Позначимо: $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$.

Тоді $\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

$$\varphi'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x) = C \;\Rightarrow\; F_1(x) - F_2(x) = C$$

<u>Наслідок з теорем 1, 2.</u> Якщо функція $F(x)$ є одна з первісних для функції $f(x)$, то множина всіх первісних для $f(x)$ виражається сумою $F(x) + C$, де C – довільна стала.

У прикладі 1 знайдено одну з первісних $F(x)=\frac{x^3}{3}$ для $f(x) = x^2$, а їх безліч:

$$F_1(x)=\frac{x^3}{3}+5, \qquad F_2(x)=\frac{x^3}{3}-\sqrt{2}, \qquad F_3(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{7}, \ldots$$

Запишемо всі первісні у вигляді множини $\frac{x^3}{3}+C$.

Функція f(x), для якої існує первісна, називається інтегрованою, а операція знаходження первісної для даної функції називається інтегруванням.

<u>Означення</u>. Сукупність усіх первісних функції f(x) називається невизначеним інтегралом функції f(x) і позначається $\int f(x)dx = F(x)+C$, де $F(x)$ – деяка первісна функції f(x), а C – довільна стала.

Символ $\int$ називається знаком інтеграла,
f(x) – підінтегральна функція,
f(x)dx – підінтегральний вираз,
x – змінна інтегрування.

<u>Теорема 3</u>. (без доведення). Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a; b], то вона на цьому відрізку інтегрована.

<u>Зауваження.</u> Якщо похідна від елементарної функції завжди є елементарною функцією, то обернене твердження неправильне. Інтеграл від елементарної функції не завжди виражається через елементарні функції.

Наприклад,

$$\int \frac{\sin x}{x}dx \text{ – інтегральний синус;}$$

$$\int \frac{\cos x}{x}dx \text{ – інтегральний косинус;}$$

$$\int e^{-x^2}dx \text{ – інтеграл Пуассона;}$$

$$\int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx \text{ – інтеграли Френеля;}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ – інтегральний логарифм.}$$

Вказані інтеграли існують, але не зводяться до елементарних функцій.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

⇨ Використовуємо означення невизначеного інтеграла $\int f(x)dx = F(x) + C$,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x) \quad \blacksquare$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

⇨ $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \quad \blacksquare$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої, тобто $\int dF(x) = F(x) + C.$

⇨ Оскільки $dF(x) = F'(x)dx$, то

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \quad \blacksquare$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох чи декількох функцій дорівнює сумі їх інтегралів, тобто

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \qquad (1)$$

⇨ Знайдемо похідні від лівої та правої частин цієї рівності:

$\left(\int (f_1(x) + f_2(x))dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$ – за 1 властивістю,

$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) + f_2(x).$

Таким чином, похідні від лівої та правої частин рівності (1) рівні між собою. Згідно з теоремою 2 різниця між правою та лівою частинами рівності (1) дорівнює сталому числу. ■

5. Постійний множник можна винести за знак інтеграла, тобто якщо $a = const \neq 0$, то

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (2)$$

⇨ Знайдемо похідні від лівої та правої частин рівності (2):

$$\left(\int a \cdot f(x)dx\right)' = a \cdot f(x) \text{ – за 1 властивістю,}$$

$$\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = a \cdot f(x),$$

$a \cdot f(x) = a \cdot f(x) \Rightarrow$ різниця між правою та лівою частинами рівності (2) дорівнює сталому числу ■

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то
$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \qquad (3)$$

⇨ Знайдемо похідні від лівої та правої частин рівності (3):

$$\left(\int f(ax)dx\right)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax) + C\right)' = \left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' + C' = \frac{1}{a}(F(ax))' + 0 = \frac{1}{a}F'(ax) \cdot (ax)' =$$

$$= \frac{1}{a}F'(ax) \cdot a = F'(ax) = f(ax), \qquad f(ax) = f(ax) \quad ■$$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то
$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C.$$

8. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то
$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$.
2. $\int dx = x + C$.
3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
6. $\int e^x dx = e^x + C$.
7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
8. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x + C$.
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\, x + C$.
11. $\int \text{tg}\, x \, dx = -\ln|\cos x| + C$.
12. $\int \text{ctg}\, x \, dx = \ln|\sin x| + C$.
13. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arctg}\, x + C$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
15. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C$.
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.
17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

§ 2. Основні методи інтегрування

1) <u>Метод розкладу.</u> Базується на застосуванні властивостей 1 – 8 і табличних інтегралів.

$$\int\left(4-\frac{3}{x}+\frac{e^x}{2}\right)dx = \int 4\,dx - \int\frac{3}{x}dx + \int\frac{1}{2}e^x\,dx =$$

$$= 4\int dx - 3\int\frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int e^x\,dx = 4x - 3\ln|x| + 0{,}5\,e^x + C$$

$$\int\frac{dx}{(2x-10)^{10}} =$$

$$\int\frac{dx}{x^{10}} = \int x^{-10}dx = \quad \frac{x^{-9}}{-9} + C = \quad -\frac{1}{9x^9} + C$$

$$= \int(2x-10)^{-10}dx = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{9(2x-10)^9}\right) + C = -\frac{1}{18(2x-10)^9} + C.$$

$$\int x\left(8x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int\left(8x^2\cdot x+\frac{x}{x^3}\right)dx=\int\left(8x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx=8\int x^3\,dx+\int\frac{dx}{x^2}=8\frac{x^4}{4}+\left(-\frac{1}{x}\right)+C=2x^4-\frac{1}{x}+C$$

$$\int\frac{x^2+5}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)dx=\int 1\,dx+6\int\frac{1}{x^2-1}dx=$$

$$=x+6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=x+3\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

$$\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1+\cos x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos x\,dx\right)=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$$

$$\int\frac{dx}{9x^2+1}=\int\frac{dx}{(3x)^2+1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+C$$

2) <u>Метод заміни змінної або метод підстановки.</u>

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження заданого інтеграла до табличного.

Нехай необхідно обчислити інтеграл

$$\int f(x)dx$$

від неперервної функції f(x).

Замінимо змінну x через нову змінну t, виконуючи під знаком невизначеного інтеграла підстановку:

$$x=\varphi(t),$$

$$dx=\varphi'(t)dt,$$

де $\varphi(t)$ – неперервна функція, що має неперервну похідну $\varphi'(t)$ і для якої існує обернена функція $t=\psi(x)$.

Тоді $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ – формула заміни змінної або підстановки.

$$\int\sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx=\left|\begin{array}{c}\cos x=t\\ d(\cos x)=dt\\ -\sin x\,dx=dt\\ \sin x\,dx=-dt\end{array}\right|=-\int\sqrt{t}dt=-\int t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}} = \left| \begin{array}{c} 1-4\ln x = t \\ d(1-4\ln x) = dt \\ -4\cdot\frac{1}{x}dx = dt \\ \frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x} + C.$$

3) <u>Метод інтегрування частинами.</u>

Нехай $u(x)$, $v(x)$ – диференційовні функції. Відомо, що диференціал від добутку $u\cdot v$ обчислюється за формулою:
$d(u\cdot v) = udv + vdu.$

Проінтегруємо ліву та праву частини рівності:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

або $\int udv = uv - \int vdu$ – формула інтегрування частинами.

зауважимо, що через u позначають функцію, яка спрощується при диференціюванні (наприклад, x, x^2, arctg x, arcsin x,

До I групи відносяться інтеграли виду:
$\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, де $P(x)$ – многочлен, $k \in R$.

Для їх обчислення за u приймають $P(x)$, а за dv – відповідно вирази $e^{kx}dx$, $\sin kx dx$, $\cos kx dx$.

1. $\int x\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x \\ dv = \sin x\,dx \\ du = dx \\ v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{matrix}\right| = uv - \int v\,du = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$

До IIгрупи відносяться інтеграли виду:

$$\int P(x)\,\mathrm{arctg}x\,dx,\ \int P(x)\arcsin x\,dx,\ \int P(x)\arccos x\,dx,$$

$$\int P(x)\ln x\,dx,\ \text{де}\ \ P(x) - \text{многочлен.}$$

Для їх обчислення за u приймають відповідно функції: arctg x, arcsin x, arccos x, ln x, а за dv – вираз P(x)dx.

$$\int \mathrm{arctg}x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \mathrm{arctg}x \\ dv = dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{matrix}\right| = uv - \int v\,du = x\,\mathrm{arctg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

До III групи відносяться інтеграли виду:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int e^{ax}\sin bx\,dx,\ \text{де}\ a,\ b \in R.$$

Для їх обчислення двічі застосовують формулу інтегрування частинами

$$I = \int e^x\cos 3x\,dx = \left|\begin{matrix} u = e^x \\ dv = \cos 3x\,dx \\ du = e^x dx \\ v = \int \cos 3x\,dx = \\ = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right| = uv - \int v\,du = \frac{1}{3}e^x\sin 3x -$$

$$-\frac{1}{3}\int e^{x}\sin 3x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = e^{x} \\ dv = \sin 3x dx \\ du = e^{x}dx \\ v = \int \sin 3x\,dx = \\ = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3}e^{x}\sin 3x - \frac{1}{3}(uv - \int vdu) =$$

$$= \frac{1}{3}e^{x}\sin 3x - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{x}\cos 3x + \frac{1}{3}\int e^{x}\cos 3x\,dx)\right) = \frac{1}{3}e^{x}\sin 3x +$$

$$+\frac{1}{9}e^{x}\cos 3x - \frac{1}{9}I.$$

Отримали рівняння з невідомим інтегралом I, тобто

$I = \frac{1}{3}e^{x}\sin 3x + \frac{1}{9}e^{x}\cos 3x - \frac{1}{9}I$, звідки

$$\frac{10}{9}I = \frac{1}{3}e^{x}\sin 3x + \frac{1}{9}e^{x}\cos 3x,$$

$$I = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{3}e^{x}\sin 3x + \frac{1}{9}e^{x}\cos 3x\right) = \frac{e^{x}}{10}(3\sin 3x + \cos 3x) + C.$$

§ 3. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Інтеграли класу раціональних функцій завжди виражаються через елементарні функції.

Функція $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлени степеня m та n ($n \neq 0$), називається дробово-раціональною, або раціональним дробом.

Якщо $m < n$, то раціональний дріб називається правильним, якщо $m \geq n$, то неправильним.

У неправильному дробі завжди можна виділити цілу частину

Якщо многочлен $Q_n(x)$ розкладено на найпростіші множники $Q_n(x)=(x-a)^{\alpha}...(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}...(x^2+lx+s)^{\nu}$, то дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ у випадку, коли m < n, може бути представлений у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+...+\frac{A_1}{x-a}+...+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+$$

$$+...+\frac{B_1}{x-b}+\frac{M_{\mu}x+N_{\mu}}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+...+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+...+$$

$$+\frac{L_{\nu}x+K_{\nu}}{(x^2+lx+s)^{\nu}}+\frac{L_{\nu-1}x+K_{\nu-1}}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+...+\frac{L_1x+K_1}{x^2+lx+s},$$

Приклад 1. $\int\frac{4x^4+2x^2-x-3}{x^3-x}dx$.

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{4x^4+2x^2-x-3}{x^3-x}$ – неправильний дріб, m = 4 > n = 3.

Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\;4x^4+2x^2-x-3 & \underline{x^3-x} \\ \underline{4x^4-4x^2} & 4x \\ 6x^2-x-3 & \end{array}$$

$$\frac{4x^4+2x^2-x-3}{x^3-x}=4x+\frac{6x^2-x-3}{x^3-x}.$$

Розкладемо знаменник на множники: $x^3-x=x(x-1)(x+1)$.

$$\frac{6x^2-x-3}{x^3-x}=\frac{6x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Останню рівність зведемо до спільного знаменника

$$\frac{6x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

і прирівняємо чисельники:

$$6x^2-x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

$$6x^2-x-3=A(x^2-1)+B(x^2+x)+C(x^2-x)$$

$$6x^2-x-3=(A+B+C)x^2+(B-C)x+(-A)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, (використовується умова рівності двох многочленів: два многочлени рівні тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при відповідних степенях x).

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 6 = A + B + C, \\ x & -1 = B - C, \\ x^0 & -3 = -A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 3, \\ C - B = 1, \\ A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 3, \\ 2C = 4, \\ A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = 1, \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\frac{6x^2 - x - 3}{x^3 - x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

Невідомі коефіцієнти A, B, C можна було визначити іншим чином. Оскільки числа 0, 1, –1 є коренями знаменника, то зручно підставити саме ці значення x в рівність:

$$6x^2 - x - 3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & -3 = -A \Rightarrow A = 3, \\ x = 1 & 2 = 2B \Rightarrow B = 1, \\ x = -1 & 4 = 2C \Rightarrow C = 2. \end{array}$$

$$\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x^3 - x}dx = \int \left(4x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right)dx = 4\int xdx +$$

$$3\int \frac{dx}{x} + +\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x+1} = 2x^2 + 3\ln|x| + \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C.$$

Приклад 2. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)}dx$.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} \text{ – правильний дріб, } m = 2 < n = 4.$$

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Зведемо цю рівність до спільного знаменника

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=$$

$$=\frac{A_3(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_1(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)}$$

і прирівняємо чисельники:

$x^2+2=A_3(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_1(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3$.

Числа –1, 2 – дійсні корені знаменника, тому підставляємо ці значення x в останню рівність:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 3=-3A_3 \;\Rightarrow\; A_3=-1, \\ x=2 & 6=27B \;\Rightarrow\; B=\dfrac{2}{9}. \end{array}$$

Для обчислення A_1, A_2 прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^2+2=A_3x-2A_3+A_2x^2-A_2x-2A_2+A_1x^3-3A_1x-2A_1+Bx^3+$$
$$+3Bx^2+3Bx+B;$$

$$x^2+2=(A_1+B)x^3+(A_2+3B)x^2+(A_3-A_2-3A_1+3B)x+$$
$$+(-2A_3-2A_2-2A_1+B);$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0=A_1+B \;\Rightarrow\; A_1=-B=-\dfrac{2}{9}, \\ x^2 & 1=A_2+3B \;\Rightarrow\; A_2=1-3B=\dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Тоді $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=\int\left(-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x+1}+\right.$

$$\left.+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-2}\right)dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+$$

$$+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+$$

$$+C=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

Інтеграли виду $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ обчислюються підстановкою $x = t - \frac{b}{2a}$.

Знайти інтеграл $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+9}\,dx$.

$$\circ \int \frac{2x+3}{x^2+4x+9}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = t-2 \\ dx = dt \\ t = x+2 \end{array} \right| = \int \frac{2(t-2)+3}{(t-2)^2+4(t-2)+9}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t-1}{t^2+5}\,dt = \int \frac{2tdt}{t^2+5} - \int \frac{dt}{t^2+5} = \ln(t^2+5) - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} =$$

$$= \ln(x^2+4x+9) - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C. \bullet$$

Рекурентна формула

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$