

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

протокол від 29 червня 2023 р.
№ 9

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика» Частина 2.

Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної.

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
освітньо-професійна програма «Автоматизація та комп'ютерно-
інтегровані технології»
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і
робототехніки
кафедра робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б.
Самотокіна

Рекомендовано на засіданні кафедри
робототехніки, електроенергетики та
автоматизації ім. проф. Б.Б.
Самотокіна 16 травня 2023 р.,
протокол № 5

Розробники: старший викладач БОНДАРЧУК Василь,
старший викладач ГОЛОВНЯ Руслан,
доцент СВЕРЧЕВСЬКА Ірина.

Житомир

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 2</i>

2023

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 3</i>

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
Тема 1. Функції однієї змінної, їх властивості	8
Тема 2. Границя функції. Розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$	10
Тема 3. Границя функції. Розкриття невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	14
Тема 4. Перша визначна границя	16
Тема 5. Друга визначна границя	18
Тема 6. Неперервність функції	20
Тема 7. Похідна функції. Похідна лінійної комбінації функцій. Похідна складеної функції	27
Тема 8. Похідна функції. Похідна добутку та частки функцій	31
Тема 9. Диференціювання функцій, заданих неявно. Диференціювання функцій, що задані параметрично	33
Тема 10. Логарифмічне диференціювання. Диференціал. Застосування диференціала до наближених обчислень	37
Тема 11. Похідні вищих порядків. Обчислення границь за правилом Лопітала	40
Тема 12. Дотична та нормаль до кривої. Асимптоти	43
Тема 13. Застосування похідної для дослідження функції	46
Тема 14. Загальне дослідження функції	49
Приклади розв'язань завдань	51
Корисні посилання	70

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 4

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник орієнтований у першу чергу на дистанційну форму навчання і створений на основі вже набутого досвіду роботи авторів у змішаному режимі навчання з переходами з аудиторної форми на дистанційну і навпаки.

Методичні вказівки охоплюють розділи вищої математики «Вступ до аналізу», зокрема теми «Функція однієї змінної, її властивості», «Границі», а також «Диференціальне числення функції однієї змінної». Основним завданням здобувачів освіти є розвиток умінь застосовувати теоретичні знання та формули у розв'язуванні задач, передбачених програмою з дисципліни Вища математика.

Вважається, що зародження поняття функції бере свій початок зі Стародавнього Вавилону, де математики використовували таблиці значень деяких найпростіших функцій: квадратів, кубів, сум та добутків чисел. У Стародавній Греції розв'язували деяку задачу на найбільші та найменші значення, заснували тригонометричні функції.

Досліджуючи функціональні залежності, математики в ці та більш пізні часи саме поняття функції використовували на інтуїтивному рівні. Лише після введення французьким вченим Р. Декартом поняття змінної величини почався період пошуку означення функції. Такі означення дали Й. Бернуллі (1718 р.), Л. Ейлер (1755 р.), М. Лобачевський (1834 р.), П. Діріхле (1837 р.) і вже з середини ХІХ ст. встановилося загальне означення функції на основі відповідності між змінними.

Диференціальне числення – розділ математики, в якому вивчається поняття похідної функції та його

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 5

застосування до дослідження функції. Ще в Стародавній Греції розглядали окремі випадки відшукування мінімумів та максимумів функцій. Архімед побудував дотичну до спіралі. Проте загальні методи дослідження функції розвинулися лише у XVII ст.

Після введення Р. Декартом поняття змінної величини та розробки методу координат з'явилося підґрунтя для розв'язування задач про рухи та інші процеси, про визначення швидкості зміни величин, про напрямок руху тіла в деякій точці траєкторії. Вагомі результати були отримані П. Ферма, який фактично вмів визначати похідні довільного многочлена.

Об'єднати існуючі прийоми розв'язування різних задач дослідження функцій в єдиний метод, що базувався на понятті нескінченно малої величини стало під силу вченим І. Ньютону та Г. Лейбніцу. Так було створено аналіз нескінченно малих і диференціальне числення.

І. Ньютон, розв'язуючи задачу про миттєву швидкість, називаючи функцію флюентою, а похідну флюксією, розробив метод диференціального числення з точки зору вивчення руху тіл. Г. Лейбніц підійшов до питання створення диференціального числення, розв'язуючи задачі про дотичні до кривих. Розроблений ним чіткий апарат та зручна символіка дали поштовх до численних застосувань нових методів.

Обґрунтуванню методів диференціального числення присвячені роботи братів Я. Бернуллі, Й. Бернуллі та іншого швейцарського математика Л. Ейлера. Створення диференціального числення дало поштовх для розвитку математики, стало потужним інструментом для досліджень у природничих науках та техніці.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 6</i>

Теорія границь розвинулася на ціле століття пізніше диференціального числення, але є фундаментом для теоретичної побудови всього математичного аналізу.

Ще грецькі вчені використовували ідеї нескінченності та застосовували її у методі неподільних для визначення площ і об'ємів. Але тільки в кінці XVI ст. відновився інтерес учених до поняття границі.

Вже у XVII ст. набрали чіткості уявлення про поняття границі послідовності. Поняття границі на інтуїтивному рівні застосовували І. Ньютон, Л. Ейлер, Ж. Лагранж. Термін «границя» ввів І. Ньютон. Перші строгі означення границі послідовності дали Б. Больцано та О. Коші. О. Коші дав фундаментальне обґрунтування теорії границь.

Методичні рекомендації містять вказівки та план вивчення конкретних тем з вищої математики для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр», що вивчають відповідні розділи дисципліни «Вища математика».

Послідовно має бути актуалізовано теоретичний матеріал відповідних лекцій, розглянуто необхідні правила та формули у вказаних посібниках, розглянуто вже розв'язані вправи та задачі. Після цього робота здобувачів освіти продовжується самостійно, розв'язуються перераховані завдання з вказаних посібників. Далі виконуються індивідуальні завдання. Індивідуальні завдання для самостійного виконання залежно від діючої форми навчання виконуються в аудиторії або у вигляді домашнього завдання.

Посібник може бути корисним при вивченні відповідних тем дисципліни «Вища математика» студентами всіх спеціальностей, що навчаються на технічних факультетах університету.

Основним допоміжним літературним джерелом виступає навчальний посібник «Практикум з вищої

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 7

математики» за редакцією В.О. Ковалю (Практикум з вищої математики: Навч. посібн. / За ред. В.О. Ковалю. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448с.), розроблений викладачами кафедри.

Також можна рекомендувати використовувати навчальну літературу з вищої математики:

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2006. – 648 с.

2. Вища математика: У 2-х кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003.

3. Михайленко В.В., Добряков Л.Д., Головня Р.М. Вища математика. Книга 2. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних: Навч. посібн. – Житомир: ЖДТУ, 2012. – 576 с.

4. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с.

5. Беспальчук В.І., Головня Р.М., Івахненкова В.В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ, 2001. – 176 с.

При вивченні дисципліни здобувачі вищої освіти мають набути загальні та професійні компетентності.

1. Загальні компетентності:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність до розуміння предметної області та професійної діяльності;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

2. Фахові компетентності:

- здатність до аналізу, синтезу і оптимізації інформаційних систем та технологій з використанням математичних моделей і методів;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 8</i>

– здатність проводити обчислювальні експерименти, порівнювати результати експериментальних даних і отриманих рішень.

3. Програмні результати навчання:

– знання лінійної та векторної алгебри, диференційного та інтегрального числення, теорії функцій багатьох змінних, теорії рядів, диференційних рівнянь для функцій однієї та багатьох змінних, операційного числення, теорії ймовірностей та математичної статистики в обсязі, необхідному для розробки та використання інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації.

Заключним етапом вивчення курсу є складання заліків та іспитів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70/9

Тема 1

Функції однієї змінної, їх властивості

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: Розділ 4. п.1 с. 110-115
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 1, 3, 4, 6, 7 (с. 116-118)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Коваля В.О.: №№ 14, 15, 16, 17 (с. 120)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 1. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти область визначення функції.

$$1.1. y = \frac{x-6}{x^2-3x+2}.$$

$$1.2. y = \frac{\sqrt{3-x}}{9+4x^2}.$$

$$1.3. y = \frac{2\cos x}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$$1.4. y = x \ln(4-x^2).$$

$$1.5. y = x - \frac{5}{\sqrt{1-x}}.$$

$$1.6. y = \frac{x^2}{\cos x - 1,5}.$$

$$1.7. y = \frac{\sin x}{2^x - 4}.$$

$$1.8. y = \frac{2^x}{27+x^3}.$$

$$1.9. y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}.$$

$$1.10. y = \frac{x+4}{\ln x}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 10</i>

$$1.11. y = \frac{x^2 - 4}{\frac{\pi}{4} - \arctg x}$$

$$1.12. y = \frac{\sqrt{x+2}}{3^x - 1}$$

$$1.13. y = \frac{2x-5}{8-x^3}$$

$$1.14. y = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-9}$$

$$1.15. y = \frac{x+4}{\log_2 x + 1}$$

$$1.16. y = \frac{3x+4}{2x^2+3x-14}$$

$$1.17. y = \frac{\sqrt{6+2x}}{1+9x^2}$$

$$1.18. y = \frac{2 \sin x}{\sqrt[3]{3x-12}}$$

$$1.19. y = x\sqrt{4-x^2}$$

$$1.20. y = \ln x - \frac{3}{\sqrt{2-x}}$$

$$1.21. y = \frac{3x^2}{\sin x - 1,5}$$

$$1.22. y = \frac{\ln x}{2^x - 8}$$

$$1.23. y = \frac{e^x}{8-x^3}$$

$$1.24. y = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-4}$$

$$1.25. y = \frac{3x+4}{\ln(2x-3)}$$

$$1.26. y = \frac{x^3-1}{\sqrt{2x^2-8}}$$

$$1.27. y = \frac{\sqrt{3x+6}}{3^x-9}$$

$$1.28. y = \frac{2x-5}{\sqrt{8-x^3}}$$

$$1.29. y = \frac{\sqrt{3x+12}}{x^2-4}$$

$$1.30. y = \frac{x+3}{\log_2(x+1)}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 11

Тема 2

Границя функції. Розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 4. п.3 с. 129-131, правило 1 (с. 134), правило 2 (с. 137)
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 43, 44, 45, 46, 47, 48 (с. 133-136), №№ 49, 50, 51 (с. 136-139)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 84, 84, 86 (с. 155)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 2. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталю.

$$1.1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}.$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 12

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}.$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}.$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}.$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}.$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x - 4}.$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$1.15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$1.16. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 7x - 15}.$$

$$1.17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x - 3x^2 - 1}$$

$$1.18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 5x - 12}$$

$$1.19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 3x - 14}{3x^2 - 8x + 4}$$

$$1.20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{4 - 3x^2 - x}$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 9}$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 10x + 8}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 3x - 4}$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + 5x + 2}$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 4x - 4}$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{2x^2 + x - 3}$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 13

Завдання 2. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{4-3x}-1}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4-3x^2}-1}{x^2+x}$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x-2x^2}$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{5x}$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{6-x}-2}$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x+x^2}$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2x+3}-1}$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{2x+9}-1}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{3x}$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2-x}$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{3-\sqrt{2-x}}{x^2-49}$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{5-x^2}}{x^2-1}$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3}}{3x-6}$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{x-3}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 14</i>

$$2.23. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{2+x}}{x+1}$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{5-x^2}}{x-2}$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{4x}$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x^2 - 4}$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{4-x} - 3}{x+5}$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{x^2 - x + 2}$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{5x}$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-1} - 2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 15

Тема 3

Границя функції. Розкриття невизначеності $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 4. п.3 с. 129-131, с. 139-140 (№№ 52, 53, 54), правило 3 (с. 140-141), правило 4 (с. 142)
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 55, 56, 57, 58, 59, 60 (с. 140-144)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 88, 89 (с. 156)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 3. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти границю, не використовуючи правило Лопітала.

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^3 + 2x - 4}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 4x - 3}{4x^2 - x - 6}.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 3}{-5x^2 + x + 2}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x - 1}{x^4 - 6x + 1}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x + 1}{2x^3 + 2x - 4}.$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x - 3}{4x^5 - x + 6}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 16

$$1.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{-3x^3 + 4x + 14}.$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^4 - 7x - 1}{9x^3 - 6x + 12}.$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{-3x^3 + 2x - 5}.$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x + 7}{4x^4 - 3x - 6}.$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x + 1}{4x^3 + 2x^2 - 5}.$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{-3x^2 + x - 2}.$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{3x^3 + x - 2}.$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x + 1}{x^4 - 3x + 1}.$$

$$1.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{4x^3 + 3x - 2}.$$

$$1.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + 2x - 1}{3x^3 + x - 4}.$$

$$1.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{-3x^3 + 8x - 4}.$$

$$1.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{7x^2 + 2x - 6}.$$

$$1.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - 4x - 3}{-5x^7 + 3x + 2}.$$

$$1.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 21}{-6x^4 + x + 1}.$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 4x + 1}{2x^5 - 3x - 4}.$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 3}{-5x^2 + x - 5}.$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 5}{4x^2 + x + 2}.$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x - 1}{7x^4 - x + 2}.$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{-2x^3 + x + 5}.$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3 - 3x^4}{x^5 - x + 6}.$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 2 - 3x^2}.$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x + 4}{2x^4 + x - 3}.$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x - 1}{2x^2 - x + 4}.$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 3}{-5x^2 + 2x + 7}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 17

Тема 4

Перша визначна границя

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 4. п.3 с. 129-131, п.4 с. 158-161
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 61, 62, 63, 64, 65, 66 (с. 144-146), №№ 122, 124 (с. 161-162)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 90, 93, 94, 95, 98, 99 (с. 156)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 4. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти границю, скориставшись першою визначною границею.

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 2x}.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 2x}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} 4x}{\sin^2 2x}$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{1 - \cos 3x}.$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{arcsi} n 4x}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 18

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{2x^2}.$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{4x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\sin^2 5x}.$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x}{\arcsin^2 5x}.$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$1.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 5x}{\sin^2 4x}.$$

$$1.16. \lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 5x$$

$$1.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin 4x \cdot \operatorname{tg} 3x}$$

$$1.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$$

$$1.19. \lim_{x \rightarrow 0} 3x \cdot \operatorname{ctg} 7x$$

$$1.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{4x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \operatorname{tg} 4x}{1 - \cos^2 3x}$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\sin^2 3x}$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 5x}$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow 0} 8x \cdot \operatorname{ctg} 3x$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{4x \cdot \sin 3x}$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\arcsin^2 4x}$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{7x}$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 19

Тема 5

Друга визначна границя

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 4. п.3 с. 129-131 , 148-149, 150-151
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 81 (с. 149-155)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 102, 106, 108, 109, 115, 117 (с. 156-157)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 5. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти границю, скориставшись другою визначною границею.

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-4} \right)^{2x}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{3}{x-1}}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+5} \right)^{3x+2}.$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{x}{x-1}}.$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{2x+3}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 20

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{5x}{x-2}}.$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x}.$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{3x-2}.$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{3}{x-2}}.$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{2x-1}.$$

$$1.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-2}{4x+7} \right)^{2x}.$$

$$1.16. \lim_{x \rightarrow -1} (3+2x)^{\frac{2}{x+1}}$$

$$1.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{3x-4}$$

$$1.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+5} \right)^x$$

$$1.19. \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{5}{x-1}}$$

$$1.20. \lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\frac{2x}{x-1}}$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x} \right)^{3x-4}$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{2+x} \right)^{1+2x}$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{3}{x}}$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{x-3}$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{4x+1} \right)^{2x}$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x} \right)^{3x}$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+3} \right)^{4x}$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow 2} (3x+7)^{\frac{2}{x+2}}$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{2x-5}$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^{2x}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 21

Тема 6 Неперервність функції

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 4. п.5 с. 163-164
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 136, 137, 138, 139, 141 (с. 164-168)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 144, 145, 146, 149 (с. 168-169)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 6. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти точки розриву функції та дослідити їх характер:

$$1.1 \text{ а) } f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}} \qquad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 1, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x-6}{(x+4)(x-5)^2} \qquad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

$$1.2. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \qquad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2 + 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \qquad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 22

$$1.3. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

$$1.4. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

$$1.5. \text{ а) } f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+x-30}$$

$$1.6. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

$$1.7. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 23

$$1.8. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2 + 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12}$$

$$1.9. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$$

$$1.10. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7 - x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 + x - 20}$$

$$1.11. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7 - x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 + x - 20}$$

$$1.12. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 7 - 3x, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 49}{x^2 + x - 42}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 24

$$1.13. \text{ а) } f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 1, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x-6}{(x+4)(x-5)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

$$1.14. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2 + 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

$$1.15. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

$$1.16. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

$$1.17. \text{ а) } f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+x-30}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 25

$$1.18. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

$$1.19. \text{ а) } f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x^2-1, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x-6}{(x+4)(x-5)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

$$1.20. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2+3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

$$1.21. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2+1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

$$1.22. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 26

$$1.23. \text{ а) } f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+x-30}$$

$$1.24. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

$$1.25. \text{ а) } f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x^2-1, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x-6}{(x+4)(x-5)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

$$1.26. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2+3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

$$1.27. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2+1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 27

$$1.28. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7 - x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

$$1.29. \text{ а) } f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+x-30}$$

$$1.30. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 28

Тема 7

Похідна функції. Похідна лінійної комбінації функцій.

Похідна складеної функції.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 5. п.1, 2, 3 с. 170-180
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 53, 54, 57 (с. 180-182), №№ 95, 97, 98, 103, 107, 110, 113 (с. 189-192)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 63, 64, 66, 67 (с. 183), №№ 132, 138, 141, 143 (с. 195)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 7. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Продиференціювати задану функцію.

$$1.1. y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x$$

$$1.2. y = \frac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x$$

$$1.3. y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x$$

$$1.4. y = \frac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \operatorname{arcsin} x$$

$$1.5. y = \frac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 29</i>

$$1.6. y = \frac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x$$

$$1.7. y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x$$

$$1.8. y = \frac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x$$

$$1.9. y = \frac{1}{2x^4} - 5\sqrt[5]{x^2} + 6\sin x$$

$$1.10. y = \frac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x$$

$$1.11. y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt{x^2} - 2\arccos x$$

$$1.12. y = \frac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5 \cdot 4^x$$

$$1.13. y = \frac{2}{5}x^5 + 8\sqrt{x} - 3\operatorname{arctg} x$$

$$1.14. y = \frac{1}{2}x^4 + 6\sqrt[6]{x^2} - 4\log_3 x.$$

$$1.15. y = 7x^3 + 3\sqrt{x^5} - 3^x.$$

$$1.16. y = \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \sqrt[5]{x^2}$$

$$1.17. y = \frac{x^5}{4} - \frac{3}{x^4} - \frac{2}{x} + 5\sqrt[3]{x^2}$$

$$1.18. y = \frac{3}{x^4} - 4x^3 + \frac{5}{x} + \sqrt[5]{x^3}$$

$$1.19. y = \frac{3}{7}x^8 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[4]{x^3}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 30

$$1.20. y = \frac{x^7}{6} - \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x} + 7\sqrt[3]{x^2}$$

$$1.21. y = \frac{3}{x^4} - 5x^7 + \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^4}$$

$$1.22. y = x^3 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^5} + 4\sqrt[4]{x^5}$$

$$1.23. y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} + 7\sqrt[3]{x}$$

$$1.24. y = \frac{2}{x^4} - 7x^6 + \frac{5}{x} + 8\sqrt[6]{x^5}$$

$$1.25. y = 3x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 6\sqrt{x^3}$$

$$1.26. y = 10x^4 - \frac{5}{x^3} - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x}$$

$$1.27. y = \frac{8}{x^3} - 15x^6 + \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^7}$$

$$1.28. y = 9x^4 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^5} + \sqrt{x^7}$$

$$1.29. y = \frac{x^7}{7} - \frac{5}{x^3} - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x^5}$$

$$1.30. y = \frac{2}{x^5} - 14x^5 + \frac{5}{x} + \sqrt[5]{x^9}$$

Завдання 2. Продиференціювати задану функцію.

$$2.1. y = \sqrt[4]{3x^2 + 5x} - 4$$

$$2.2. y = \cos(4x^2 + 3x - 2)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 31

$$2.3. y = ctg(2x^2 + x - 4)$$

$$2.4. y = \ln(2x^2 - 3x + 5)$$

$$2.5. y = \sqrt{x^3 - 4x + 5}$$

$$2.6. y = tg(3x^2 + x - 2)$$

$$2.7. y = \arctg(2x^2 - 1)$$

$$2.8. y = 3^{2x^3 - 4x + 3}$$

$$2.9. y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$2.10. y = \arccos(3x^2 + 5)$$

$$2.11. y = \log_3(2x^2 - 4x + 3)$$

$$2.12. y = 2e^{4x^2 + 3x - 2}$$

$$2.13. y = \sqrt[3]{(2x^2 + 5x - 3)^2}$$

$$2.14. y = \sin(2x^2 - 3x + 5)$$

$$2.15. y = \log_4(x^2 + 2x + 7)$$

$$2.16. y = \sqrt{(3x^2 - 2x + 5)^5}$$

$$2.17. y = \frac{7}{2x^2 - 5x + 7}$$

$$2.18. y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$$

$$2.19. y = \frac{4}{(x^2 + 3x + 4)^5}$$

$$2.20. y = \arctg(2x^2 + 5x - 7)$$

$$2.21. y = \ln(x^2 - 5x + 4)$$

$$2.22. y = \sqrt[3]{(x^2 - 3x + 5)^4}$$

$$2.23. y = \frac{7}{(2x^2 + 3x + 1)^3}$$

$$2.24. y = \sqrt[5]{(x^2 - 7x - 4)^3}$$

$$2.25. y = e^{2x^2 - 4x + 3}$$

$$2.26. y = \sqrt[4]{(2x^2 + 5x - 4)^3}$$

$$2.27. y = \sqrt[5]{(2x^3 - 5x + 2)^6}$$

$$2.28. y = \cos(5x^2 - 6x + 7)$$

$$2.29. y = 2^{x^2 - 3x + 2}$$

$$2.30. y = \frac{5}{(4x^2 + 3x + 2)^6}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 32

Тема 8

Похідна функції. Похідна добутку та частки функцій.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 5. п.2, 3 с. 172-180, с. 186
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 68, 70, 72, 77 (с. 183-187), №№ 114, 129 (с. 192-195)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 85, 87, 92 (с. 188), №№ 155, 158, 160 (с. 196)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 8. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Продиференціювати задану функцію.

$$1.1. y = 3^x \ln(4x - 3)$$

$$1.2. y = \frac{e^{5x}}{2x^2 - 3}$$

$$1.3. y = x^4 \cos(2x^2 - 5)$$

$$1.4. y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(2x + 3)}$$

$$1.5. y = e^{-2x^2} \operatorname{arctg} x$$

$$1.6. y = \frac{\sin(3x + 2)}{\ln x}$$

$$1.7. y = \cos x \cdot \ln(2x - 3)$$

$$1.8. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(2x - 1)}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 33

$$1.9. y = \frac{e^{\cos x}}{3x^2 - 4}$$

$$1.10. y = \frac{\ln x}{\sin(4x+3)}$$

$$1.11. y = 3^{\sin x} (4x-3)$$

$$1.12. y = \frac{7^{5x}}{2x^2 - 3}$$

$$1.13. y = \frac{4^{-x}}{2x^2 - 5}$$

$$1.14. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2x+3)}$$

$$1.15. y = \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} 6x}{7x^3 - 3x + 2}$$

$$1.16. y = \frac{\cos 2x}{(4x+3)^2}$$

$$1.17. y = 2^{\sin x} \cdot \arcsin x$$

$$1.18. y = \frac{e^{2x}}{7x-2}$$

$$1.19. y = e^{2x} \cdot \cos(3x-5)$$

$$1.20. y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(2x+3)}$$

$$1.21. y = \frac{\cos^2 x}{3x-4}$$

$$1.22. y = 2^{\sin x} \cdot \ln 3x$$

$$1.23. y = 2^x \cdot \ln(2x-5)$$

$$1.24. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(4x+3)}$$

$$1.25. y = \operatorname{ctg} x \cdot \ln 2x$$

$$1.26. y = \frac{\cos 2x}{2x^3 + 3}$$

$$1.27. y = \frac{e^{-3x}}{\ln(5x+3)}$$

$$1.28. y = \ln x \cdot \cos(2x-5)$$

$$1.29. y = e^{4x} \cdot \ln(3x-2)$$

$$1.30. y = \frac{e^{5x}}{(x-4)^4}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 34

Тема 9

Диференціювання функцій, заданих неявно.

Диференціювання функцій, що задані параметрично.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 5. п.4 с. 197, п.5 с. 201
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 162, 163, 164, 166, 169 (с. 198-200), №№ 182, 183, 184 (с. 201-203)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 173, 177, 179 (с. 200), №№ 188, 189, 195 (с. 203)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 9. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти похідну функції y по x , що задана неявно рівнянням.

$$1.1. x^3 + y^2 - 3xy = 0$$

$$1.2. x - y = \cos(xy)$$

$$1.3. y \sin x - \cos(x - y) = 0$$

$$1.4. y \ln y = x$$

$$1.5. x^4 + y^4 = 3x^2y^2$$

$$1.6. x^3 + xy^2 - y = 4x$$

$$1.7. y = 1 + xe^y$$

$$1.8. \ln y - \frac{y}{x} = 7$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 35

$$1.9. \sin y = xy^2 + 5$$

$$1.10. y - \cos(x - y) = 0$$

$$1.11. x^4 + y^3 + \sin x = 0$$

$$1.12. x - y = \sqrt{xy}$$

$$1.13. y^2 \sin x - \cos x = e^y$$

$$1.14. x \log_3 y = x^4 - 3xy$$

$$1.15. x^3 + y^4 = 3xy^3$$

$$1.16. y^2 \ln x = x + 2$$

$$1.17. x^2 - y = \sin(xy)$$

$$1.18. x^2 + y^3 = 5x^2y$$

$$1.19. y = x^3 + 2xe^y$$

$$1.20. \cos y = x^3y^2 + 5x$$

$$1.21. \ln y - \frac{y}{x^2} = 9$$

$$1.22. yx^4 + y^2 + \cos x = 0$$

$$1.23. y - \operatorname{tg}(x - y) = x$$

$$1.24. x^3 + xy^2 - y = 4x$$

$$1.25. x^3 - y = x\sqrt{y}$$

$$1.26. x^3 + y = 3x^2y$$

$$1.27. x \ln y = x^5 - 3xy$$

$$1.28. y^2 \sin x - x^3 = e^y$$

$$1.29. x + y = 1 + ye^x$$

$$1.30. x^2 + xy^2 - 5 = 3x$$

Завдання 2. Знайти похідну функції $y(x)$, що задана параметрично.

$$2.1. \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \frac{2}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 36

$$2.5. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \frac{1}{\sin 2t} \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1} \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln \cos t \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{2}{t} \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} x = \sqrt{1 - 4t^2} \\ y = \operatorname{tg} 2t \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} x = \cos t \\ y = e^t + 3t \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} x = 6\sqrt[3]{t^2} \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} x = 3t^3 - 9t \\ y = \arcsin t \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \frac{2}{\cos t} \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} x = \sqrt{t^3} \\ y = \sqrt{1 - t} \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$2.21. \begin{cases} x = \frac{1}{t^2} \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = 5 - \sin t \end{cases}$$

$$2.23. \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} x = \ln(\sin t) \\ y = \ln(\cos t) \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 37

$$2.25. \begin{cases} x = e^t \\ y = \frac{2}{t} \end{cases}$$

$$2.26. \begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = \frac{2}{t} \end{cases}$$

$$2.27. \begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 + 3t \end{cases}$$

$$2.29. \begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2} \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

$$2.30. \begin{cases} x = 3t^3 - 4t \\ y = t^2 + 5t \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 38

Тема 10

Логарифмічне диференціювання. Диференціал. Застосування диференціала до наближених обчислень.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: пункт 2.8, с. 215-216, п. 3.1, 3.3 с.218-221.
3. Розглянути приклади з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: на с. 215, 216, приклад 1 на с. 221, приклади 3, 4 на с. 222
4. Виконати самостійно вправи зі «Збірник задач з математики» Ч.1: №№ 5.216, 5.228, 5.231, 5.389 (12, 16), 5.395
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 10**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Продиференціювати задану функцію.

$$1.1. y = x^{\sin x}$$

$$1.2. y = (\sin x)^{2x}$$

$$1.3. y = x^{\arctg x}$$

$$1.4. y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$$

$$1.5. y = (\ln x)^{\lg x}$$

$$1.6. y = (\arcsin x)^x$$

$$1.7. y = x^{\arccos x}$$

$$1.8. y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$$

$$1.9. y = (\sqrt{x-1})^{\sin x}$$

$$1.10. y = (\ln x)^{x^2-3}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 39

$$1.11. y = (\operatorname{tg} x)^x$$

$$1.12. y = (\log_2 x)^{2x}$$

$$1.13. y = x^{\sqrt{x}}$$

$$1.14. y = x^{e^x}$$

$$1.15. y = (\arccos x)^x$$

$$1.16. y = (\cos x)^{\ln x}$$

$$1.17. y = (\sqrt{x})^{\cos x}$$

$$1.18. y = (\cos x)^{\sin x}$$

$$1.19. y = (\cos x)^x$$

$$1.20. y = (\arccos x)^{2x}$$

$$1.21. y = (\ln 2x)^x$$

$$1.22. y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$$

$$1.23. y = (\sin 2x)^{\ln x}$$

$$1.24. y = (\ln x)^{\sin x}$$

$$1.25. y = (\arcsin 2x)^{\ln x}$$

$$1.26. y = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$$

$$1.27. y = (x)^{\frac{1}{x}}$$

$$1.28. y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$$

$$1.29. y = x^{\arccos x}$$

$$1.30. y = (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}$$

Завдання 2. Обчислити наближено значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 , використовуючи диференціал функції.

$$2.1. y = \sqrt[3]{x}, x_0 = 7,76$$

$$2.2. y = \arcsin x, x_0 = 0,08$$

$$2.3. y = \sqrt{4x-1}, x_0 = 2,56$$

$$2.4. y = x^6, x_0 = 2,01$$

$$2.5. y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, x_0 = 1,58$$

$$2.6. y = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = 1,03$$

$$2.7. y = x^{11}, x_0 = 1,02$$

$$2.8. y = \sqrt{4x-3}, x_0 = 1,78$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 40</i>

$$2.9. y = \sqrt{x^2 + x + 3}, x_0 = 1,97$$

$$2.10. y = x^5, x_0 = 2,97$$

$$2.11. y = \sqrt{x}, x_0 = 8,87$$

$$2.12. y = \arctg x, x_0 = 0,05$$

$$2.13. y = \sqrt{2x+1}, x_0 = 3,92$$

$$2.14. y = x^4, x_0 = 4,01$$

$$2.15. y = \sqrt[3]{3x-1}, x_0 = 3,06$$

$$2.16. y = \sqrt[3]{x}, x_0 = 8,03$$

$$2.17. y = \arctg x, x_0 = 0,05$$

$$2.18. y = \sqrt{4x-3}, x_0 = 1,06$$

$$2.19. y = \sqrt{x^3}, x_0 = 1,04$$

$$2.20. y = \sqrt{3x+1}, x_0 = 1,08$$

$$2.21. y = \ln x, x_0 = 1,03$$

$$2.22. y = x^5, x_0 = 1,02$$

$$2.23. y = \sqrt{4x+5}, x_0 = 1,07$$

$$2.24. y = \sqrt{2x}, x_0 = 1,97$$

$$2.25. y = x^5, x_0 = 1,97$$

$$2.26. y = \sqrt{x}, x_0 = 16,02$$

$$2.27. y = x^2 + 1, x_0 = 2,05$$

$$2.28. y = \sqrt{2x+1}, x_0 = 4,02 .$$

$$2.29. y = x^3, x_0 = 4,05 .$$

$$2.30. y = \sqrt[3]{3x+2}, x_0 = 2,06 .$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 41

Тема 11

Похідні вищих порядків. Обчислення границь за правилом Лопіталя.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 5. п.6 с. 204, п.7.5 с. 225
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 196, 198 (с. 204-205), №№ 253, 254, 255 (с. 226)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 204, 205 (с. 206), №№ 260, 261, 267 (с. 227-228)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 11. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти похідну вказаного порядку.

1.1. $y = x \cos x^2, \quad y'' - ?$

1.2. $y = (5x - 1) \ln^2 x, \quad y'' - ?$

1.3. $y = (4x^3 + 5) e^{2x+1}, \quad y'' - ?$

1.4. $y = (x^2 + 3) \ln(x - 3), \quad y'' - ?$

1.5. $y = \frac{\sin 2x}{x}, \quad y'' - ?$

1.6. $y = (4x + 3) 2^{-x}, \quad y'' - ?$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 42

$$1.7. y = x \ln(1-3x), \quad y'' - ?$$

$$1.8. y = \frac{\log_3 x}{x^2}, \quad y'' - ?$$

$$1.9. y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}, \quad y'' - ?$$

$$1.10. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y'' - ?$$

$$1.11. y = x^2 \cos x, \quad y'' - ?$$

$$1.12. y = (5x^3 - 1) \ln x, \quad y'' - ?$$

$$1.13. y = (2x^2 - 3)e^{2x}, \quad y'' - ?$$

$$1.14. y = (x^2 + 3) \sin x, \quad y'' - ?$$

$$1.15. y = \frac{\cos 3x}{x}, \quad y'' - ?$$

$$1.16. y = x^3 \sin x, \quad y'' - ?$$

$$1.17. y = (3x^2 - 4) \ln x, \quad y'' - ?$$

$$1.18. y = x^3 e^{2x+1}, \quad y'' - ?$$

$$1.19. y = (x^2 + 3) \cos x, \quad y'' - ?$$

$$1.20. y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad y'' - ?$$

$$1.21. y = 5x 2^{3x-1}, \quad y'' - ?$$

$$1.22. y = x^4 \ln x, \quad y'' - ?$$

$$1.23. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y'' - ?$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 43</i>

$$1.24. y = \frac{\cos(x-2)}{x-2}, \quad y'' - ?$$

$$1.25. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y'' - ?$$

$$1.26. y = x^2 \ln x, \quad y'' - ?$$

$$1.27. y = (5x^3 - 1)e^x, \quad y'' - ?$$

$$1.28. y = 4x^3 e^{2x}, \quad y'' - ?$$

$$1.29. y = x^2 \sin x, \quad y'' - ?$$

$$1.30. y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad y'' - ?$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 44

Тема 12

Дотична та нормаль до кривої. Асимптоти.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття.
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 5. п.7.1 с. 207; з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: пункт 1.2, с. 198.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 208, 210 (с. 207-208); з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: приклади 1, 2 на с. 199-200.
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 216, 217, 218 (с. 209)
5. Опрацювати теоретичний матеріал з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: пункт 6.5 с. 263-264.
6. Розглянути приклади з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: приклади на с. 264-265.
7. Виконати самостійно вправу з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: № 25 с. 267
8. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 12. Номер варіанта – номер у списку групи)

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 45

Завдання 1. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .

$$1.1. y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$1.2. y = \frac{x}{x^2+1}, \quad x_0 = -2.$$

$$1.3. y = 2x + \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1.$$

$$1.4. y = \frac{x^2+3}{x-4}, \quad x_0 = 2.$$

$$1.5. y = \frac{x^2-3x+6}{x^2}, \quad x_0 = 3.$$

$$1.6. y = \frac{x^3+2}{x^3-2}, \quad x_0 = 2.$$

$$1.7. y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4.$$

$$1.8. y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8.$$

$$1.9. y = 8\sqrt[3]{x} - 70, \quad x_0 = 16.$$

$$1.10. y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4.$$

$$1.11. y = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad x_0 = -3.$$

$$1.12. y = \frac{5x-x^2}{3-2x}, \quad x_0 = -1$$

$$1.13. y = \frac{x^3}{2+x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$1.14. y = 5x + \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 2.$$

$$1.15. y = \frac{5x+6}{x^2}, \quad x_0 = -1.$$

$$1.16. y = \frac{1+3x}{5+x^2}, \quad x_0 = -1.$$

$$1.17. y = \frac{x^2}{x+1}, \quad x_0 = -2.$$

$$1.18. y = \frac{x^2-4}{x}, \quad x_0 = 1.$$

$$1.19. y = \frac{x+3}{x^2-3}, \quad x_0 = 2.$$

$$1.20. y = \frac{x^2-3}{x^2}, \quad x_0 = 2.$$

$$1.21. y = \frac{x^3+1}{x^3-1}, \quad x_0 = -2$$

$$1.22. y = x^2 + 2\sqrt{x} + 4, \quad x_0 = 1.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 46</i>

$$1.23. y = \sqrt[4]{x^3} - 3, \quad x_0 = 1$$

$$1.24. y = 3\sqrt[3]{x} - 2, \quad x_0 = 27.$$

$$1.25. y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}, \quad x_0 = 1$$

$$1.26. y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = -1.$$

$$1.27. y = \frac{5 - x^2}{3 + x}, \quad x_0 = -1$$

$$1.28. y = \frac{5x}{4 + x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$1.29. y = \frac{4 + x^2}{x}, \quad x_0 = 2.$$

$$1.30. y = \frac{9 + x^2}{x^2}, \quad x_0 = -1.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 47

Тема 13

Застосування похідної для дослідження функції

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: Розділ 5. п.7.2 с. 210, п.7.3 с. 214, п.7.4, с. 221-222.
3. Розглянути приклади з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 220, 223, 225 (с. 210-213), №№ 232, 234 (с. 214-218), №№ 242, 243 (с. 222-223)
4. Виконати самостійно вправи з посібника «Практикум з вищої математики» за редакцією Ковалю В.О.: №№ 229, 231 (с. 213), №№ 238, 239 (с. 221), № 251 (с. 225)
5. Виконати Індивідуальне Завдання (**ІЗ 13**. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

$$1.1. y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3, \quad x \in [1, 3].$$

$$1.2. y = (x+2) \cdot e^{1-x}, \quad x \in [-2, 2].$$

$$1.3. y = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x \in [0, 3].$$

$$1.4. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}, \quad x \in [1, 2].$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 48

$$1.5. y = (x-1) \cdot e^x, \quad x \in [0, 3].$$

$$1.6. y = x \cdot \ln x, \quad x \in \left[\frac{1}{e^2}, 1 \right].$$

$$1.7. y = e^{4x-x^2}, \quad x \in [1, 3].$$

$$1.8. y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [-1, 3].$$

$$1.9. y = x^3 + 6x - 4, \quad x \in [-2, 2].$$

$$1.10. y = x^3 \cdot e^{1+x}, \quad x \in [-4, 0].$$

$$1.11. y = \frac{x}{9-x^2}, \quad x \in [-2, 2].$$

$$1.12. y = 2\sqrt{x} - x, \quad x \in [0, 4].$$

$$1.13. y = x - 4\sqrt{x} + 5, \quad x \in [1, 9].$$

$$1.14. y = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right].$$

$$1.15. y = \frac{x-1}{x+2}, \quad x \in [0, 4].$$

$$1.16. y = \frac{x^5 - 8}{x^4}, \quad [-3; -1]$$

$$1.17. y = x^3 \cdot e^{1+x}, \quad [-4; 0]$$

$$1.18. y = e^{6x-x^2}, \quad [-3; 3]$$

$$1.19. y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad [-1; 2]$$

$$1.20. y = 108x - x^4, \quad [-1; 4]$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 49</i>

$$1.21. y = (x-2) \cdot e^x, \quad [-2; 1]$$

$$1.22. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \quad \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$$

$$1.23. y = \frac{x^3}{x^2-x+1}, \quad [-1; 1]$$

$$1.24. y = 4 - e^{-x^2}, \quad [0; 1]$$

$$1.25. y = \frac{1+\ln x}{x}, \quad \left[\frac{1}{e}; e\right]$$

$$1.26. y = \frac{e^{2x}+1}{e^x}, \quad [-1; 2]$$

$$1.27. y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}, \quad [-1; 3]$$

$$1.28. y = \frac{\ln x}{x}, \quad [1; 4]$$

$$1.29. y = (3-x) \cdot e^{-x}, \quad [1; 5]$$

$$1.30. y = \frac{x^4}{4-6x^3+7}, \quad [16; 20]$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 50

Тема 14

Загальне дослідження функції.

План роботи

1. Опрацювати матеріал лекції за темою заняття
2. Опрацювати теоретичний матеріал з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: пункт 6.6, с. 265
3. Розглянути приклад з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: на с. 265-266
4. Виконати самостійно вправу з навчального посібника «Вища математика» Дубовик В. П., Юрик І. І.: № 27 а) на с. 267
5. Виконати Індивідуальне Завдання (ІЗ 14. Номер варіанта – номер у списку групи)

Завдання 1. Виконати загальне дослідження функції.

$$1.1. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$$1.2. y = \frac{5x}{4-x^2}$$

$$1.3. y = \frac{x^2-5}{x-3}$$

$$1.4. y = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

$$1.5. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

$$1.6. y = \frac{3x+6}{x^2-4}$$

$$1.7. y = \frac{x^3}{x^2+1}$$

$$1.8. y = \frac{4x}{4+x^2}$$

$$1.9. y = \frac{5x}{4-x^2}$$

$$1.10. y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 70 / 51</i>

$$1.11. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$$

$$1.12. y = \frac{3x^2}{8-x^3}$$

$$1.13. y = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$$

$$1.14. y = \frac{x^4}{x^3-1}$$

$$1.15. y = \frac{x^3}{x^2-x+1}$$

$$1.16. y = \frac{3x}{x^2-1}$$

$$1.17. y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

$$1.18. y = \frac{x^3}{x^2-x+1}$$

$$1.19. y = \frac{x^2+6}{x^2+1}$$

$$1.20. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

$$1.21. y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$1.22. y = \frac{4-2x}{1-x^2}$$

$$1.23. y = \frac{x^5}{x^4-1}$$

$$1.24. y = \frac{x^2}{4x^2-1}$$

$$1.25. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$1.26. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$$

$$1.27. y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$$

$$1.28. y = (x^2-1)^3$$

$$1.29. y = \frac{5x}{1+x^2}$$

$$1.30. y = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 52

Приклади розв'язань завдань

Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною *схемою*.

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y'' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки (x)	
y'	
y''	
y	

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 53

а) Використовуючи y' з'ясуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи y'' , досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

6. Будуємо графік функції.

Приклад 1. Виконати загальне дослідження функції

$$y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

1 а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = 0, \text{ звідки}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 54

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

2 Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b, \quad (1)$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx), \quad (2)$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \infty. \quad (3)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 55

Оскільки функція елементарна і область визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

3 Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

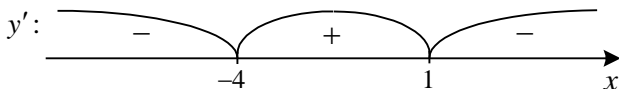
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

4 Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right)' = -\frac{3}{2} - x.$$

Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

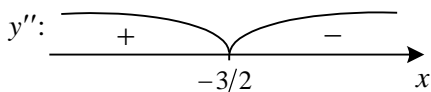
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 56

а) $y'' = 0: -\frac{3}{2} - x = 0, x = -\frac{3}{2}$.

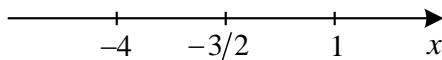
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x = -\frac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



5 Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty; -4)$, $(-4; -1,5)$, $(-1,5; 1)$, $(1; +\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'' , використовуємо результати досліджень у пунктах **3** та **4**.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 57

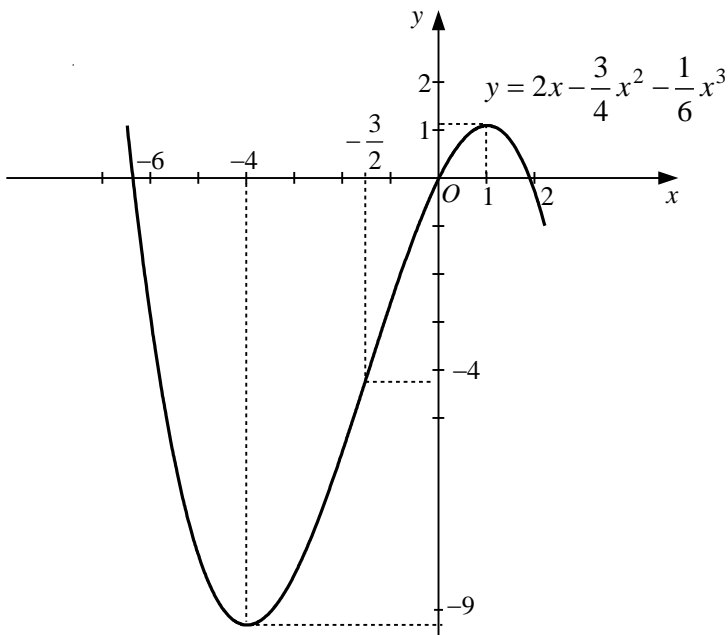
x	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; -1,5)$	$-1,5$	$(-1,5; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\searrow \cup$	min $y(-4) = -9\frac{1}{3}$	$\nearrow \cup$	т. п. $y(-1,5) = -4\frac{1}{8}$	$\nearrow \cap$	max $y(1) = 1\frac{1}{12}$	$\searrow \cap$

Позначення:

- \searrow – функція спадає;
- \nearrow – функція зростає;
- \cup – графік угнутий;
- \cap – графік опуклий;
- т.п. – точка перегину графіка.

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів 1, 2, 5.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 58



Приклад 2. Виконати загальне дослідження функції $y = \frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2}$.

1 а) Область визначення функції – $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

б) Графік перетинає вісь Oy у точці $y = -0,5$.

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю Ox :

$$\frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2} = 0, \quad \frac{2x^4 - x^3 - 1}{2(x^3 + 1)} = 0.$$

Звідси маємо рівняння $2x^4 - x^3 - 1 = 0$. Розклавши ліву частину на множники

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 59

$$2x^4 - x^3 - 1 = (x^4 - x^3) + (x^4 - 1) = x^3(x-1) + (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(2x^3 + x^2 + x + 1),$$

знаходимо корінь $x=1$. Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння $2x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі $(-1; 0)$. Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов'язане з використанням громіздких формул, то обмежимося вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю $Oy - x = 1$.

г) Функція ні парна, ні непарна.

2 Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^3+1} - \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^3}} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{1+0} - 0 = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x(x^3+1)}{x^3+1} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^3+1} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}} - \frac{1}{2} = \frac{0}{0+1} - \frac{1}{2} = -0,5;$$

підставляємо k та b у формулу (1): $y = 1 \cdot x + (-0,5) = x - 0,5$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 60

Отже, графік функції має похилу асимптоту $y = x - 0,5$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

б) Оскільки точка $x_0 = -1$ не належить області визначення D заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 1) = 0$, а

$\lim_{x \rightarrow -1} x^4 = 1 \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2} \right) = \infty.$$

Звідси випливає, що пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою.

3 Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2} \right)' = \left(\frac{x^4}{x^3 + 1} \right)' - \left(\frac{1}{2} \right)' = \frac{(x^4)'(x^3 + 1) - x^4(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} - 0 = \\ &= \frac{4x^3(x^3 + 1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Критичні точки 1-го роду:

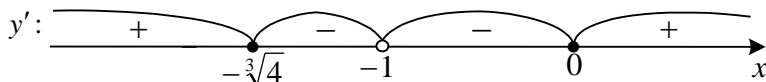
а) $y' = 0$: $\frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2} = 0$, $x^3(x^3 + 4) = 0$, звідки $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{4}$;

б) y' не існує: \emptyset .

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -\sqrt[3]{4} \approx -1,59$ та $x = 0$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 61

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах (точка $x = -1$ виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад, $y'(-2) = \frac{32}{49} > 0$, $y'(-\sqrt[3]{2}) = -4 < 0$, $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{31}{49} < 0$,

$y'(1) = 1 > 0$).

4 Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$\begin{aligned}
 y'' &= \left(\frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2} \right)' = \frac{(x^6 + 4x^3)'(x^3 + 1)^2 - (x^6 + 4x^3)((x^3 + 1)^2)'}{\left((x^3 + 1)^2 \right)^2} = \\
 &= \frac{(6x^5 + 12x^2)(x^3 + 1)^2 - (x^6 + 4x^3)(x^3 + 1)3x^2}{(x^3 + 1)^4} = \\
 &= \frac{6x^2(x^3 + 1)[(x^3 + 2)(x^3 + 1) - (x^6 + 4x^3)]}{(x^3 + 1)^4} = \\
 &= \frac{6x^2(x^6 + 3x^3 + 2 - x^6 - 4x^3)}{(x^3 + 1)^3} = \frac{6x^2(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^3}.
 \end{aligned}$$

Критичні точки 2-го роду:

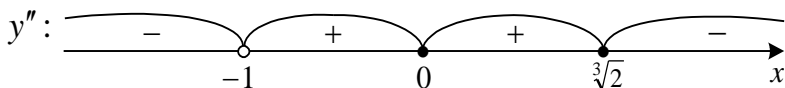
а) $y'' = 0$: $\frac{6x^2(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^3} = 0$, $x^2(2 - x^3) = 0$, звідки $x = 0$, $x = \sqrt[3]{2}$;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 62

б) y'' не існує: \emptyset .

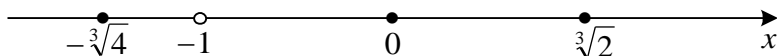
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду $x = 0$ та $x = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки -2 , $-\frac{1}{2}$, 1 , 2).

5 Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п'ять інтервалів: $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$, $(-\sqrt[3]{4}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, \sqrt[3]{2})$, $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

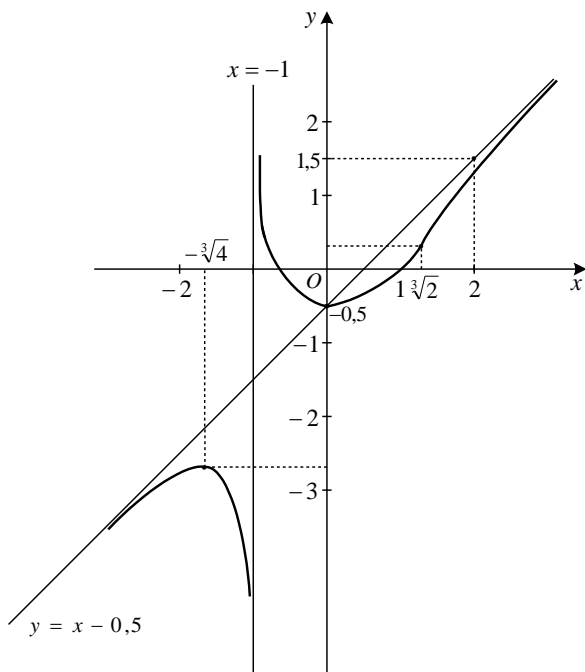
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРЬСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 63

Заповнимо таблицю.

x	$(-\infty; -\sqrt[3]{4})$	$-\sqrt[3]{4}$	$(-\sqrt[3]{4}; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}; +\infty)$
y'	+	0	-	-	0	+		+
y''	-		-	+	0	+	0	-
y	$\nearrow \cap$	max $y(-\sqrt[3]{4}) \approx -2,62$	$\searrow \cap$	$\searrow \cup$	min $y(0) = -0,5$	$\nearrow \cup$	т.п. $y(\sqrt[3]{2}) \approx 0,34$	$\nearrow \cap$

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів **1**, **2**, **5**.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 64



Приклад 3. Виконати загальне дослідження функції $y = \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}$.

1 а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 65

$$y(0) = \sqrt[3]{0^2} \cdot e^{\frac{2 \cdot 0}{3}} = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox Слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x^2} = 0. \text{ Звідси } x = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

2 Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) для знаходження похилих асимптот розглянемо окремо два випадки: $x \rightarrow -\infty$ та $x \rightarrow +\infty$:

Якщо $x \rightarrow +\infty$, маємо за формулами (2):

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідіає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 66

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{2x}{3}} \right)'}{\left(x^{\frac{1}{3}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2x}{3}} = \infty.
\end{aligned}$$

отже, похилих асимптот при $x \rightarrow +\infty$ графік функції не має.

Якщо $x \rightarrow -\infty$, маємо

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0.$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-\frac{2x}{3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2} \right)'}{\left(e^{-\frac{2x}{3}} \right)'} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{2}{3} e^{-\frac{2x}{3}}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0.
\end{aligned}$$

Отже, за формулою (1) при $x \rightarrow -\infty$ похилою асимптотою є пряма $y = 0$.

б) Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

3 Знайдемо похідну 1-го порядку:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 67

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} \right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot e^{\frac{2x}{3}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = \frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}$$

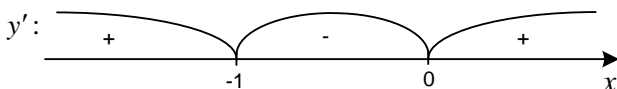
Критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0$: $2e^{\frac{2x}{3}}(1+x) = 0$, або $1+x = 0$, звідки $x = -1$.

б) y' не існує: $\sqrt[3]{x} = 0$, звідки $x = 0$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -1$, $x = 0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) \approx 0,03 > 0$, $y'(-0,5) \approx -0,3 < 0$, $y'(2) \approx 6,02 > 0$).

4 Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{e^{\frac{2x}{3}}(4x^2 + 8x - 2)}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $4x^2 + 8x - 2 = 0$.

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right); \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1.$$

б) y'' не існує: $\sqrt[3]{x^4} = 0$, звідки $x = 0$.

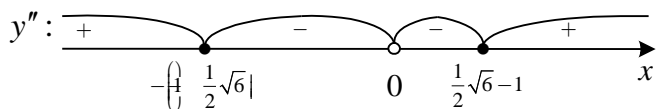
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 68

Отже, маємо три критичних точки 2-го роду

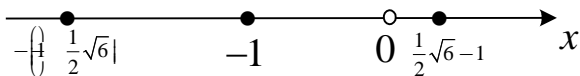
$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx -2,2; \quad x_2 = 0,$$

$$x_3 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1 \approx 0,2.$$

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



5 Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п'ять інтервалів: $\left(-\infty; -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$, $\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$, $(-1; 0)$, $\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1; +\infty\right)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'' , використовуємо результати досліджень у пунктах **3** та **4**.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 69

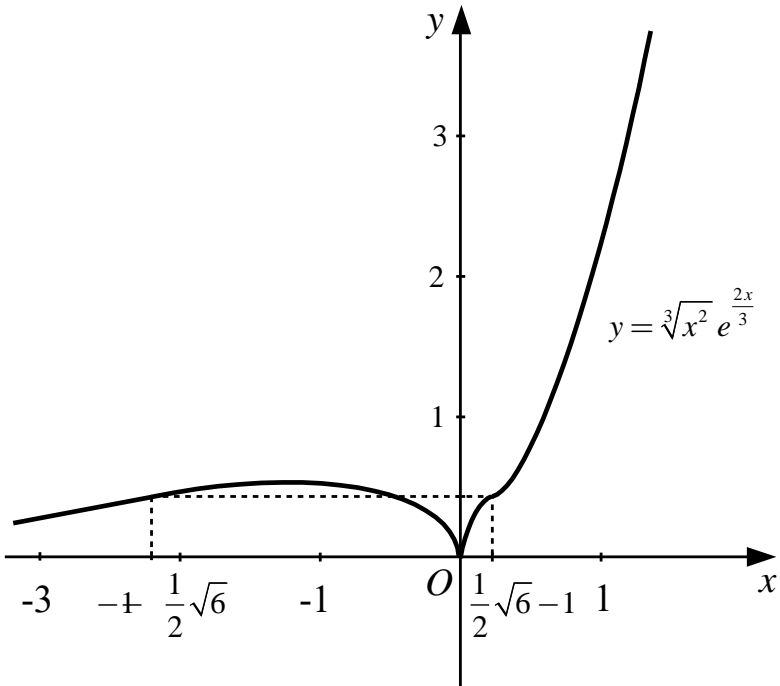
x	$\left(-\infty; -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$	$-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$	-1
y'	+		+	0
y''	+	0	-	
y	$\nearrow \cup$	т.п. $y\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx 0,4$	$\nearrow \cap$	max $y(-1) \approx 0,5$

Продовження таблиці

$(-1; 0)$	0	$\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1; +\infty\right)$
-	не існує	+		+
-	не існує	-	0	+
$\searrow \cap$	min $y(0) = 0$	$\nearrow \cap$	т.п. $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right) \approx 0,4$	$\nearrow \cup$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 70

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів 1, 2, 5.



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк 70 / 71

Корисні посилання

1. Бібліотека Державного університету «Житомирська політехніка». <https://lib.ztu.edu.ua/>

2. Державний університет "Житомирська політехніка" - Освітній портал <https://learn.ztu.edu.ua/>

3. Практикум з вищої математики: вч. посібн. / За ред. В.О. Ковалю. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 448с.

https://learn.ztu.edu.ua/pluginfile.php/27959/mod_resource/content/0/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC%20%D0%B7%20%D0%B2%D0%B8%D1%89%D0%BE%D1%97%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8.pdf

4. Житомирська обласна універсальна наукова бібліотека ім. Олега Ольжича (<http://www.lib.zt.ua/>, 10014, м. Житомир, Новий бульвар, (0412) 37-84-33).

5. Національна бібліотека України імені В.І. Вернадського (<http://www.nbuv.gov.ua/>, Київ, просп. Голосіївський, 3).