**Лекція 3**

**3. Довільна просторова система сил та умови її рівноваги**

***3.1. Лема про паралельний переніс сил***

Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, що прикладена до нього, можна перенести в будь-яку точку тіла паралельно до самої себе, прикладаючи при цьому приєднану пару сил.

**Д о в е д е н н я**

Нехай сила $\vec{F}$ прикладена в т. O , і її треба перенести в т. O′ . 

Додаючи в т. O′ зрівноважену систему сил $\left\{\vec{F}^{ʹ},\vec{F}^{ʹʹ}\right\}$ , ~0, тобто *F′ = F′′ = F* , отримаємо еквівалентну початковій силі систему сил $\left\{\vec{F,}\vec{F}^{ʹ},\vec{F}^{ʹʹ}\right\}$ , а саме $\left\{\vec{F}\right\}\~\left\{\vec{F,}\vec{F}^{ʹ},\vec{F}^{ʹʹ}\right\}$. Остання система сил складається з сили $\vec{F}^{ʹ}=F$ і приєднаної пари сил $\left\{\vec{F},\vec{F}^{ʹʹ}\right\}$, що і треба було довести.

***3.2. Головний вектор і головний момент довільної системи сил. Основна теорема статики твердого тіла (теорема Пуансо)***

Нагадаємо, що основною задачею статики є визначення умов зведення довільної системи сил до найпростішого вигляду. ***Метод Пуансо*** дозволяє звести довільну систему сил до *однієї пари сил і однієї сили.*

Введемо спочатку поняття *головного вектора* і *головного моменту*.

Припустимо, що задається довільна система сил $\left\{\vec{F}\_{i}\right\}\_{i=1}^{n}$.

*Головним вектором* даної системи сил є векторна сума всіх сил, що входять до системи.

*Головним моментом* даної системи сил відносно т. O (центра зведення) називається векторна сума моментів всіх сил, що входять в дану систему, відносно того ж центра O .

$\vec{F}\_{O}=\sum\_{i=1}^{n}\vec{F}\_{i},$ (1)

$\vec{M}\_{O}=\sum\_{i=1}^{n}\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)=\sum\_{i=1}^{n}\left(\vec{r}\_{i}×\vec{F}\_{i}\right),$ (2)

де $\vec{r}\_{i}$ - радіус-вектор, проведений з центру зведення O у точку прикладення сили $\vec{F}\_{i}$ (див. рисунок).



Знайдемо проекції лівої і правої частин (1) і (2) на відповідні осі Ox,Oy і Oz

|  |  |
| --- | --- |
| $\left\{\begin{array}{c}F\_{Ox}=\sum\_{i=1}^{n}F\_{ix},\\F\_{Oy}=\sum\_{i=1}^{n}F\_{iy},\\F\_{Oz}=\sum\_{i=1}^{n}F\_{iz};\end{array}\right.$ (3) | $\left\{\begin{array}{c}M\_{Ox}=\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}F\_{iz}-z\_{i}F\_{iy}\right),\\M\_{Oy}=\sum\_{i=1}^{n}\left(z\_{i}F\_{ix}-x\_{i}F\_{iz}\right),\\M\_{Oz}=\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}F\_{iy}-y\_{i}F\_{ix}\right).\end{array}\right.$ (4) |

Тут ***FOx, FOy, FOz ; MOx, MOy, MOz*** - відповідні проекції головного вектора і головного моменту довільної системи сил на осі ***Ox,Oy і Oz***.

Модулі і напрямки головного вектора і головного момента знайдемо таким чином:

|  |  |
| --- | --- |
| $$F\_{O}=\sqrt{F\_{Ox}^{2}+F\_{Oy}^{2}+F\_{Oz}^{2}},$$$\left\{\begin{array}{c}\cos(\left(\vec{F}\_{O}⩑\vec{i}\right)=\frac{F\_{Ox}}{F\_{O}},)\\\cos(\left(\vec{F}\_{O}⩑\vec{j}\right)=\frac{F\_{Oy}}{F\_{O}},)\\\cos(\left(\vec{F}\_{O}⩑\vec{k}\right)=\frac{F\_{Oz}}{F\_{O}};)\end{array}\right.$ (5) | $$M\_{O}=\sqrt{M\_{Ox}^{2}+M\_{Oy}^{2}+M\_{Oz}^{2}},$$$\left\{\begin{array}{c}\cos(\left(\vec{M}\_{O}⩑\vec{i}\right)=\frac{M\_{Ox}}{M\_{O}},)\\\cos(\left(\vec{M}\_{O}⩑\vec{j}\right)=\frac{M\_{Oy}}{M\_{O}},)\\\cos(\left(\vec{M}\_{O}⩑\vec{k}\right)=\frac{M\_{Oz}}{M\_{O}};)\end{array}\right.$ (6) |

Скориставшись наведеною вище лемою, доведемо основну теорему статики – теорему Пуансо.

**Теорема Пуансо**: *довільна система сил, що діють на тверде тіло, замінюється еквівалентною системою, що складається з однієї сили, яка прикладена в довільній точці – центрі зведення і дорівнює головному вектору даної системи сил, і приєднаної пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно вибраного центру зведення*.

**Д о в е д е н н я**

Нехай маємо довільну систему сил $\left\{\vec{F}\_{i}\right\}\_{i=1}^{n}$, прикладених до твердого тіла.



Для кожної сили $\vec{F}\_{i}\left(i=\overbar{1,n}\right)$ в довільному центрі O прикладемо зрівноважену систему двох сил $\left\{\vec{F}\_{i}^{ʹ},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right\}$, таких, що $F\_{i}^{ʹ}=F\_{i}^{ʹʹ}=F\_{i}$, а $\vec{F}\_{i}=\vec{F}\_{i}^{ʹ}=-\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}$. Тоді сили $\vec{F}\_{i}$ і $\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}$ утворюють приєднану пару сил і маємо $\left\{\vec{F}\_{i},\vec{F}\_{i}^{ʹ},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right\}\~\left\{\vec{F}\_{i}^{ʹ},\left\{\vec{F}\_{i},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right\}\right\}$. Приєднану пару сил $\left\{\vec{F}\_{i},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right\}$ , можна характеризувати її моментом $\vec{M}\left(\vec{F}\_{i},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right)$, тому $\left\{\vec{F}\_{i},\vec{F}\_{i}^{ʹ},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right\}\~\left\{\vec{F}\_{i}^{ʹ},\vec{M}\left(\vec{F}\_{i},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right)\right\}$ . Зауважимо також, що $\vec{M}\left(\vec{F}\_{i},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right)=\vec{r}\_{i}×\vec{F}\_{i}=\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)$ , тому остаточно матимемо $\left\{\vec{F}\_{i},\vec{F}\_{i}^{ʹ},\vec{F}\_{i}^{ʹʹ}\right\}\~\left\{\vec{F}\_{i}^{ʹ},\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)\right\}$, де силу $\vec{F}\_{i}^{ʹ}$ можна вважати перенесеною в центр O силою $\vec{F}\_{i}$.

Таким чином, у точці O отримано сукупність перенесених в неї сил $\left\{\vec{F}\_{i}\right\}\_{i=1}^{n}$ і сукупність моментів $\left\{\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)\right\}\_{i=1}^{n}$. Склавши відповідно ці вектори отримаємо головний вектор

$\vec{F}\_{O}=\sum\_{i=1}^{n}\vec{F}\_{i}=\vec{F}\_{1}+\vec{F}\_{2}+…+\vec{F}\_{n}$ (7)

і головний момент

$\vec{M}\_{O}=\sum\_{i=1}^{n}\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)=\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{1}\right)+\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{2}\right)+…+\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{n}\right)$ (8)

вихідної довільної просторової системи сил.

Якщо дві системи сил мають геометрично рівні головні вектори і головні моменти, тоді такі системи називають *статично еквівалентними*.

***3.3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил***

**Теорема**: *для того, щоб довільна просторова система сил знаходилась в рівновазі, необхідно і достатньо, щоб* $\vec{F}\_{O}$ *і* $\vec{M}\_{O}$ *дорівнювали нулю.*

**Д о в е д е н н я**

Користуючись теоремою Пуансо, зводимо вказану систему сил, що діє на тверде тіло, до $\vec{F}\_{O}$ і $\vec{M}\_{O}$, тобто

$$\left\{\vec{F}\_{i}\right\}\_{i=1}^{n}\~\left\{\vec{F}\_{O},\vec{M}\_{O}\right\}$$

Застосувавши далі теорему Сомова, замінюємо $\vec{F}\_{O}$ і $\vec{M}\_{O}$ двома перехресними силами

$\left\{\vec{F}\_{O},\vec{M}\_{O}\right\}\~\left\{\vec{Q},\vec{P}\right\}$.

Оскільки система сил знаходиться в рівновазі, то за аксіомою про дві сили, сили $\vec{Q}$ і $\vec{P}$ повинні бути рівними за величиною, протилежними за напрямком і діяти вздовж однієї прямої. Але для такої системи сил $\vec{F}\_{O}$ і $\vec{M}\_{O}$ дорівнюють нулю, тобто

$\vec{F}\_{O}=\sum\_{i=1}^{n}\vec{F}\_{i}=\vec{0}$, (9)

а також

$\vec{M}\_{O}=\sum\_{i=1}^{n}\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)=\vec{0,}$ (10)

що і треба було довести.

Умови (9) і (10) є умовами рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі. При проеціюванні виразів (9) і (10) на осі Ox, Oy, Oz , отримаємо відповідно

$\left\{\begin{array}{c}F\_{Ox}=\sum\_{i=1}^{n}F\_{ix}=F\_{1x}+F\_{2x}+…+F\_{3x}=0,\\F\_{Oy}=\sum\_{i=1}^{n}F\_{iy}=F\_{1y}+F\_{2y}+…+F\_{3y}=0,\\F\_{Oz}=\sum\_{i=1}^{n}F\_{iz}=F\_{1z}+F\_{2z}+…+F\_{3z}=0;\end{array}\right.$ (11)

$\left\{\begin{array}{c}M\_{Ox}=\sum\_{i=1}^{n}M\_{Ox}\left(\vec{F}\_{i}\right)=M\_{Ox}\left(\vec{F}\_{1}\right)+M\_{Ox}\left(\vec{F}\_{2}\right)+…+M\_{Ox}\left(\vec{F}\_{n}\right)=0,\\M\_{Oy}=\sum\_{i=1}^{n}M\_{Oy}\left(\vec{F}\_{i}\right)=M\_{Oy}\left(\vec{F}\_{1}\right)+M\_{Oy}\left(\vec{F}\_{2}\right)+…+M\_{Oy}\left(\vec{F}\_{n}\right)=0,\\M\_{Oz}=\sum\_{i=1}^{n}M\_{Oz}\left(\vec{F}\_{i}\right)=M\_{Oz}\left(\vec{F}\_{1}\right)+M\_{Oz}\left(\vec{F}\_{2}\right)+…+M\_{Oz}\left(\vec{F}\_{n}\right)=0.\end{array}\right.$ (12)

Умови (11) і (12) є умовами рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі: суми проекцій всіх сил, що входять у систему, на осі Ox Oy Oz , , дорівнюють нулю, і суми проекцій моментів всіх сил відносно центру O на ті ж самі осі також дорівнюють нулю.

***3.4. Умови рівноваги системи сил в частинних випадках***

**1) Умови рівноваги просторової системи паралельних сил**

Розглянемо просторову систему паралельних сил. Для неї перші два рівняння системи (11) і третє рівняння системи (12) – тотожні нулі. Залишаються, таким чином, лише рівняння

$\sum\_{i=1}^{n}F\_{iz}=0, $

$\sum\_{i=1}^{n}M\_{Ox}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0, \sum\_{i=1}^{n}M\_{Oy}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0.$

Для рівноваги системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума проекцій всіх сил на вісь, що їм паралельна, дорівнювала нулю, а також дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно двох інших координатних осей.

**2) Умови рівноваги довільної системи сил на площині**

Для такої системи сил можна записати умови рівноваги у **трьох формах.**

**а)** З виразів (11) і (12) маємо:

$\sum\_{i=1}^{n}F\_{ix}$$=0, \sum\_{i=1}^{n}F\_{iy}=0, \sum\_{i=1}^{n}M\_{Oz}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0.$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми проекцій всіх сил на координатні осі, що лежать у площині дії сил, а також алгебрична сума моментів тих же сил відносно довільної точки O площини.

**б)** $\sum\_{i=1}^{n}F\_{ix}=0, \sum\_{i=1}^{n}M\_{A}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0, \sum\_{i=1}^{n}M\_{B}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0.$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно двох довільних точок площини, а також алгебрична сума проекцій всіх сил на координатну вісь x (або y )

**в)** $ \sum\_{i=1}^{n}M\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0,$ $\sum\_{i=1}^{n}M\_{A}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0, \sum\_{i=1}^{n}M\_{B}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0.$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно трьох довільних точок площини, що не лежать на одній прямій.

**3) Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил**

**а)** Із виразів (11) і (12) попередньої лекції маємо:

$\sum\_{i=1}^{n}F\_{iz}$****$=0, \sum\_{i=1}^{n}M\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0.$

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума проекцій всіх сил на вісь, паралельну їм, дорівнювала нулю, і алгебрична сума моментів всіх сил відносно довільної точки (центра) теж дорівнювала б нулю.

**б)** $\sum\_{i=1}^{n}M\_{A}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0, \sum\_{i=1}^{n}M\_{B}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0.$

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума моментів всіх сил відносно двох довільних точок площини, які не лежать на одній прямій, перпендикулярній до ліній дії сил, дорівнювала нулю.

**4) Умови рівноваги довільної системи пар сил**

Для рівноваги довільної системи пар сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю геометрична сума моментів всіх пар, тобто

$\sum\_{i=1}^{n}\vec{M}\left(\vec{F}\_{i},-\vec{F}\_{i}\right)=\vec{0}.$

У разі розміщення всіх пар в одній площині умовою рівноваги є рівність нулю алгебричної суми моментів всіх пар відносно осі (наприклад, Ox ), перпендикулярної до площини дії пар, тобто

$\sum\_{i=1}^{n}\vec{M}\_{x}\left(\vec{F}\_{i},-\vec{F}\_{i}\right)=\vec{0}.$

**3.5. Умови і рівняння рівноваги невільного твердого тіла**

У випадку невільного твердого тіла, що знаходиться в рівновазі, необхідно, користуючись аксіомою про звільнення від в’язей, відкинути в’язі, замінюючи їх дію відповідними реакціями (які прикладені до точок контакту тіла із в’яззю), роблячи тим самим невільне тверде тіло вільним. Тепер рівновагу даного тіла будемо розглядати при дії на нього активних сил і реакцій в’язей.

Якщо кількість невідомих реакцій в’язей дорівнює, або меньша за кількість рівнянь рівноваги, тоді задача про їх визначення називається статично визначеною; якщо ж число невідомих реакцій в’язей більше за число рівнянь, тоді така задача називається *статично невизначеною*.

Нехай на тверде тіло діють ***n*** - активних сил $\left\{\vec{F}\_{i}\right\}\_{i=1}^{n}$ і ***m*** - реакцій в’язей $\left\{\vec{R}\_{j}\right\}\_{j=1}^{m}$ .

Тоді для рівноваги невільного твердого тіла необхідно і достатньо, щоб геометрична сума всіх активних сил і реакцій в’язей дорівнювала нулю, а також геометрична сума моментів всіх активних сил і реакцій в’язей відносно одного й того ж центра O дорівнювала нулю, тобто

$\left\{\begin{array}{c}\sum\_{i=1}^{n}\vec{F}\_{i}+\sum\_{j=1}^{m}\vec{R}\_{j}=\vec{0}, \\\sum\_{i=1}^{n}\vec{M}\_{O}\left(\vec{F}\_{i}\right)+\sum\_{j=1}^{m}\vec{M}\_{O}\left(\vec{R}\_{j}\right)=\vec{0.}\end{array}\right.$ (13)

Якщо спроектувати формули (13) на осі Ox,Oy і Oz , отримаємо

|  |  |
| --- | --- |
| $$\left\{\begin{array}{c}\sum\_{i=1}^{n}F\_{ix}+\sum\_{j=1}^{m}R\_{jx}=0,\\\sum\_{i=1}^{n}F\_{iy}+\sum\_{j=1}^{m}R\_{jy}=0,\\\sum\_{i=1}^{n}F\_{iz}+\sum\_{j=1}^{m}R\_{jz}=0;\end{array}\right.$$ | $$\left\{\begin{array}{c}\sum\_{i=1}^{n}M\_{x}\left(\vec{F}\_{i}\right)+\sum\_{j=1}^{m}M\_{x}\left(\vec{R}\_{j}\right)=0,\\\sum\_{i=1}^{n}M\_{y}\left(\vec{F}\_{i}\right)+\sum\_{j=1}^{m}M\_{y}\left(\vec{R}\_{j}\right)=0,\\\sum\_{i=1}^{n}M\_{z}\left(\vec{F}\_{i}\right)+\sum\_{j=1}^{m}M\_{z}\left(\vec{R}\_{j}\right)=0.\end{array}\right.$$ |

Якщо невідомі реакції в’язей не входять до деяких із останніх співвідношень , тоді ці співвідношення називаються *умовами рівноваги* невільного твердого тіла. Якщо ж у деякі співвідношення входять невідомі реакції в’язей, тоді вони називаються *рівняннями рівноваги* невільного твердого тіла.

**1) Умови рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою**

Введемо систему координат, сумістивши її початок з нерухомою точкою O . Тоді, представляючи реакцію в нерухомій точці O сумою трьох складових по осям координат, тобто у вигляді

$\vec{R}=\vec{R}\_{x}+\vec{R}\_{y}+\vec{R}\_{z}$,

отримаємо наступні шість рівнянь:

$$\sum\_{}^{}F\_{ix}+R\_{x}=0,$$

$$\sum\_{}^{}F\_{iy}+R\_{y}=0,$$

$$\sum\_{}^{}F\_{iz}+R\_{z}=0;$$

$$\sum\_{}^{}M\_{x}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0,$$

$$\sum\_{}^{}M\_{y}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0,$$

$$\sum\_{}^{}M\_{z}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0.$$

Останні три співвідношення не містять реакцій в’язей, отже вони є умовами рівноваги.

Таким чином, умовами рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою є наступні: алгебричні суми моментів активних сил відносно осей Ox,Oy і Oz (з початком в нерухомій точці) повинні дорівнювати нулю.

**2) Умови рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками**

Вісь, що проходить через дві нерухомі точки O1 і O2 , називається нерухомою.

Введемо систему координат з початком в одній з нерухомих точок (наприклад, O1 ), а вісь Oz проведемо через іншу нерухому точку ( O2 ). Тоді, подаючи реакції в цих точках у вигляді

$\vec{R}\_{1}=\vec{R}\_{1x}+\vec{R}\_{1y}+\vec{R}\_{1z},$

$\vec{R}\_{2}=\vec{R}\_{2x}+\vec{R}\_{2y}+\vec{R}\_{2z}$,

отримаємо наступні шість рівнянь:

$$\sum\_{}^{}F\_{ix}+R\_{1x}+R\_{2x}=0,$$

$$\sum\_{}^{}F\_{iy}+R\_{1y}+R\_{2y}=0,$$

$$\sum\_{}^{}F\_{iz}+R\_{1z}+R\_{2z}=0,$$

$$\sum\_{}^{}M\_{x}\left(\vec{F}\_{i}\right)-R\_{2y}∙a=0,$$

$$\sum\_{}^{}M\_{y}\left(\vec{F}\_{i}\right)+R\_{2x}∙a=0,$$

$$\sum\_{}^{}M\_{z}\left(\vec{F}\_{i}\right)=0.$$

Останнє співвідношення є умовою рівноваги, оскільки воно не містить реакцій в’язей.

Для рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками необхідно, щоб алгебрична сума моментів активних сил відносно осі, що проходить через ці дві точки, дорівнювала нулю.

**Контрольні запитання до лекції №3**

1. В чому полягає зміст леми про паралельне перенесення сили?
2. Що називають головним вектором і головним моментом системи сил?
3. В чому полягає зміст теореми Пуансо?
4. Запишіть умови рівноваги довільної системи сил.
5. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил.
6. Умови рівноваги довільної системи пар сил.
7. Умови і рівняння рівноваги невільного твердого тіла.
8. Умови рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою.
9. Умови рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою.
10. Умови рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками

Рекомендована література

**Основна**

1. Черниш О. М., В. Яременко М.Г. Теоретична механіка. - К.: Центр навчальної літератури, 2018. - 760 с.
2. Гайдайчук В.В., Гонтарь М.Г. Теоретична механіка. Загальні принципи механіки. - К.: КНУБА, 2018. - 260 с.
3. Дмитриченко М.Ф., Гончар М.О. Теоретична механіка. - К.: НТУ, 2018. - 364 с.
4. Булгаков В.М. Теоретична механіка. - К.: Центр навчальної літератури, 2017. - 640 с.
5. Кузьо І.В., Шпачук В. П., Цідило І. В. Теоретична механіка. - Харків : Фоліо, 2017. - 780 с.
6. Зінько Я. А., Кузьо І. В. Збірник задач з теоретичної механіки. Частина І: Статика. - Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2015. - 88 с.
7. Векерик В., Кузьо І., Левчук К. Теоретична механіка. Статика: підручник. - Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. - 325 с.

**Допоміжна**

1. Березін Л.М., Кошель С.О. Теоретична механіка. К.: Центр навчальної літератури, 2018. - 218 с.
2. Бережницький, Б. С. Теоретична механіка : метод. вказівки / Б. С. Бережницький. - Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. - 31 с.
3. Апостолюк О.С., Воробйов М.В. Теоретична механіка: Збірник задач. - К.: Техніка, 2011. - 400 с.