Рекомендації студенту по роботі над курсом вищої математики

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з таких елементів: вивчення теоретичного матеріалу за підручниками; розв'язування задач і вправ; виконання контрольних робіт.

Теоретичний матеріал, що викладається студентам-заочникам на лекціях під час екзаменаційно-настановчих сесій, носить переважно оглядовий характер. Їх мета – звернути увагу студента на загальну схему побудови відповідного розділу курсу, підкреслити найважливіші місця, вказати головні практичні застосування. Ґрунтовне вивчення теоретичного матеріалу можливе лише під час самостійної роботи над підручниками та посібниками. У бібліотеці Державного університету «Житомирська політехніка» є значна кількість навчальної літератури з вищої математики. У першу чергу можна рекомендувати:

– для студентів інженерних напрямів підготовки:

1. Вища математика: У 2-х кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: АСК, 2001.
3. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: У 2-х ч. – К.: Техніка, 2003.

– для студентів економічних напрямів підготовки:

1. Грисенко М.В. Математика для економістів. – К.: Либідь, 2007.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів. – К.: НАУ, 1997.

Важливим елементом роботи над курсом вищої математики є розв'язання значної кількості задач і вправ. Це необхідно як для успішного і глибокого засвоєння теоретичного матеріалу, так і для вироблення певних технічних навичок, оволодіння відповідними прийомами і методами. Тут будуть корисними перш за все навчальні посібники:

1. Практикум з вищої математики / За ред. В.О. Коваля. – Житомир: ЖДТУ, 2008.

При вивченні дисципліни здобувачі вищої освіти мають набути загальні та професійні компетентності.

1. Загальні компетентності:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

– здатність до розуміння предметної області та професійної діяльності;

– здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

2. Фахові компетентності:

– здатність до аналізу, синтезу і оптимізації інформаційних систем та технологій з використанням математичних моделей і методів;

– здатність проводити обчислювальні експерименти, порівнювати результати експериментальних даних і отриманих рішень.

3. Програмні результати навчання:

– знання лінійної та векторної алгебри, диференційного та інтегрального числення, теорії функцій багатьох змінних, теорії рядів, диференційних рівнянь для функцій однієї та багатьох змінних, операційного числення, теорії ймовірностей та математичної статистики в обсязі, необхідному для розробки та використання інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації.

Виконання студентом-заочником контрольних робіт є заключним елементом самостійної роботи. Нижче подані контрольні завдання за розділами курсу вищої математики.

Заключним етапом вивчення курсу є складання заліків та іспитів.

Лінійна алгебра

Завдання 1. Дано матриці A та B. Знайти AB^T .

1.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.5. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.7. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1.8. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.10. $A=\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.11. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.12. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.13. $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & -4 & 3\end{pmatrix}$.

1.14. $A=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

1.15. $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 7 & 4\end{pmatrix}$.

1.16. $A=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -4\\ 6 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3\\ 3 & 7 & -1\end{pmatrix}$.

1.17. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\ -4 & -2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

1.18. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & 5 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

1.19. $A=\begin{pmatrix}-7 & 5 & -3\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 1 & 5 & 9\end{pmatrix}$.

1.20. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1.21. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

1.22. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1.23. $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

1.24. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

1.25. $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.26. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1.27. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1.28. $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.29. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

1.30. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку наступними способами:

а) за правилом трикутника;

б) розкладанням за елементами будь-якого рядка чи стовпця

2.1. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -7 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ **2.2.** $\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **2.3.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

2.4. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **2.5.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ **2.6.** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2.7. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ **2.8.** $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ **2.9.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2.10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **2.11.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **2.12.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2.13. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **2.14.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2.15.** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

2.16. $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **2.17.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ **2.18.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

2.19. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **2.20.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ **2.21.** $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \\ -4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

2.22. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **2.23.** $\begin{vmatrix} 9 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **2.24.** $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2.25. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **2.26.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **2.27.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2.28. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **2.29.** $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ **2.30.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 8 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

Завдання 3. Розв’язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

3.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$ **3.4.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -5. \end{cases}$ **3.6.** $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = -1, \\ 4x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = 10. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + x_2 = 11. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = -3. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8, \\ x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 3, \\ -3x_1 + 5x_2 = 11. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 = -3, \\ 4x_1 + 3x_2 = 15. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 = 12. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 = -10. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 = 4. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -4, \\ 4x_1 + 3x_2 = 14. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -4, \\ x_1 - 2x_2 = -7. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 = -7. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -22, \\ 2x_1 + x_2 = -6. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 = -7. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 = 16. \end{cases}$

<u>Завдання 4.</u> Розв’язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

4.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 2 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -11 \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

4.30. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

Завдання 5. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

5.1. $\vec{a} = (3;4;-3)$, $\vec{b} = (-5;4;2)$, $\vec{c} = (2;3;0)$, $\vec{d} = (-11;28;-1)$

5.2. $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} = (2;1;5)$, $\vec{c} = (-1;2;1)$, $\vec{d} = (5;5;6)$

5.3. $\vec{a} = (1;3;-3;)$, $\vec{b} = (-4;4;0)$, $\vec{c} = (3;5;1)$, $\vec{d} = (-12;21;-2)$

5.4. $\vec{a} = (1;1;2)$, $\vec{b} = (4;-4;3)$, $\vec{c} = (-1;1;0)$, $\vec{d} = (-15;17;-10)$

5.5. $\vec{a} = (2;2;0)$, $\vec{b} = (-2;5;-1)$, $\vec{c} = (3;1;5)$, $\vec{d} = (9;34;20)$

5.6. $\vec{a} = (3;1;0)$, $\vec{b} = (5;-4;1)$, $\vec{c} = (-1;4;-4)$, $\vec{d} = (-7;3;12)$

5.7. $\vec{a}=(0;-4;1)$, $\vec{b}=(-2;-3;5)$, $\vec{c}=(5;4;-1)$, $\vec{d}=(1;5;-14)$

5.8. $\vec{a}=(-1;-5;1)$, $\vec{b}=(-1;4;-2)$, $\vec{c}=(5;2;0)$, $\vec{d}=(-3;21;-9)$

5.9. $\vec{a}=(-2;-3;3)$, $\vec{b}=(-3;-5;4)$, $\vec{c}=(4;4;0)$, $\vec{d}=(19;31;-26)$

5.10. $\vec{a}=(2;2;1)$, $\vec{b}=(-3;3;-4)$, $\vec{c}=(2;1;1)$, $\vec{d}=(-5;11;-10)$

5.11. $\vec{a}=(-1;-1;0)$, $\vec{b}=(3;-2;4)$, $\vec{c}=(-2;4;-1)$, $\vec{d}=(-3;1;-7)$

5.12. $\vec{a}=(-2;0;1)$, $\vec{b}=(-4;1;3)$, $\vec{c}=(1;2;1)$, $\vec{d}=(1;3;2)$

5.13. $\vec{a}=(-3;-4;1)$, $\vec{b}=(0;4;-3)$, $\vec{c}=(4;5;1)$, $\vec{d}=(13;33;-14)$

5.14. $\vec{a}=(-3;-2;1)$, $\vec{b}=(2;0;-5)$, $\vec{c}=(2;3;1)$, $\vec{d}=(11;9;-2)$

5.15. $\vec{a}=(-4;-2;1)$, $\vec{b}=(-4;-3;3)$, $\vec{c}=(3;3;0)$, $\vec{d}=(28;17;-13)$

5.16. $\vec{a}=(-5;-3;0)$, $\vec{b}=(1;2;-4)$, $\vec{c}=(3;3;1)$, $\vec{d}=(24;22;-7)$

5.17. $\vec{a}=(-4;-1;0)$, $\vec{b}=(5;-1;2)$, $\vec{c}=(3;1;-3)$, $\vec{d}=(12;2;7)$

5.18. $\vec{a}=(0;2;1)$, $\vec{b}=(3;-1;4)$, $\vec{c}=(4;-4;-1)$, $\vec{d}=(-7;5;-3)$

5.19. $\vec{a}=(-1;-3;3)$, $\vec{b}=(1;-4;-1)$, $\vec{c}=(1;-4;0)$, $\vec{d}=(-3;19;1)$

5.20. $\vec{a}=(-2;5;-1)$, $\vec{b}=(3;-3;2)$, $\vec{c}=(2;-2;0)$, $\vec{d}=(-5;-1;-4)$

5.21. $\vec{a}=(-3;-4;4)$, $\vec{b}=(0;-4;-3)$, $\vec{c}=(2;2;-1)$, $\vec{d}=(7;26;1)$

5.22. $\vec{a}=(5;-3;0)$, $\vec{b}=(-3;2;-3)$, $\vec{c}=(-1;2;5)$, $\vec{d}=(-5;2;-11)$

5.23. $\vec{a}=(-4;4;2)$, $\vec{b}=(4;-1;3)$, $\vec{c}=(3;-2;0)$, $\vec{d}=(12;-15;-11)$

5.24. $\vec{a}=(-5;-5;4)$, $\vec{b}=(-1;-2;1)$, $\vec{c}=(3;3;0)$, $\vec{d}=(27;29;-22)$

5.25. $\vec{a}=(0;-3;5)$, $\vec{b}=(-3;2;-3)$, $\vec{c}=(5;2;-1)$, $\vec{d}=(-11;2;-5)$

5.26. $\vec{a}=(-2;2;1)$, $\vec{b}=(4;3;-1)$, $\vec{c}=(3;-3;0)$, $\vec{d}=(16;5;-5)$

5.27. $\vec{a}=(-3;-4;1)$, $\vec{b}=(-2;0;-4)$, $\vec{c}=(4;1;-3)$, $\vec{d}=(-3;9;6)$

5.28. $\vec{a}=(-4;3;0)$, $\vec{b}=(5;1;1)$, $\vec{c}=(4;-3;1)$, $\vec{d}=(25;-14;2)$

5.29. $\vec{a}=(0;4;3)$, $\vec{b}=(2;-5;5)$, $\vec{c}=(1;-1;2)$, $\vec{d}=(-8;23;-21)$

5.30. $\vec{a}=(4;1;-3)$, $\vec{b}=(-1;1;4)$, $\vec{c}=(-2;0;-1)$, $\vec{d}=(17;5;-7)$

Завдання 6. Задано два комплексних числа z_1 та z_2. Виконати дії:

1) z_1+z_2; 2) $z_1-\overline{z}_2$; 3) $z_1\cdot z_2$; 4) $\dfrac{z_1}{\overline{z}_2}$; 5) $z_1^{\,3}$.

6.1. $z_1=1-2i,\ \ z_2=3+i.$

6.2. $z_1=3+i,\ \ z_2=1-2i.$

6.3. $z_1=4-3i,\ \ z_2=2+i.$

6.4. $z_1=-1+3i,\ \ z_2=4-i.$

6.5. $z_1=3+2i,\ \ z_2=1-3i.$

6.6. $z_1=4-3i,\ \ z_2=2+2i.$

6.7. $z_1=-2-3i,\ \ z_2=1+3i.$

6.8. $z_1=4+i,\ \ z_2=3+2i.$

6.9. $z_1=-2-3i,\ \ z_2=1+2i.$

6.10. $z_1=-1+i,\ \ z_2=-3-i.$

6.11. $z_1=4+5i,\ \ z_2=3-i.$

6.12. $z_1=2+3i,\ \ z_2=-1-i.$

6.13. $z_1=5+4i,\ \ z_2=2+3i.$

6.14. $z_1=-3+5\,i,\ \ z_2=4+i.$

6.15. $z_1=-4+i,\ \ z_2=-3-i.$

6.16. $z_1=4-5i,\ \ z_2=2+3i.$

6.17. $z_1=3+5i,\ \ z_2=5-2i.$

6.18. $z_1=4-3i,\ \ z_2=2+7i.$

6.19. $z_1=-2+3i,\ \ z_2=-2-3i.$

6.20. $z_1=5+3i,\ \ z_2=-4-3i.$

6.21. $z_1=-2-3i,\ \ z_2=2+5i.$

6.22. $z_1=5-3i,\ \ z_2=-1+3i.$

6.23. $z_1=4+3i,\ \ z_2=-3+2i.$

6.24. $z_1=2-3i,\ \ z_2=-1+2i.$

6.25. $z_1=-14+i,\ \ z_2=-3+2i.$

6.26. $z_1=-4+5i,\ \ z_2=-3+i.$

6.27. $z_1=2+5i,\ \ z_2=3-i.$

6.28. $z_1=-5+4i,\ \ z_2=4-3i.$

6.29. $z_1=3+5\,i,\ \ z_2=4+3i.$

6.30. $z_1=4+5i,\ \ z_2=-3-7i.$

<u>Завдання 7.</u> Записати комплексне число z:
1) в алгебраїчній формі; 2) в тригонометричній формі;
3) в показниковій формі. Знайти z^5 та $\sqrt{z}$.

7.1. $z=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}\,i}$.

7.2. $z=\dfrac{2}{1+i}$.

7.3. $z=\dfrac{-2}{\sqrt{3}-i}$.

7.4. $z=\dfrac{8}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}$.

7.5. $z=\dfrac{2\sqrt{2}}{-1+i}$.

7.6. $z=\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$.

7.7. $z=\dfrac{-3}{1+\sqrt{3}\,i}$.

7.8. $z=\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}$.

7.9. $z=\dfrac{1}{-1-i}$.

7.10. $z=-\dfrac{2}{-1+\sqrt{3}\,i}$.

7.11. $z=\dfrac{-8}{1+i}$.

7.12. $z=\dfrac{4}{-1+\sqrt{3}\ \ i}$.

7.13. $z=\dfrac{6}{-\sqrt{3}+i}$.

7.14. $z=\dfrac{2}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}$.

7.15. $z=\dfrac{2}{-1-\sqrt{3}\,i}$.

7.16. $z=\dfrac{4}{1+\sqrt{3}\,i}$.

7.17. $z=\dfrac{3}{1-i}$.

7.18. $z=\dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$.

7.19. $z=\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}$.

7.20. $z=\dfrac{4}{-1+\sqrt{3}\ i}$.

7.21. $z=\dfrac{2}{-\sqrt{3}+i}$.

7.22. $z=\dfrac{6}{1-\sqrt{3}\,i}$.

7.23. $z=\dfrac{8}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}$.

7***.24.*** $z=\dfrac{8}{2+2i}$.

7.25. $z=-\dfrac{5}{-1-\sqrt{3}\,i}$.

7***.26.*** $z=\dfrac{-9}{3+3i}$.

7.27. $z=\dfrac{10}{1+\sqrt{3}\quad i}$.

7***.28.*** $z=\dfrac{12}{\sqrt{3}+i}$.

7.29. $z=\dfrac{8}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}$.

7.30. $z=\dfrac{4}{-1-\sqrt{3}\,i}$.

<u>Завдання 8.</u> Виконати дії

8.1. а) $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{2+3i}{3-4i}+\dfrac{-1+2i}{2+i}$

в) $(-1+i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

8.2. . а) $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$ ***б)*** $\dfrac{3+i}{1-3i}+\dfrac{-5+6i}{4+2i}$

в) $(-2+2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16-16i}$

8.3. а) $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{-2+i}{3+4i}+\dfrac{3+2i}{2-i}$

в) $(-1-i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

8.4. а) $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$ ***б)*** $\dfrac{4-3i}{1+i}+\dfrac{-5+2i}{4+2i}$

в) $(2-2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16+16i}$

8.5. а) $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{2+3i}{3-4i}+\dfrac{-1+2i}{2+i}$

в) $(-1+i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

8.6. а) $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$ ***б)*** $\dfrac{3+i}{1-3i}+\dfrac{-5+6i}{4+2i}$

в) $(-2+2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16-16i}$

8.7. а) $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$ **б)** $\dfrac{-2+i}{3+4i}+\dfrac{3+2i}{2-i}$

в) $(-1-i\sqrt{3})^5$ **г)** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

8.8. а) $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$ **б)** $\dfrac{4-3i}{1+i}+\dfrac{-5+2i}{4+2i}$

в) $(2-2i)^4$ **г)** $\sqrt[3]{16+16i}$

8.9. а) $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$ **б)** $\dfrac{2+3i}{3-4i}+\dfrac{-1+2i}{2+i}$

в) $(-1+i\sqrt{3})^5$ **г)** $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

8.10. а) $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$ **б)** $\dfrac{3+i}{1-3i}+\dfrac{-5+6i}{4+2i}$

в) $(-2+2i)^4$ **г)** $\sqrt[3]{16-16i}$

8.11. а) $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$ **б)** $\dfrac{-2+i}{3+4i}+\dfrac{3+2i}{2-i}$

в) $(-1-i\sqrt{3})^5$ **г)** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

8.12. а) $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$ **б)** $\dfrac{4-3i}{1+i}+\dfrac{-5+2i}{4+2i}$

в) $(2-2i)^4$ **г)** $\sqrt[3]{16+16i}$

8.13. а) $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$ **б)** $\dfrac{2+3i}{3-4i}+\dfrac{-1+2i}{2+i}$

в) $(-1+i\sqrt{3})^5$ **г)** $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

8.14. а) $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$ **б)** $\dfrac{3+i}{1-3i}+\dfrac{-5+6i}{4+2i}$

в) $(-2+2i)^4$ **г)** $\sqrt[3]{16-16i}$

8.15. а) $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$ **б)** $\dfrac{-2+i}{3+4i}+\dfrac{3+2i}{2-i}$

в) $(-1-i\sqrt{3})^5$ **г)** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

8.16. а) $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$ **б)** $\dfrac{4-3i}{1+i}+\dfrac{-5+2i}{4+2i}$

в) $(2-2i)^4$ **г)** $\sqrt[3]{16+16i}$

8.17. ***а)*** $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{2+3i}{3-4i}+\dfrac{-1+2i}{2+i}$

в) $(-1+i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

8.18. ***а)*** $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$ ***б)*** $\dfrac{3+i}{1-3i}+\dfrac{-5+6i}{4+2i}$

в) $(-2+2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16-16i}$

8.19. ***а)*** $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{-2+i}{3+4i}+\dfrac{3+2i}{2-i}$

в) $(-1-i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

8.20. ***а)*** $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$ ***б)*** $\dfrac{4-3i}{1+i}+\dfrac{-5+2i}{4+2i}$

в) $(2-2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16+16i}$

8.21. ***а)*** $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{2+3i}{3-4i}+\dfrac{-1+2i}{2+i}$

в) $(-1+i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

8.22. ***а)*** $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$ ***б)*** $\dfrac{3+i}{1-3i}+\dfrac{-5+6i}{4+2i}$

в) $(-2+2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16-16i}$

8.23. ***а)*** $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{-2+i}{3+4i}+\dfrac{3+2i}{2-i}$

в) $(-1-i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

8.24. ***а)*** $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$ ***б)*** $\dfrac{4-3i}{1+i}+\dfrac{-5+2i}{4+2i}$

в) $(2-2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16+16i}$

8.25. ***а)*** $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{2+3i}{3-4i}+\dfrac{-1+2i}{2+i}$

в) $(-1+i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

8.26. ***а)*** $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$ ***б)*** $\dfrac{3+i}{1-3i}+\dfrac{-5+6i}{4+2i}$

в) $(-2+2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16-16i}$

8.27. а) $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{-2+i}{3+4i}+\dfrac{3+2i}{2-i}$

в) $(-1-i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

8.28. а) $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$ ***б)*** $\dfrac{4-3i}{1+i}+\dfrac{-5+2i}{4+2i}$

в) $(2-2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16+16i}$

8.29. а) $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$ ***б)*** $\dfrac{2+3i}{3-4i}+\dfrac{-1+2i}{2+i}$

в) $(-1+i\sqrt{3})^5$ ***г)*** $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

8.30. а) $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$ ***б)*** $\dfrac{3+i}{1-3i}+\dfrac{-5+6i}{4+2i}$

в) $(-2+2i)^4$ ***г)*** $\sqrt[3]{16-16i}$

Векторна алгебра

Завдання 9. Дано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Знайти: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; 4) скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 5) векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$; 6) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$; 7) $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

9.1. $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(-5;4;2)$.

9.2. $\vec{a}=(-4;-1;3)$, $\vec{b}=(2;-4;1)$.

9.3. $\vec{a}=(-3;2;4)$, $\vec{b}=(1;-3;5)$.

9.4. $\vec{a}=(2;-1;4)$, $\vec{b}=(3;-1;5)$.

9.5. $\vec{a}=(-6;2;3)$, $\vec{b}=(2;1;-4)$.

9.6. $\vec{a}=(2;3;-2)$, $\vec{b}=(1;2;-4)$.

9.7. $\vec{a}=(3;-5;2)$, $\vec{b}=(-2;3;1)$.

9.8. $\vec{a}=(-4;2;-3)$, $\vec{b}=(1;-4;1)$.

9.9. $\vec{a}=(4;-3;5)$, $\vec{b}=(2;-5;1)$.

9.10. $\vec{a}=(1;-4;5)$, $\vec{b}=(2;1;6)$.

9.11. $\vec{a}=(-1;2;-3)$, $\vec{b}=(-2;4;-3)$.

9.12. $\vec{a}=(2;-4;5)$, $\vec{b}=(1;-2;2)$.

9.13. $\vec{a}=(3;-2;3)$, $\vec{b}=(-1;5;-2)$.

9.14. $\vec{a}=(4;-1;3)$, $\vec{b}=(2;-3;3)$.

9.15. $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(1;1;3)$.

9.16. $\vec{a}=(-5;-2;-1)$, $\vec{b}=(4;-4;-2)$.

9.17. $\vec{a}=(2;-5;-1)$, $\vec{b}=(-3;5;1)$.

9.18. $\vec{a}=(3;-2;5)$, $\vec{b}=(-7;3;-5)$.

9.19. $\vec{a}=(2;-1;-4)$, $\vec{b}=(-3;-1;-5)$.

9.20. $\vec{a}=(-1;2;-3)$, $\vec{b}=(5;-6;4)$.

9.21. $\vec{a}=(2;3;2)$, $\vec{b}=(-1;-5;-4)$.

9.22. $\vec{a}=(7;-5;-2)$, $\vec{b}=(8;-3;1)$.

9.23. $\vec{a}=(-4;0;-1)$, $\vec{b}=(2;-4;-1)$.

9.24. $\vec{a}=(4;-3;0)$, $\vec{b}=(-2;6;1)$.

9.25. $\vec{a}=(1;4;-6)$, $\vec{b}=(-2;-1;4)$.

9.26. $\vec{a}=(-3;5;-3)$, $\vec{b}=(2;4;3)$.

9.27. $\vec{a}=(5;-4;-3)$, $\vec{b}=(1;-2;2)$.

9.28. $\vec{a}=(-3;4;5)$, $\vec{b}=(-2;5;-2)$.

9.29. $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(7;-3;1)$.

9.30. $\vec{a}=(0;-4;3)$, $\vec{b}=(-5;4;-3)$.

Завдання 10. Дано координати вершин трикутника $A_1A_2A_3$. Знайти внутрішній кут трикутника при вершині A_2.

10.1. $A_1\ 3;1;2\ , A_2\ 5;0;-1\ , A_3\ 0;3;6$.

10.2. $A_1\ 3;1;4\ , A_2\ -1;6;1\ , A_3\ -1;1;6$.

10.3. $A_1\ 3;3;9\ , A_2\ 6;9;1\ , A_3\ 1;7;3$.

10.4. $A_1\ 2;4;3\ , A_2\ 7;6;3\ , A_3\ 4;9;3$.

10.5. $A_1\ 9;5;5\ ,A_2\ -3;7;1\ ,A_3\ 5;7;8\ .$

10.6. $A_1\ 0;7;1\ ,A_2\ 4;1;5\ ,A_3\ 4;6;3\ .$

10.7. $A_1\ 5;5;4\ ,A_2\ 3;8;4\ ,A_3\ 3;5;10\ .$

10.8. $A_1\ 6;1;1\ ,A_2\ 4;6;6\ ,A_3\ 4;2;0\ .$

10.9. $A_1\ 7;5;3\ ,A_2\ 9;4;4\ ,A_3\ 4;5;7\ .$

10.10. $A_1\ 6;6;2\ ,A_2\ 5;4;7\ ,A_3\ 2;4;7\ .$

10.11. $A_1\ -4;6;4\ ,A_2\ 2;1;5\ ,A_3\ -1;-2;2\ .$

10.12. $A_1\ 2;-1;9\ ,A_2\ 1;1;5\ ,A_3\ 7;3;1\ .$

10.13. $A_1\ 1;-2;2\ ,A_2\ -1;-3;4\ ,A_3\ 5;5;-1\ .$

10.14. $A_1\ 1;1;3\ ,A_2\ 7;1;1\ ,A_3\ 4;1;-1\ .$

10.15. $A_1\ -3;1;-2\ ,A_2\ 2;0;-1\ ,A_3\ 3;4;-5\ .$

10.16. $A_1\ -3;1;2\ ,A_2\ 5;2;-1\ ,A_3\ 1;-3;5\ .$

10.17. $A_1\ -2;1;0\ ,A_2\ 1;-5;1\ ,A_3\ 3;1;4\ .$

10.18. $A_1\ 3;-3;1\ ,A_2\ 2;-4;1\ ,A_3\ -1;2;3\ .$

10.19. $A_1\ 2;-4;3\ ,A_2\ 0;5;3\ ,A_3\ 2;-3;3\ .$

10.20. $A_1\ 1;2;5\ ,A_2\ -2;1;1\ ,A_3\ 3;7;2\ .$

10.21. $A_1\ 0;2;1\ ,A_2\ -4;1;-5\ ,A_3\ 2;-1;3\ .$

10.22. $A_1\ 3;-5;4\ ,A_2\ 3;8;4\ ,A_3\ 5;-1;6\ .$

10.23. $A_1\ 4;1;1\ ,A_2\ 4;6;6\ ,A_3\ 7;6;10\ .$

10.24. $A_1\ -2;5;-3\ ,A_2\ 2;2;-3\ ,A_3\ 5;2;1\ .$

10.25. $A_1\ 3;3;-2\ ,A_2\ 5;5;-1\ ,A_3\ 2;5;3\ .$

10.26. $A_1(-2;5;4)$, $A_2(1;1;4)$, $A_3(5;-2;4)$.

10.27. $A_1(-2;-1;5)$, $A_2(1;3;5)$, $A_3(7;3;1)$.

10.28. $A_1(1;-2;-2)$, $A_2(1;1;2)$, $A_3(5;4;7)$.

10.29. $A_1(1;2;3)$, $A_2(5;5;3)$, $A_3(4;3;5)$.

10.30. $A_1(-3;1;2)$, $A_2(2;4;-2)$, $A_3(3;2;0)$.

<u>Завдання 11.</u> Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$, об’єм піраміди та висоту піраміди A_4H.

11.1. $A_1(7;0;3)$, $A_2(3;0;-1)$, $A_3(3;0;5)$, $A_4(4;3;-2)$.

11.2. $A_1(1;-1;6)$, $A_2(2;5;-2)$, $A_3(-3;3;3)$, $A_4(4;1;5)$.

11.3. $A_1(3;6;1)$, $A_2(6;1;4)$, $A_3(3;-6;10)$, $A_4(7;5;4)$.

11.4. $A_1(1;1;3)$, $A_2(4;1;6)$, $A_3(6;4;1)$, $A_4(0;5;6)$.

11.5. $A_1(4;4;5)$, $A_2(10;2;3)$, $A_3(-3;5;4)$, $A_4(6;-2;2)$.

11.6. $A_1(-1;2;5)$, $A_2(-4;6;4)$, $A_3(2;1;5)$, $A_4(-1;-2;2)$.

11.7. $A_1(2;-1;9)$, $A_2(1;1;5)$, $A_3(7;3;1)$, $A_4(2;6;-2)$.

11.8. $A_1(1;-2;2)$, $A_2(-1;-3;4)$, $A_3(5;5;-1)$, $A_4(2;4;-5)$.

11.9. $A_1(1;1;3)$, $A_2(7;1;1)$, $A_3(2;2;2)$, $A_4(4;1;-1)$.

11.10. $A_1(-3;1;-2)$, $A_2(2;0;-1)$, $A_3(0;-2;6)$, $A_4(3;4;-5)$.

11.11. $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$.

11.12. $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$.

11.13. $A_1(7;2;2)$, $A_2(-5;7;-7)$, $A_3(5;-3;1)$, $A_4(2;3;7)$.

11.14. $A_1\;\; 8;-6;4\;\;, A_2\;\; 10;5;-5\;\;, A_3\;\; 5;6;-8\;\;, A_4\;\; 8;10;7\;\;.$

11.15. $A_1\;\; 1;-2;7\;\;, A_2\;\; 4;2;10\;\;, A_3\;\; 2;3;5\;\;, A_4\;\; 5;3;7\;\;.$

11.16. $A_1\;\; -2;0;3\;\;, A_2\;\; 0;0;-1\;\;, A_3\;\; 3;0;-5\;\;, A_4\;\; 4;-3;-2\;\;.$

11.17. $A_1\;\; 5;1;-2\;\;, A_2\;\; -2;5;-2\;\;, A_3\;\; -3;1;1\;\;, A_4\;\; 2;1;5\;\;.$

11.18. $A_1\;\; 3;-2;1\;\;, A_2\;\; -1;1;4\;\;, A_3\;\; 0;-6;3\;\;, A_4\;\; -7;0;2\;\;.$

11.19. $A_1\;\; 1;1;-2\;\;, A_2\;\; 3;-1;6\;\;, A_3\;\; 4;3;2\;\;, A_4\;\; -1;5;6\;\;.$

11.20. $A_1\;\; 3;3;5\;\;, A_2\;\; 7;3;2\;\;, A_3\;\; -1;7;5\;\;, A_4\;\; -3;1;2\;\;.$

11.21. $A_1\;\; -1;2;-1\;\;, A_2\;\; 4;2;4\;\;, A_3\;\; 7;-1;4\;\;, A_4\;\; -1;-2;2\;\;.$

11.22. $A_1\;\; 3;-1;3\;\;, A_2\;\; -1;1;5\;\;, A_3\;\; 2;3;1\;\;, A_4\;\; -2;5;2\;\;.$

11.23. $A_1\;\; -3;2;2\;\;, A_2\;\; 4;-3;1\;\;, A_3\;\; 2;2;-1\;\;, A_4\;\; 1;7;-5\;\;.$

11.24. $A_1\;\; -1;1;3\;\;, A_2\;\; -2;1;-1\;\;, A_3\;\; 1;5;2\;\;, A_4\;\; 5;-4;3\;\;.$

11.25. $A_1\;\; 3;1;2\;\;, A_2\;\; -2;0;-1\;\;, A_3\;\; 0;0;0\;\;, A_4\;\; -3;2;2\;\;.$

11.26. $A_1\;\; 1;4;2\;\;, A_2\;\; -5;2;1\;\;, A_3\;\; 0;3;0\;\;, A_4\;\; 2;-3;9\;\;.$

11.27. $A_1\;\; 3;3;3\;\;, A_2\;\; 7;-2;6\;\;, A_3\;\; 2;1;2\;\;, A_4\;\; -3;-6;3\;\;.$

11.28. $A_1\;\; 1;1;1\;\;, A_2\;\; 0;2;-5\;\;, A_3\;\; 2;-3;1\;\;, A_4\;\; -2;3;7\;\;.$

11.29. $A_1\;\; 3;1;4\;\;, A_2\;\; 7;5;6\;\;, A_3\;\; 10;8;6\;\;, A_4\;\; -3;1;-7\;\;.$

11.30. $A_1\;\; 1;0;2\;\;, A_2\;\; 4;4;2\;\;, A_3\;\; 1;3;4\;\;, A_4\;\; -5;3;-2\;\;.$

Аналітична геометрія

<u>Завдання 12.</u> Дано координати вершин трикутника ABC. Знайти: 1) рівняння сторони AB; 2) рівняння висоти CH; 3) рівняння медіани BM; 4) точку перетину медіани BM і висоти CH; 5) рівняння середньої лінії трикутника, яка паралельна до сторони AB.

12.1. $A(7;3), B(3;-1), C(3;5)$.

12.2. $A(1;-1), B(2;5), C(-3;3)$.

12.3. $A(3;6), B(6;1), C(3;-6)$.

12.4. $A(1;3), B(1;6), C(6;2)$.

12.5. $A(4;5), B(2;3), C(-3;4)$.

12.6. $A(-1;2), B(-4;6), C(2;1)$.

12.7. $A(2;-1), B(1;5), C(3;1)$.

12.8. $A(1;-2), B(-1;-3), C(5;-1)$.

12.9. $A(1;3), B(7;1), C(2;-2)$.

12.10. $A(3;2), B(5;-1), C(0;6)$.

12.11. $A(2;3), B(-2;5), C(-2;-1)$.

12.12. $A(2;3), B(-1;4), C(-3;2)$.

12.13. $A(3;-2), B(2;-3), C(-5;-2)$.

12.14. $A(-3;1), B(-5;2), C(1;-1)$.

12.15. $A(-3;-2), B(2;-2), C(1;4)$.

12.16. $A(-1;3), B(3;1), C(-3;2)$.

12.17. $A\ 1;0\ ,B\ 2;4\ ,C\ -2;5\ .$

12.18. $A\ -3;5\ ,B\ 7;2\ ,C\ 1;2\ .$

12.19. $A\ -1;-1\ ,B\ 1;5\ ,C\ -4;2\ .$

12.20. $A\ -3;5\ ,B\ 2;-2\ ,C\ 0;4\ .$

12.21. $A\ 1;2\ ,B\ -3;-3\ ,C\ 0;1\ .$

12.22. $A\ -2;-1\ ,B\ -1;5\ ,C\ 3;-1\ .$

12.23. $A\ 0;-2\ ,B\ 1;-3\ ,C\ -5;4\ .$

12.24. $A\ 1;1\ ,B\ 4;5\ ,C\ 5;-2\ .$

12.25. $A\ 3;2\ ,B\ 4;-2\ ,C\ 1;6\ .$

12.26. $A\ -2;3\ ,B\ 2;-5\ ,C\ 2;7\ .$

12.27. $A\ 2;0\ ,B\ -1;4\ ,C\ 3;7\ .$

12.28. $A\ -1;-2\ ,B\ 2;-3\ ,C\ 5;3\ .$

12.29. $A\ 3;-1\ ,B\ -5;2\ ,C\ 4;3\ .$

12.30. $A\ -1;-1\ ,B\ 2;-2\ ,C\ 5;7\ .$

Завдання 13. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: 1) довжину сторони A_1A_2; 2) рівняння прямої A_1A_2;
3) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 4) рівняння висоти A_4O; 5) рівняння прямої, що проходить через точку A_4, паралельно площині $A_1A_2A_3$.

13.1. $A_1\ 4;2;5\ ,A_2\ 0;7;2\ ,A_3\ 0;2;7\ ,A_4\ 1;5;0\ .$

13.2. $A_1\ 4;4;10\ ,A_2\ 4;10;2\ ,A_3\ 2;8;4\ ,A_4\ 9;6;9\ .$

13.3. $A_1\ 4;6;5\ ,A_2\ 6;9;4\ ,A_3\ 2;10;10\ ,A_4\ 7;5;9\ .$

13.4. $A_1\ \ 3;5;4\ ,A_2\ \ 8;7;4\ ,A_3\ \ 5;10;4\ ,A_4\ \ 4;7;8\ .$

13.5. $A_1\ \ 10;6;6\ ,A_2\ \ -2;8;2\ ,A_3\ \ 6;8;9\ ,A_4\ \ 7;10;3\ .$

13.6. $A_1\ \ 1;8;2\ ,A_2\ \ 5;2;6\ ,A_3\ \ 5;7;4\ ,A_4\ \ 4;10;9\ .$

13.7. $A_1\ \ 6;6;5\ ,A_2\ \ 4;9;5\ ,A_3\ \ 4;6;11\ ,A_4\ \ 6;9;3\ .$

13.8. $A_1\ \ 7;2;2\ ,A_2\ \ 5;7;7\ ,A_3\ \ 5;3;1\ ,A_4\ \ 2;3;7\ .$

13.9. $A_1\ \ 8;6;4\ ,A_2\ \ 10;5;5\ ,A_3\ \ 5;6;8\ ,A_4\ \ 8;10;7\ .$

13.10. $A_1\ \ 7;7;3\ ,A_2\ \ 6;5;8\ ,A_3\ \ 3;5;8\ ,A_4\ \ 8;4;1\ .$

13.11. $A_1\ \ 4;2;5\ ,A_2\ \ 0;7;1\ ,A_3\ \ 0;2;7\ ,A_4\ \ 1;5;0\ .$

13.12. $A_1\ \ 4;4;10\ ,A_2\ \ 7;10;2\ ,A_3\ \ 2;8;4\ ,A_4\ \ 9;6;9\ .$

13.13. $A_1\ \ 4;6;5\ ,A_2\ \ 6;9;4\ ,A_3\ \ 2;10;10\ ,A_4\ \ 7;5;9\ .$

13.14. $A_1\ \ 3;5;4\ ,A_2\ \ 8;7;4\ ,A_3\ \ 5;10;4\ ,A_4\ \ 4;7;8\ .$

13.15. $A_1\ \ 1;8;2\ ,A_2\ \ 5;2;6\ ,A_3\ \ 5;7;4\ ,A_4\ \ 4;10;9\ .$

13.16. $A_1\ \ -2;0;3\ ,A_2\ \ 0;0;-1\ ,A_3\ \ 3;0;-5\ ,A_4\ \ 4;-3;-2\ .$

13.17. $A_1\ \ 5;1;-2\ ,A_2\ \ -2;5;-2\ ,A_3\ \ -3;1;1\ ,A_4\ \ 2;1;5\ .$

13.18. $A_1\ \ 3;-2;1\ ,A_2\ \ -1;1;4\ ,A_3\ \ 0;-6;3\ ,A_4\ \ -7;0;2\ .$

13.19. $A_1\ \ 1;1;-2\ ,A_2\ \ 3;-1;6\ ,A_3\ \ 4;3;2\ ,A_4\ \ -1;5;6\ .$

13.20. $A_1\ \ 3;3;5\ ,A_2\ \ 7;3;2\ ,A_3\ \ -1;7;5\ ,A_4\ \ -3;1;2\ .$

13.21. $A_1\ \ -1;2;-1\ ,A_2\ \ 4;2;4\ ,A_3\ \ 7;-1;4\ ,A_4\ \ -1;-2;2\ .$

13.22. $A_1\ \ 3;-1;3\ ,A_2\ \ -1;1;5\ ,A_3\ \ 2;3;1\ ,A_4\ \ -2;5;2\ .$

13.23. $A_1\ \ -3;2;2\ ,A_2\ \ 4;-3;1\ ,A_3\ \ 2;2;-1\ ,A_4\ \ 1;7;-5\ .$

13.24. $A_1\ \ -1;1;3\ ,A_2\ \ -2;1;-1\ ,A_3\ \ 1;5;2\ ,A_4\ \ 5;-4;3\ .$

13.25. $A_1\ \ 3;1;2\ \ ,A_2\ \ -2;0;-1\ \ ,A_3\ \ 0;0;0\ \ ,A_4\ \ -3;2;2\ \ .$

13.26. $A_1\ \ 1;4;2\ \ ,A_2\ \ -5;2;1\ \ ,A_3\ \ 0;3;0\ \ ,A_4\ \ 2;-3;9\ \ .$

13.27. $A_1\ \ 3;3;3\ \ ,A_2\ \ 7;-2;6\ \ ,A_3\ \ 2;1;2\ \ ,A_4\ \ -3;-6;3\ \ .$

13.28. $A_1\ \ 1;1;1\ \ ,A_2\ \ 0;2;-5\ \ ,A_3\ \ 2;-3;1\ \ ,A_4\ \ -2;3;7\ \ .$

13.29. $A_1\ \ 3;1;4\ \ ,A_2\ \ 7;5;6\ \ ,A_3\ \ 10;8;6\ \ ,A_4\ \ -3;1;-7\ \ .$

13.30. $A_1\ \ 1;0;2\ \ ,A_2\ \ 4;4;2\ \ ,A_3\ \ 1;3;4\ \ ,A_4\ \ -5;3;-2\ \ .$

Вступ до аналізу

Завдання 14. Знайти область визначення функції.

14.1. $y=\dfrac{x-6}{x^2-3x+2}$.

14.2. $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{9+4x^2}$.

14.3. $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt[3]{x+2}}$.

14.4. $y=x\ln\left(4-x^2\right)$.

14.5. $y=x-\dfrac{5}{\sqrt{1-x}}$.

14.6. $y=\dfrac{x^2}{\cos x-1{,}5}$.

14.7. $y=\dfrac{\sin x}{2^x-4}$.

14.8. $y=\dfrac{2^x}{27+x^3}$.

14.9. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

14.10. $y=\dfrac{x+4}{\ln x}$.

14.11. $y=\dfrac{x^2-4}{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} x}$.

14.12. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{3^x-1}$.

14.13. $y=\dfrac{2x-5}{8-x^3}$.

14.14. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-9}$.

14.15. $y=\dfrac{x+4}{\log_2 x+1}$.

14.16. $y=\dfrac{3x+4}{2x^2+3x-14}$.

14.17. $y=\dfrac{\sqrt{6+2x}}{1+9x^2}$.

14.18. $y=\dfrac{2\sin x}{\sqrt[3]{3x-12}}$.

14.19. $y=x\sqrt{4-x^2}$.

14.20. $y=\ln x-\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}$.

14.21. $y=\dfrac{3x^2}{\sin x-1{,}5}$.

14.22. $y=\dfrac{\ln x}{2^x-8}$.

14.23. $y=\dfrac{e^x}{8-x^3}$.

14.24. $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-4}$.

14.25. $y=\dfrac{3x+4}{\ln(2x-3)}$.

14.26. $y=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{2x^2-8}}$.

14.27. $y=\dfrac{\sqrt{3x+6}}{3^x-9}$.

14.28. $y=\dfrac{2x-5}{\sqrt{8-x^3}}$.

14.29. $y=\dfrac{\sqrt{3x+12}}{x^2-4}$.

14.30. $y=\dfrac{x+3}{\log_2(x+1)}$.

<u>Завдання 15.</u> Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

15.1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x-3}$.

15.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$.

15.3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$.

15.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2+x-2}$.

15.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{x^2-6x-7}$.

15.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$.

15.7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$.

15.8. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-9}$.

15.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$.

15.10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

15.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-7x+6}$.

15.12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$.

15.13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$.

15.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}$.

15.15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

15.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-7x-15}$

15.17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{4x-3x^2-1}$

15.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12}$

15.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-3x-14}{3x^2-8x+4}$

15.20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{4-3x^2-x}$

15.21. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$

15.22. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-9}$

15.23. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-9}$

15.24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}$

15.25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$

15.26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+5x+2}$

15.27. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$

15.28. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}$

15.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}$

15.30. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$

Завдання 16. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

16.1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^3+2x-4}$.

16.2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-3x^2+4x-3}{4x^2-x-6}$.

16.3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+3x-3}{-5x^2+x+2}$.

16.4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x-1}{x^4-6x+1}$.

16.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^3-4x+1}{2x^3+2x-4}$.

16.6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+4x-3}{4x^5-x+6}$.

16.7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+1}{-3x^3+4x+14}$.

16.8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-4x^4-7x-1}{9x^3-6x+12}$.

16.9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{-3x^3+2x-5}$.

16.10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+4x+7}{4x^4-3x-6}$.

16.11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+3x+1}{4x^3+2x^2-5}$.

16.12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{-3x^2+x-2}$.

16.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{3x^3+x-2}$.

16.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6x+1}{x^4-3x+1}$.

16.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-5x+1}{4x^3+3x-2}$.

16.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^3+2x-1}{3x^3+x-4}$

16.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{-3x^3+8x-4}$

16.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+3}{7x^2+2x-6}$

16.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-4x-3}{-5x^7+3x+2}$

16.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-21}{-6x^4+x+1}$

16.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x+1}{2x^5-3x-4}$

16.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-3}{-5x^2+x-5}$

16.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+5}{4x^2+x+2}$

16.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+4x-1}{7x^4-x+2}$

16.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{-2x^3+x+5}$

16.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3-3x^4}{x^5-x+6}$

16.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+1}{x+2-3x^2}$

16.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+4}{2x^4+x-3}$

16.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{2x^2-x+4}$

16.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x-3}{-5x^2+2x+7}$

__Завдання 17.__ Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

17.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{4-3x}-1}$.

17.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

17.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4-3x^2}-1}{x^2+x}$.

17.4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$.

17.5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

17.6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}$.

17.7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$.

17.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x-2x^2}$.

17.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{5x}$.

17.10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.

17.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{6-x}-2}$..

17.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x+x^2}$.

17.13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}$.

17.14. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x+3}-1}$.

17.15. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{2x+9}-1}$.

17.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{3x}$

17.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2-x}$

17.18 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$

17.19. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{3-\sqrt{2-x}}{x^2-49}$

17.20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x^2}}{x^2-1}$

17.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3}}{3x-6}$

17.22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{x-3}$

17.23. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\sqrt{2+x}}{x+1}$

17.24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{5-x^2}}{x-2}$

17.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{4x}$

17.26. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x^2-4}$

17.27. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{4-x}-3}{x+5}$

17.28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-x+2}$

17.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{5x}$

17.30. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$

Завдання 18. Знайти границю, скориставшись першою визначною границею.

18.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$.

18.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 2x}$.

18.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$.

18.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 2x}$.

18.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,4x}{\sin^2 2x}$.

18.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

18.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,5x}{1-\cos 3x}$.

18.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,7x}{\arcsin 4x}$.

18.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{2x^2}$.

18.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{4x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

18.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}\,3x}$.

18.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\sin^2 5x}$.

18.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{\arcsin^2 5x}$.

18.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\cdot \mathrm{tg}\,2x}$.

18.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 5x}{\sin^2 4x}$.

18.16. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 4x\cdot \mathrm{ctg}\,5x$

18.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin 4x\cdot tg3x}$

18.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 2x}$

18.19. $\lim\limits_{x\to 0}3x\cdot ctg7x$

18.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{4x\cdot tg2x}$

18.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot tg4x}{1-\cos^2 3x}$

18.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arc}\,tg7x}{tg2x}$

18.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$

18.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\sin^2 3x}$

18.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\sin 2x}{tg^2 5x}$

18.26. $\lim\limits_{x\to 0}8x\cdot ctg3x$

18.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{4x\cdot\sin 3x}$

18.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\arcsin^2 4x}$

18.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{7x}$

18.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 2x}$

<u>Завдання 19.</u> Знайти границю, скориставшись другою визначною границею.

19.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-4}\right)^{2x}$.

19.2. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{2-x}}$.

19.3. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{3}{x-1}}$.

19.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x-1}$.

19.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{3x+2}$.

19.6. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

19.7. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x-1}}$.

19.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{2x+3}$.

19.9. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{5x}{x-2}}$.

19.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$.

19.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x-2}$.

19.12. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{1}{x-3}}$.

19.13. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3}{x-2}}$.

19.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{2x-1}$.

19.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x+7}\right)^{2x}$.

19.16. $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{2}{x+1}}$

19.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x-4}$

19.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x}$

19.19. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{5}{x-1}}$

19.20. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{2x}{x-1}}$

19.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x}\right)^{3x-4}$

19.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{1+2x}$

19.23. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$

19.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{x-3}$

19.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{4x+1}\right)^{2x}$

19.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{3x}$

19.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{4x}$

19.28. $\lim\limits_{x\to -2}\left(3x+7\right)^{\frac{2}{x+2}}$

19.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x-5}$

19.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+5}\right)^{2x}$

__Завдання 20.__ Знайти точки розриву функції та дослідити їх характер:

20.1 а) $f(x)=3+2^{\frac{1}{1-x}}$

б) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ 2x^2-1, & 1<x\le 2 \\ 4, & x>2 \end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{x-6}{(x+4)(x-5)^2}$

г) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$

20.2. а) $f(x)=2+7^{\frac{5}{3+x}}$

б) $f(x)=\begin{cases} 4, & x<-1 \\ x^2+3, & -1\le x\le 2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)(x-3)^2}$

г) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2+x-12}$

20.3. а) $f(x)=5+3^{\frac{x}{4-x}}$

б) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le -2 \\ x^2+1, & -2<x<2 \\ 5, & x\ge 2 \end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2}$

г) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$

20.4. а) $f(x)=1+4^{\frac{x+2}{1+x}}$

б) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<0 \\ 7-x, & 0\le x\le 2 \\ x^2+1, & x>2 \end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2}$

г) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2+x-20}$

20.5. а) $f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -2 \\ 2, & -2 \le x \le 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 + x - 30}$

20.6. а) $f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 3, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + x - 42}$

20.7. а) $f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 3, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + x - 42}$

20.8. а) $f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2 + 3, & -1 \le x \le 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+1)(x-3)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12}$

20.9. а) $f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

20.10. а) $f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7 - x, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + x - 20}$

20.11. а) $f(x)=1+4^{\frac{x+2}{1+x}}$ б) $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 7-x, & 0\le x\le 2\\ x^2+1, & x>2\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2}$ г) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2+x-20}$

20.12. а) $f(x)=6+6^{\frac{8}{5-x}}$ б) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le 0\\ 7-3x, & 0<x<2\\ x^2-3, & x\ge 2\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2}$ г) $f(x)=\dfrac{x^2-49}{x^2+x-42}$

20.13. а) $f(x)=3+2^{\frac{1}{1-x}}$ б) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ 2x^2-1, & 1<x\le 2\\ 4, & x>2\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{x-6}{(x+4)(x-5)^2}$ г) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$

20.14. а) $f(x)=2+7^{\frac{5}{3+x}}$ б) $f(x)=\begin{cases}4, & x<-1\\ x^2+3, & -1\le x\le 2\\ x+1, & x>2\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)(x-3)^2}$ г) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2+x-12}$

20.15. а) $f(x)=5+3^{\frac{x}{4-x}}$ б) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le -2\\ x^2+1, & -2<x<2\\ 5, & x\ge 2\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2}$ г) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$

20.16. а) $f(x)=1+4^{\frac{x+2}{1+x}}$ б) $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 7-x, & 0\le x\le 2\\ x^2+1, & x>2\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2}$ г) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2+x-20}$

20.17. а) $f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -2 \\ 2, & -2 \le x \le 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{(x-1)(x+4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 + x - 30}$

20.18. а) $f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \le 0 \\ 7 - 3x, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 3, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{(x-7)(x+3)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + x - 42}$

20.19. а) $f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 2x^2 - 1, & 1 < x \le 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{x - 6}{(x+4)(x-5)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$

20.20. а) $f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2 + 3, & -1 \le x \le 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{x + 3}{(x+1)(x-3)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12}$

20.21. а) $f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{(x+5)(x-4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

20.22. а) $f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7 - x, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{(x+2)(x-4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + x - 20}$

20.23. а) $f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -2 \\ 2, & -2 \le x \le 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{(x-1)(x+4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 + x - 30}$

20.24. а) $f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \le 0 \\ 7 - 3x, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 3, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{(x-7)(x+3)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + x - 42}$

20.25. а) $f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 2x^2 - 1, & 1 < x \le 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{x - 6}{(x+4)(x-5)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$

20.26. а) $f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2 + 3, & -1 \le x \le 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{x + 3}{(x+1)(x-3)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12}$

20.27. а) $f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{(x+5)(x-4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

20.28. а) $f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}}$ б) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7 - x, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{(x+2)(x-4)^2}$ г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + x - 20}$

20.29. а) $f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}}$

б) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -2 \\ 2, & -2 \le x \le 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{(x-1)(x+4)^2}$

г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 + x - 30}$

20.30. а) $f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \le 0 \\ 7 - 3x, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 3, & x \ge 2 \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{(x-7)(x+3)^2}$

г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + x - 42}$

Диференціальне числення

Завдання 21. Продиференціювати задану функцію.

21.1. $y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x$

21.2. $y = \dfrac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x$

21.3. $y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x$

21.4. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \arcsin x$

21.5. $y = \dfrac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x$

21.6. $y = \dfrac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x$

21.7. $y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x$

21.8. $y = \dfrac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x$

21.9. $y = \dfrac{1}{2x^4} - 5\sqrt[5]{x^2} + 6\sin x$

21.10. $y = \dfrac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x$

21.11. $y = \dfrac{2}{x^3} + 5\sqrt[5]{x^2} - 2\arccos x$

21.12. $y = \dfrac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5\cdot 4^x$

21.13. $y = \dfrac{2}{5}x^5 + 8\sqrt[4]{x} - 3\operatorname{arcctg} x$

21.14. $y = \dfrac{1}{2}x^4 + 6\sqrt[6]{x^2} - 4\log_3 x.$

21.15. $y = 7x^3 + 3\sqrt{x^5} - 3^x.$

21.16. $y = \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \sqrt[5]{x^2}$

21.17. $y = \frac{x^5}{4} - \frac{3}{x^4} - \frac{2}{x} + 5\sqrt[3]{x^2}$

21.18. $y = \frac{3}{x^4} - 4x^3 + \frac{5}{x} + \sqrt[5]{x^3}$

21.19. $y = \frac{3}{7}x^8 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[4]{x^3}$

21.20. $y = \frac{x^7}{6} - \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x} + 7\sqrt[3]{x^2}$

21.21. $y = \frac{3}{x^4} - 5x^7 + \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^4}$

21.22. $y = x^3 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^5} + 4\sqrt[4]{x^5}$

21.23. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} + 7\sqrt[3]{x}$

21.24. $y = \frac{2}{x^4} - 7x^6 + \frac{5}{x} + 8\sqrt[6]{x^5}$

21.25. $y = 3x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 6\sqrt{x^3}$

21.26. $y = 10x^4 - \frac{5}{x^3} - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x}$

21.27. $y = \frac{8}{x^3} - 15x^6 + \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^7}$

21.28. $y = 9x^4 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^5} + \sqrt{x^7}$

21.29. $y=\frac{x^7}{7}-\frac{5}{x^3}-\frac{8}{x}+\sqrt[3]{x^5}$

21.30. $y=\frac{2}{x^5}-14x^5+\frac{5}{x}+\sqrt[5]{x^9}$

Завдання 22. Продиференціювати задану функцію.

22.1. $y=\sqrt[4]{3x^2+5x-4}$

22.2. $y=\cos\left(4x^2+3x-2\right)$

22.3. $y=\mathrm{c}tg\left(2x^2+x-4\right)$

22.4. $y=\ln\left(2x^2-3x+5\right)$

22.5. $y=\sqrt{x^3-4x+5}$

22.6. $y=\mathrm{tg}\left(3x^2+x-2\right)$

22.7. $y=\mathrm{arctg}\left(2x^2-1\right)$

22.8. $y=3^{2x^3-4x+3}$

22.9. $y=\sqrt[5]{\left(2x^2-4x+5\right)^2}$

22.10. $y=\arccos\left(3x^2+5\right)$

22.11. $y=\log_3\left(2x^2-4x+3\right)$

22.12. $y=2e^{4x^2+3x-2}$

22.13. $y=\sqrt[3]{\left(2x^2+5x-3\right)^2}$

22.14. $y=\sin\left(2x^2-3x+5\right)$

22.15. $y=\log_4\left(x^2+2x+7\right)$

22.16. $y=\sqrt{\left(3x^2-2x+5\right)^5}$

22.17. $y=\frac{7}{2x^2-5x+7}$

22.18. $y=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$

22.19. $y=\frac{4}{\left(x^2+3x+4\right)^5}$

22.20. $y=arctg\left(2x^2+5x-7\right)$

22.21. $y=\ln\left(x^2-5x+4\right)$

22.22. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-3x+5\right)^4}$

22.23. $y=\frac{7}{\left(2x^2+3x+1\right)^3}$

22.24. $y=\sqrt[5]{\left(x^2-7x-4\right)^3}$

22.25. $y = e^{2x^2-4x+3}$

22.26. $y = \sqrt[4]{\left(2x^2+5x-4\right)^3}$

22.27. $y = \sqrt[5]{\left(2x^3-5x+2\right)^6}$

22.28. $y = \cos\left(5x^2-6x+7\right)$

22.29. $y = 2^{x^2-3x+2}$

22.30. $y = \dfrac{5}{\left(4x^2+3x+2\right)^6}$

Завдання 23. Продиференціювати задану функцію.

23.1. $y = 3^x \ln(4x-3)$

23.2. $y = \dfrac{e^{5x}}{2x^2-3}$

23.3. $y = x^4 \cos(2x^2-5)$

23.4. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln(2x+3)}$

23.5. $y = e^{-2x^2} \operatorname{arcctg} x$

23.6. $y = \dfrac{\sin\left(3x+2\right)}{\ln x}$

23.7. $y = \cos x \cdot \ln(2x-3)$

23.8. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln(2x-1)}$

23.9. $y = \dfrac{e^{\cos x}}{3x^2-4}$

23.10. $y = \dfrac{\ln x}{\sin(4x+3)}$

23.11. $y = 3^{\sin x}(4x-3)$

23.12. $y = \dfrac{7^{5x}}{2x^2-3}$

23.13. $y = \dfrac{4^{-x}}{2x^2-5}$

23.14. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2x+3)}$

23.15. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} 6x}{7x^3-3x+2}$

23.16. $y = \dfrac{\cos 2x}{(4x+3)^2}$

23.17. $y = 2^{\sin x} \cdot \arcsin x$

23.18. $y = \dfrac{e^{2x}}{7x-2}$

23.19. $y = e^{2x} \cdot \cos(3x - 5)$

23.20. $y = \dfrac{ctgx}{\ln(2x+3)}$

23.21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{3x-4}$

23.22. $y = 2^{\sin x} \cdot \ln 3x$

23.23. $y = 2^x \cdot \ln(2x - 5)$

23.24. $y = \dfrac{tgx}{\ln(4x+3)}$

23.25. $y = ctgx \cdot \ln 2x$

23.26. $y = \dfrac{\cos 2x}{2x^3 + 3}$

23.27. $y = \dfrac{e^{-3x}}{\ln(5x+3)}$

23.28. $y = \ln x \cdot \cos(2x - 5)$

23.29. $y = e^{4x} \cdot \ln(3x - 2)$

23.30. $y = \dfrac{e^{5x}}{(x-4)^4}$

Завдання 24. Продиференціювати задану функцію.

24.1. $y = x^{\sin x}$

24.2. $y = (\sin x)^{2x}$

24.3. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$

24.4. $y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$

24.5. $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$

24.6. $y = (\arcsin x)^x$

24.7. $y = x^{\arccos x}$

24.8. $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$

24.9. $y = \left(\sqrt{x-1}\right)^{\sin x}$

24.10. $y = (\ln x)^{x^2 - 3}$

24.11. $y = (\operatorname{tg} x)^x$

24.12. $y = (\log_2 x)^{2x}$

24.13. $y = x^{\sqrt{x}}$

24.14. $y = x^{e^x}$

24.15. $y = (\arccos x)^x$

24.16. $y = (\cos x)^{\ln x}$

24.17. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos x}$

24.18. $y = (\cos x)^{\sin x}$

24.19. $y=(\cos x)^{x}$

24.20. $y=(\arccos x)^{2x}$

24.21. $y=(\ln 2x)^{x}$

24.22. $y=(\sin x)^{arctgx}$

24.23. $y=(\sin 2x)^{\ln x}$

24.24. $y=(\ln x)^{\sin x}$

24.25. $y=(\arcsin 2x)^{\ln x}$

24.26. $y=(tgx)^{x^2}$

24.27. $y=(x)^{\frac{1}{x}}$

24.28. $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$

24.29. $y=x^{\arccos x}$

24.30. $y=(\ln x)^{arcctgx}$

<u>Завдання 25.</u> Знайти похідну функції $y\ x$, що задана неявно рівнянням.

25.1. $x^3+y^2-3xy=0$

25.2. $x-y=\cos(xy)$

25.3. $y\sin x-\cos(x-y)=0$

25.4. $y\ln y=x$

25.5. $x^4+y^4=3x^2y^2$

25.6. $x^3+xy^2-y=4x$

25.7. $y=1+xe^{y}$

25.8. $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$

25.9. $\sin y=xy^2+5$

25.10. $y-\cos(x-y)=0$

25.11. $x^4+y^3+\sin x=0$

25.12. $x-y=\sqrt{xy}$

25.13. $y^2\sin x-\cos x=e^{y}$

25.14. $x\log_3 y=x^4-3xy$

25.15. $x^3+y^4=3xy^3$

25.16. $y^2\ln x=x+2$

25.17. $x^2-y=\sin(xy)$

25.18. $x^2+y^3=5x^2y$

25.19. $y=x^3+2xe^{y}$

25.20. $\cos y=x^3y^2+5x$

25.21. $\ln y-\dfrac{y}{x^2}=9$

25.22. $yx^4+y^2+\cos x=0$

25.23. $y - tg\left(x - y\right) = x$

25.24. $x^3 + xy^2 - y = 4x$

25.25. $x^3 - y = x\sqrt{y}$

25.26. $x^3 + y = 3x^2 y$

25.27. $x\ln y = x^5 - 3xy$

25.28. $y^2 \sin x - x^3 = e^y$

25.29. $x + y = 1 + ye^x$

25.30. $x^2 + xy^2 - 5 = 3x$

<u>Завдання 26.</u> Знайти похідну вказаного порядку.

26.1. $y = x\cos x^2, \quad y'' - ?$

26.2. $y = \left(5x - 1\right)\ln^2 x, \quad y'' - ?$

26.3. $y = \left(4x^3 + 5\right)e^{2x+1}, \quad y'' - ?$

26.4. $y = \left(x^2 + 3\right)\ln\left(x - 3\right), \quad y'' - ?$

26.5. $y = \dfrac{\sin 2x}{x}, \quad y'' - ?$

26.6. $y = \left(4x + 3\right)2^{-x}, \quad y'' - ?$

26.7. $y = x\ln\left(1 - 3x\right), \quad y'' - ?$

26.8. $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2}, \quad y'' - ?$

26.9. $y = \dfrac{\ln\left(x - 2\right)}{x - 2}, \quad y'' - ?$

26.10. $y = \dfrac{\ln x}{x^5}, \quad y'' - ?$

26.11. $y = x^2 \cos x, \quad y'' - ?$

26.12. $y = \left(5x^3 - 1\right)\ln x, \quad y'' - ?$

26.13. $y = \left(2x^2 - 3\right)e^{2x}, \quad y'' - ?$

26.14. $y = \left(x^2 + 3\right)\sin x, \quad y'' - ?$

26.15. $y=\dfrac{\cos 3x}{x}, \quad y''-?$

26.16. $y=x^3\sin x, \quad y''-?$

26.17. $y=\left(3x^2-4\right)\ln x, \quad y''-?$

26.18. $y=x^3e^{2x+1}, \quad y''-?$

26.19. $y=\left(x^2+3\right)\cos x, \quad y''-?$

26.20. $y=\dfrac{\sin x}{x^2}, \quad y''-?$

26.21. $y=5x\,2^{3x-1}, \quad y''-?$

26.22. $y=x^4\ln x, \quad y''-?$

26.23. $y=\dfrac{\ln x}{x^5}, \quad y''-?$

26.24. $y=\dfrac{\cos\left(x-2\right)}{x-2}, \quad y''-?$

26.25. $y=\dfrac{\ln x}{x^5}, \quad y''-?$

26.26. $y=x^2\ln x, \quad y''-?$

26.27. $y=\left(5x^3-1\right)e^x, \quad y''-?$

26.13. $y=\left(2x^2-3\right)e^{2x}, \quad y''-?$

26.14. $y=\left(x^2+3\right)\sin x, \quad y''-?$

26.15. $y=\dfrac{\cos 3x}{x}, \quad y''-?$

Завдання 26. Знайти похідну функції $y\ x$, що задана параметрично.

26.1. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \dfrac{2}{\cos^2 t} \end{cases}$. **26.2.** $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$.

26.3. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$. **26.4.** $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}$.

26.5. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \dfrac{1}{\sin 2t} \end{cases}$. **26.6.** $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1} \\ y = \ln t \end{cases}$.

26.7. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$. **26.8.** $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$.

26.9. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln \cos t \end{cases}$. **26.10.** $\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$.

26.11. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{2}{t} \end{cases}$. **26.12.** $\begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2} \\ y = \operatorname{tg} 2t \end{cases}$.

26.13. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = e^t + 3t \end{cases}$. **26.14.** $\begin{cases} x = 6\sqrt[3]{t^2} \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$.

26.15. $\begin{cases} x = 3t^3 - 9t \\ y = \arcsin t \end{cases}$.

<u>Завдання 27.</u> Обчислити наближено значення функції $y = f(x)$ у точці x_0, використовуючи диференціал функції.

27.1. $y = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 7{,}76$.

27.2. $y = \arcsin x,\ x_0 = 0,08$.

27.3. $y = \sqrt{4x-1},\ x_0 = 2,56$.

27.4. $y = x^6,\ x_0 = 2,01$.

27.5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}},\ x_0 = 1,58$.

27.6. $y = \sqrt[3]{x^2},\ x_0 = 1,03$.

27.7. $y = x^{11},\ x_0 = 1,02$.

27.8. $y = \sqrt{4x-3},\ x_0 = 1,78$.

27.9. $y = \sqrt{x^2 + x + 3},\ x_0 = 1,97$.

27.10. $y = x^5,\ x_0 = 2,97$.

27.11. $y = \sqrt{x},\ x_0 = 8,87$.

27.12. $y = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 0,05$.

27.13. $y = \sqrt{2x+1},\ x_0 = 3,92$.

27.14. $y = x^4,\ x_0 = 4,01$.

27.15. $y = \sqrt[3]{3x-1},\ x_0 = 3,06$.

Завдання 28. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

28.1. $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2},\quad x_0 = 1.$

28.2. . $y = \dfrac{x}{x^2+1},\quad x_0 = -2.$

28.3. $y = 2x + \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 1.$

28.4. $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 4}, \quad x_0 = 2.$

28.5. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, \quad x_0 = 3.$

28.6. $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 2}, \quad x_0 = 2\,.$

28.7. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4\,.$

28.8. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8\,.$

28.9. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16\,.$

28.10. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 4\,.$

28.11. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x_0 = -3\,.$

28.12. $.\, y = \dfrac{5x - x^2}{3 - 2x}, \quad x_0 = -1$

28.13. $y = \dfrac{x^3}{2 + x^2}, \quad x_0 = 1.$

28.14. $y = 5x + \dfrac{1}{x^2}, \quad x_0 = 2.$

28.15. $y = \dfrac{5x + 6}{x^2}, \quad x_0 = -1.$

<u>Завдання 29.</u> Знайти найбільше та найменше значення функції $y=f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$.

29.1. $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3, \quad x\in\left[1,3\right].$

29.2. $y=(x+2)\cdot e^{1-x}, \quad x\in\left[-2,2\right].$

29.3. $y=\ln(x^2-2x+2), \quad x\in\left[0,3\right].$

29.4. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}, \quad x\in\left[1,2\right].$

29.5. $y=(x-1)\cdot e^{x}, \quad x\in\left[0,3\right].$

29.6. $y=x\cdot\ln x, \quad x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right].$

29.7. $y=e^{4x-x^2}, \quad x\in\left[1,3\right].$

29.8. $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}, \quad x\in\left[-1,3\right].$

29.9. $y=x^3+6x-4, \quad x\in\left[-2,2\right].$

29.10. $y=x^3\cdot e^{1+x}, \quad x\in\left[-4,0\right].$

29.11. $y=\dfrac{x}{9-x^2}, \quad x\in\left[-2,2\right].$

29.12. $y=2\sqrt{x}-x, \quad x\in\left[0,4\right].$

29.13. $y=x-4\sqrt{x}+5, \quad x\in\left[1,9\right].$

29.14. $y=x^3-3x+1, \quad x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right].$

29.15. $y=\frac{x-1}{x+2}, \quad x\in[0,4].$

<u>Завдання 30.</u> Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя.

30.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos x}.$

30.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 6x}..$

30.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right).$

30.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\ln\cos x}..$

30.5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{\ln x}.$

30.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-e^{-x}}\right).$

30.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}.$

30.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{-x}-1)}{x}.$

30.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\ln(1+x)}.$

30.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}.$

30.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{tg}x-x}.$

30.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos 3x}.$

30.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{tg}x}{\mathrm{xsinx}}.$

30.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x-2}{\ln\cos x}.$

30.15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{x-1}.$

<u>Завдання 31.</u> Виконати загальне дослідження функції.

31.1. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}.$

31.2. $y=\frac{5x}{4-x^2}.$

31.3. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.   **31.4.** $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

31.5. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.   **31.6.** $y=\dfrac{3x+6}{x^2-4}$.

31.7. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.   **31.8.** $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

31.9. $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$.   **31.10.** $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

31.11. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.   **31.12.** $y=\dfrac{3x^2}{8-x^3}$.

31.13. $y=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$.   **31.14.** $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

31.15. $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$.

<u>Завдання 32.</u> Виконати загальне дослідження функції.

32.1. $y=(2x+3)e^{-2x-2}$. **32.2.** $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1.$

32.3. $y=(4-x)e^{x-3}$.   **32.4.** $y=x\ln x.$

32.5. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.   **32.6.** $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

32.7. $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.   **32.8.** $y=(x+1)^2e^{2x}$.

32.9. $y = x^2 - 2\ln x.$

32.10. $y = xe^{\frac{1}{x}}.$

32.11. $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}.$

32.12. $y = x - \ln\left(1 + x^2\right).$

32.13. $y = x^2 - 2\ln x.$

32.14. $y = \ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right) + 2.$

32.15. $y = \sqrt[3]{x}\, e^{\frac{2}{3x}}.$

Функції двох змінних

Завдання 33. Знайти область визначення вказаних функції.

33.1. $z=\dfrac{5x^2y}{2x-3y}$.

33.2. $z=\dfrac{4}{9-x^2-y^2}$.

33.3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

33.4. $z=\ln\left(x^2+y^2-16\right)$.

33.5. $z=\arccos\left(x+y\right)$.

33.6. $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$.

33.7. $z=\dfrac{3xy^2}{2x+3y-4}$.

33.8. $z=4\sqrt{x}-\dfrac{4}{2+3x-4y}$.

33.9. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

33.10. $z=\sqrt{4x^2-9y^2}$.

33.11. $z=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$.

33.12. $z=\arcsin\left(2-x+y\right)$.

33.13. $z=\dfrac{\sqrt{2y}}{x^2-4y^2}$.

33.14. $z=\arcsin\left(\dfrac{2x}{y}\right)$.

33.15. $z=\sqrt{y^2+x^2-4}$.

33.16. $z=\ln\left(\dfrac{3}{16-x^2-y^2}\right)$.

33.17. $z=\ln\left(4y-3x+3\right)$.

33.18. $z=\arcsin\left(3x+2y\right)$.

33.19. $z=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2-8}}$.

33.20. $z=\dfrac{5}{9-4x^2-4y^2}$.

33.21. $z=\dfrac{\sqrt{3-x+y}}{2x-3y}$.

33.22. $z=2y-\dfrac{4}{9-x+3y}$.

33.23. $z=\dfrac{\ln\left(3-2x+y\right)}{x^2+y^2}$.

33.24. $z=\dfrac{9}{1-x^2-y^2}$.

33.25. $z=\arccos\left(\dfrac{x+1}{y}\right)$.

33.26. $z=\dfrac{5x+2y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

33.27. $z=\dfrac{4xy}{5x-3y+2}$.

33.28. $z=\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

33.29. $z=\dfrac{5}{\ln\left(x^2+y^2-4\right)}$.

33.30. $z=\dfrac{7}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$.

Завдання 34. Знайти частинні похідні 1-го і 2-го порядку функції $z=f\left(x,\,y\right)$.

34.1. $z=e^x y-x^4 y+y^2+3y-x-4$.

34.2. $z=4x^3\cos y-3xy+2y^2+y-7x+1$.

34.3. $z=x^5 y-x^2 y+2\cos y+3x+y+4$.

34.4. $z=5x^3-3xy+y^2+2\mathrm{tg}y-4x-1$.

34.5. $z=3e^x+2x^3y^2-y^2+x-2y+x-7$.

34.6. $z=2y\sin x-x^3y^2+4y^3+y-3x-5$.

34.7. $z=3xe^y+x^2y+2\cos y+x-y+3$.

34.8. $z=2x^3\cos y+3x^5y^4-y^3+x-4$.

34.9. $z=x^3y+y^2\cos x+2y^3-5y+7$.

34.10. $z=5e^x y^3-2xy^3+5y-4x+1$.

34.11. $z = 4x^3 - 2xy^2 + \ln y + 3x + 5$.

34.12. $z = 3\ln x - x^2 y^4 + 2y + 5x - 4$.

34.13. $z = 2x^4 y - y^2 + 5y - 7x + 2$.

34.14. $z = x^3 y^2 - 3x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5$.

34.15. $z = 2x^5 - 3x^2 y^4 + y^3 + 5y - x - 3$.

34.16. $z = x^4 - 3x^3 y^2 + 4x + 2y - 3$.

34.17. $z = x^3 - 2xy^3 + \ln y + 3y - x + 1$.

34.18. $z = 3e^x y^2 + x^2 - y^3 + 2e^y - 4$.

34.19. $z = 4x^5 - x^4 y + \ln y - e^x + 3$.

34.20. $z = 5x^2 - 2x^3 y^4 + 4x - 3\ln y$.

34.21. $z = x^2 y + 2\ln x + 7\ln y + 3x + y$.

34.22. $z = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2 + 7y - 2$.

34.23. $z = 2x^2 y - 3x + 4y^2 + \dfrac{4x}{y}$.

34.24. $z = 3x^4 + y^2 - xy + x + y$.

34.25. $z = 4x^3 - 3x^2 y + 2y^3 + 5\ln x - 6$.

34.26. $z = e^x - x^3 y^2 + 4y^2 + 3y - x - 1$.

34.27. $z = 5x^3 y^2 - 3x + y^2 + \dfrac{2x}{y^3} - 3$.

34.28. $z = xy^4 - x^3 y + 2\sin y - x + 3$.

34.29. $z = 4x^2 - xy^3 + 3\ln y - e^x + 2$.

34.30. $z = 2x^2y - \ln x + 3y^2 + \dfrac{4}{x}$**.**

Завдання 35. Знайти повний диференціал функції $z = f(x,\ y)$.

35.1. $z = \cos\left(x^3 - 3y\right)$.

35.2. $z = \dfrac{3x + 2y}{3x - 2y}$.

35.3. $z = \sqrt{x^4 + 2y^3}$.

2.4. $z = x \ln \dfrac{x^2}{y}$.

2.5. $z = \dfrac{xy + 1}{x + y}$.

2.6. $z = e^{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}$.

2.7. $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

2.8. $z = e^{3x - y^2}$.

2.9. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

2.10. $z = x \ln\left(x^3 y\right)$.

2.11. $z = 4e^{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

2.12. $z = \sin\left(5x^2 + y\right)$.

2.13. $z = \ln\left(x^3 + y^3\right)$.

2.14. $z = \dfrac{x^2 + 3y^2}{x + y}$.

2.15. $z = \dfrac{xy}{x + y + 1}$.

2.16. $z = \cos\sqrt{x + y}$.

2.17. $z = tg\left(x^3 y^4\right)$.

2.18. $z = \dfrac{3x + y}{x - 3y}$.

2.19. $z = e^{x^2 + y^2 + xy}$.

2.20. $z = y \ln \dfrac{2y}{x^3}$.

2.21. $z = \arcsin\left(x + 3y\right)$.

2.22. $z = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

2.23. $z = \arccos \dfrac{y}{x}$.

2.24. $z = \dfrac{y}{y^2 - 9x^2}$.

2.25. $z=\sqrt{3x^2+2y^2}$.

2.26. $z=y\ln\dfrac{x}{y^2}$.

2.27. $z=e^{\frac{y}{x}}$.

2.28. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

2.29. $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

2.30. $z=\ln\left(x^3-2y^2\right)$.

Завдання 3. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $z=f\left(x,\ y\right)$, заданої неявно.

3.1. $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$.

3.2. $e^x y-xyz+y^3-4xz^2=0$.

3.3. $2x^2y-\ln x+3y^2z+2xe^z-4=0$.

3.4. $3ye^x+2z^3y^2-y^2+xz-2x-7=0$.

3.5. $5x^3-3xy+z^2+2tgy-4xyz-1=0$.

3.6. $x^3y-z^2y+2x\cos y+3x+z-3=0$.

3.7. $3e^xy^3-2xy^3z+5y-4z^3+1=0$.

3.8. $xy\sin z-x^3y+4xz^3+y-3z=0$.

3.9. $x^4-3x^3yz+4\ln x+2yz^2-3=0$.

3.10. $e^zy-x^4y+z^2+4y-x-3=0$.

3.11. $5x^2y-2x^3z^4+4xy^2z-3\ln z=0$.

3.12. $2x^3\cos y+3x^5z^4-y^3+\mathrm{tg}z-4=0$.

3.13. $3e^zy^2+x^2-xy^3+2\ln z-1=0$.

3.14. $x^3-2xy^3+x\ln z+3y-2z+1=0$.

3.15. $3e^z+2x^3y^2-z^2+3x-2z+4=0$.

3.16. $4x^3 - 3x^2yz + 2z^3 + 5\ln x - 6 = 0$.

3.17. $4x^5y - y^4z + \ln x - e^z + 3 = 0$.

3.18. $5x^2y - 3xz^2 + 2y^2 + \dfrac{z}{y} = 0$.

3.19. $x^3 - 3x^2y + 2y^2 + \ln z - 4xz + 5 = 0$.

3.20. $xe^z - x^3y^2 + 4z^2 + 3xy - x - 1 = 0$.

3.21. $x^2y + 2x\ln y + 7\ln z + 3x + e^z = 0$.

3.22. $5x^3y^2 - 3xz^2 + y^2 + \dfrac{2z}{y^3} - 3 = 0$.

3.23. $x^3\cos z - 3xy + 2y^2 + z - 4x + 1 = 0$.

3.24. $5x^3 - 2x^2yz + \ln z + 3x - 4 = 0$.

3.25. $3x^4 + y^2z - xy^2 + \sin z + y = 0$.

3.26. $5\ln x - x^2z^4 + 2\cos y + 3z - 1 = 0$.

3.27. $2xe^y + z^2y + 2\cos z + x + 3y = 0$.

3.28. $4x^3y - 6yz^2 + 3y^2 + 7\cos z - 2 = 0$.

3.29. $4x^2z - xy^3 + 3\ln z - e^y + 2 = 0$.

3.30. $xy^4z - x^3y + 2\sin z - y + 3 = 0$.

Завдання 4. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

4.1. $z = x^3 \cdot \ln y$, де $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

4.2. $z = \mathrm{tg}x - 2x\cos y$, де $x = v\sin u$, $y = 3v - 2uv$.

4.3. $z = xy^2 + \dfrac{x}{y}$, де $x = v^2u - 4v$, $y = \dfrac{2v}{u}$.

4.4. $z = e^x y + \ln x$, де $x = uv$, $y = u^2 - 3v$.

4.5. $z = x^2 y - 2\cos y$, де $x = u\ln v$, $y = 4u^2 v$.

4.6. $z = \cos x - 2y^3$, де $x = \dfrac{u^2}{v}$, $y = 3u\sin v$.

4.7. $z = y\ln x - 4x$, де $x = 2v^2 - 4u$, $y = u - 3v^2$.

4.8. $z = \mathrm{tg}x - 2\ln y$, де $x = 2uv$, $y = 4u - 5v^3$.

4.9. $z = 2x^3 \ln y$, де $x = v\cos u$, $y = 3u - \sin v$.

4.10. $z = x^2 y + 2y$, де $x = 5u^2 v$, $y = uv^3$.

4.11. $z = x^2 \sin y$, де $x = 3uv$, $y = u^3 - 2v$.

4.12. $z = \cos y - 3x^2$, де $x = 2u - v$, $y = \dfrac{3u}{v^2}$.

4.13. $z = xy^3 + \ln x$, де $x = v + 3u^2$, $y = 5uv$.

4.14. $z = x^4 - 3\sin y$, де $x = u - 4v^2$, $y = v - u^3$.

4.15. $z = \arcsin x + 3\ln y$, де $x = 5uv$, $y = u + v$.

4.16. $z = y\ln x - x$, де $x = 4v - u$, $y = \dfrac{v}{2u}$.

4.17. $z = \mathrm{arctg}y - 3x^2$, де $x = 2uv$, $y = u^2 - 3v$.

4.18. $z = x^4 y - \cos x$, де $x = u - 5v$, $y = 3uv^2$.

4.19. $z = xy + x^2 y^3$, де $x = 5u + 2v$, $y = v\sin u$.

4.20. $z = \ln x - 2x\sin y$, де $x = uv$, $y = v^2 - 2u$.

4.21. $z = xy^3 - \mathrm{tg}y$, де $x = v - u$, $y = -2uv$.

4.22. $z = \mathrm{ctg}x + 2e^y$, де $x = 2u + v$, $y = u^v$.

4.23. $z = x^3 - 2x\ln y$, де $x = u\cos v$, $y = v - 3u$.

4.24. $z = e^x - 2xy^3$, де $x = ve^u$, $y = 2u + v$.

4.25. $z = 3e^y + xy$, де $x = v - \sin u$, $y = 3ve^u$.

4.26. $z = 2x^3\cos y$, де $x = 5u - v$, $y = uv^2$.

4.27. $z = \ln(xy)$, де $x = ue^v$, $y = 3v - u$.

4.28. $z = x^4 - 2\cos y$, де $x = \sin u - 2v$, $y = ve^u$.

4.29. $z = xy^3 - \ln y$, де $x = v\ln u$, $y = v - 2u$.

4.30. $z = x^4y^3 + \dfrac{3x^2}{y}$, де $x = v^2 + u$, $y = \dfrac{\sin v}{u}$.

Завдання 5. Знайти похідну функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P_1(x_1;\ y_1)$ в напрямі від цієї точки до точки $P_2(x_2;\ y_2)$.

5.1. $z = x^4 - 3x^2y^2 + 2xy + 1$, $P_1(1;\ -1)$, $P_2(5;\ 2)$.

5.2. $z = 3x^2 - 2xy^2 + y - 3$, $P_1(2;\ -2)$, $P_2(6;\ 1)$.

5.3. $z = 2x^3 - 3x^2y + 2x - y + 1$, $P_1(2;\ 3)$, $P_2(-2;\ 6)$.

5.4. $z = 3x^2 - 4xy^2 + 3y - 5$, $P_1(1;\ 3)$, $P_2(-3;\ 0)$.

5.5. $z = 4x^2y - y^3 + 2x + 4$, $P_1(0;\ 1)$, $P_2(3;\ -3)$.

5.6. $z = x^4 + 2x^2y^2 - 3x + 1$, $P_1(1;\ 1)$, $P_2(5;\ -2)$.

5.7. $z = 2x^3 - 3xy^2 + 2x - y$, $P_1(2;\ 1)$, $P_2(-2;\ -2)$.

5.8. $z = xy^4 - 3y^2 - 2x + y + 4$, $P_1(1;\ 2)$, $P_2(5;\ -1)$.

5.9. $z = x^3 + 2x^2y + x - 3y + 1$, $P_1(-1;\ 1)$, $P_2(2;\ -3)$.

5.10. $z = 4x^2 - 3xy^2 + 2x + 5y + 1$, $P_1(1;\ 1)$, $P_2(4;\ -3)$.

5.11. $z = e^x - 3x^2y^2 + 2xy - 3$, $P_1(0;\ 2)$, $P_2(4;\ -1)$.

5.12. $z = \cos x - 2x^2y + y^3 - 3$, $P_1(0;\ -1)$, $P_2(4;\ 2)$.

5.13. $z = x^4 + 2xy^2 - y^3 + 1$, $P_1(1;\ 1)$, $P_2(5;\ -2)$.

5.14. $z = 3x^2 + 4xy^2 + 2y - 1$, $P_1(2;\ 0)$, $P_2(5;\ -4)$.

5.15. $z = x^5 - x^2y + 2xy^2 - 3$, $P_1(1;\ -1)$, $P_2(5;\ 2)$.

5.16. $z = x^3 + x\cos y - y^2 - 2$, $P_1(1;\ 0)$, $P_2(-3;\ 3)$.

5.17. $z = 2x^3 - 4x^2y + 3x - y + 1$, $P_1(1;\ 1)$, $P_2(4;\ -3)$.

5.18. $z = x^4 - 4xy + 2y^2 - 3$, $P_1(1;\ 3)$, $P_2(-3;\ 0)$.

5.19. $z = 3x^2y - y^2 + 2x + 3$, $P_1(1;\ -1)$, $P_2(5;\ 2)$.

5.20. $z = x^3 - 2xy^2 + e^y - 3$, $P_1(2;\ 0)$, $P_2(-1; 4)$.

5.21. $z = xy^2 - 2x^3y + 4x - 3$, $P_1(2;\ -3)$, $P_2(5; 1)$.

5.22. $z = 2x^3 - 3y^2 + 4x - 5$, $P_1(1;\ 2)$, $P_2(5;\ -1)$.

5.23. $z = x^3 - 2x^2y^2 + 4y - x$, $P_1(1;\ 3)$, $P_2(-3;\ 0)$.

5.24. $z = 3x^4 - 2x^2y + 3y - 4$, $P_1(2;\ -2)$, $P_2(6; 1)$.

5.25. $z = 4e^x + 2xy^2 - x\ln y + 5$, $P_1(0; 1)$, $P_2(-3;\ 5)$.

5.26. $z = x^4 + 3x^2y - 2y^3 - 1$, $P_1(1; 1)$, $P_2(-2;\ 5)$.

5.27. $z = 7x^2 - 2xy^3 + y - 3x$, $P_1(1;\ -2)$, $P_2(-3; 1)$.

5.28. $z = x^3 - 2x\sin y + 5y - 4$, $P_1(2;\ 0)$, $P_2(6;\ -3)$.

5.29. $z = 3\cos x - 4xy^3 + 2y - 1$, $P_1(0;\ -2)$, $P_2(4; 1)$.

5.30. $z = 3x^2y - xy^2 + 5y - 3x$, $P_1(-1;\ -2)$, $P_2(2;\ 2)$.

Завдання 6. Знайти градієнт функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x;\ y)$.

6.1. $z = \dfrac{xy+1}{x+y}$, $P(1;\ 3)$.

6.2. $z = \dfrac{x^2-y^2}{x+y+1}$, $P(1;\ 1)$.

6.3. $z = \dfrac{xy+x+y}{x-y}$, $P(1;\ -2)$.

6.4. $z = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}$, $P(2;\ -1)$.

6.5. $z = \dfrac{2xy}{x-y}$, $P(3;\ 2)$.

6.6. $z = \dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}$, $P(1;\ 2)$.

6.7. $z = \dfrac{x^2+xy}{x-y}$, $P(2;\ 3)$.

6.8. $z = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$, $P(1;\ -3)$.

6.9. $z = \dfrac{x^2+2xy}{3x-2y}$, $P(1;\ 2)$.

6.10. $z = \dfrac{xy}{x+2y}$, $P(1;\ -1)$.

6.11. $z = \dfrac{xy+y}{x^2-y}$, $P(2;\ -2)$.

6.12. $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$, $P(1;\ -1)$.

6.13. $z = \dfrac{x^2-2y}{2x+3y}$, $P(2;\ -2)$.

6.14. $z = \dfrac{x+2y}{2x+y}$, $P(-1;\ 3)$.

6.15. $z = \dfrac{x-y}{1+xy}$, $P(2;\ -1)$.

6.16. $z = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$, $P(1;\ -1)$.

6.17. $z = \dfrac{2-xy}{x+2y}$, $P(1;\ 3)$.

6.18. $z = \dfrac{x^2y-xy^2}{x+y}$, $P(-1;\ -1)$.

6.19. $z = \dfrac{x+y^2}{x^2-y}$, $P(1;\ -2)$.

6.20. $z = \dfrac{x^3+y^2}{x+y^2}$, $P(2;\ -1)$.

6.21. $z = \dfrac{xy^2}{x^2-y}$, $P(3;\ 4)$.

6.22. $z = \dfrac{xy-y^2}{x^2-y}$, $P(1;\ 2)$.

6.23. $z = \dfrac{2x^2+3xy}{3x-2y}$, $P(2;\ 3)$.

6.24. $z = \dfrac{3x+y^2}{x^2+4y}$, $P(1;\ -2)$.

6.25. $z=\dfrac{3x-y^3}{x^3+y}$, $P(1;\,3)$.

6.26. $z=\dfrac{2x+y^2}{x^2+3y}$, $P(2;\,-1)$.

6.27. $z=\dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}$, $P(2;\,-1)$.

6.28. $z=\dfrac{4x-y^2}{x^2+3y}$, $P(-1;\,1)$.

6.29. $z=\dfrac{x-5y}{4x+3y}$, $P(2;\,-2)$.

6.30. $z=\dfrac{x+y^2}{x^2-y}$, $P(1;\,-3)$.

Завдання 7. Дослідити функцію $z=f(x,y)$ на екстремуми.

7.1. $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$.

7.2. $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

7.3. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$.

7.4. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

7.5. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

7.6. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$.

7.7. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$.

7.8. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

7.9. $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

7.10. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$.

7.11. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.

7.12. $z=(x-2)^2+2y^2-10$.

7.13. $z=(x-5)^2+y^2+1$.

7.14. $z=x^3+y^3-3xy$.

7.15. $z=2xy-2x^2-4y^2$.

7.16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

7.17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

7.18. $z = xy(12 - x - y)$.

7.19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

7.20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

7.21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

7.22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

7.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

7.24. $z = xy(6 - x - y)$.

7.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

7.26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

7.27. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

7.28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

7.29. $z = x^2 + 3(y+2)^2$.

7.30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$.

Завдання 8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D, що обмежена заданими лініями.

8.1. $z = 3x + y - xy, \quad D: y = x, \quad y = 4, \quad x = 0$.

8.2. $z = xy - x - 2y, \quad D: x = 3, \quad y = x, \quad y = 0$.

8.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2$.

8.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$.

8.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x - y + 1 = 0, \quad x = 3, \quad y = 0$.

8.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0$.

8.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 6$.

8.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$.

8.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 3 = 0$.

8.10. $z = x^2 + 2xy - 10, \quad D: y = 0, \quad y = x^2 - 4$.

8.11. $z = xy - 2x - y, \quad D: x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 4$.

8.12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad D: y = 8, \quad y = 2x^2$.

8.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0$.

8.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad D: y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0$.

8.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad D: x = -3, \quad y = 0, \quad x + y + 1 = 0$.

8.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad D: x = 5, \quad y = 0, \quad x - y - 1 = 0$.

8.17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \quad D: y = 2x, \quad y = 2, \quad x = 0$.

8.18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2$.

8.19. $z = xy - 3x - 2y, \quad D: x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0, \quad y = 4$.

8.20. $z = x^2 + xy - 2, \quad D: y = 4x^2 - 4, \quad y = 0$.

8.21. $z = x^2 y(4 - x - y), \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad y = 6 - x$.

8.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = -1, \quad y = 2$.

8.23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \quad D: x + 2y = 4, \quad x - 2y = 4$.

8.24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x = 3, \quad y = 0, \quad y = x + 1$.

8.25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y,\quad D: x = 0,\quad x = 1,\quad y = 0,\quad y = 2$.

8.26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y,\quad D: y = x + 2,\quad y = 0,\quad x = 2$.

8.27. $z = 4 - 2x^2 - y^2,\quad D: y = 0,\quad y = \sqrt{1 - x^2}$.

8.28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4,\quad D: x = -1,\quad x = 1,\quad y = -1,\quad y = 1$.

8.29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2,\quad D: x + y + 2 = 0,\quad x = 0,\quad y = 0$.

8.30. $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2,\quad D: x = 0,\quad y = 0,\quad x + y = 6$.

<u>Завдання 9.</u> Знайти екстремуми функції $z = f\ \ x, y$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$.

9.1. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.2. $z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108x - 3$ за умови $3y - x - 4 = 0$.

9.3. $z = 5x^3 + 7xy^2 - 3y^2 - 15x - 4$ за умови $2x + 4y + 1 = 0$.

9.4. $z = 6y^3 + 10x^2y + 2x^2 - 2y + 9$ за умови $3x - y + 5 = 0$.

9.5. $z = 7x^3 + 6xy^2 + y^2 - \dfrac{21}{4}x + 1$ за умови $4x - 3y + 1 = 0$.

9.6. $z = 5y^3 + 7x^2y - 3x^2 - 15y + 2$ за умови $2y - 2x - 3 = 0$.

9.7. $z = 6x^3 + 10xy^2 + 2y^2 - 2x + 7$ за умови $x + 2y - 2 = 0$.

9.8. $z = 3y^3 + \dfrac{3}{2}x^2y - 2x^2 - 25y + 3$ за умови $y - 3x - 1 = 0$.

9.9. $z = 2x^3 + 5xy^2 + 8y^2 - 24x - 10$ за умови $2y - 3x + 2 = 0$.

9.10. $z = 2y^3 + 5x^2y + 8x^2 - 24y + 8$ за умови $4x + 2y - 3 = 0$.

9.11. $z = 4x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 108x - 6$ за умови $2y - 4x + 3 = 0$.

9.12. $z = y^3 + 4x^2y + 5x^2 - 48y + 7$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.

9.13. $z = 3x^3 - 4y^2 + 2xy^2 - 49x + 4$ за умови $2y - 6x - 3 = 0$.

9.14. $z = 7y^3 + 6x^2 y + x^2 - \dfrac{21}{4} y + 4$ за умови $3x + 2y + 3 = 0$.

9.15. $z = 3x^3 + \dfrac{3}{2} xy^2 - 2y^2 - 25x - 5$ за умови $2x - 4y - 3 = 0$.

9.16. $z = 8y^3 + 2y^3 + 5x^2 y - 24y - 3$ за умови $x + 4y - 4 = 0$.

9.17. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.18. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ за умови $3x + 2y - 4 = 0$.

9.19. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ за умови $2x - 3y - 3 = 0$.

9.20. $z = y^3 + x^2 - 6xy - 39y + 18x + 5$ за умови $x - 2y + 4 = 0$.

9.21. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ за умови $x + 2y - 3 = 0$.

9.22. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.23. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$ за умови $2y - 2x + 3 = 0$.

9.24. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.25. $z = 3x^3 + 2xy^2 - 49x + 4$ за умови $2y - 6x - 3 = 0$.

9.26. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.27. $z = x^3 + 6y^2 - 4x + 5$ за умови $4x - 3y + 5 = 0$.

9.28. $z = x^2 + y^3 + 5y^2 + 48x + 2$ за умови $2x - 4y + 3 = 0$.

9.29. $z = x^3 + 3xy^2 + 4y^2 - 5x + 2$ за умови $3x - 4y + 1 = 0$.

9.30. $z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 6x + 7$ за умови $5x + y - 3 = 0$.

Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною ***схемою.***

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y'' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки (x)	
y'	
y''	
y	

а) Використовуючи y' з’ясовуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи y'', досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

6. Будуємо графік функції.

<u>Приклад 1.</u> Виконати загальне дослідження функції $y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв’язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x\left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2\right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{273}}{4} \approx -6,4\,; \quad x_2 = \frac{-9+\sqrt{273}}{4} \approx 1,9\,.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b\,, \tag{1}$$

де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x}\,, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\big(y(x) - kx\big)\,, \tag{2}$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2\right) = \infty\,,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = \infty\,. \tag{3}$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 .$$

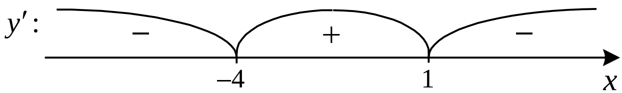
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $\quad 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

4 Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)' = -\frac{3}{2} - x .$$

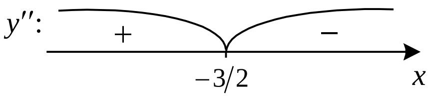
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y'' = 0$: $-\frac{3}{2} - x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$.

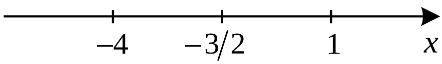
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x=-\dfrac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty;-4)$, $(-4;-1{,}5)$, $(-1{,}5;\ 1)$, $(1;+\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1{,}5)$	$-1{,}5$	$(-1{,}5;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	–	0	+		+	0	–
y''	+		+	0	–		–
y	↘ $\cup$	min $y(-4)=$ $=-9\dfrac{1}{3}$	↗ $\cup$	т. п. $y(-1{,}5)=$ $=-4\dfrac{1}{8}$	↗ $\cap$	max $y(1)=1\dfrac{1}{12}$	↘ $\cap$

Позначення:

↘ – функція спадає;

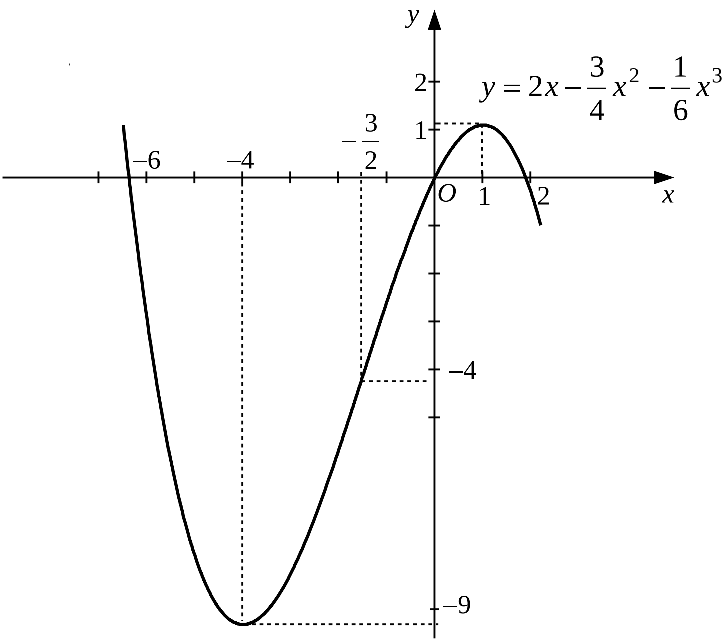
↗ – функція зростає;

$\bigcup$ – графік угнутий;

$\bigcap$ – графік опуклий;

т.п. – точка перегину графіка.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$.



<u>Приклад 2.</u> Виконати загальне дослідження функції $y = \dfrac{x^4}{x^3+1} - \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; -1) \bigcup (-1; +\infty)$.

б) Графік перетинає вісь Oy у точці $y = -0,5$.

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю Ox :

$$\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}=0\,,\quad \frac{2x^4-x^3-1}{2(x^3+1)}=0\,.$$

Звідси маємо рівняння $2x^4-x^3-1=0$. Розклавши ліву частину на множники

$$2x^4-x^3-1=\left(x^4-x^3\right)+\left(x^4-1\right)=x^3\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)=$$

$$=\left(x-1\right)\left(2x^3+x^2+x+1\right),$$

знаходимо корінь $x=1$. Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння $2x^3+x^2+x+1=0$ має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі $(-1;0)$. Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов'язане з використанням громіздких формул, то обмежимось вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю Oy – $x=1$.

г) Функція ні парна, ні непарна.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^4}{x^3+1}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^3+1}-\frac{1}{2x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^3}}-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=$$

$$=\frac{1}{1+0}-0=1\,;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x\left(x^3+1\right)}{x^3+1}-\frac{1}{2}=$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^3+1} - \frac{1}{2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}} - \frac{1}{2} = \frac{0}{0+1} - \frac{1}{2} = -0,5;$$

підставляємо k та b у формулу (1): $y = 1 \cdot x + (-0,5) = x - 0,5$.

Отже, графік функції має похилу асимптоту $y = x - 0,5$ при $x \to \pm\infty$.

б) Оскільки точка $x_0 = -1$ не належить області визначення D заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки $\lim_{x\to -1}\left(x^3+1\right) = 0$, а $\lim_{x\to -1} x^4 = 1 \neq 0$, то

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2}\right) = \infty.$$

Звідси випливає, що пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{x^4}{x^3+1}\right)' - \left(\frac{1}{2}\right)' = \frac{\left(x^4\right)'\left(x^3+1\right) - x^4\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2} - 0 =$$

$$= \frac{4x^3\left(x^3+1\right) - x^4 \cdot 3x^2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}.$$

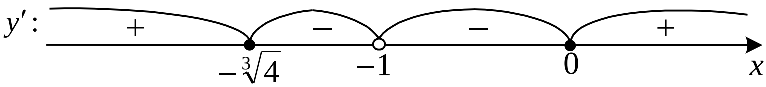
Критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0$: $\frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2} = 0$, $x^3\left(x^3+4\right) = 0$, звідки $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{4}$;

б) y' не існує: $\varnothing$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x=-\sqrt[3]{4}\approx -1{,}59$ та $x=0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах (точка $x=-1$ виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад, $y'(-2)=\dfrac{32}{49}>0$, $y'\left(-\sqrt[3]{2}\right)=-4<0$, $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{31}{49}<0$, $y'\left(1\right)=1>0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y''=\left(\frac{x^6+4x^3}{(x^3+1)^2}\right)'=\frac{\left(x^6+4x^3\right)'\left(x^3+1\right)^2-\left(x^6+4x^3\right)\left(\left(x^3+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^3+1\right)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(6x^5+12x^2\right)\left(x^3+1\right)^2-\left(x^6+4x^3\right)\left(x^3+1\right)3x^2}{\left(x^3+1\right)^4}=$$

$$=\frac{6x^2\left(x^3+1\right)\left[\left(x^3+2\right)\left(x^3+1\right)-\left(x^6+4x^3\right)\right]}{\left(x^3+1\right)^4}=$$

$$=\frac{6x^2\left(x^6+3x^3+2-x^6-4x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}=\frac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}.$$

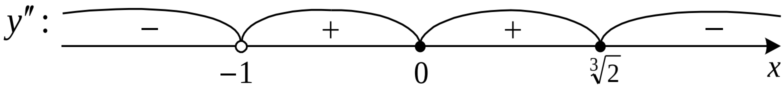
Критичні точки 2-го роду:

а) $y''=0$: $\quad \dfrac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}=0$, $\quad x^2\left(2-x^3\right)=0$, звідки $x=0$, $x=\sqrt[3]{2}$;

б) y'' не існує: $\varnothing$.

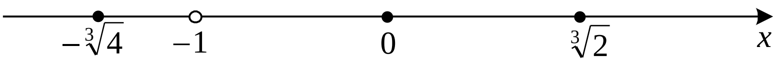
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду $x=0$ та $x=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки -2, $-\dfrac{1}{2}$, 1, 2).

$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



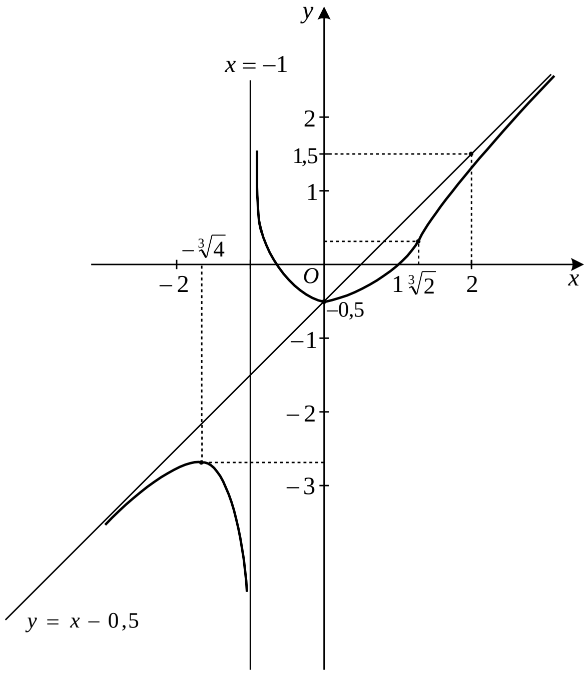
Отже, маємо п’ять інтервалів: $\left(-\infty,-\sqrt[3]{4}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{4},-1\right)$, $\left(-1,0\right)$, $\left(0,\sqrt[3]{2}\right)$, $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю.

x	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{4}\right)$	$-\sqrt[3]{4}$	$\left(-\sqrt[3]{4};-1\right)$	$\left(-1;0\right)$	0	$\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$
y'	+	0	–	–	0	+		+
y''	–		–	+	0	+	0	–
y	$\nearrow\ \cap$	max	$\searrow\ \cap$	$\searrow\ \cup$	min	$\nearrow\ \cup$	т.п.	$\nearrow\ \cap$

		$y(-\sqrt[3]{4}) \approx$ $\approx -2,62$			$y(0) = -0,5$		$y(\sqrt[3]{2}) \approx$ $\approx 0,34$	

$\boxed{\mathbf{6}}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$.



Приклад 3. Виконати загальне дослідження функції $y = \sqrt[3]{x^2}\, e^{\frac{2x}{3}}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = \sqrt[3]{0^2} \cdot e^{\frac{2 \cdot 0}{3}} = 0 .$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y=0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox Слід розв'язати рівняння $y(x)=0$:

$$\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}=0 \text{ або } \sqrt[3]{x^2}=0\text{. Звідси } x=0\text{.}$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точці $x=0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x)\neq y(x)$ та $y(-x)\neq -y(x)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) для знаходження похилих асимптот розглянемо окремо два випадки: $x\to-\infty$ та $x\to+\infty$:

Якщо $x\to+\infty$, маємо за формулами (2):

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{2x}{3}}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to\infty}2x^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2x}{3}}=\infty.$$

отже, похилих асимптот при $x\to+\infty$ графік функції не має.

Якщо $x\to-\infty$, маємо

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{2x}{3}}}=0.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\big(y(x)-kx\big)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}e^{\frac{2x}{3}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-\frac{2x}{3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'}{\left(e^{-\frac{2x}{3}}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{-2}{3}e^{-\frac{2x}{3}}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{2x}{3}}}=0\,.$$

Отже, за формулою (1) при $x\to-\infty$ похилою асимптотою є пряма $y=0$.

б) Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y'=\left(\sqrt[3]{x^2}e^{\frac{2x}{3}}\right)'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\cdot e^{\frac{2x}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}e^{\frac{2x}{3}}=\frac{2e^{\frac{2x}{3}}\left(1+x\right)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

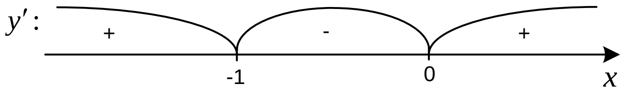
Критичні точки 1-го роду:

а) $y'=0$: $2e^{\frac{2x}{3}}\left(1+x\right)=0$, або $1+x=0$, звідки $x=-1$.

б) y' не існує: $\sqrt[3]{x}=0$, звідки $x=0$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x=-1$, $x=0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) \approx 0,03 > 0$, $y'(-0,5) \approx -0,3 < 0$, $y'(2) \approx 6,02 > 0$).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{2e^{\frac{2x}{3}}\left(1+x\right)}{3\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{e^{\frac{2x}{3}}\left(4x^2+8x-2\right)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $4x^2 + 8x - 2 = 0$.

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right); \quad x_2 = \frac{-8+\sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1.$$

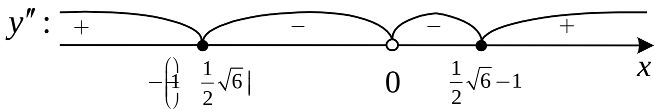
б) y'' не існує: $\sqrt[3]{x^4} = 0$, звідки $x = 0$.

Отже, маємо три критичних точки 2-го роду

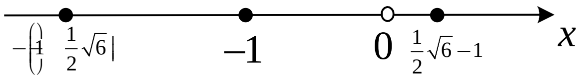
$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx -2,2;, \quad x_2 = 0,$$

$$x_3 = \frac{-8+\sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1 \approx 0,2.$$

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{\mathbf{5}}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п'ять інтервалів: $\left(-\infty;-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$, $\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6};-1\right)$, $(-1;\ 0)$, $\left(0;\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1;+\infty\right)$.

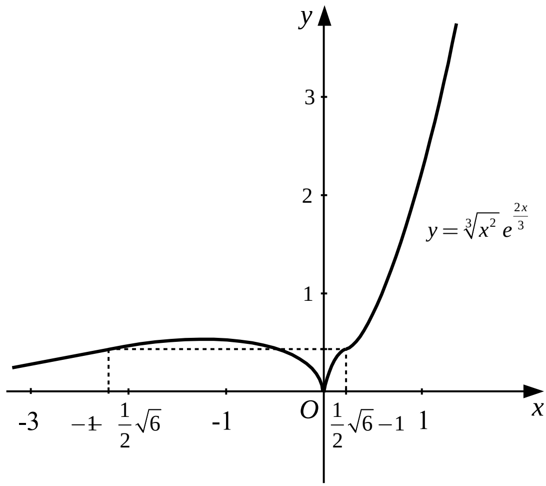
Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{\mathbf{3}}$ та $\boxed{\mathbf{4}}$.

x	$\left(-\infty;-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$	$-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6};-1\right)$	-1
y'	+		+	0
y''	+	0	-	
y	↘ ∪	т.п. $y\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)\approx 0,4$	↗ ∩	max $y(-1)\approx 0,5$

Продовження таблиці

$(-1;0)$		0	$\left(0;\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{6}-1$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1;+\infty\right)$
-		не	+		+
-		не	–	0	+
↘ ∩		min $y(0)=0$	↗ ∩	т.п. $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)\approx 0,4$	↗ ∪

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.



Функції двох змінних

Частинні похідні функції двох змінних.

За означенням частинні похідні функції двох змінних $z = f\left(x,\ y\right)$ у точці $P\left(x;y\right)$ обчислюються за формулами:

по змінній x –

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x,\ y\right) - f\left(x,\ y\right)}{\Delta x}.$$

по змінній y –

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x,\ y+\Delta y\right) - f\left(x,\ y\right)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями z'_x та z'_y використовують також інші позначення – відповідно $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x\left(x,\ y\right)$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $f'_y\left(x,\ y\right)$.

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 5x^4y^2 + 3x^2 - 4y^3 + 7$.

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = 5y^2 \cdot \left(x^4\right)'_x + 3\left(x^2\right)'_x - 4\left(y^3\right)'_x + \left(7\right)'_x =$$

$$= 5y^2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x - 0 + 0 = 20x^3y^2 + 6x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = 5x^4 \cdot \left(y^2\right)'_y + \left(3x^2\right)'_y - 4\left(y^3\right)'_y + \left(7\right)'_y =$$

$$= 5x^4 \cdot 2y + 0 - 4 \cdot 3y^2 + 0 = 10x^4y - 12y^2. \ \lrcorner$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = \arccos\dfrac{x^2}{y}$.

$\ulcorner$ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$z'_x = \left(\arccos\frac{x^2}{y}\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(x^2\right)'_x =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x = -\frac{2xy}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y} = -\frac{2x}{\sqrt{y^2 - x^4}},$$

$$z'_y = \left(\arccos\frac{x^2}{y}\right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{x^2 y}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y^2} = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2 - x^4}}. \quad \lrcorner$$

Частинними похідними другого порядку функції $z = f(x, y)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Приклад 3. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = 3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1$.

$\ulcorner$ $z_x' = \left(3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1\right)'_x = 3y^4 + 15x^2$,

$z_y' = \left(3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1\right)'_y = 12xy^3 - 4y$,

$z''_{xx} = \left(3y^4 + 15x^2\right)'_x = 30x$,

$z''_{xx} = \left(12xy^3 - 4y\right)'_y = 36xy^2 - 4$,

$z''_{xy} = \left(3y^4 + 15x^2\right)'_y = 12y^3$,

$z''_{yx} = \left(12xy^3 - 4y\right)'_x = 12y^3$. $\lrcorner$

Диференціал функції двох змінних.

Диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

$\ulcorner$Знайдемо частинні похідні функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_x'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)_x'=\frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_y'=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)_y'=\frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy \ \lrcorner$$

Диференціювання функцій заданих неявно

Якщо рівняння $F\left(x,\ y,\ z\right)=0$, де $F\left(x,\ y,\ z\right)$ – диференційовна функція змінних $x,\ y$ і z, визначає z як функцію незалежних змінних x і y і $F_z'\left(x,\ y,\ z\right)\neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'\left(x,\ y,\ z\right)}{F_z'\left(x,\ y,\ z\right)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'\left(x,\ y,\ z\right)}{F_z'\left(x,\ y,\ z\right)},$$

де $z=z\left(x,y\right)$.

Приклад 5. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^3y-2y^2+3z^2-y\cos z+7=0$.

$\ulcorner$ Позначимо $F\left(x,\ y,\ z\right)=x^3y-2y^2+3z^2-y\cos z+7$.

Знайдемо частинні похідні:

$F_x'\left(x,\ y,\ z\right)=3x^2y$,

$F_y'\left(x,\ y,\ z\right)=x^3-4y-\cos z$,

$F_z'\left(x,\ y,\ z\right)=6z+y\sin z$.

За формулами $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'\left(x,\ y,\ z\right)}{F_z'\left(x,\ y,\ z\right)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'\left(x,\ y,\ z\right)}{F_z'\left(x,\ y,\ z\right)}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2y}{6z+y\sin z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^3-4y-\cos z}{6z+y\sin z}. \lrcorner$$

Диференціювання складних функцій

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z=f\left(x,\, y\right)$, де $x=\varphi\left(u,\, v\right)$, $y=\psi\left(u,\, v\right)$ ($u,\, v$ – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовні функції), то частинні похідні z по u і v знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 6. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=x^2y-y^2x$, де $x=u\cdot\cos v$, $y=u\cdot\sin v$.

⌈Знайдемо похідні з правих частин формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xy^2-y^2x\right)_x'=2xy-y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2y-y^2x\right)_y'=x^2-2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\left(u\cdot\cos v\right)_u'=\cos v, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\left(u\cdot\cos v\right)_v'=-u\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\left(u\cdot\sin v\right)_u'=\sin v, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\left(u\cdot\sin v\right)_v'=u\cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули для диференціювання складних функцій. Тоді, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2xy-y^2\right)\cdot\cos v+\left(x^2-2xy\right)\cdot\sin v=$$

$$=\left(2u\cos v\cdot u\sin v-u^2\sin^2 v\right)\cdot\cos v+$$

$$+\left(u^2\cos^2 v-2u\cos v\cdot u\sin v\right)\cdot\sin v=$$

$$=u^2\sin v\cos v\left(2\cos v-\sin v\right)+u^2\sin v\cos v\left(\cos v-2\sin v\right)=$$

$$=u^2\sin v\cos v\left(2\cos v-\sin v+\cos v-2\sin v\right)=$$

$$=u^2\sin v\cos v\left(3\cos v-3\sin v\right)=3u^2\sin v\cos v\left(\cos v-\sin v\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(2xy-y^2\right)\cdot\left(-u\sin v\right)+\left(x^2-2xy\right)\cdot u\cos v=$$

$$=\left(2u\cos v\cdot u\sin v-u^2\sin^2 v\right)\cdot\left(-u\sin v\right)+\left(u^2\cos^2 v-2u^2\cos v\sin v\right)\times$$

$$\times u\cos v=-u^3\sin^2 v\left(2\cos v-\sin v\right)+u^3\cos^2 v\left(\cos v-2\sin v\right)=$$

$$= u^3\left(\underline{-2\sin^2 v\cos v} + \underline{\underline{\sin^3 v}} + \underline{\underline{\cos^3 v}} - \underline{2\cos^2 v\sin v}\right) =$$
$$= u^3\left[-2\sin v\cos v\left(\sin v+\cos v\right) + \left(\sin v + \cos v\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sin^2 v - \sin v\cos v + \cos^2 v\right)\right] = u^3\left(\sin v+\cos v\right)\left(1-3\sin v\cos v\right). \quad \lrcorner$$

Похідна функції за напрямом

Похідною функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x;\ y)$ за напрямом $\vec{e} = \overrightarrow{PP_1}$ називається

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \lim_{PP_1 \to 0}\frac{f(P_1) - f(P)}{PP_1},$$

де $f(P)$ і $f(P_1)$ – значення функції у точках P і P_1, PP_1 – відстань між цими точками.

Якщо функція z диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

де α – кут, що утворює вектор $\vec{e}$ з віссю Ox.

Приклад 7. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(2;\ -1)$ в напрямі від цієї точки до точки $N(5;\ 2)$.

$\ulcorner$Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1)^2 = 27;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy;\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -3\cdot 2^2 + 6\cdot 2\cdot(-1) = -24.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{PN}$: $\vec{a} = \{5-2;\ 2-(-1)\} = \{3;\ 3\}$.

Знайдемо координати орта $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2},\quad \vec{a}_0 = \left\{\frac{3}{3\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Звідси $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

За формулою $\dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 27 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-24) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad \lrcorner$$

Градієнт функції

Градієнтом функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x;\ y)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Приклад 8. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P(1;\,1)$.

$\ulcorner$ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1.$$

Отже, $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$. $\lrcorner$

Рівняння дотичної площини і нормалі

Дотичною площиною до поверхні у точці M (точка дотику) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці M до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі $z = f(x,\ y)$, де $f(x,\ y)$ – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f_x'(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0,\ y_0)(y - y_0).$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0,\ y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0,\ y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Приклад 9. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \dfrac{x^2}{2} - y^2$ у точці $M(2; -1; 1)$.

$\ulcorner$ Рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$ поверхні має вигляд $z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Рівняння нормалі має вигляд $\dfrac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x$, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2$.

Звідси маємо:

$z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ або $2x + 2y - z - 1 = 0$ – рівняння дотичної площини;

$\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z - 1}{-1}$ – рівняння нормалі. $\lrcorner$

Локальний екстремум функції двох змінних

Функція $f(x, y)$ має локальний максимум (мінімум) $f(a, b)$ у точці $P(a; b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x; y)$ з деякого околу точки P виконується нерівність $f(a, b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a, b) < f(x, y)$). Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв’язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f_x'(x, y) = 0 \\ f_y'(x, y) = 0. \end{cases}$$

Розв’язки даної системи називають стаціонарними точками.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a; b)$ знаходимо

$A = f_x''(a, b)$, $B = f_{xy}''(a, b)$, $C = f_{yy}''(a, b)$, $\Delta = AC - B^2$.

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a;\, b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a;\, b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

Приклад 10. Дослідити на екстремуми функцію $z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108y - 3$.

Γ Знайдемо частинні похідні і складемо систему $\begin{cases} f_x'(x,\, y) = 0 \\ f_y'(x,\, y) = 0. \end{cases}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12y + 3x^2 - 108,$$

$$\begin{cases} 6xy - 4x = 0 \\ 12y + 3x^2 - 108 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x(6y - 4) = 0 \\ 12y + 3x^2 - 108 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо три стаціонарні точки: $P_1\left(0;\, \frac{5}{6}\right)$, $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3};\, \frac{2}{3}\right)$, $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3};\, \frac{2}{3}\right)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка $P_1\left(0;\, \frac{5}{6}\right)$: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6 \cdot \frac{5}{6} = 5$, $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 6 \cdot 0 = 0$, $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 12$.

$\Delta = AC - B^2 = 5 \cdot 12 - 0 = 60$.

Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_1 функція має мінімум.

2) Точка $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right)$: $A = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$, $B = 6\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$, $C = 12$;

$\Delta = 4\cdot 12 - \left(20\sqrt{3}\right)^2 = 48 - 1200 = -1152$.

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_2 функція не має екстремуму.

3) Точки $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right)$: $A = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$, $B = 6\cdot\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = -20\sqrt{3}$,

$C = 12$; $\Delta = 4\cdot 12 - \left(-20\sqrt{3}\right)^2 = 48 - 1200 = -1152$.

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає. $\rfloor$

Умовний екстремум

Умовним екстремумом функції $f(x,\ y)$ називають екстремум цієї функції за умови, що її аргументи пов'язані рівнянням зв'язку $\varphi(x,\ y) = 0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x,\ y)$ за умови $\varphi(x,\ y) = 0$ складають функцію Лагранжа

$$F(x,\ y) = f(x,\ y) + \lambda\cdot\varphi(x,\ y),$$

де λ – невизначений сталий множник. Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x,\ y) = 0. \end{cases}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай x_0, y_0, λ_0 – розв'язок системи. Складемо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $f(x,\ y)$ має у точці (x_0, y_0, λ_0) умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 11. Знайти екстремуми функції $z = 6 - 4x - 3y$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

⌈ Геометрично задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень аплікати z площини $z = 6 - 4x - 3y$ для точок її перетину із циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$F(x,\ y,\ \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$.

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв’язуючи яку знаходимо

$\lambda_1 = \dfrac{5}{2}$, $x_1 = \dfrac{4}{5}$, $y_1 = \dfrac{3}{5}$ і $\lambda_2 = -\dfrac{5}{2}$, $x_2 = -\dfrac{4}{5}$, $y_2 = -\dfrac{3}{5}$.

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

При $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $x = \dfrac{4}{5}$, $y = \dfrac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1{,}4 \\ 0 & 5 & 1{,}2 \\ 1{,}4 & 1{,}2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний мінімум.

При $\lambda=-\frac{5}{2}$, $x=-\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta=-\begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix}=-20<0\ .$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ функція має умовний максимум.

Таким чином,

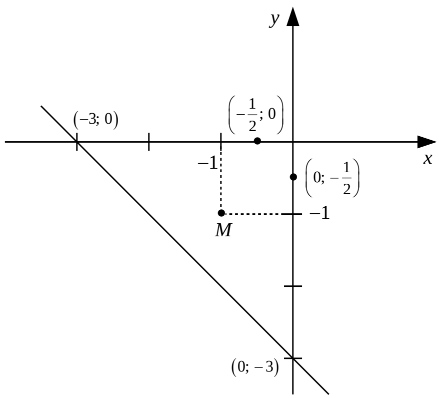
$z_{\max}=6+\frac{16}{5}+\frac{9}{5}=11$, $z_{\min}=6-\frac{16}{5}$

Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

Приклад 12. Визначити найбільше і найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в області $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y\ge -3$.

⌈ Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$,

$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1; -1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції:

$z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$:

$2y + 1 = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3,\ 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le x \le 0$.

$$z' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1.$$

$$z' = 0: \quad 2x + 1 = 0,\ x = -\frac{1}{2} \in [-3,\ 0].$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $x + y = -3$, або $y = -3 - x$ маємо функцію

$z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$ на відрізку $-3 \le x \le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$$z' = \left(3x^2 + 9x + 6\right)' = 6x + 9 \ .$$

$$z' = 0: \quad 6x + 9 = 0 \ , \quad x = -\frac{3}{2} \in \left[-3,\ 0\right].$$

$$z\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -\frac{3}{4}\,,$$

$$z(-3) = 3\cdot(-3)^2 + 9\cdot(-3) + 6 = 6\,,$$

$$z(0) = 0 + 0 + 6 = 6\ .$$

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z . Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}} = 6$ у точках $(0;\,-3)$ і $(-3;\,0)$;

$z_{\text{найм.}} = -1$ у стаціонарній точці $M(-1;\,-1)$. $\rfloor$