

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА 2

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ
ЗМІННОЇ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ
БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

РЯДИ

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

Частина 2

**Інтегральне числення функцій однієї змінної
Диференціальні рівняння
Диференціальне числення функцій багатьох змінних
Ряди**

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 1 від 6.09.99



УДК 51
341

Колектив авторів:

В.І. Беспальчук, Р.М. Головня, В.В. Івахненкова, Р.Б. Кондратюк,
С.П. Онуфрійчук, Н.В. Письменчук, О.І. Прилипка

341 **Збірник задач з математики.** Частина 2. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Ряди: у 3-х частинах. - Ч. 2. – Житомир: ЖІТІ, - 2000. – 176 с.

Збірник задач складено згідно з діючими програмами з вищої математики для інженерно-технічних та економічних спеціальностей вузів.

Друга частина збірника містить задачі з таких розділів вищої математики: інтегральне числення функцій однієї змінної (укладач В.В. Івахненкова), диференціальне числення функцій багатьох змінних (укладач В.І. Беспальчук), диференціальні рівняння (укладач О.І. Прилипка), ряди та їх застосування (укладач В.І. Беспальчук).

Іл. 9.

©В.І. Беспальчук, 2001
©Р.М. Головня, 2001
©В.В. Івахненкова, 2001
©Р.Б. Кондратюк, 2001
©С.П. Онуфрійчук, 2001
©Н.В. Письменчук, 2001
©О.І. Прилипка, 2001

VI. Інтегральне числення функцій однієї змінної

§1. Невизначений інтеграл

Найпростіші прийоми інтегрування

В задачах 6.1-6.27, використовуючи основну таблицю інтегралів і найпростіші правила інтегрування, знайти інтеграли.

$$6.1. \int \sqrt{x} dx.$$

$$6.2. \int \sqrt[n]{x^n} dx.$$

$$6.3. \int \frac{dx}{x^2}.$$

$$6.4. \int 10^x dx.$$

$$6.5. \int a^x e^x dx.$$

$$6.6. \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

$$6.7. \int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}.$$

$$6.8. \int 3,4x^{-0,17} dx.$$

$$6.9. \int (1-2u) du.$$

$$6.10. \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx.$$

$$6.11. \int \frac{\sqrt{x}-x^3 e^x+x^2}{x^3} dx$$

$$6.12. \int (2x^{-1,2}+3x^{-0,8}-5x^{0,38}) dx.$$

$$6.13. \int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dx.$$

$$6.14. \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$6.15. \int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$6.16. \int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$6.17. \int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}.$$

$$6.18. \int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx.$$

$$6.19. \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$$

$$6.20. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$$

$$6.21. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$6.22. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$6.23. \int 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$6.24. \int \frac{(1+2x^2) dx}{x^2(1+x^2)}.$$

$$6.25. \int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}.$$

$$6.26. \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}.$$

$$6.27. \int (\arcsin x + \arccos x) dx.$$

В задачах 6.28-6.105 знайти інтеграли, використовуючи теорему про інваріантність формул інтегрування.

$$6.28. \int \sin x d(\sin x).$$

$$6.29. \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x).$$

$$6.30. \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- 6.31. $\int (x+1)^{15} dx$. 6.32. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. 6.33. $\int \frac{dx}{(a+bx)^c}$ ($c \neq 1$).
- 6.34. $\int \sqrt[3]{(8-3x)^6} dx$. 6.35. $\int \sqrt{8-2x} dx$. 6.36. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} dx$.
- 6.37. $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$. 6.38. $\int x\sqrt{1-x^2} dx$. 6.39. $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x^3+2} dx$.
- 6.40. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$. 6.41. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$. 6.42. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.
- 6.43. $\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$. 6.44. $\int \sin^3 x \cos x dx$. 6.45. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.
- 6.46. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. 6.47. $\int \cos^3 x \sin 2x dx$. 6.48. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.
- 6.49. $\int \frac{(\arctg x)^2}{1+x^2} dx$. 6.50. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$.
- 6.51. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\tg x}}$. 6.52. $\int \cos 3x d(3x)$.
- 6.53. $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}$. 6.54. $\int \cos 3x dx$.
- 6.55. $\int (\cos \alpha - \cos 2x) dx$. 6.56. $\int \sin(2x-3) dx$.
- 6.57. $\int \cos(1-2x) dx$. 6.58. $\int \left[\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-2} dx$.
- 6.59. $\int e^x \sin(e^x) dx$. 6.60. $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$.
- 6.61. $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}$. 6.62. $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$. 6.63. $\int \frac{dx}{2x-1}$.
- 6.64. $\int \frac{dx}{cx+m}$. 6.65. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$. 6.66. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$.
- 6.67. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$. 6.68. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+a^2}$. 6.69. $\int \tg x dx$.
- 6.70. $\int \ctg x dx$. 6.71. $\int \tg 3x dx$. 6.72. $\int \ctg(2x+1) dx$.
- 6.73. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$. 6.74. $\int \frac{dx}{x \ln x}$. 6.75. $\int \frac{(\ln x)^m}{x} dx$.

§1. Невизначений інтеграл

- 6.76. $\int e^{\sin x} d(\sin x)$. 6.77. $\int e^{\sin x} \cos x dx$. 6.78. $\int a^{3x} dx$.
- 6.79. $\int a^{-x} dx$. 6.80. $\int e^{-3x+1} dx$. 6.81. $\int e^{x^2} x dx$.
- 6.82. $\int e^{-x^3} x^2 dx$. 6.83. $\int \frac{d(x/3)}{\sqrt{1-(x/3)^2}}$. 6.84. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.
- 6.85. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. 6.86. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 6.87. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$.
- 6.88. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. 6.89. $\int \frac{xdx}{x^4+1}$. 6.90. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^4}}$.
- 6.91. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$. 6.92. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$. 6.93. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$.
- 6.94. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$. 6.95. $\int \frac{\cos \alpha d\alpha}{a^2+\sin^2 \alpha}$. 6.96. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$.
- 6.97. $\int (e^x+1)^3 dx$. 6.98. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 6.99. $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$.
- 6.100. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$. 6.101. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx$.
- 6.102. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$. 6.103. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$.
- 6.104. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 6.105. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.

В задачах 6.106-6.115 знайти інтеграли за допомогою виділення цілої частини підінтегрального дробу.

- 6.106. $\int \frac{x}{x+4} dx$. 6.107. $\int \frac{x}{2x+1} dx$. 6.108. $\int \frac{Ax}{a+bx} dx$.
- 6.109. $\int \frac{3+x}{3-x} dx$. 6.110. $\int \frac{(2x-1)}{x-2} dx$. 6.111. $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$.
- 6.112. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1} dx$. 6.113. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$. 6.114. $\int \frac{x^4}{1-x} dx$.
- 6.115. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$.

В задачах 6.116-6.132 знайти інтеграли, використовуючи розклад підінтегрального виразу та виділення повного квадрату.

$$6.116. \int \frac{dx}{x(x-1)}. \quad 6.117. \int \frac{dx}{x(x+1)} dx. \quad 6.118. \int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}.$$

$$6.119. \int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}. \quad 6.120. \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx. \quad 6.121. \int \frac{dx}{x^2-7x+10}.$$

$$6.122. \int \frac{dx}{x^2+3x-10}. \quad 6.123. \int \frac{dx}{4x^2-9}. \quad 6.124. \int \frac{dx}{2-3x^2}.$$

$$6.125. \int \frac{dx}{(x-1)^2+4}. \quad 6.126. \int \frac{dx}{x^2+2x+3}. \quad 6.127. \int \frac{dx}{x-x^2-2,5}.$$

$$6.128. \int \frac{dx}{4x^2+4x+5}. \quad 6.129. \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}.$$

$$6.130. \int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}. \quad 6.131. \int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$$

$$6.132. \int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$$

В задачах 6.133-6.156 знайти інтеграли, використовуючи формули тригонометрії для перетворення підінтегрального виразу.

$$6.133. \int \cos^2 x dx. \quad 6.134. \int \sin^2 x dx. \quad 6.135. \int \frac{dx}{1-\cos x}.$$

$$6.136. \int \frac{dx}{1+\sin x}. \quad 6.137. \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx. \quad 6.138. \int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx.$$

$$6.139. \int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) dx. \quad 6.140. \int \frac{\cos 2x dx}{1+\sin x \cos x}.$$

$$6.141. \int \cos x \sin 3x dx. \quad 6.142. \int \cos 2x \cos 3x dx.$$

$$6.143. \int \sin 2x \sin 5x dx. \quad 6.144. \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$$

$$6.145. \int \frac{dx}{\cos x}. \quad 6.146. \int \frac{1-\sin x}{\cos x} dx. \quad 6.147. \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx.$$

$$6.148. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx. \quad 6.149. \int \frac{\sin^3 \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} d\alpha. \quad 6.150. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$6.151. \int \cos^3 x dx. \quad 6.152. \int \operatorname{tg}^4 x dx. \quad 6.153. \int \sin^5 x dx.$$

§1. Невизначений інтеграл

6.154. $\int \sin^4 x dx$. 6.155. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$. 6.156. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

Основні методи інтегрування

Інтегрування частинами

В задачах 6.157-6.192 знайти інтеграли.

6.157. $\int x \sin 2x dx$. 6.158. $\int x \cos x dx$. 6.159. $\int x e^{-x} dx$.
 6.160. $\int x 3^x dx$. 6.161. $\int x^n \ln x dx$ ($n \neq -1$). 6.162. $\int x \arctg x dx$.
 6.163. $\int \arccos x dx$. 6.164. $\int \arctg \sqrt{x} dx$. 6.165. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$.
 6.166. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$. 6.167. $\int x \cdot \cos^2 x dx$. 6.168. $\int \frac{\operatorname{lg} x}{x^3} dx$.
 6.169. $\int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. 6.170. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$. 6.171. $\int \ln(x^2+1) dx$.
 6.172. $\int x^2 \ln(1+x) dx$. 6.173. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 6.174. $\int x^2 e^{-x} dx$.
 6.175. $\int x^3 e^x dx$. 6.176. $\int x^2 a^x dx$. 6.177. $\int x^3 \sin x dx$.
 6.178. $\int x^2 \cos^2 x dx$. 6.179. $\int \ln^2 x dx$. 6.180. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$.
 6.181. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx$. 6.182. $\int (\arcsin x)^2 dx$.
 6.183. $\int (\arctg x)^2 x dx$. 6.184. $\int e^x \sin x dx$.
 6.185. $\int e^{3x} (\sin 2x - \cos 2x) dx$. 6.186. $\int e^{ax} \cos n x dx$.
 6.187. $\int \sin \ln x dx$. 6.188. $\int \cos \ln x dx$.
 6.189*. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 6.190.* $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$.
 6.191. $\int \frac{x^2 e^x dx}{(x+2)^2}$. 6.192. $\int x^2 e^x \sin x dx$.

Заміна змінної

В задачах 6.193-6.228 знайти інтеграли.

- 6.193. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (підстановка $x+1=z^2$).
- 6.194. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$.
- 6.195. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$.
- 6.196. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.
- 6.197. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$.
- 6.198. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.
- 6.199. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$.
- 6.200. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$.
- 6.201. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.
- 6.202. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b+m}}$.
- 6.203. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (підстановка $x=z^6$).
- 6.204. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$.
- 6.205. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.
- 6.206. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} dx$.
- 6.207. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (підстановка $e^x+1=z^4$).
- 6.208. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.
- 6.209. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$.
- 6.210. $\int \sqrt{1+\cos^2 x} \sin 2x \cos 2x dx$.
- 6.211. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx$.
- 6.212. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$.
- 6.213. $\int \frac{x^5 dx}{(x^2-4)^2}$.
- 6.214. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+a^2}}$ (підстановка $x=\frac{1}{z}$, або $x=a \operatorname{tg} z$, або $x=a \operatorname{sh} z$).
- 6.215. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (підстановка $x=a \sin z$).
- 6.216. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (підстановка $x=\frac{1}{z}$, або $x=\frac{a}{\cos z}$, або

 $x=a \cdot \operatorname{ch} z$).

§1. Невизначений інтеграл

$$6.217. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx .$$

$$6.218. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx .$$

$$6.219. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} .$$

$$6.220. \int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx .$$

$$6.221. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} .$$

$$6.222. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} .$$

$$6.223. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} .$$

$$6.224. \int x^2\sqrt{4-x^2} dx .$$

$$6.225. \int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}} .$$

$$6.226. \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{dx}{x^2} .$$

$$6.227. \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} .$$

$$6.228. \int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)} .$$

В задачах 6.229-6.233 знайти інтеграли, використовуючи спочатку заміну змінної, а потім інтегрування частинами.

$$6.229. \int e^{\sqrt{x}} dx .$$

$$6.230. \int \sin^3\sqrt{x} dx .$$

$$6.231. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx .$$

$$6.232. \int \frac{x^2 \arctg x}{1+x^2} dx .$$

$$6.233. \int \frac{\arctg x}{x^2(1+x^2)} dx .$$

Різні задачі

В задачах 6.234-6.334 знайти інтеграли.

$$6.234. \int (x+1)\sqrt{x^2+2x} dx .$$

$$6.235. \int (1+e^{3x})^2 e^{3x} dx .$$

$$6.236. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx .$$

$$6.237. \int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx .$$

$$6.238. \int \sqrt{1-e^x} e^x dx .$$

$$6.239. \int x \cos x^2 dx .$$

$$6.240. \int (2-3x^{4/3})x^{1/3} dx .$$

$$6.241. \int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6} dx .$$

- 6.242. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^{3/2}}$. 6.243. $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$.
- 6.244. $\int \frac{dx}{e^x \sqrt{1-e^{-2x}}}$. 6.245. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
- 6.246. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}} dx$. 6.247. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.
- 6.248. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$. 6.249. $\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}$.
- 6.250. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$. 6.251. $\int \frac{(\arctg x)^n}{1+x^2} dx$.
- 6.252. $\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}$. 6.253. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$.
- 6.254. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^6 x}$. 6.255. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} \sec^4 x dx$. 6.256. $\int (1-\operatorname{tg} 3x)^2 dx$.
- 6.257. $\int \frac{x^3 dx}{x+1}$. 6.258. $\int \frac{xdx}{(x-1)^3}$. 6.259. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$.
- 6.260. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$. 6.261. $\int x \cdot \sqrt{a+x} dx$.
- 6.262. $\int (\sqrt{\sin x} + \cos x)^2 dx$. 6.263. $\int a^{mx} b^{nx} dx$.
- 6.264. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$. 6.265. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.
- 6.266. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$. 6.267. $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.
- 6.268. $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}$. 6.269. $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$.
- 6.270. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. 6.271. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$.
- 6.272. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx$. 6.273. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} dx$.
- 6.274. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}$. 6.275. $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

§1. Невизначений інтеграл

- 6.276. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 - 11x + 2}}$. 6.277. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2x + 3}}$.
- 6.278. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}} dx$. 6.279. $\int \arctg x dx$.
- 6.280. $\int x \sin x \cos x dx$. 6.281. $\int x^2 \cos \omega x dx$.
- 6.282. $\int e^{2x} x^3 dx$. 6.283. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$. 6.284. $\int \frac{\text{ctg} x}{\ln \sin x} dx$.
- 6.285. $\int \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}$. 6.286. $\int \frac{\cos^2 3x}{\sin 3x} dx$. 6.287. $\int \frac{dx}{1 - \sin 3x}$.
- 6.288. $\int \frac{\sin 2x dx}{4 - \cos^2 2x}$. 6.289. $\int \frac{dx}{e^x + 1}$. 6.290. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$.
- 6.291. $\int e^{e^x} dx$. 6.292. $\int e^{2x^2 + \ln x} dx$.
- 6.293. $\int \frac{3 + x^3}{\sqrt{2 + 2x^2}} dx$. 6.294. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.
- 6.295. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$. 6.296. $\int e^x \sin^2 x dx$.
- 6.297. $\int \frac{(1 + \text{tg} x) dx}{\sin 2x}$. 6.298. $\int \frac{1 - \text{tg} x}{1 + \text{tg} x} dx$.
- 6.299. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi}$. 6.300. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}$.
- 6.301. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \sin^2 x)} dx$. 6.302. $\int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} dx$.
- 6.303. $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx$. 6.304. $\int x^3 e^{x^2} dx$.
- 6.305. $\int e^{-x^2} x^5 dx$. 6.306. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}$. 6.307. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$.
- 6.308. $\int \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)^5}}{x} dx$. 6.309. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 + 4}}$. 6.310. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x^4} dx$.
- 6.311. $\int \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x^6} dx$. 6.312. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 3}}$. 6.313. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}$.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{6.314.} \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx. & \mathbf{6.315.} \int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}. & \mathbf{6.316} \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}. \\
 \mathbf{6.317.} \int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx. & \mathbf{6.318*} \int \frac{x^7 dx}{(1-x^2)^5}. & \mathbf{6.319.} \int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}. \\
 \mathbf{6.320.} \int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}} dx. & \mathbf{6.321.} \int \frac{xdx}{(1-x^4)^{3/2}}. & \mathbf{6.322.} \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^4+4}}. \\
 \mathbf{6.323.} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}. & \mathbf{6.324.} \int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}} dx. & \mathbf{6.325.} \int \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^3}. \\
 \mathbf{6.326.} \int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \arctg x dx. & \mathbf{6.327.} \int \frac{e^x(1+e^x)dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}. & \mathbf{6.328.} \int \sqrt{e^x-1} dx. \\
 \mathbf{6.329*} \int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)} dx. & & \mathbf{6.330.} \int \frac{dx}{x^6+x^4}. \\
 \mathbf{6.331.} \int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx. & & \mathbf{6.332.} \int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx. \\
 \mathbf{6.333.} \int \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^{14} x}} dx. & & \mathbf{6.334.} \int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\sin 2x}}.
 \end{array}$$

Основні класи інтегровних функцій

Дробово-раціональні функції

В задачах 6.335-6.390 знайти інтеграли:

1) Знаменник має тільки дійсні різні корені.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{6.335.} \int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}. & \mathbf{6.336.} \int \frac{x dx}{2x^2-3x-2}. \\
 \mathbf{6.337.} \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx. & \mathbf{6.338.} \int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}. \\
 \mathbf{6.339.} \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx. & \mathbf{6.340.} \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx. \\
 \mathbf{6.341.} \int \frac{32x dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}. & \mathbf{6.342.} \int \frac{x dx}{x^4-3x^2+2}. \\
 \mathbf{6.343.} \int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}. & \mathbf{6.344.} \int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x} dx.
 \end{array}$$

2) Знаменник має тільки дійсні корені; деякі корені – кратні.

$$6.345. \int \frac{(x^3 - 3x + 2)dx}{x(x^2 + 2x + 1)}.$$

$$6.346. \int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}.$$

$$6.347. \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}.$$

$$6.348. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$6.349. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} dx.$$

$$6.350. \int \frac{dx}{x^4 - x^2}.$$

$$6.351. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}.$$

$$6.352. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} dx.$$

$$6.353. \int \frac{1}{8} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 dx.$$

$$6.354. \int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2(x^2-1)}.$$

$$6.355. \int \frac{(x^2 - 2x + 3)dx}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)}.$$

$$6.356. \int \frac{(7x^3 - 9)dx}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}.$$

$$6.357. \int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx.$$

$$6.358. \int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3} dx.$$

3) Знаменник має комплексні різні корені.

$$6.359. \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$$

$$6.360. \int \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$6.361. \int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$$

$$6.362. \int \frac{(2x^2 - 3x - 3)dx}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}.$$

$$6.363. \int \frac{(x^4 + 1)dx}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

$$6.364. \int \frac{x^2 dx}{1-x^4}.$$

$$6.365. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}.$$

$$6.366. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2 + 1)}.$$

$$6.367. \int \frac{(3x^2 + x + 3)dx}{(x-1)^3(x^2 + 1)}.$$

$$6.368. \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx.$$

$$6.369. \int \frac{(x^3 - 6)dx}{x^4 + 6x^2 + 8}.$$

$$6.370*. \int \frac{dx}{1+x^4}.$$

4) Знаменник має комплексні різні корені.

$$6.371. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

$$6.372. \int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}.$$

$$6.373. \int \frac{(5x^2 - 12)dx}{(x^2 - 6x + 13)^2}.$$

$$6.374. \int \frac{(x+1)^4 dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}.$$

$$6.375. \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}.$$

$$6.376. \int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)^2}.$$

$$6.377. \int \frac{dx}{(1+x^2)^4}.$$

$$6.378. \int \frac{x^9 dx}{(x^4 - 1)^2}.$$

5) Метод Остроградського.

$$6.379. \int \frac{x^7 + 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

$$6.380. \int \frac{(4x^2 - 8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

$$6.381. \int \frac{x^2 + x + 1}{x^5 - 2x^4 + x^3} dx.$$

$$6.382. \int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$6.383. \int \frac{(x^2 - 1)^2 dx}{(1+x)(1+x^2)^3}.$$

$$6.384. \int \frac{dx}{x^4(x^3 + 1)^2}.$$

$$6.385. \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^3}.$$

$$6.386. \int \frac{(x+2)dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}.$$

$$6.387. \int \frac{x^5 - x^4 - 26x^2 - 24x - 25}{(x^2 + 4x + 5)^2(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$6.388. \int \frac{3x^4 + 4}{x^2(x^2 + 1)^3} dx.$$

$$6.389. \int \frac{5 - 3x + 6x^2 + 5x^3 - x^4}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1} dx.$$

$$6.390. \int \frac{9dx}{5x^2(3 - 2x^2)^3}.$$

Деякі ірраціональні функції

В задачах 6.391-6.422 знайти інтеграли.

1) Функції виду $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \dots\right)$

$$6.391. \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}.$$

$$6.392. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}.$$

$$6.393. \int \frac{xdx}{(x+1)^{1/2} + (x+1)^{1/3}}.$$

$$6.394. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

§1. Невизначений інтеграл

$$6.395. \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx.$$

$$6.397. \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

$$6.399. \int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}.$$

$$6.401. \int \frac{dx}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}.$$

$$6.403. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^3}.$$

$$6.405. \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+4})\sqrt{x}}.$$

$$6.396. \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$$

$$6.398*. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

$$6.400. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}.$$

$$6.402. \int \frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)(1+\sqrt[3]{x+a})} dx.$$

$$6.404. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$6.406. \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$$

2) Функції виду $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$, $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$, $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$

$$6.407. \int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}.$$

$$6.409. \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$6.411. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}.$$

$$6.413. \int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2} dx.$$

$$6.415. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}.$$

$$6.417. \int \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt{x^2+5}}.$$

$$6.408. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}.$$

$$6.410. \int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} dx.$$

$$6.412. \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx.$$

$$6.414. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$$6.416. \int \sqrt{(x^2-1)^3} dx.$$

3) Диференційні біноми $x^m(a + bx^n)^p dx$

$$6.418. \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx. \quad 6.419. \int x^{-1} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx.$$

$$6.420. \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}. \quad 6.421. \int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2} dx.$$

$$6.422. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}. \quad 6.423. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$$

$$6.424. \int \frac{\sqrt{1 - x^4}}{x^5} dx. \quad 6.425. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$6.426. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{x} dx. \quad 6.427. \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 + x^5}}.$$

$$6.428. \int \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x^2} dx. \quad 6.429. \int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1 + x^4}}.$$

$$6.430. \int \sqrt[3]{x(1 - x^2)} dx. \quad 6.431. \int \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} dx.$$

4) Функції виду $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

$$6.432^*. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}. \quad 6.433. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 4x - 4}}.$$

$$6.434. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 2x - 1}}. \quad 6.435. \int \frac{dx}{x \sqrt{2 + x - x^2}}.$$

$$6.436. \int \frac{\sqrt{2x + x^2}}{x^2} dx. \quad 6.437. \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$6.438. \int \frac{dx}{(2x-3) \sqrt{4x - x^2}}. \quad 6.439. \int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx.$$

$$6.440. \int \sqrt{3x^2 - 3x + 1} dx. \quad 6.441. \int \sqrt{1 - 4x - x^2} dx.$$

$$6.442. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}. \quad 6.443. \int \frac{dx}{x^2 (x + \sqrt{1 + x^2})}.$$

§1. Невизначений інтеграл

$$6.444. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$6.445. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$6.446. \int \frac{(2x^2 - 3x) dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

$$6.447. \int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx.$$

$$6.448. \int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

$$6.449. \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

$$6.450. \int \frac{3x^3 - 8x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x - 7}} dx.$$

$$6.451. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

$$6.452. \int \frac{dx}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\sqrt{x^2 + 2x - 3}}.$$

$$6.453. \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2 + x^2} dx.$$

$$6.454. \int \frac{(x-1) dx}{x^2 \sqrt{2x^2 - 2x + 1}}.$$

$$6.455. \int \frac{(2x+3) dx}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 4}}.$$

$$6.456. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 8x + 1}}.$$

$$6.457. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x - x^2 - 5}}.$$

$$6.458. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x + 2x^2}}.$$

$$6.459. \int \sqrt{1 - 2x - x^2} dx.$$

$$6.460. \int \sqrt{(3 - 2x - x^2)^3} dx.$$

$$6.461. \int \sqrt{x^2 - 2x + 10} dx.$$

$$6.462. \int \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}} dx.$$

$$6.463. \int \sqrt{4x - x^2} dx.$$

Тригонометричні функції

В задачах 6.464-6.533 знайти інтеграли.

$$6.464. \int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

$$6.465. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$6.466. \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}.$$

$$6.467. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$6.468. \int \frac{dx}{\cos^3 x \cdot \sin^3 x}.$$

$$6.469. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}.$$

$$6.470. \int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2}.$$

$$6.471. \int \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^2}.$$

$$6.472. \int \cos^6 x dx.$$

$$6.473. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

- 6.474. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$.
- 6.475. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$.
- 6.476. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
- 6.477. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \, dx$.
- 6.478. $\int \sin^3 x \, dx$.
- 6.479. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} \, dx$.
- 6.480. $\int \cos^7 x \, dx$.
- 6.481. $\int \cos^4 \frac{x}{2} \, dx$.
- 6.482. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$.
- 6.483. $\int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \, dx$.
- 6.484. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.
- 6.485. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \, dx$.
- 6.486. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$.
- 6.487. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$.
- 6.488. $\int \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cdot \cos x} \, dx$.
- 6.489. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.
- 6.490. $\int \operatorname{tg}^8 x \, dx$.
- 6.491. $\int \left(\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2} \right) dx$.
- 6.492. $\int \cos^5 x \, dx$.
- 6.493. $\int \sin^6 2x \, dx$.
- 6.494. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.
- 6.495. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3} \sin^3 \frac{x}{3}}$.
- 6.496. $\int \cos x \cos^2 2x \, dx$.
- 6.497. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$.
- 6.498. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.
- 6.499. $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}$.
- 6.500. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos 2x}$.
- 6.501. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x \cdot \cos 3x}$.
- 6.502. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$.
- 6.503. $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$.
- 6.504. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$.
- 6.505. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} \, dx$.

§1. Невизначений інтеграл

- 6.506. $\int \frac{\sin^2 x dx}{1 - \operatorname{tg} x}$.
- 6.507. $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x}$.
- 6.508. $\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \sec x)^2}$.
- 6.509. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$.
- 6.510. $\int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}$.
- 6.511. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.
- 6.512. $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$.
- 6.513. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.
- 6.514. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$.
- 6.515. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.
- 6.516. $\int \sin 3x \cos 5x dx$.
- 6.517. $\int \sin 10x \sin 15x dx$.
- 6.518. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$.
- 6.519. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx$.
- 6.520. $\int \cos x \cos^2 3x dx$.
- 6.521. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.
- 6.522. $\int \sqrt{1 + \sin x} dx$.
- 6.523. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cdot \cos x} dx$.
- 6.524*. $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x} dx$.
- 6.525. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.
- 6.526. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$.
- 6.527. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$.
- 6.528. $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x} dx$.
- 6.529. $\int \frac{(\cos 2x - 3) dx}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}}$.
- 6.530. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$.
- 6.531. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$.
- 6.532. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[4]{\cos x}}$.
- 6.533. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \sin^3 x}}$.

Гіперболічні функції

В задачах 6.534-6.552 знайти інтеграли.

- 6.534. $\int \operatorname{ch} x dx$.
- 6.535. $\int \operatorname{sh} x dx$.
- 6.536. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

$$\begin{array}{lll}
6.537. \int \frac{e^x dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} & 6.538. \int (\operatorname{ch}^2 ax + \operatorname{sh}^2 ax) dx & 6.539. \int \operatorname{sh}^2 x dx \\
6.540. \int \operatorname{th}^2 x dx & 6.541. \int \operatorname{cth}^2 x dx & 6.542. \int \operatorname{sh}^3 x dx \\
6.543. \int \operatorname{ch}^3 x dx & 6.544. \int \operatorname{th}^4 x dx & 6.545. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx \\
6.546. \int \operatorname{cth}^5 x dx & 6.547. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x} & 6.548. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} \\
6.549. \int \frac{dx}{(1 + \operatorname{ch} x)^2} & 6.550. \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx & 6.551. \int \frac{x dx}{\operatorname{ch}^2 x} \\
6.552. \int \frac{e^{2x} dx}{\operatorname{sh}^4 x} & &
\end{array}$$

Різні функції

В задачах 6.553-6.648. знайти інтеграли.

$$\begin{array}{ll}
6.553. \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{12}} & 6.554. \int \frac{x dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \\
6.555. \int x \sqrt[3]{a+x} dx & 6.556. \int \frac{dx}{a \cdot e^{mx} + b \cdot e^{-mx}} \\
6.557. \int \frac{x \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx & 6.558. \int \frac{x^4 dx}{(x^2 - 1)(x + 2)} \\
6.559. \int \frac{dx}{1 - x^4} & 6.560. \int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2} \\
6.561. \int \frac{\ln(x+1) dx}{\sqrt{x+1}} & 6.562. \int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x dx \\
6.563. \int x^2 \operatorname{sh} x dx & 6.564. \int \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{x}) dx \\
6.565. \int \frac{\arcsin x dx}{x^2} & 6.566. \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \\
6.567. \int x \cdot e^{\sqrt[3]{x}} dx & 6.568. \int (x^3 - 2x^2 + 5) e^{3x} dx \\
6.569. \int \sin \sqrt{x} dx & 6.570. \int \frac{dx}{x^3 (x-1)^{1/2}} \\
6.571. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}} & 6.572. \int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6} dx
\end{array}$$

§1. Невизначений інтеграл

$$6.573. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$6.575. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(1+x)^3}}.$$

$$6.577. \int \frac{x^4 dx}{x^{15} - 1}.$$

$$6.579. \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$$

$$6.581. \int x \ln(1 + x^3) dx.$$

$$6.583. \int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} dx.$$

$$6.585. \int x \cdot e^{x^2} (x^2 + 1) dx.$$

$$6.587. \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^5 x}.$$

$$6.589. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$6.591. \int \frac{(x^2 - 1) dx}{x \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}.$$

$$6.593. \int \frac{x \cdot e^x dx}{(1+x)^2}.$$

$$6.595. \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^4}.$$

$$6.597. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^3} dx.$$

$$6.599. \int \frac{x+3}{x^2+2x+4} dx.$$

$$6.601. \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}.$$

$$6.574. \int \sqrt{\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}} \frac{dx}{x}.$$

$$6.576. \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx.$$

$$6.578. \int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}.$$

$$6.580. \int \frac{dx}{a^2 - b^2 \cos^2 x}.$$

$$6.582. \int \frac{(\ln x - 1)}{\ln^2 x} dx.$$

$$6.584. \int x^2 \cdot e^x \cos x dx.$$

$$6.586. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$$

$$6.588. \int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$$

$$6.590. \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx.$$

$$6.592. \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$6.594. \int \frac{x \cdot e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

$$6.596. \int \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$6.598. \int \frac{dx}{(1-2^x)^4}.$$

$$6.600. \int \frac{x^3}{x^2-x-1} dx.$$

$$6.602. \int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$$

- 6.603. $\int \frac{dx}{x^5(x^4+1)^2}$.
- 6.605. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}}$.
- 6.607. $\int x\sqrt{x^2-4} dx$.
- 6.609. $\int \sqrt{x^2+4x+5} dx$.
- 6.611. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$.
- 6.613. $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}$.
- 6.615. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$.
- 6.617. $\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^4} dx$.
- 6.619. $\int \frac{dx}{3-4\sin^2 x}$.
- 6.621. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{5-\sec^2 x}} dx$.
- 6.623. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$.
- 6.625. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.
- 6.627. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x}$.
- 6.629. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
- 6.631. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.
- 6.633. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx$.
- 6.604. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$.
- 6.606. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+8x+4}}$.
- 6.608. $\int x\sqrt{x^2+4x-5} dx$.
- 6.610. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-\sqrt[4]{x+1}}}$.
- 6.612. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.
- 6.614. $\int \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$.
- 6.616. $\int \frac{x dx}{1+\cos x}$.
- 6.618. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.
- 6.620. $\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.
- 6.622. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x+5} dx$.
- 6.624. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.
- 6.626. $\int x \cdot \sin x \cos 2x dx$.
- 6.628. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}$.
- 6.630. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$.
- 6.632. $\int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x dx$.
- 6.634. $\int x \ln(4+x^4) dx$.

§ 2. Означений інтеграл

$$6.635. \int x\sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx.$$

$$6.636. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$6.637. \int x^x(1+\ln x) dx.$$

$$6.638. \int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)} dx.$$

$$6.639. \int \frac{(e^{3x}+e^x)}{e^{4x}-e^{2x}+1} dx.$$

$$6.640. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$$

$$6.641. \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$6.642. \int \sin^8 x dx.$$

$$6.643. \int \frac{(3+x^2)^2 x^3 dx}{(1+x^2)^3}.$$

$$6.644. \int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2} dx.$$

$$6.645. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$6.646. \int \frac{(x+\sin x) dx}{1+\cos x}.$$

$$6.647^*. \int \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

$$6.648. \int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

§ 2. Означений інтеграл

Способи точного обчислення інтегралів

Безпосереднє застосування формули
Ньютона–Лейбніца

В задачах 6.649-6.674 обчислити інтеграли.

$$6.649. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$$

$$6.650. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$$

$$6.651. \int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$$

$$6.652. \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+1}} dy.$$

$$6.653. \int_0^{T/2} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0 \right) dt.$$

$$6.654. \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$$

$$6.655. \int_0^1 (e^x - 1)^4 \cdot e^x dx.$$

$$6.656. \int_0^{2a} \frac{3dx}{2b-x} \quad (b > a > 0).$$

$$6.657. \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$$

$$6.658. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$$

$$6.659. \int_1^e \frac{1+\lg x}{x} dx.$$

$$6.660. \int_1^2 \frac{e^{1/x} dx}{x^2}.$$

$$6.661. \int_0^{\sqrt[3]{a}} \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}.$$

$$6.662. \int_0^{a/2} \frac{a dx}{(x-a)(x-2a)}.$$

$$6.663. \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}.$$

$$6.664. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

$$6.665. \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}.$$

$$6.666. \int_{-0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$$

$$6.667. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

$$6.668. \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \cdot \sin 2x dx.$$

$$6.669. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$$

$$6.670. \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega x + \varphi_0) dx.$$

$$6.671. \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}.$$

$$6.672. \int_{\alpha}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^4 \varphi d\varphi.$$

$$6.673. \int_{1/\pi}^{2\pi} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$$

$$6.674. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin \left(2t - \frac{\pi}{4} \right) dt.$$

В задачах 6.675-6.685 інтегруванням частинами знайти інтеграли.

$$6.675. \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx. \quad 6.676. \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx. \quad 6.677. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$6.678. \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx. \quad 6.679. \int_1^2 x \cdot \log_2 x dx. \quad 6.680. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$6.681. \int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}. \quad 6.682. \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx. \quad 6.683. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx.$$

$$6.684. \int_1^e \ln^3 x dx.$$

$$6.685. \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx.$$

§ 2. Означений інтеграл

6.686. Записати рекурентні формули для обчислення інтегралів

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \quad \text{і} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

(n - ціле невід'ємне число) і обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \cos^8 x \, dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \sin^{11} x \, dx.$$

6.687. Отримати рекурентну формулу для обчислення інтегралу $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ (m і n - цілі додатні числа або нулі; дослідити частинні випадки парних та непарних значень m і n).

6.688. Отримати рекурентну формулу і обчислити інтеграл $\int_{-1}^0 x^n e^x \, dx$ (n - ціле додатне число).

6.689. Довести рекурентну формулу

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

(n - ціле додатне число) і обчислити за її допомогою інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

6.690. Довести, що якщо $I_m = \int_1^e \ln^m x \, dx$, то $I_m = e - m I_{m-1}$ (m - ціле додатне число).

6.691*. Знайти $\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$ (p і q - цілі додатні числа).

Заміна змінної в означеному інтегралі.

В задачах 6.692-6.712 обчислити інтеграли.

$$\text{6.692. } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx. \quad \text{6.693. } \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \, dx}{1+x}. \quad \text{6.694. } \int_3^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$\text{6.695. } \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+\sqrt{x}}. \quad \text{6.696. } \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} \, dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}. \quad \text{6.697. } \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} \, dx}{3+3\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$$

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{6.698*} \cdot \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} dx. & \mathbf{6.699*} \cdot \int_0^{\pi/4} \cos^7 2x dx. & \mathbf{6.700} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}. \\
 \mathbf{6.701} \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx. & \mathbf{6.702} \cdot \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx. & \mathbf{6.703} \cdot \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx. \\
 \mathbf{6.704} \cdot \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}}. & \mathbf{6.705} \cdot \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx. & \mathbf{6.706} \cdot \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx. \\
 \mathbf{6.707} \cdot \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx. & \mathbf{6.708} \cdot \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2-x^2}}. & \mathbf{6.709} \cdot \int_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}. \\
 \mathbf{6.710} \cdot \int_{2,5}^5 \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4} dx. & & \mathbf{6.711} \cdot \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \\
 \mathbf{6.712} \cdot \int_{\sqrt{8/3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}. & &
 \end{array}$$

Різні задачі

6.713. Обчислити середнє значення функції $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ на відрізку $[1; 4]$.

6.714. Обчислити середнє значення функції $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ на відрізку $[1; 1,5]$.

6.715. Обчислити середні значення функцій $f(x) = \sin x$ і $f(x) = \sin^2 x$ на відрізку $[0; \pi]$.

6.716. Знайти середнє значення функції $f(x) = \frac{2}{e^x+1}$ на відрізку $[0; 2]$.

6.717. При якому a середнє значення функції $y = \ln x$ на відрізку $[1; a]$ дорівнює середній швидкості зміни функції на цьому відрізку?

В задачах 6.718-6.734 обчислити інтеграли.

$$\mathbf{6.718} \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}. \qquad \mathbf{6.719} \cdot \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^9 dx}{(1+x^5)^3}.$$

§ 2. Означений інтеграл

$$6.720. \int_0^{1/2} \frac{x^3 dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$6.721. \int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15} dx}{(1+x^8)^{2/5}}.$$

$$6.722. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$6.723. \int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$6.724. \int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx.$$

$$6.725. \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$6.726. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1} dx}{e^x + 3}.$$

$$6.727. \int_1^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}}.$$

$$6.728. \int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$$

$$6.729. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + 3}.$$

$$6.730. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \frac{1}{6} \sin^2 x}.$$

$$6.731. \int_0^1 (\arcsin x)^4 dx.$$

$$6.732. \int_1^{16} \arctg \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx.$$

$$6.733. \int_0^1 \frac{(3x+2) dx}{(x^2 + 4x + 1)^{5/2}}.$$

$$6.734. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$$

Невласні інтеграли

Інтеграл з нескінченними межами

В задачах 6.735-6.754 обчислити невластні інтеграл (або встановити їх розбіжність).

$$6.735. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}.$$

$$6.736. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$6.737. \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx (a > 0).$$

$$6.738. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}.$$

$$6.739. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$6.740. \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$6.741. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

$$6.742. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}.$$

$$6.743. \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Глава VI. Інтегральне числення функцій однієї змінної

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{6.744.} \int_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} & \mathbf{6.745.} \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx & \mathbf{6.746.} \int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-x^2} dx \\
 \mathbf{6.747.} \int_0^{+\infty} x \cdot \sin x dx & \mathbf{6.748.} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx & \mathbf{6.749.} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx \\
 \mathbf{6.750.} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx & \mathbf{6.751.} \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx & \mathbf{6.752.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \\
 \mathbf{6.753.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} & \mathbf{6.754.} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx
 \end{array}$$

В задачах 6.755-6.762 дослідити збіжність інтегралів.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{6.755.} \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx & \mathbf{6.756.} \int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx \\
 \mathbf{6.757.} \int_0^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3} dx & \mathbf{6.758.} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx \\
 \mathbf{6.759.} \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx & \mathbf{6.760.} \int_0^{+\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx \\
 \mathbf{6.761.} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x} & \mathbf{6.762.} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{3/2}}
 \end{array}$$

Інтеграли від необмежених функцій

В задачах 6.763-6.780 обчислити невластні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{6.763.} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \mathbf{6.764.} \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} & \mathbf{6.765.} \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} \\
 \mathbf{6.766.} \int_0^1 x \ln x dx & \mathbf{6.767.} \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x} & \mathbf{6.768.} \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} \\
 \mathbf{6.769.} \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} & \mathbf{6.770.} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b) \\
 \mathbf{6.771.} \int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b) & \mathbf{6.772.} \int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}
 \end{array}$$

§ 2. Означений інтеграл

$$6.773. \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$6.774. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$6.775. \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$6.776. \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx.$$

$$6.777. \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx.$$

$$6.778. \int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$6.779. \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx.$$

$$6.780. \int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx.$$

В задачах 6.681-6.786 дослідити збіжність інтегралів.

$$6.781. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$6.782. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$$

$$6.783. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$$

$$6.784. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x}-1}.$$

$$6.785. \int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}.$$

$$6.786. \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Різні задачі

6.787. Функція $f(x)$ на півінтервалі $[a; +\infty)$ неперервна і $f(x) \rightarrow A \neq 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Чи може інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ бути збіжним?

6.788. При яких значеннях k інтеграл $\int_1^{+\infty} x^k \frac{x + \sin x}{x - \sin x} dx$ буде збіжним?

6.789. При яких значеннях k збігаються інтеграли

$$1) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k \ln x}; \quad 2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}?$$

6.790. При яких значеннях k збігається інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ ($b < a$)?

6.791. Чи можна знайти таке k , щоб інтеграл $\int_0^{+\infty} x^k dx$ збігався?

6.792. При яких значеннях k і t інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^t} dx$ збігається?

6.793. При яких значеннях m інтеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$ збігається?

6.794. При яких значеннях k інтеграл $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$ збігається?

В задачах 6.795-6.804 обчислити невласні інтеграли (n -ціле додатне число).

6.795. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

6.796*. $\int_{-1}^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.797. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(x-1) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

6.798. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$.

6.799. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

6.800. $\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$.

6.801. $\int_0^1 (\ln x)^n dx$.

6.802*. $\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, де m : а) парне,

б) непарне ($m > 0$).

6.803*. $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$.

6.804. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x - \cos \alpha) \sqrt{x^2 - 1}}$ ($0 < \alpha < 2\pi$).

6.805*. Довести, що $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

6.806*. Довести, що $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

6.807. Обчислити інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 2}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} dx$.

В задачах 6.810-6.819 обчислити інтеграли, користуючись формулами

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (інтеграл Пуасона), $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (інтеграл Дирихле).

8.808. $\int_1^{\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx$.

6.809. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

§ 2. Означений інтеграл

$$6.810. \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \quad (a > 0).$$

$$6.811. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$6.812*. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

$$6.813. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

$$6.814. \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

$$6.815. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

$$6.816. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cdot \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0). \quad 6.817*. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

$$6.818*. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx.$$

$$6.819*. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$$

6.820*. Покладемо $\varphi(x) = -\int_0^x \ln \cos y dy$. (Цей інтеграл називається інтегралом Лобачевського). Довести співвідношення

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x \ln 2,$$

за допомогою якого обчислити значення $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\pi/2} \ln \cos y dy$.

В задачах 6.821-6.825 обчислити інтеграли.

$$6.821. \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx. \quad 6.822. \int_0^{\pi} x \ln \sin x dx. \quad 6.823*. \int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x dx.$$

$$6.824*. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

$$6.825. \int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§3. Застосування інтеграла

Деякі задачі геометрії і статистики

Площа фігури

6.826. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, рівняння яких $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$.

6.827. Знайти площу фігури, яка розміщена між параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ і дотичними до неї в точках $(0, -3)$ і $(3, 0)$.

6.828. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2px$ і нормаллю до неї, яка нахилена до осі абсцис під кутом 135° .

6.829. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

6.830. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 + 8x = 16$ і $y^2 - 24x = 48$.

6.831. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = \frac{x^3}{3}$.

6.832. Коло $x^2 + y^2 = 8$ розділене параболою $y = \frac{x^2}{2}$ на дві частини. Знайти площу обох частин.

6.833. Знайти площу фігур, на які парабола $y^2 = 6x$ ділить коло $x^2 + y^2 = 16$.

6.834. Із круга, радіуса a , вирізано еліпс, велика вісь якого співпадає з одним із діаметрів круга, а мала дорівнює $2b$. Довести, що площа частини, що залишилася, дорівнює площі еліпса з півосьми a і $a - b$.

6.835. Знайти площу фігури, обмеженої дугою гіперболи і її хордою, проведеної із фокуса перпендикулярно до дійсної осі.

6.836. Коло $x^2 + y^2 = a^2$ розбивається гіперболою $x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4}$ на три частини. Визначити площу цих частин.

6.837. Обчислити площі криволінійних фігур, утворених перетином еліпса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ і гіперболи $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

6.838. Обчислити площу фігури, яка розміщена між лінією $y = \frac{1}{1+x^2}$ і параболою $y = \frac{x^2}{2}$.

6.839. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = x(x-1)^2$ і віссю абсцис.

§ 2. Означений інтеграл

6.840. Знайти площу фігури, обмеженої віссю ординат і лінією $x = y^2(y-1)$.

6.841. Знайти площу частини фігури, обмеженої лініями $y^m = x^n$ і $y^n = x^m$, де m і n — цілі додатні числа, розміщені в першому квадранті. Розглянути питання про площу всієї фігури в залежності від характеру парності чисел m і n .

6.842. а) Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю абсцис і лінією $y = x - x^2\sqrt{x}$.

б) Обчислити площу фігури, обмеженої двома вітками лінії $(y-x)^2 = x^5$ і прямою $x=4$.

6.843. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $(y-x-2)^2 = 9x$ і осями координат.

6.844. Знайти площу петлі лінії $y^2 = x(x-1)^2$.

6.845. Знайти площу фігури, обмеженої замкненою лінією $y^2 = (1-x^2)^3$.

6.846. Знайти площу фігури, обмеженої замкненою лінією $y^2 = x^2 - x^4$.

6.847. Знайти площу фігури, обмеженої замкненою лінією $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$.

6.848. Знайти площу замкненої частини фігури, обмеженої лінією $x^2y^2 = 4(x-1)$ і прямою, яка проходить через її точки перегину.

6.849. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і прямою $x=1$.

6.850. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ і віссю абсцис.

6.851. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, віссю Ox і двома прямими, паралельними осі Oy , проведеними через точки екстремуму функції y .

6.852. Знайти площу замкненої частини фігури, обмеженої лініями $y = 2x^2e^x$ і $y = -x^3e^x$.

6.853. а) Обчислити площу криволінійної трапеції з основою $[a, b]$, обмеженої лінією $y = \ln x$.

б) Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = \ln x$, віссю ординат і прямими $y = \ln a$ і $y = \ln b$.

6.854. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$ і $y = \ln^2 x$.

6.855. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{\ln x}{4x}$ і $y = x \ln x$.

6.856. Обчислити площу одного із криволінійних трикутників, обмежених віссю абсцис і лініями $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

6.857. Обчислити площу криволінійного трикутника, обмеженого віссю ординат і лініями $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \frac{2}{3} \cos x$.

6.858. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ і відрізком осі абсцис, який з'єднує дві послідовні точки перетину лінії з віссю абсцис.

6.859. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю абсцис і лініями $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$.

6.860. Знайти площу фігури, обмеженої замкнутою лінією $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$.

6.861. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю абсцис.

6.862. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

6.863. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$.

6.864. Знайти площу фігури, обмеженої:

1) епіциклоїдою

$$x = (R+r) \cos t - r \cos \frac{R+r}{r} t, \quad y = (R+r) \sin t - r \sin \frac{R+r}{r} t;$$

2) гіпоциклоїдою

$$x = (R-r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t, \quad y = (R-r) \sin t - r \sin \frac{R-r}{r} t, \quad \text{де } R = nr$$

(n - ціле число). Тут R - радіус нерухомого, а r - радіус рухомого кіл, центр нерухомого кола співпадає з початком координат, а t означає кут повороту радіуса, проведеного з центру нерухомого кола в точку дотику.

§ 2. Означений інтеграл

6.865. Знайти площу петлі лінії:

1) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$;

2) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

6.866. а) Обчислити площу, описану полярним радіусом спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ при одному його оберті, якщо початку руху відповідає $\varphi = 0$.

б) Обчислити площу фігури, обмеженої другим і третім витками спіралі і відрізком полярної осі.

6.867. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a \sin 2\varphi$ (двопелюсткова троянда).

6.868. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a \cos 5\varphi$.

6.869. Знайти площу фігури, обмеженої равником Паскаля $\rho = 2a(2 + \cos \varphi)$.

6.870. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a \cdot \operatorname{tg} \varphi$ ($a > 0$) і прямою $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

6.871. Знайти площу спільної частини фігур, обмежених лініями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ і $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

6.872. Знайти площу частини фігури, обмеженої лінією $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, яка лежить поза лінією $\rho = 2 + \sin \varphi$.

6.873. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho^2 = a^2 \cos n\varphi$ (n - ціле додатне число).

6.874. Показати, що площа фігури, обмеженої будь-якими двома полярними радіусами гіперболічної спіралі $\rho\varphi = a$ і її дугою, пропорційна різниці цих радіусів.

6.875. Показати, що площа фігури, обмеженої будь-якими полярними радіусами логарифмічної спіралі $\rho = a e^{m\varphi}$ і її дугою, пропорційна різниці квадратів цих радіусів.

6.876*. Знайти площу фігури, яка міститься між зовнішньою і внутрішньою частинами лінії $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

6.877. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = \sqrt{1-t^2}$, $\varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}$.

В задачах 6.878–6.882 зручно перейти попередньо до полярних координат.

6.878. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскаатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

6.879. Знайти площу частини фігури, обмеженої лемніскаатою Бернуллі (див. задачу 6.878), яка лежить в середині кола $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

6.880. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

6.881. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$.

6.882. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

6.883. Обчислити площу фігури, яка міститься між лінією $y = \frac{1}{1+x^2}$ і її асимптотою.

6.884. Знайти площу фігури, яка міститься між лінією $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ і її асимптотою.

6.885. Знайти площу фігури, яка знаходиться між цисоїдою $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ і її асимптотою.

6.886. Знайти площу фігури, яка міститься між лінією $xy^2 = 8 - 4x$ і її асимптотою.

6.887*. 1) Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = x^2e^{-x^2}$ і її асимптотою.

2) Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y^2 = xe^{-2x}$.

6.888. Знайти площу фігури, яка міститься між трактрисою $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ і віссю абсцис.

6.889. Для лінії $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$ знайти площу петлі і площу фігури, яка міститься між лінією і її асимптотою.

§ 2. Означений інтеграл

Д о в ж и н а л і н і ї *)

6.890. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (від $x_1 = 0$ до $x_2 = b$).

6.891. Знайти довжину дуги параболи $y^2 = 2px$ від вершини до її точки $M(x; y)$. (Взяти y за незалежну змінну).

6.892. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln x$ (від $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$).

6.893. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln(1 - x^2)$ (від $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$).

6.894. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ (від $x_1 = a$ до $x_2 = b$).

6.895. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, яка міститься всередині параболи $y^2 = \frac{x}{3}$.

6.896. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $5y^3 = x^2$, яка міститься всередині кола $x^2 + y^2 = 6$.

6.897. Обчислити довжину петлі лінії $9ay^2 = x(x-3a)^2$.

6.898. Знайти периметр одного із криволінійних трикутників, обмежених віссю абсцис і лініями $y = \ln \cos x$ і $y = \ln \sin x$.

6.899. Знайти довжину дуги лінії $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, яка міститься між її найнижчою точкою і вершиною (точка лінії з екстремальною кривизною).

6.900. Знайти довжину лінії $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

6.901. Знайти довжину лінії $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

6.902. На циклоїді $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ знайти точку, яка ділить першу арку циклоїди по довжині у відношенні 1:3.

*) В задачах на обчислення довжин дуг там, де це необхідно, в дужках зазначається інтервал зміни незалежної змінної, відповідний спрямляючій дузі.

6.903. Задано астроїду $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$ і точки на ній $A(R; 0)$, $B(0; R)$. Знайти на дузі AB таку точку M , щоб довжина дуги AM складала четверту частину довжини дуги AB .

6.904*. Знайти довжину лінії $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.

6.905. Знайти довжину лінії $x = a \cos^5 t$, $y = a \sin^5 t$.

6.906. Знайти довжину дуги трактриси $x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$,

$y = a \sin t$ від точки $(0; a)$ до точки $(x; y)$ від її точки $(0; a)$ до її точки $(x; y)$.

6.907. Знайти довжину дуги евольвенти кола $x = R(\cos t + t \sin t)$, $y = R(\sin t - t \cos t)$ (від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

6.908. Обчислити довжину дуги лінії $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$ (від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

6.909. Знайти довжину петлі лінії $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

6.910. По колу, радіус якого a , поза і всередині нього з однаковою кутовою швидкістю котяться (без ковзання) два кола радіуса b . В момент $t = 0$ вони дотикаються своїми точками M_1 і M_2 до точки M нерухомого кола. Показати, що відношення шляхів, пройдених точками M_1 і M_2 за довільний проміжок часу t , стало і дорівнює $\frac{a+b}{a-b}$ (див. задачу 6.864.).

6.911. Довести, що довжина дуги лінії $x = f''(t) \cos t + f'(t) \sin t$, $y = -f''(t) \sin t + f'(t) \cos t$, яка відповідає інтервалу $(t_1; t_2)$, дорівнює $\left[f(t) + f''(t) \right] \Big|_{t_1}^{t_2}$.

6.912. Застосувати результат попередньої задачі до обчислення довжини дуги лінії $x = e^t (\cos t + \sin t)$, $y = e^t (\cos t - \sin t)$ (від $t_1 = 0$ до $t_2 = t$).

6.913. Довести, що дуги ліній $x = f(t) - \varphi'(t)$, $y = \varphi(t) + f'(t)$ і $x = f'(t) \sin t - \varphi'(t) \cos t$, $y = f'(t) \cos t + \varphi'(t) \sin t$, які відповідають одному і тому ж інтервалу зміни параметра t , мають рівні довжини.

§ 2. Означений інтеграл

6.914. Знайти довжину дуги архімедової спіралі $\rho = a\varphi$ від початку до кінця першого завитка.

6.915. Довести, що дуга параболи $y = \frac{1}{2p}x^2$, яка відповідає інтервалу $0 \leq x \leq a$, має ту ж довжину, що і дуга спіралі $\rho = p\varphi$, яка відповідає інтервалу $0 \leq \rho \leq a$.

6.916. Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ (від $\varphi_1 = 3/4$ до $\varphi_2 = 4/3$).

6.917. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

6.918. Знайти довжину лінії $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ (див. задачу 6.876).

6.919. Довести, що довжина лінії $\rho = a \sin^m \frac{\varphi}{m}$ (m -ціле число) співрозмірна з a при m парному і співрозмірна з довжиною кола радіуса a при m непарному.

6.920. При яких значеннях показника k ($k \neq 0$) довжина дуги лінії $y = ax^k$ виражається в елементарних функціях? (Скористатися теоремою Чебишева про умови інтегрування диференціального бінома в кінцевому вигляді).

6.921. Знайти довжину лінії, яка задана рівнянням $y = \int_{-\pi/2}^x \sqrt{\cos x} dx$.

6.922. Обчислити довжину дуги лінії $x = \int_1^t \frac{\cos z}{z} dz$, $y = \int_1^t \frac{\sin z}{z} dz$ від початку координат до найближчої точки з вертикальною дотичною.

6.923. Довести, що довжина дуги синусоїди $y = \sin x$, яка відповідає періоду синуса, дорівнює довжині еліпса, півосі якого дорівнюють $\sqrt{2}$ і 1.

6.924. Показати, що довжина дуги “вкороченої” або “подовженої” циклоїди $x = mt - n \sin t$, $y = m - n \cos t$ (m і n - додатні числа) в інтервалі від $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$ дорівнює довжині еліпса з півосями $a = m + n$, $b = |m - n|$.

6.925*. Довести, що довжина еліпса з півосями a і b задовольняє нерівності $\pi(a + b) < L < \pi\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ (задача І.Бернуллі).

Об'єм тіла

6.926. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворена обертанням параболи $y^2 = 4x$ навколо своєї осі (параболіод обертання), і площиною, перпендикулярною до його осі, що знаходиться від вершини параболи на відстані, яка рівна одиниці.

6.927. Еліпс, велика вісь якого дорівнює $2a$, мала $-2b$, обертається: 1) навколо великої осі; 2) навколо малої осі. Знайти об'єм одержаних еліпсоїдів обертання. В частинному випадку одержати об'єм кулі.

6.928. Симетричний параболічний сегмент, основа якого a , висота h , обертається навколо основи. Обчислити об'єм тіла обертання, яке при цьому утвориться ("лимон" Кавальєрі).

6.929. Фігура, обмежена гіперболою $x^2 - y^2 = a^2$ і прямою $x = a + h$ ($h > 0$), обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла обертання.

6.930. Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y = xe^x$ і прямими $x = 1$ і $y = 0$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

6.931. Ланцюгова лінія $y = \operatorname{ch} x$ обертається навколо осі абсцис. При цьому утворюється поверхня, яка називається катеноїдом. Знайти об'єм тіла, обмеженого катеноїдом і двома площинами, які знаходяться від початку на a і b одиниць і перпендикулярними до осі абсцис.

6.932. Фігура, обмежена дугами парабол $y = x^2$ і $y^2 = x$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

6.933. Знайти об'єм тіла, одержаного обертанням навколо осі абсцис трапеції, яка лежить над віссю Ox і обмеженої лінією $(x - 4)y^2 = x(x - 3)$.

6.934. Знайти об'єм тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y = \arcsin x$ з основою $[0; 1]$, навколо осі Ox .

6.935. Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$ і віссю абсцис, навколо осі ординат.

6.936. Обчислити об'єм тіла, яке утвориться обертанням навколо осі ординат криволінійної трапеції, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$, яка відповідає половині періоду.

6.937. Лемніската $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка при цьому утворюється.

§ 2. Означений інтеграл

6.938. Обчислити об'єм тіла, яке утворилося обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією:

1) $x^4 + y^4 = a^2 x^2$;

2) $x^4 + y^4 = x^3$.

6.939. Одна арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ обертається навколо своєї основи. Обчислити об'єм тіла, обмеженого одержаною поверхнею.

6.940. Фігура, обмежена аркою циклоїди (див. попередню задачу) і її основою, обертається навколо прямої, яка перпендикулярна до середини основи (вісь симетрії). Знайти об'єм отриманого при цьому тіла.

6.941. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ навколо своєї осі симетрії.

6.942. Фігура, яка обмежена дугою лінії $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ (еволюта еліпса), що лежить в першому квадранті, і координатними осями, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм отриманого при цьому тіла.

6.943. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею нескінченного веретена, утвореного обертанням лінії $y = \frac{1}{1+x^2}$ навколо її асимптоти.

6.944. Лінія $y^2 = 2ex e^{-2x}$ обертається навколо своєї асимптоти. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється в результаті цього обертання.

6.945*. 1) Фігура, обмежена лінією $y = e^{-x^2}$ і її асимптотою, обертається навколо осі ординат. Обчислити об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

2) Та ж фігура обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм одержаного тіла.

6.946*. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється при обертанні лінії $y = x^2 e^{-x^2}$ навколо своєї асимптоти.

6.947*. Фігура, обмежена лінією $y = \frac{\sin x}{x}$ і віссю абсцис, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм одержаного тіла.

6.948*. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням цисоїди $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ ($a > 0$) навколо її асимптоти.

6.949. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється при обертанні трактриси $x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t$ навколо її асимптоти.

6.950*. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6.951. 1) Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ і площинами $z = 1$.

2) Знайти об'єм тіла, обмеженого одноповерхонним гіперболоїдом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ і площинами $z = -1$ і $z = 2$.

6.952. Обчислити об'єми тіл, обмежених параболоїдом $z = x^2 + 2y^2$ і еліпсоїдом $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

6.953. Обчислити об'єми тіл, утворених перетином двоповерхонного гіперболоїда $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ і еліпсоїда $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

6.954. Знайти об'єм тіла, обмеженого конічною поверхнею $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ і площиною $z = 0$.

6.955. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ і конусом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

6.956*. Знайти об'єм тіла, яке відтинається від круглого циліндра площиною, що проходить через діаметр основи ("циліндричний відрізок", рис. 1.). Зокрема, покласти $R = 10$ см і $H = 6$ см.

6.957. Параболічний циліндр перетнутий двома площинами, одна з яких перпендикулярна до твірної. В результаті утворюється тіло, показане на рис. 2. Спільна основа параболічних сегментів $a = 10$ см, висота параболічного сегмента, який лежить в основі, $H = 8$ см, висота тіла $h = 6$ см. Обчислити об'єм тіла.

§ 2. Означений інтеграл

6.958. Циліндр, основа якого є еліпсом, перетнутий похилою площиною, яка проходить через малу вісь еліпса. Обчислити об'єм тіла, яке при цьому утворюється (рис.3). Лінійні розміри: $2b=8\text{см}$, $a=10\text{см}$, $h=5\text{см}$.

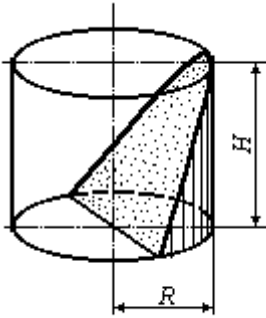


Рис.1

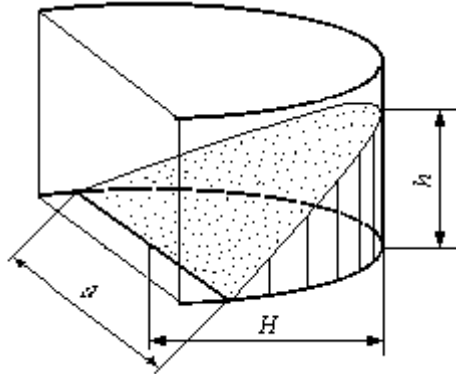


Рис.2

6.959*. На всіх хордах круга радіуса R , паралельних одному напрямку, побудовані симетричні параболічні сегменти сталої висоти H . Площини сегментів перпендикулярні до площини кола. Знайти об'єм одержаного таким чином тіла.

6.960*. Прямий круговий конус радіусом R , висотою H розітнуто на дві частини площиною, яка проходить через центр основи паралельно твірній. Знайти об'єми двох частин конуса. (Перерізи конуса площинами, паралельними твірній, суть параболічні сегменти.)

6.961. Центр квадрата змінного розміру переміщується уздовж діаметра круга радіуса a , причому площина, в якій лежить квадрат, залишається перпендикулярною до площини круга, а дві протилежні вершини квадрата переміщуються по колу. Знайти об'єм тіла, отриманого рухом цього квадрата.

6.962. Круг змінного радіуса переміщується таким чином, що одна із точок його кола залишається на осі абсцис, центр рухається по колу $x^2 + y^2 = r^2$, а площина цього круга перпендикулярна до осі абсцис. Знайти об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

6.963. Осі двох однакових циліндрів перетинаються під прямим кутом. Знайти об'єм тіла, яке утворює спільну частину циліндрів (Розглянути переріз, утворений площинами, паралельними до осей обох циліндрів.)

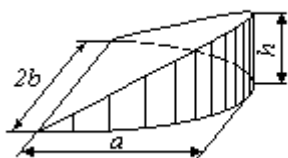


Рис.3

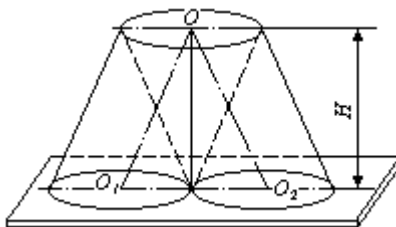


Рис.4

6.964. Два похилих циліндра мають одну і ту ж висоту H і спільну верхню основу радіусом R , а нижні основи їх дотикаються (рис.4.). Знайти об'єм спільної частини циліндрів.

Площа поверхні обертання

6.965. Знайти площу поверхні, яка утворилася обертанням параболи $y^2 = 4ax$ навколо осі абсцис (від вершини до точки з абсцисою $x = 3a$).

6.966. Обчислити площу поверхні, яка утворилася обертанням кубічної параболи $3y - x^3 = 0$ навколо осі абсцис (від $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

6.967. Обчислити площу катеноїда поверхні, яка утворилася обертанням ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ навколо осі абсцис (від $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

6.968. При обертанні еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо великої осі утворюється поверхня, яка називається подовженим еліпсоїдом обертання, при обертання навколо малої – поверхня, яка називається коротким еліпсоїдом обертання. Знайти площу поверхні подовженого і короткого еліпсоїдів обертання.

6.969. Обчислити площу веретеноподібної поверхні, яка утворилася обертанням однієї арки синусоїди $y = \sin x$ навколо осі абсцис.

6.970. Дуга тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ від її точки $(0; 0)$ до її точки $\frac{\pi}{4}$ обертається навколо осі абсцис. Обчислити площу поверхні, яка при цьому утворюється.

6.971. Знайти площу поверхні, яка утворилася обертанням петлі лінії $9ay^2 = x(3a - x)^2$ навколо осі абсцис.

§ 2. Означений інтеграл

6.972. Дуга кола $x^2 + y^2 = a^2$, яка лежить в першому квадранті, обертається навколо хорди, яка її стягує. Обчислити площу отриманої при цьому поверхні.

6.973. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі абсцис дуги лінії $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi/2$.

6.974. Знайти площу поверхні, яка утворилася обертанням астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ навколо осі абсцис.

6.975. Арка циклоїди обертається навколо своєї осі симетрії. Знайти площу утвореної при цьому поверхні (див задачу 6.940).

6.976. Знайти площу поверхні, яка утворена обертанням кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ навколо полярної осі.

6.977. Коло $\rho = 2r \sin \varphi$ обертається навколо полярної осі. Знайти площу поверхні, яка при цьому утворюється.

6.978. Лемніската $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ обертається навколо полярної осі. Знайти площу поверхні, яка при цьому утворюється.

6.979. Нескінченна дуга лінії $y = e^{-x}$, яка відповідає додатним значенням x , обертається навколо осі абсцис. Обчислити площу поверхні, яка при цьому утворюється.

6.980. Трактриса $x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t$ обертається навколо осі абсцис. Знайти площу утвореної нескінченної поверхні.

Моменти і центр ваги *)

6.981. Обчислити статичний момент прямокутника з основою a і висотою h відносно його основи.

6.982. Обчислити статичний момент прямокутного рівнобедреного трикутника, катети якого дорівнюють, відносно кожної із його сторін.

6.983. Довести справедливність формули:

$$\int_a^b (ax + b)f(x) dx = (a\xi + b) \int_a^b f(x) dx,$$

де ξ - абсциса центра ваги криволінійної трапеції з основою $[a; b]$, обмеженої лінією $y = f(x)$.

*) В усіх задачах цього розділу (6.981-6.1033) густина приймається рівною одиниці.

6.984. Знайти центр ваги симетричного параболічного сегмента з основою, рівною a , і висотою h .

6.985. Прямокутник зі сторонами a і b розбивається на дві частини дугою параболи, вершина якої співпадає з однією із вершин прямокутника і яка проходить через його протилежну вершину (рис.5). Знайти центр ваги обох його частин S_1 і S_2 прямокутника.

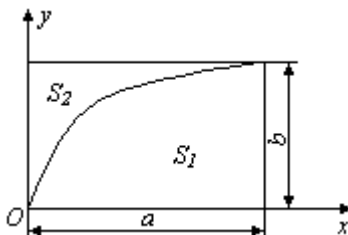


Рис.5

6.986. Знайти координати центра ваги півкола $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

6.987. Знайти координати центра ваги півкруга, обмеженого віссю абсцис і півколом $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

6.988. Знайти центр ваги дуги кола радіуса R , яка стягує центральний кут α .

6.989. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої осями координат і параболою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

6.990. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої координатними осями і дугою еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, яка лежить в першому квадранті.

6.991. Знайти статичний момент дуги еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, яка лежить в першому квадранті, відносно осі абсцис.

6.992. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком осі абсцис (від $x_1 = 0$ до $x_2 = \pi$).

В задачах 6.993-6.995 знайти статичний момент фігури, обмеженої даними лініями, відносно осі абсцис.

6.993. $y = \frac{2}{1+x^2}$ і $y = x^2$.

6.994. $y = \sin x$ і $y = 1/2$ (для одного сегмента).

6.995. $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

6.996. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої замкнутою лінією $y^2 = ax^3 - x^4$.

§ 2. Означений інтеграл

6.997. Знайти координати центра ваги дуги ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, яка міститься між точками з абсцисами $x_1 = -a$ і $x_2 = a$.

6.998. Довести, що статичний момент довільної дуги параболи відносно осі параболи пропорційний різниці радіусів кривизни в кінцевих точках дуги. Коефіцієнт пропорційності рівний $p/3$, де p – параметр параболи.

6.999. Знайти координати центра ваги першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

6.1000. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої першою аркою циклоїди і віссю абсцис.

6.1001. Знайти координати центра ваги дуги астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, розміщеної в першому квадранті.

6.1002. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої осями координат і дугою астроїди (в першому квадранті).

6.1003. Довести, що абсциса і ордината центра ваги сектора, обмеженого двома полярними радіусами і лінією, яка задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, виражаються так:

$$x = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos \varphi \, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}, \quad y = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin \varphi \, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}.$$

6.1004. Знайти декартові координати центра мас сектора, обмеженого однією половиною витка архімедової спіралі $\rho = a\varphi$ (від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$).

6.1005. Знайти центр ваги сектора круга радіуса R з центральним кутом, рівним 2α .

6.1006. Знайти декартові координати центра ваги фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

6.1007. Знайти декартові координати центра ваги фігури, обмеженої правою петлею лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

6.1008. Показати, що декартові координати центра ваги дуги лінії, рівняння якої дано в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, виражається так:

$$x = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi}, \quad y = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi}.$$

6.1009. Знайти декартові координати центра ваги дуги логарифмічної спіралі $\rho = a e^{\varphi}$ (від $\varphi_1 = \pi/2$ до $\varphi_2 = \pi$).

6.1010. Знайти декартові координати центра ваги дуги кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$).

6.1011. На якій відстані від геометричного центра лежить центр ваги півкулі радіуса R ?

6.1012. Знайти центр ваги поверхні півсфери.

6.1013. Задано прями́й круговий конус, радіус основи його R , висота H . Знайти відстань від основи конуса до центра ваги його бічної поверхні, повної поверхні і об'єму.

6.1014. На якій відстані від основи лежить центр ваги тіла, обмеженого параболоїдом обертання і площиною, перпендикулярною до його осі? Висота тіла h .

6.1015. Знайти момент інерції відрізка $AB = l$ відносно осі, яка лежить з ним в одній площині, якщо відомо, що кінець A відрізка знаходиться від осі на a одиниць, кінець B - на b одиниць.

6.1016. Знайти момент інерції півкола радіуса R відносно його діаметра.

6.1017. Знайти момент інерції дуги лінії $y = e^x$ ($0 \leq x \leq 1/2$) відносно осі абсцис.

6.1018. Обчислити моменти інерції однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ відносно обох осей координат.

6.1019. Знайти момент інерції прямокутника зі сторонами a і b відносно сторони a .

6.1020. Знайти момент інерції трикутника з основою a і висотою h відносно:

- 1) основи;
- 2) прямої, яка проходить через вершину, паралельно основі;
- 3) прямої, яка проходить через центр ваги трикутника, паралельно основі.

6.1021. Знайти момент інерції півкруга радіуса R відносно його діаметра.

§ 2. Означений інтеграл

6.1022. Знайти момент інерції круга радіуса R відносно його центра.

6.1023. Знайти момент інерції еліпса з півосями a і b відносно обох його осей.

6.1024. Знайти момент інерції циліндра, радіус основи якого R , висота H , відносно його осі.

6.1025. Знайти момент інерції конуса, радіус основи якого R , висота H , відносно його осі.

6.1026. Знайти момент інерції кулі радіуса R відносно її діаметра.

6.1027. Еліпс з півосями a і b обертається навколо однієї із своїх осей. Знайти момент інерції тіла, що утворюється (еліпсоїд обертання), відносно осі обертання.

6.1028. Знайти момент інерції параболоїда обертання, радіус основи якого R , висота H , відносно осі обертання.

6.1029. Обчислити момент інерції тіла, обмеженого однопорожнинним гіперболоїдом $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$ і площинами $z = 0$ і $z = 1$, відносно осі Oz .

6.1030. Криволінійна трапеція, обмежена лініями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 1$, обертається: 1) навколо осі Ox ; 2) навколо осі Oy . Обчислити момент інерції одержаного тіла відносно осі обертання.

6.1031. Знайти момент інерції бічної поверхні циліндра (радіус основи R , висота H) відносно його осі.

6.1032. Знайти момент інерції бічної поверхні конуса (радіус основи R , висота H) відносно його осі.

6.1033. Знайти момент інерції поверхні кулі радіуса R відносно її діаметра.

Теорема Гульдіна

6.1034. Правильний шестикутник зі стороною a обертається навколо однієї із сторін. Знайти об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

6.1035. Еліпс з осями $AA_1 = 2a$ і $BB_1 = 2b$ обертається навколо прямої, паралельної осі AA_1 і яка знаходиться від неї на відстані $3b$. Знайти об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

6.1036. Астроїда обертається навколо прямої, яка проходить через два сусідніх вістря. Знайти об'єм і поверхню тіла, яке при цьому утворюється (див. задачу 6.1001).

6.1037. Фігура, утворена першими арками циклоїд
 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і $x = a(t - \sin t)$, $y = -a(1 - \cos t)$,

обертається навколо осі ординат. Знайти об'єм і поверхню тіла, яке при цьому утворюється.

6.1038. Квадрат обертається навколо прямої, яка лежить в його площині і проходить через одну із його вершин. При якому положенні прямої відносно квадрата об'єм одержаного тіла обертання буде найбільшим? Таке саме питання для трикутника.

Деякі задачі фізики

6.1039. Швидкість тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 , без врахування опору повітря дорівнює $v = v_0 - gt$, де t - час, що минув, g - прискорення вільного падіння. На яку максимальну висоту підніметься тіло?

6.1040. Точка осі Ox здійснює гармонічні коливання біля початку координат зі швидкістю $v = v_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, де t - час, v_0 , ω , φ - сталі. Знайти закон коливання точки і середнє значення абсолютної величини швидкості за період коливань.

6.1041. Два тіла рухаються по одній і тій же прямій: перше зі швидкістю $v_1 = 3t^2 - 4t$ (м/с), друге зі швидкістю $v_2 = 4(t + 3)$ (м/с). Якщо в початковий момент вони були разом, то в який момент і на якій відстані від початку руху вони знову будуть разом?

6.1042. Швидкість руху точки $v = 0,1t e^{-0,02t}$ (м/с). Знайти шлях, який пройде точка від початку руху до повної зупинки ($v(t_2) = 0$).

6.1043. Визначити роботу, яку треба затратити, щоб насипати купу піску конічної форми з радіусом основи R і висотою H . Густина піску γ .

6.1044. Визначити роботу, яку треба затратити, щоб викачати рідину густиною γ з казана, що має форму параболоїда обертання, зверненого вершиною вгору. Радіус основи R , висота H .

6.1045. Обчислити роботу, яку треба затратити при будівництві піраміди з квадратною основою, якщо висота піраміди H , сторона основи a , густина матеріалу γ .

6.1046. Обчислити роботу, яку потрібно затратити, щоб викачати рідину густиною γ з резервуару, який має форму конуса, зверненого вершиною вгору. Радіус основи R , висота H .

6.1047. Обчислити роботу, яку потрібно затратити, щоб викачати рідину густиною γ з цистерни, обмеженої поверхнями: $y^2 = 2pz$, $x = \pm a$, $z = p$ ($p > 0$).

6.1048. Знайти кінетичну енергію однорідної кулі радіуса R і густиною γ , що обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра.

6.1049. Знайти кінетичну енергію пластини, що має форму параболічного сегмента і параболі, яка обертається навколо осі параболі з постійною кутовою швидкістю ω . Основа сегмента a , висота h , товщина пластини d , густина матеріалу γ .

6.1050. Знайти кінетичну енергію трикутної пластини, що обертається навколо основи з кутовою швидкістю ω . Основа пластини a , висота h , товщина l , густина γ .

6.1051. Знайти кінетичну енергію однорідного кругового циліндра густиною γ з радіусом основи R і висотою H , що обертається з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі.

6.1052. З якою силою рідина густиною γ тисне на вертикальну трикутну пластину з основою a і висотою h , яка знаходиться у воді таким чином, що її вершина знаходиться на поверхні, а основа паралельна поверхні.

6.1053. Кінець труби, яка занурена у рідину густиною γ , закритий круглою заслінкою. Визначити силу тиску на заслінку, якщо її радіус R , а центр знаходиться на глибині H .

6.1054. Обчислити, з якою силою тисне рідина густиною γ на вертикальну стінку, що має форму напівеліпса, велика вісь якого знаходиться на поверхні рідини. Велика піввісь еліпса a , мала b .

6.1055. Обчислити силу тиску рідини густиною γ , що заповнює круговий циліндр, на бічні стінки циліндра, якщо радіус основи R , висота H .

6.1056. Знайти масу стержня довжиною $l = 5$ см, якщо лінійна густина його змінюється за законом $\gamma = 1 + 0,1x^3$ (кг/м), де x – відстань від одного з кінців стержня.

6.1057. За який час вода витече із конічної лійки висотою $H = 50$ см, радіус верхньої основи $R = 5$ см, радіус нижньої основи $r = 0,2$ см?

6.1058. Визначити витрати рідини через водозлив прямокутного перерізу. Висота водозливу h , ширина a , в'язкість рідини μ .

VII. Функції багатьох змінних

§ 1. Найпростіші властивості функції

Основні поняття

7.1. Записати об'єм z конуса, як функцію його твірної x і висоти y .

7.2. Записати площу S трикутника, як функцію його трьох сторін x, y, z .

7.3. Записати об'єм правильної шестикутної піраміди, як функцію її висоти і бокового ребра y .

7.4. Скласти таблицю значень функції $z = 2x - 3y + 1$, надаючи незалежним змінним значення від 0 до 5 через одиницю.

7.5. Область обмежена паралелограмом і сторонами $y = 0$, $y = 2$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x - 1$. Границя паралелограма виключається. Задати цю область нерівністю.

7.6. Областю (включаючи межі) є фігура, обмежена лініями $y = x^2$, $y^2 = x$. Записати цю область нерівностями.

7.7. Записати об'єм V кругового конуса, як функцію площі S його бокової поверхні і довжини l твірної. Знайти область визначення цієї функції.

7.8. Записати площу S рівнобічної трапеції, як функцію довжин її сторін, якщо x, y - довжини основ, z - довжина бокової сторони. Знайти область визначення цієї функції.

Задана функція. Знайти значення функції в точці $z(x_0; y_0)$.

7.9. $z(x; y) = \frac{2x - 3y}{3x - 2y}$. $z(2; 1) - ?$ $z(1; 2) - ?$
 $z(3; 2) - ?$ $z(a; a) - ?$ $z(a; -a) - ?$

7.10. 1) $z = \left(\frac{\arctg(x+y)}{\arctg(x-y)} \right)^2$. $z\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) - ?$

2) $z = e^{\sin(x+y)}$. $z\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) - ?$

3) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$. $z(2; 2) - ?$; $z(1; 2) - ?$; $z(2; 1) - ?$.

Область визначення функцій

В задачах 7.11-7.23 знайти область визначення заданих функцій.

$$7.11. z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

$$7.12. z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}.$$

$$7.13. z = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$7.14. z = \ln(-x - y).$$

$$7.15. z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

$$7.16. z = y\sqrt{\cos x}.$$

$$7.17. z = \sqrt{\log_a(x^2 + y^2)}.$$

$$7.18. z = \arccos \frac{x}{x + y}.$$

$$7.19. z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}.$$

$$7.20. z = \ln(y^2 - 4x + 8).$$

$$7.21. z = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4} + \arcsin(x^2 + y^2).$$

$$7.22. z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}.$$

$$7.23. z = \ln x - \ln \sin y.$$

В задачах 7.24-7.28 знайти область визначення функції двох змінних. Побудувати область.

$$7.24. z = \frac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

$$7.25. z = \ln(4 + 4x - y^2).$$

$$7.26. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

$$7.27. z = \arcsin \frac{y}{x}.$$

$$7.28. z = \sqrt{x + y} \cdot \ln(y^2 - x^2).$$

В задачах 7.29-7.32 знайти область визначення заданої функції трьох змінних. Побудувати область.

$$7.29. u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

$$7.30. u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}}, \quad R > r.$$

$$7.31. u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

$$7.32. u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2).$$

Границі функцій. Неперервність функцій

В задачах 7.33-7.39 знайти границю функції.

$$7.33. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy} + 9}.$$

$$7.34. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy}.$$

$$7.35. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$$

$$7.36. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{(x^2 + y^2)}.$$

$$7.37. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + 1 - 1}{x^2 + (y-2)^2}.$$

$$7.38. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}.$$

$$7.39. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) \cdot x^2 \cdot y^2}.$$

В задачах 7.40-7.47 дослідити на неперервність функцію. Знайти точки розриву і з'ясувати, поведінку функції в околі точки розриву.

$$7.40. z = \frac{x^2 + 2y + 4}{y^2 - 2x}.$$

$$7.41. z = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$7.42. z = \frac{1}{(x - y)^2}.$$

$$7.43. u = \frac{1}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

$$7.44. z = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}.$$

$$7.45. z = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}.$$

$$7.46. z = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}.$$

$$7.47. z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}.$$

§ 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Частинні похідні функцій

В задачах 7.48-7.61 знайти частинні похідні першого порядку функції по кожній із незалежних змінних x ; y ; z .

$$7.48. z = x - y.$$

$$7.49. z = x^3 y - y^3 x.$$

$$7.50. z = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$7.51. z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3.$$

§ 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

$$7.52. z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

$$7.53. z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$7.54. z = x^y.$$

$$7.55. z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

$$7.56. z = e^{-\frac{x}{y}}.$$

$$7.57. z = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{y}{x}}.$$

$$7.58. z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3.$$

$$7.59. z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$7.60. z = \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$7.61. u = x\sqrt[4]{z} + zy + \frac{y}{\sqrt[4]{x}}.$$

$$7.62. u = \sin \left(x^2 + y^2 + z^2 \right).$$

$$7.63. u = x^{y^z}.$$

$$7.64. z = (2x + y)^{2x+y}.$$

$$7.65. z = xy \cdot e^{\sin \pi xy}.$$

$$7.66. z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}.$$

$$7.67. z = \ln \left(xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2} \right).$$

$$7.68. u = e^{x(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

$$7.69. u = x^{\frac{y}{z}}.$$

$$7.70. u = (1 + xy)^y.$$

В задачах 7.71-7.76 знайти частинні похідні першого та другого порядків від заданих функцій по незалежних змінних x ; y ; z .

$$7.71. z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3.$$

$$7.72. z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$7.73. z = x \cdot e^{-xy}.$$

$$7.74. z = y^x.$$

$$7.75. z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$7.76. u = \left(\frac{y}{x} \right)^z.$$

В задачах 7.77-7.79 знайти частинні похідні n -го порядку функції.

$$7.77. z = x^3 + x^2y + y^3 \quad n = 3.$$

7.78. $u = x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4$ $n = 4$.

7.79. $u = \frac{y}{x}$ $n = 3$.

7.80. а) Показати, що функція $u = A \cdot \sin \lambda x \cos \lambda t$ задовольняє рівнянню коливачь струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

б) Показати, що функція $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$ задовольняє рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

в) Показати, що функція $u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

7.81. Показати, що функція $u = x \cdot e^{-\frac{y}{x}}$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

В задачах 7.82-7.91 перевірити, чи задовольняє функція задане співвідношення.

7.82. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

7.83. $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.

7.84. $u = e^{t^{\frac{x}{t^2}}}$, $2x \frac{\partial u}{\partial x} + t \frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

7.85. $u = x^y$, $\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

§ 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

$$7.86. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

$$7.87. z = e^{\frac{x}{y}} \cdot \ln y, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}.$$

$$7.88. z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3) \cdot e^{-y} - x - 1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0.$$

$$7.89. z = \frac{xy}{x - y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x - y}.$$

$$7.90. z = e^{\frac{x}{y}}, \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$7.91. z = 2 \cos^2 \left(x - \frac{t}{2} \right), \quad 2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0.$$

7.92. Знайти значення частинних похідних функцій $f'_x(3;2)$; $f'_y(3;2)$; $f''_{yy}(3;2)$; $f''_{xx}(3;2)$; $f''_{xy}(3;2)$, якщо $f(x; y) = x^3 y + xy^2 - 2x + 3y - 1$.

7.93. Знайти $f'_x(1;2)$; $f'_y(1;2)$; $f''_{xx}(1;2)$; $f''_{xy}(1;2)$; $f''_{yx}(1;2)$, якщо $f(x; y) = \int_x^{x^2+y} e^t dt$.

7.94. $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$. Знайти $u'_x + u'_y + u'_z$ при $x=1, y=1, z=1$.

7.95. $f(x; y) = x^3 y - y^3 x$. Знайти $\left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

7.96. Який кут утворює з додатнім напрямом осі абсцис дотична до лінії $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ в точці $(2, 4, 5)$?

7.97. Під яким кутом перетинаються плоскі лінії, які утворюються в результаті перетину поверхонь $z = x^2 + \frac{y^2}{6}$ і $z = \frac{x^2 + y^2}{3}$ площиною $y = 2$?

В задачах 7.98-7.102 знайти значення частинних похідних першого порядку функції в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

7.98. $u = \arctg(xy^2 + z)$ $M_0(2; 1; 0)$.

7.99. $u = \ln \sin\left(x - 2y + \frac{z}{4}\right)$ $M_0\left(1; \frac{1}{2}; \pi\right)$.

7.100. $u = (\sin x)^{yz}$ $M_0\left(\frac{\pi}{6}; 1; 2\right)$.

7.101. $u = \sqrt{z} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ $M_0(4; 1; 4)$.

7.102. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos z}$ $M_0\left(3; 4; \frac{\pi}{2}\right)$.

Диференціали. Наближені обчислення

В задачах 7.103- 7.105 знайти частинні диференціали функції по кожній незалежній змінній.

7.103. $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$.

7.104. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

7.105. $u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$.

В задачах 7.106-7.109 знайти значення функції в точці $(x + \Delta x; y + \Delta y)$.

7.106. $z = \arctg \frac{y}{x}$, при $x = 2$, $y = 3$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,5$.

7.107. $z = x^2 - xy + y^2$, якщо x змінюється від 2 до 2,1, а y від 1 до 1,2.

7.108. $z = \lg(x^2 + y^2)$, якщо x змінюється від 2 до 2,1, а y від 1 до 0,9.

7.109. $z = xy$, при $x = 5$, $y = 4$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$.

§ 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

В задачах 7.110-7.114 знайти повні диференціали функції.

7.110. 1) $z = x^2 y$; 2) $u = e^{\frac{s}{t}}$; 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7.111. $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. **7.112.** $z = \operatorname{tg} \frac{y^2}{x}$.

7.113. $z = \ln\left(\cos \frac{x}{y}\right)$. **7.114.** $u = (xy)^z$.

7.115. Знайти значення повного диференціалу функції

a) $z = \frac{y}{x}$ при $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0,1$, $dy = 0,2$.

b) $u = e^{x^y}$ при $x = 1$, $y = 2$, $dx = -0,1$, $dy = 0,1$.

В задачах 7.116-7.120 знайти диференціали 1-го та 2-го порядків наступних функцій.

7.116. $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$. **7.117.** $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

7.118. $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$. **7.119.** $z = x \ln \frac{y}{x}$.

7.120. $z = e^{xyz}$.

7.121. Знайти: $d^2 u$, якщо $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

7.122. Знайти: $d^3 z$, якщо $z = e^y \cdot \sin x$.

7.123. Знайти: $d^3 u$, якщо $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

7.124. Знайти: $d^2 u$, якщо $u = e^{xy}$.

7.125. Знайти: $d^4 u$, якщо $u = x^4 + 4x^3 y + 2xy^2 z - 3xyz^2 + z^4$.

7.126. Під час деформації циліндра його радіус R збільшився з 2 до 2,05 дм, а висота H зменшилась з 10 до 9,8 дм. Знайти наближено зміну об'єму V за формулою $\Delta V \approx dV$.

7.127. Катети прямокутного трикутника, виміряні з точністю до 0,1 см, виявилися рівними 7,5 і 18 см. Обчислити абсолютну похибку при обчисленні гіпотенузи.

7.128. Висота конуса $H = 10$ см, радіус основи $R = 5$ см. Як зміниться об'єм конуса при зміні висоти на 2 мм і зменшенні радіуса основи на 2 мм?

7.129. Період T коливань маятника обчислюється за формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де l - довжина маятника, а g - прискорення. Знайти помилку в визначенні T , отриману в результаті невеликих похибок $\Delta l \approx \alpha$, $\Delta g \approx \beta$ при вимірюванні l та g .

В задачах 7.130-7.131 обчислити наближено значення виразів.

7.130. $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt{0,98} - 1)$.

7.131. $1,04^{2,02}$.

7.132. Тіло зважили в повітрі $(4,1 \pm 0,1)$ грам і в воді $(1,8 \pm 0,2)$ грам. Знайти питому вагу тіла і вказати похибку підрахунку.

7.133. Сторона трикутника має довжину 2,4 м і зростає з швидкістю 10 см/сек. Друга сторона довжини 1,5 м зменшується зі швидкістю 5 см/сек. Кут, утворений цими сторонами дорівнює 60° , і зростає з швидкістю 2° за секунду. Як із якою швидкістю змінюється площа трикутника.

Диференціювання складних функцій

В задачах 7.134-7.147 виконати вказані дії.

7.134. $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$; $\frac{du}{dt} = ?$

7.135. $u = z^2 + y^2 + yz$, $z = \sin t$, $y = e^t$; $\frac{du}{dt} = ?$

7.136. $z = x^2y - y^2x$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

7.137. $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

7.138. $z = \arctg(xy)$, $y = e^x$; $\frac{dz}{dx} = ?$

7.139. $z = e^{2x^2-2y^2}$, де $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

7.140. $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$; $\frac{du}{dt} = ?$

§ 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

7.141. $z = \arctg \frac{x}{y}$, де $\begin{cases} x = u \sin v \\ y = u \cos v \end{cases}$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

7.142. $z = \frac{xy \cdot \arctg(xy + x + y)}{x + y}$; $dz = ?$

7.143. $z = (x^2 + y^2) \cdot e^{\frac{x^2 + y^2}{xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$, $dz = ?$

7.144. $z = e^{2x-3y}$, $x = t \operatorname{tg} t$, $y = t^3 - t$; $\frac{dz}{dt} = ?$

7.145. $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$; $\frac{dz}{dt} = ?$

7.146. $z = \arctg \frac{x}{y}$, $x = e^{2t+1}$, $y = e^{2t-1}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

7.147. $u = \frac{yz}{x}$, $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$; $\frac{du}{dt} = ?$

7.148. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{dz}{dx}$, якщо: $z = \ln(e^x + e^y)$, $y = \frac{1}{3}x^3 + x$.

7.149. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{dz}{dx}$, якщо: $z = \arctg \frac{x+1}{y}$, $y = e^{(x+1)^2}$.

7.150. Знайти dz , якщо: $z = u^2v - v^2u$, де $\begin{cases} u = x \sin y \\ v = y \cos x \end{cases}$.

7.151. Знайти dz , якщо: $z = f(u; v)$, де $\begin{cases} u = \cos(xy) \\ v = x^5 - 7y \end{cases}$.

7.152. Знайти du , якщо: $z = f(x, y, z)$, де $\begin{cases} x = s^2 + t^2 \\ y = s^2 - t^2 \\ z = 2st \end{cases}$.

7.153. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо $z = f(u, v)$, де $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Диференціювання функцій заданих неявно та параметрично

В задачах 7.154-7.164 знайти $\frac{dy}{dx}$ якщо функцію задано неявно.

7.154. $x^3 y - y^3 x = 0$.

7.155. $x^2 y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.

7.156. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$. **7.157.** $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

7.158. $\sin(xy) - e^{-xy} - x^2y = 0$. **7.159.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

7.160. $xy - \ln y = a$. **7.161.** $\arctg \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

7.162. $yx^2 = e^y$. **7.163.** $ye^x + e^y = 0$.

7.164. $y^x = x^y$.

7.165. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$. Знайти $\frac{dy}{dx}$ при $x = 6, y = 2$, та при $x = 6, y = 8$. Дати геометричне тлумачення результатів.

В задачах 7.166-7.169 знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7.166. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. **7.167.** $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

7.168. $3xyz + z^3 = a^3$. **7.169.** $e^z - xyz = 0$.

В задачах 7.170-7.175 функція задана рівнянням. Знайти $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7.170. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. **7.171.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7.172. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}$. **7.173.** $y - 1 - y^x = 0$.

7.174. $x + y = e^{x-y}$. **7.175.** $x - y + \arctg y = 0$.

7.176. Знайти значення $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ в точці $(1; 1)$, якщо;
 $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

7.177. Знайти dz , якщо $yz = \arctg(xz)$.

7.178. Знайти dz , якщо $\alpha z - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$.

§ 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

7.179. Знайти d^2z , якщо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

7.180. Знайти dz , якщо $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$.

7.181. Знайти dz , якщо $\begin{cases} x = v \cos u - u \cos v + \sin u \\ y = v \sin u - u \sin v - \cos u \\ z = (u - v)^2 \end{cases}$.

7.182. Знайти:

а) d^2z , якщо $u = \sin(x + y + z)$.

б) d^3z , якщо $z = \sin(2x + y)$. Чому дорівнює d^3z в точках $(0; \pi)$; та $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

Заміна змінних в диференціальних виразах

7.183. Перетворити рівняння.

а) $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} - y = 0$, якщо $x = \frac{1}{t}$;

б) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$, якщо $x = \operatorname{tg} \varphi$.

7.184. Перетворити рівняння, перейшовши до полярних координат $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + (y')^2)$.

7.185. Перетворити рівняння, перейшовши до полярних координат

$$\omega = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

7.186. Перетворити вираз $\omega = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}$,

перейшовши від циліндричних координат до координат $r = \rho \sin \theta$, $\varphi = \varphi$, $z = \rho \cos \theta$.

§ 3. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних

Інтегрування повних диференціалів

7.187. Перевірити, чи є вираз повним диференціалом du та знайти u :

а) $(2x + y)dx + (x - 2y - 3)dy$;

б) $x \sin 2y dx + x^2 \cos 2y dy$;

в) $(x + \ln y)dx + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right)dy$;

г) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$;

д) $(yz - 2x)dx + (xz + y)dy + (xy - z)dz$;

е) $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2}\right)dx + \frac{dy}{y} - \left(\frac{x}{z^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)dz$;

є) $(\ln y - \cos 2z)dx + \left(\frac{x}{y} + z\right)dy + (y + 2x \sin 2z)dz$.

Скалярне поле. Градієнт функції. Похідна за напрямом

7.188. а) Задано функцію $\varphi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$. Знайти проєкції градієнта в точці $(1; 2)$;

б) $u = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$. Знайти проєкції градієнта в довільній точці.

7.189. 1) $z = x^2 + y^2$. Знайти $\text{grad } z$ в точці $(3; 2)$;

2) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$. Знайти $\text{grad } z$ в точці $(2; 1)$;

3) $z = \arctg \frac{y}{x}$. Знайти $\text{grad } z$ в точці $(x_0; y_0)$.

7.190. Знайти найбільшу кривизну підйому поверхні $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точці $(6, 4; \ln 100)$.

7.191. Який напрям найбільшої зміни функції в початку координат?

$$f(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$$

§ 3. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних

7.192. Знайти кут між градієнтами функції $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ в точках (1;1) та (3;4).

7.193. а) Знайти точку, в якій градієнт функції $z = \ln \left(x + \frac{1}{y} \right)$ дорівнює $i - \frac{16}{9}j$;

б) Знайти точки, де модуль градієнта функції $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ дорівнює 2.

7.194. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Знайти $\text{grad } u$ та його довжину.

7.195. Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці (1;1;1) в напрямі $I(\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ)$ та градієнт u в тій же точці і його довжину.

7.196. Знайти похідну функції $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точці (2;1) в напрямі, що йде від цієї точки до точки (0;0).

7.197. Знайти похідну функції $z = \ln(x+y)$ в точці (1;2), що належить параболі $y^2 = 4x$ по напрямку цієї параболи.

7.198. Довести, що похідна функції $z = \frac{y^2}{x}$ в будь-якій точці еліпса $2x^2 + y^2 = 1$ у напрямі нормалі до еліпса дорівнює нулю.

7.199. Знайти похідну функції $u = \frac{1}{r}$, де $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ в напрямі її градієнта.

7.200. Знайти похідну поля $u(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ в точці $M_0(0;0;0)$ за напрямом, який йде від цієї точки до точки $M(3;4;0)$.

7.201. Знайти швидкість зміни скалярного поля $u = xyz$ в точці $M(5;1;-8)$ в напрямі, який йде від даної точки до точки $B(9;4;4)$.

7.202. З'ясувавши характер зростання скалярного поля $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в напрямі вектора $a = 8i - 4j + 8k$ в точці $M(1;1;1)$, знайти величину швидкості зміни даного поля.

7.203. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u_1(M) = x^2 + y^2 - z^2$ та $u_2(M) = \arcsin \frac{x}{x+y}$ в точці $M(1; 1; \sqrt{7})$.

7.204. Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u(M) = x^y - z$ в точці $M(2; 2; 4)$.

7.205. Обчислити за допомогою градієнта похідну поля $u(M) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ в точці $M(1; 1; 1)$ у напрямі вектора $l = 2j - k$.

Екстремум функції багатьох змінних

В задачах 7.206-7.213 знайти стаціонарні точки заданих функцій.

7.206. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$. **7.207.** $z = y\sqrt{x} - x + 6y - y^2$.

7.208. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. **7.209.** $z = 2xy - 4x - 2y$.

7.210. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. **7.211.** $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

7.212. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \right)$.

7.213. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

7.214. Функції задані неявно. Знайти стаціонарні точки:

а) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$;

б) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

В задачах 7.215-7.223 знайти екстремуми функцій.

7.215. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

7.216. $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.

7.217. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x > 0, y > 0$.

7.218. $z = e^{-x^2 - y^2} \cdot (2x^2 + y^2)$.

7.219. $z = xy^2(1 - x - y)$ при $x > 0, y > 0$.

7.220. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

7.221. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ при $x > 0, y > 0$.

7.222. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

§ 3. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних

7.223. $z = (2x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$.

В задачах 7.224-7.225 знайти екстремуми функцій трьох змінних.

7.224. $u = z^2 + x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2z$.

7.225. $u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$.

Умовний екстремум

В задачах 7.226-7.234 знайти умовні екстремуми функцій.

7.226. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

7.227. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

7.228. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

7.229. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

7.230. $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

7.231. $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

7.232. $u = xyz$ при $x + y + z = 4$ $xy + yz + zx = 5$.

7.233. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 2a^2$.

7.234. $u = x + y + z$ при $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Найбільше та найменше значення функцій в області

В задачах 7.235-7.243 знайти найбільше та найменше значення функції в заданій області.

7.235. $z = x^2 - y^2$ D: $x^2 + y^2 \leq 4$.

7.236. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ D: $x = 0, y = 0, x = 1, x = 2$.

7.237. $z = x^2 y (2 - x - y)$ D: $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

7.238. $z = x + y$ D: $x^2 + y^2 \leq 1$.

7.239. $z = x - 2y + 5$ D: $x \leq 0, y \geq 0, x - y \leq 1$.

7.240. $z = x^2 - y^2 - xy - x - y$ D: $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.

7.241. $z = xy^2$ **D:** $x^2 + y^2 = 1$.

7.242. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ **D:** $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.

7.243. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ **D:** $x = 0, y = 0, x + y = 3$.

7.244. Визначити розміри прямокутного відкритого басейна, який має найменшу поверхню при умові, що його об'єм рівний V .

7.245. На гіперболі $x^2 - y^2 = 4$ знайти точку, найменш віддалену від точки $(0; 2)$.

7.246. Знайти розміри циліндра найменшого об'єму при умові, що його повна поверхня рівна 6π дм².

7.247. Із всіх прямокутних паралелепіпедів, що мають суму довжин ребер $12a$, знайти паралелепіпед з найбільшим об'ємом.

7.248. В прямий круговий конус з радіусом основи R та висотою H вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

7.249. Записати додатне число a в вигляді добутку трьох додатних множників так, щоб їх сума була найменшою.

7.250. Із всіх трикутників даного периметру $2p$ знайти той, що має найбільшу площу.

7.251. Намет має форму циліндра і завершується конічним верхом. При яких співвідношеннях між лінійними розмірами намету для його виготовлення знадобиться найменша кількість матеріалу?

7.252. На параболі $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ знайти точку, яка найменше віддалена від прямої $3x - 6y = 4 = 0$.

7.253. Знайти правильну трикутну піраміду заданого об'єму, що має найменшу суму ребер.

7.254. Знайти сторони рівнобедреного трикутника даного периметра $2p$, який при обертанні навколо однієї із своїх сторін утворює тіло найбільшого об'єму.

7.255. На еліпсі $x^2 + 4y^2 = 4$ дано дві точки $A\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Знайти на еліпсі третю точку C , таку, щоб трикутник ABC мав найбільшу площу.

VIII. Диференціальні рівняння

§1. Рівняння першого порядку

Рівняння з відокремлюваними змінними

В задачах 8.1–8.14 знайти загальні розв’язки диференціальних рівнянь.

$$8.1. (xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$$

$$8.2. y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2.$$

$$8.3. y' = 7^{x+y}.$$

$$8.4. xyu' = 1 - x^2.$$

$$8.5. yy' = \frac{1-2x}{y}.$$

$$8.6. y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0.$$

$$8.7. y'tg x - y = a.$$

$$8.8. (1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0.$$

$$8.9. ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0.$$

$$8.10. 2e^x tg y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0.$$

$$8.11. y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$$

$$8.12. \sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$$

$$8.13. y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$8.14. x + xy + y'(y + xy) = 0.$$

В задачах 8.15–8.20 знайти частинні розв’язки диференціальних рівнянь, які задовольняють задані початкові умови.

$$8.15. 2y'\sqrt{x} = y;$$

$$y(4) = 1.$$

$$8.16. y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x;$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$8.17. x^2y' + y^2 = 0;$$

$$y(-1) = 1.$$

$$8.18. (1 + y^2)dx - xydy = 0;$$

$$y(1) = 0.$$

$$8.19. y' = 2\sqrt{y} \ln x;$$

$$y(e) = 1.$$

$$8.20. \sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx;$$

$$y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Однорідні рівняння

В задачах 8.21–8.32 знайти загальні розв’язки рівнянь.

$$8.21. y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$$

$$8.22. y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

8.23. $yy' = 2y - x$.

8.24. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

8.25. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$.

8.26. $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

8.27. $(x-y)dx + xdy = 0$.

8.28. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

8.29. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

8.30. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

8.31. $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

8.32. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$.

В задачах 8.33–8.38 знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють задані початкові умови.

8.33. $xy' = y \ln \frac{y}{x}; \quad y(1) = 1$.

8.34. $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0; \quad y(1) = 1$.

8.35. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}; \quad y(-1) = 1$.

8.36. $(xy' - y) \arctg \frac{y}{x} = x; \quad y(1) = 0$.

8.37. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0; \quad y(0) = 1$.

8.38. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}; \quad y(1) = -1$.

Лінійні рівняння

В задачах 8.39–8.50 знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

8.39. $xy' + 2y = x^2$. 8.40. $y' - \frac{3y}{x} = x$. 8.41. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

8.42. $y' + 2y = 4x$. 8.43. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$. 8.44. $y' + y = \cos x$.

8.45. $xy' + y = \ln x + 1$. 8.46. $(x^3 + y)dx - xdy = 0$.

8.47. $x^2y' + xy + 1 = 0$. 8.48. $y' = 2x(x^2 + y)$.

8.49. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$. 8.50. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$.

§1. Рівняння першого порядку

В задачах 8.51–8.55 знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють задані початкові умови.

$$8.51. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}; \quad y(0) = 0.$$

$$8.52. \quad y' = 2y + e^x - x; \quad y(0) = \frac{1}{4}.$$

$$8.53. \quad (1-x^2)y' + xy = 1; \quad y(0) = 1.$$

$$8.54. \quad y' + y \cos x = \sin x \cos x; \quad y(0) = 1.$$

$$8.55. \quad y' + x^2 y = x^2; \quad y(2) = 1.$$

Різні задачі

(Рівняння з відокремленими змінними, однорідні та лінійні)

В задачах 8.56–8.75 знайти загальні розв'язки рівнянь.

$$8.56. \quad x^2 y' = x^2 + xy + y^2.$$

$$8.57. \quad y' = \frac{y+1}{x}.$$

$$8.58. \quad y' + xy = x^3.$$

$$8.59. \quad (x-y)dy - ydx = 0.$$

$$8.60. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$8.61. \quad y' \cos x - y \sin x = \sin 2x.$$

$$8.62. \quad (2x+1)y' + y = x.$$

$$8.63. \quad x^2 dy + (3-2xy)dx.$$

$$8.64. \quad x(x^2+1)y' + y = x(1+x^2)^2.$$

$$8.65. \quad y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}.$$

$$8.66. \quad x^3 y' = y(y^2 + x^2).$$

$$8.67. \quad (8y+10x)dx + (5y+7x)dy = 0.$$

$$8.68. \quad \frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$8.69. \quad y' = e^{2x} - e^x y.$$

$$8.70. \quad \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$$

$$8.71. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}.$$

$$8.72. \quad (x-2xy-y^2)dy + y^2 dx = 0.$$

$$8.73. \quad ydx = (y^3 - x)dy.$$

$$8.74. \quad (x+1)y' - ny = e^x(x+1)^{n+1}.$$

$$8.75. \quad xy' - 2y = e^x(x-2).$$

В задачах 8.76–8.80 знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють задані початкові умови.

$$8.76. \quad xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right); \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$8.77. \frac{xy' - y}{yy' + x} + 2 = 0; \quad y(1) = 1.$$

$$8.78. y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x; \quad y(0) = 1.$$

$$8.79. (1 + e^x)yy' = e^y; \quad y(0) = 0.$$

$$8.80. y' = 3x^2y + x^5 + x^2; \quad y(0) = 1.$$

Інші приклади рівнянь першого порядку

В задачах 8.81–8.98 знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь, звівши їх за допомогою заміни змінних до лінійних або однорідних рівнянь.

$$8.81. y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}.$$

$$8.82. y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}.$$

$$8.83. (2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0. \quad 8.84. (x + 4y)y' = 2x + 3y - 5.$$

$$8.85. (y + 2)dx = (2x + y - 4)dy. \quad 8.86. (y - x + 2)y' = 1 - x + y.$$

$$8.87. y' = \frac{2(y + 2)^2}{(x + y - 1)^2}.$$

$$8.88. y' = \frac{y^2 - x}{2y(x + 1)}.$$

$$8.89. (4y - 3x - 5)y' + 7x - 3y + 2 = 0.$$

$$8.90. (x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

$$8.91. (2x + 8)dx + (3y - 5x - 11)dy = 0. \quad 8.92. y' = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}.$$

$$8.93. xy' + 1 = e^y.$$

$$8.94. (1 - xy + x^2y^2)dx = x^2dy.$$

$$8.95. (x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0.$$

$$8.96. yy' + x = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{x} \right)^2.$$

$$8.97. (x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0.$$

$$8.98. (x^2 + y^2 + y)dx = xdy.$$

В задачах 8.99–8.112 розв'язати рівняння Бернуллі.

$$8.99. y' + 2xy = 2x^3y^3.$$

$$8.100. y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}.$$

$$8.101. y' + 2y = y^2e^x.$$

$$8.102. xy^2y' = x^2 + y^3.$$

$$8.103. y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x.$$

$$8.104. xy y' = y^2 + x.$$

§1. Рівняння першого порядку

8.105. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

8.106. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$.

8.107. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

8.108. $xy' + y = y^2 \ln x$.

8.109. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

8.110. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.

8.111. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

8.112. $y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$.

Рівняння в повних диференціалах

В задачах 8.113–8.122 знайти загальні розв'язки рівнянь.

8.113. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.

8.114. $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$.

8.115. $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$.

8.116. $(3x^2 y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2 y + 12y^3)dy = 0$.

8.117. $\left(4 - \frac{x^2}{y^2}\right)dx + \frac{2y}{x} dy = 0$.

8.118. $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$.

8.119. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$.

8.120. $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0$.

8.121. $\left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}} dy = 0$.

8.122. $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0$.

Інтегруючий множник

В задачах 8.123–8.128 знайти інтегруючий множник та загальний розв'язок рівнянь.

8.123. $(x^2 - y)dx + xdy = 0$.

8.124. $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$.

8.125. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$.

8.126. $(e^{2x} - y^2)dx + ydy = 0$.

8.127. $(1 + 3x^2 \sin y)dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0$.

8.128. $(\sin x + e^y)dx + \cos x dy = 0$.

Різні задачі

В задачах 8.129–8.148 знайти загальні розв'язки рівнянь.

$$8.129. y' = ax + by + d.$$

$$8.130. y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}.$$

$$8.131. y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}.$$

$$8.132. y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{y^2}.$$

$$8.133. \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

$$8.134. (2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0.$$

$$8.134. \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$$

$$8.136. y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}.$$

$$8.137. xdy + ydx + y^2(xdy - ydx) = 0.$$

$$8.138. y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}.$$

$$8.139. \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right] dy = 0.$$

$$8.140. y \sin x + y' \cos x = 1.$$

$$8.141. y' - y + y^2 \cos x = 0.$$

$$8.142. xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x.$$

$$8.143. y' = \frac{x}{\cos y} - \operatorname{tg} y.$$

$$8.144. y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x).$$

$$8.145. \left(1 + e^{\frac{x}{y}} \right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right) dy = 0.$$

$$8.146. 2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2 + y^2}{x} - 2x.$$

$$8.147. \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x} \right) y dx + \left(x \cos \frac{y}{x} - y \sin \frac{y}{x} \right) x dy = 0.$$

$$8.148. y' = \frac{\cos x \cdot \sin y + \operatorname{tg}^2 x}{\sin x \cdot \cos y}.$$

§2. Рівняння другого та вищих порядків

Особливі розв'язки.
Рівняння Клеро і Лагранжа

В задачах 8.149–8.168 знайти загальні та особливі розв'язки рівнянь Клеро та рівнянь Лагранжа.

8.149. $y = xy' - y'^2$.

8.150. $y = xy' - (2 + y')$.

8.151. $y = xy' - 3y'^3$.

8.152. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

8.153. $y = xy' + \frac{1}{2y'^2}$.

8.154. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

8.155. $y = xy' + y' + y'^2$.

8.156. $xy' - y = \ln y'$.

8.157. $y = xy'^2 + y'^2$.

8.158. $y = 3xy' - 7y'^3$.

8.159. $2xy' - y = \ln y'$.

8.160. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

8.161. $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}$.

8.162. $\frac{1}{2}(xy' + y' \ln y')$.

8.163. $y = x \frac{1 + y'^2}{2y'}$.

8.164. $2y = \frac{xy'^2}{y' + 2}$.

8.165. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

8.166. $y = x(1 + y') + y'^2$.

8.167. $y = y'(x + 1) + y'^2$.

8.168. $x = y \left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'} \right)$.

§2. Рівняння другого та вищих порядків

Окремі випадки рівнянь другого порядку

В задачах 8.169–8.198 знайти загальні розв'язки рівнянь.

8.169. $y'' = x - \sin x$.

8.170. $y'' = \ln x$.

8.171. $y'' = \frac{1}{1 + x^2}$.

8.172. $xy'' = y'$.

8.173. $y'' = y' + x$.

8.174. $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

8.175. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

8.176. $y'' + 2xy'^2 = 0$.

§4. Системи диференціальних рівнянь

- 8.209.** $y'' \cos y + (y')^2 \sin y - y' = 0;$ $y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = 2.$
- 8.210.** $yy'' - (y')^2 = y^2;$ $y(0) = 1, y'(0) = 0.$
- 8.211.** $yy'' = 2x(y')^2;$ $y(2) = 2, y'(2) = 0,5.$
- 8.212.** $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0;$ $y(0) = y'(0) = 1.$
- 8.213.** $2(y')^2 = y''(y-1);$ $y(1) = 2, y'(1) = -1.$
- 8.214.** $y'' = xy' + y + 1;$ $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Частинні випадки рівнянь вищих порядків

В задачах 8.215-8.225 знайти загальні розв'язки рівнянь.

- 8.215.** $y''' = \cos 2x.$ **8.216.** $y''' = \frac{1}{x}.$
- 8.217.** $y^{(x)} = e^{ax}.$ **8.218.** $x^2 y''' = (y'')^2.$
- 8.219.** $y''' = (y'')^3.$ **8.220.** $y' y''' = 3(y'')^2.$
- 8.221.** $y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{ctgr} x.$ **8.222.** $y''' = (y'')^2.$
- 8.223.** $xy''' + y'' = x + 1.$ **8.224.** $xy^{(v)} = y^{(iv)}.$
- 8.225.** $y'''[1 + (y')^2] = 3y'(y'')^2.$

§3 Лінійні рівняння

8.226. Довести теорему: якщо $y_1(x)$ є частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то функція $y_2(x) = y_1(x) \int e^{-\int p(x)dx} \frac{dx}{y_1^2(x)}$ також є розв'язком цього рівняння, а функція $y = y_1(x) \left(C_1 + C_2 \int e^{-\int p(x)dx} \frac{dx}{y_1^2(x)} \right)$ є його загальним розв'язком.

8.227. Користуючись формулами задачі 8.226 знайти загальний розв'язок рівняння $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, якщо його частинний розв'язок $y_1 = x$.

8.228. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 6y' + 5y = 0$, якщо функція e^x є його частинним розв'язком.

8.229. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' - 3y = 0$, якщо функція e^{-x} є його частинним розв'язком.

8.230. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' + 2y' + xy = 0$, якщо функція $\frac{\sin x}{x}$ є його частинним розв'язком.

8.231. Знайти загальний розв'язок рівняння $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, якщо відомо два його частинних розв'язки $y_1 = x$ і $y_2 = \frac{1}{x}$.

8.232. Функції y_1 і y_2 задовольняють деякому однорідному диференціальному рівнянню другого порядку. Переконайтеся, що вони утворюють фундаментальну систему, і скласти рівняння.

1) $y_1 = x^3$, $y_2 = x^4$;

2) $y_1 = e^x$, $y_2 = x^2 e^x$.

8.233. Функції x , x^3 , e^x утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння третього порядку. Скласти це рівняння.

В задачах 8.234-8.236 легко підібрати один частинний розв'язок (не враховуючи тривіального $y=0$) для заданого рівняння. Знайти загальний розв'язок цих рівнянь.

8.234. $y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$.

8.235. $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$.

8.236. $y'' - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$.

В задачах 8.237-8.239 знайти загальні розв'язки неоднорідних рівнянь.

8.237. $x^2 y'' - xy' + y = 4x^3$. **8.238.** $y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = x-1$.

8.239. $(3x + 2x^2)y'' - 6(1+x)y' + 6y = 6$.

Рівняння зі сталими коефіцієнтами

8.240. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

1) $y'' + y' - 2y = 0$;

2) $y'' - 2y' - 2y = 0$;

§4. Системи диференціальних рівнянь

3) $y'' - 9y = 0$;

4) $y'' - 7y = 0$;

5) $y'' - 2y' - y = 0$;

6) $3y'' - 2y' - 8y = 0$;

7) $y'' + 4y = 0$;

8) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

9) $4y'' - 8y' + 5y = 0$;

10) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

В задачах 8.241-8.245 знайти розв'язки рівнянь, які задовольняють вказані початкові умови.

8.241. $y'' - 5y' + 4y = 0$;

$y(0) = y'(0) = 1$.

8.242. $y'' - 2y' + y = 0$;

$y(2) = 1, y'(2) = -2$.

8.243. $y'' - 4y' + 3y = 0$;

$y(0) = 6, y'(0) = 10$.

8.244. $y'' + 4y' + 29y = 0$;

$y(0) = 0, y'(0) = 15$.

8.245. $4y'' + 4y' + y = 0$;

$y(0) = 2, y'(0) = 0$.

В задачах 8.246-8.277 знайти загальні розв'язки неоднорідних рівнянь.

8.246. $2y'' + y' - y = 2e^x$.

8.247. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

8.248. $y'' + y = 4xe^x$.

8.249. $y'' - y = 2e^x - x^2$.

8.250. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

8.251. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

8.252. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

8.253. $y'' + 4y' - 5y = 1$.

8.254. $y'' - 3y + 2y = \sin x$.

8.255. $y'' + y = 4 \sin x$.

8.256. $y'' + 2y' + 5y = \frac{17}{2} \cos 2x$.

8.257. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$.

8.258. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$.

8.259. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

8.260. $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$.

8.261. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

8.262. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$.

8.263. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

8.264. $y'' + y = x \sin x$.

8.265. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.

8.266. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

8.267. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$.

8.268. $2y'' + 5y' = f(x)$, якщо $f(x)$ рівна: 1) $5x^2 - 2x - 1$; 2) e^x ;

3) $29x \cos x$; 4) $\cos^2 x$; 5) $0,1e^{-2,5x} - 25 \sin 2,5x$; 6) $29x \sin x$;

7) $100x \cdot e^{-x} \cos x$; 8) $3 \cdot \operatorname{ch} \frac{5}{2} x$.

- 8.269.** $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, якщо $f(x)$ рівна: 1) 1; 2) e^{-x} ; 3) $3e^{2x}$;
 4) $2(\sin 2x + x)$; 5) $\sin x \cos 2x$; 6) $\sin^3 x$; 7) $8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$;
 8) $\operatorname{sh} 2x$; 9) $\operatorname{sh} x + \sin x$; 10) $e^x - \operatorname{sh}(x-1)$.

- 8.270.** $y'' + y = f(x)$, якщо $f(x)$ рівна: 1) $2x^3 - x + 2$; 2) $-8\cos 3x$;
 3) $\cos x$; 4) $\sin x - 2e^{-x}$; 5) $\cos x \cos 2x$; 6) $24\sin^4 x$; 7) $\operatorname{ch} x$.

8.271. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. **8.272.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

8.273. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$. **8.274.** $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

8.275. $y'' + 4y = 2t \operatorname{gr} x$. **8.276.** $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$.

- 8.277.** $y'' - y' = f(x)$, якщо $f(x)$ рівна: 1) $\frac{e^x}{1+e^x}$; 2) $e^{2x} \sqrt{1-e^{2x}}$;
 3) $e^{2x} \operatorname{cose}^x$.

В задачах 8.278-8.285 знайти частинні розв'язки рівнянь, які задовольняють вказані початкові умови.

8.278. $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4, y'(0) = -3$.

8.279. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1, y'(1) = 0$.

8.280. $y'' - y = 2x$; $y(0) = 0, y(1) = -1$.

8.281. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y(0) = 3, y'(0) = -5,5$.

8.282. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y(0) = 1, y'(0) = 3,2$.

8.283. $y'' - y' = 2(1-x)$; $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

8.284. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y(0) = 2, y'(0) = 2$.

8.285. $y'' + y + \sin 2x = 0$; $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 1$.

В задачах 8.286-8.292 знайти загальні розв'язки рівнянь Ейлера.

8.286. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$. **5.287.** $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$.

8.288. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$. **8.289.** $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$.

8.290. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$. **8.291.** $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.

8.292. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$.

§4. Системи диференціальних рівнянь

Рівняння вищих порядків

В задачах 8.293-8.311 знайти загальні розв'язки рівнянь.

8.293. $y''' - 8y = 0.$

8.294. $y^{(IV)} - y = 0.$

8.295. $y^{(V)} - 6y^{(IV)} + 9y''' = 0.$

8.296. $y^{(V)} - 10y''' + 9y' = 0.$

8.297. $y^{(IV)} + 2y'' + y = 0.$

8.298. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

8.299. $y^{(IV)} - 5y'' + 4y = 0.$

8.300. $y^{(V)} + 8y''' + 16y' = 0.$

8.301. $y''' - 3y' + 2y = 0.$

8.302. $y^{(IV)} + 4y'' + 3y = 0.$

8.303. $y^{(n)} = y^{(n-2)}.$

8.304. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$

8.305. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10).$

8.306. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}.$

8.307. $y^{(IV)} + y'' = x^2 + x.$

8.308. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x.$

8.309. $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1.$

8.310. $y^{(IV)} - y = xe^x + \cos x.$

8.311. $y^{(V)} - y^{(IV)} = xe^x - 1.$

В задачах 8.312-8.316 знайти частинні розв'язки рівнянь, які задовольняють вказані початкові умови.

8.312. $y''' + y' = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1.$

8.313. $y^{(V)} = y'; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1, \quad y^{(IV)}(0) = 2.$

8.314. $y''' - y' = 0; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1.$

8.315. $y''' - y' = -2x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 2.$

8.316. $y^{(IV)} - y = 8e^x; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0.$

§4. Системи диференціальних рівнянь

В задачах 8.317-8.341 розв'язати задані системи рівнянь (\dot{x} означає $\frac{dx}{dt}$, і т.д.; для полегшення роботи в деяких задачах вказано корені характеристичного рівняння).

8.317.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$$

8.318.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

- 8.319.
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$$
- 8.321.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$
- 8.323.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$$
- 8.325.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y, \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1).$$
- 8.327.
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - 2z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1).$$
- 8.329.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm i).$$
- 8.331.
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1).$$
- 8.333.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2).$$
- 8.335.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$$
- 8.337.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$$
- 8.320.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y, \\ \dot{y} = 5x - 6y. \end{cases}$$
- 8.322.
$$\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$
- 8.324.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$$
- 8.326.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1).$$
- 8.328.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i).$$
- 8.330.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = -2x + y - z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i).$$
- 8.332.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3).$$
- 8.334.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$
- 8.336.
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$
- 8.338.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

§5. Геометричні задачі, які приводять диференціальних рівнянь

$$8.339. \begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y, \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

$$8.340. \begin{cases} \ddot{x} = 2y, \\ \ddot{y} = -2x. \end{cases}$$

$$8.341. \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + 2x = 0, \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y = 0. \end{cases}$$

В задачах 8.342-8.346 знайти частинні розв'язки систем, які задовольняють вказані початкові умови.

$$8.342. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -x + 5y, \\ x(0) = 3, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

$$8.343. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x + 7y, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

$$8.344. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x - 5y, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

$$8.345. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = x, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$$

$$8.346. \begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = x + y, \\ x(0) = y(0) = 2, \quad z(0) = -1. \end{cases}$$

§5. Геометричні задачі, які приводять диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння першого порядку

8.347. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(2; 3)$, коли відомо, що у кожній точці кривої відрізок дотичної, який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

8.348. Знайти всі криві, в яких відрізок дотичної між точкою дотику та віссю абсцис ділиться навпіл в точці перетину з віссю ординат.

8.349. Знайти всі криві, в яких піддотична пропорційна абсцисі точки дотику (коефіцієнт пропорційності рівний k).

8.350. Знайти криву, яка проходить через точку $(a; 1)$ і має піддотичну сталої довжини a .

8.351. Знайти криву, яка проходить через точку $(2; 0)$, коли відомо, що відрізок дотичної між точкою дотику та віссю ординат має сталу довжину рівну двом.

8.352. Знайти криву, в якій довжина нормалі (її відрізок від точки кривої до осі абсцис) має сталу величину a .

8.353. Знайти криву, в якій сума довжин дотичної та піддотичної в довільній її точці пропорційна добутку координат точки дотику (коефіцієнт пропорційності рівний k).

8.354. Знайти криву, в якій квадрат довжини відрізка, що відтинається довільною дотичною від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику.

8.355. Знайти криву, в якій початкова ордината довільної дотичної рівна відповідній піднормалі.

8.356. Знайти криві, для яких тангенс кута між дотичною та додатним напрямом осі абсцис обернено пропорційний абсцисі точки дотику (коефіцієнт пропорційності рівний k).

8.357. Знайти криву, піддотична якої є середнім арифметичним координат точки дотику.

8.358. Знайти криву, для якої відношення відрізка, що відтинається дотичною на осі ординат, до відрізка, що відтинається нормаллю на осі абсцис, є стала величина, що дорівнює k .

8.359*. Знайти криву, відрізок дотичної до якої, що міститься між осями координат, має сталу довжину a .

8.360. Знайти криву, в якій початкова ордината довільної дотичної на дві одиниці масштабу менше абсциси точки дотику.

8.361. Знайти криву, в якій довжина нормалі пропорційна квадрату ординати (коефіцієнт пропорційності рівний k).

8.362. Знайти криву, в якій довільна дотична перетинається з віссю ординат в точці, рівновіддаленій від точки дотику та від початку координат.

8.363. Знайти рівняння кривої, яка перетинає вісь абсцис в точці $x=1$, коли відомо, що довжина піднормалі в кожній точці кривої дорівнює середньому арифметичному координат цієї точки.

8.364. Знайти криву, в якій відрізок, що відтинається на осі ординат дотичною в довільній точці:

1) пропорційний квадрату ординати точки дотику;

2) пропорційний кубу ординати точки дотику.

8.365. Знайти криву, яка проходить через точку $(1; 0)$, коли відомо, що трикутник, утворений віссю ординат, дотичною до кривої в довільній її точці і радіус-вектором точки дотику, рівнобедрений, причому основою

§ 6. Текстові задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

його є відрізок дотичної від точки дотику до осі ординат.

Рівняння другого порядку

8.366. Знайти криву, радіус кривини якої дорівнює 1.

Вказівка: $R = \frac{\sqrt{(1+(y')^2)^3}}{y''}$.

8.367. Знайти криву, радіус кривини якої пропорційний кубові нормалі.

Вказівка: $R = \frac{\sqrt{(1+(y')^2)^3}}{y''}$ - радіус кривини, $|y\sqrt{1+(y')^2}|$ - довжина

відрізка нормалі, коефіцієнт пропорційності рівний k .

8.368. Знайти криву, для якої проекція радіуса кривини на вісь ординат має сталу величину, рівну a .

8.369. Знайти криву, довжина дуги якої, що обчислюється від деякої точки, пропорційна кутовому коефіцієнту дотичної в кінцевій точці дуги.

§ 6. Текстові задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

8.370. У сприятливих для розмноження умовах знаходиться деяка кількість N_0 бактерій. Знайти залежність збільшення числа бактерій від часу, якщо швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості.

8.371. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини (кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна кількості цієї речовини в даний момент часу). Через скільки днів залишиться 1% початкової кількості?

8.372. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою повітря і температурою тіла (закон Ньютона). Знайти закон охолодження тіла, якщо температура повітря 20°C і тіло протягом 20 хвилин охолодилося від 100°C до 60°C . Через скільки хвилин температура тіла знизиться до 30°C ?

8.373. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, через 4с його швидкість становила 1м/с. Коли швидкість зменшиться до 0,01 м/с? Який шлях пройде човен до повної зупинки?

8.374. Маса ракети з повним запасом палива дорівнює M , без палива - m ; швидкість виходу продуктів горіння з ракети дорівнює C , а початкова швидкість ракети - нулю. Знайти швидкість ракети після згоряння всього палива, нехтуючи силою тяжіння та опором повітря (формула Ціолковського).

8.375. Кількість світла, що поглинається шаром води, пропорційна кількості світла та товщині водяного шару. Так шар води завтовшки 35 см поглинає половину світла, яке на нього падає. Яку частину світла поглинає шар завтовшки 2 м ?

Розв'язати задачі 8.376-8.378 враховуючи таку умову: швидкість витікання рідини з посудини $v = k \sqrt{2gh}$ (де $g \approx 10 \text{ м/с}^2$, h - висота рівня рідини над отвором, k - коефіцієнт в'язкості (для води $k = 0,6$)).

8.376. За який час витече вся вода з циліндричного бака діаметром 1,8м, заввишки $H = 2,45$ м через круглий отвір у дні, радіуса 3см ? Вісь бака вважати вертикальною.

8.377. Розв'язати попередню задачу, вважаючи, що вісь циліндра розміщена горизонтально, а отвір знаходиться в найнижчій частині циліндра.

8.378. Лійка має вигляд конуса, радіус основи якого 6 см, висота 10см. За який час витече вся вода з наповненої доверху лійки через отвір діаметром 0,5 см, зроблений у вершині конуса?

8.379. Внаслідок хімічної реакції між речовинами A та B масами a та b утворюється третя речовина C . Встановити залежність маси цієї речовини від часу, якщо швидкість реакції пропорційна добутку реагуючих мас.

8.380. Точка масою m рухається прямолінійно. На неї діє сила пропорційна часу, який минув з моменту, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності α). Крім цього, точка зазнає опору середовища, пропорційного швидкості (коефіцієнт пропорційності β). Знайти залежність швидкості від часу.

8.381. Точка масою m рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна кубові часу, який минув з моменту, коли швидкість дорівнювала v_0 (коефіцієнт пропорційності α). Крім цього, точка зазнає опору середовища, пропорційного добутку часу та швидкості (коефіцієнт пропорційності β). Знайти залежність швидкості від часу.

§ 6. Текстові задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

8.382. У посудину, що містить 100 літрів 10%- ного розчину солі, щохвилини вливається 30 літрів води і витікає 20 літрів розчину. Яка кількість солі залишиться в посудині через 10 хвилин, якщо вважати, що суміш неодмінно перемішується?

8.383. Ракету пущено вертикально вгору з початковою швидкістю 100 м/с. Опір повітря сповільнює її рух, надаючи ракеті від'ємного прискорення, пропорційного квадрату її швидкості $(-kv^2)$. Через який час ракета досягне найбільшої висоти?

Розв'язати задачі 8.384-8.386, враховуючи, що якщо змінний електричний струм $I = I(t)$ тече по провіднику з коефіцієнтом індуктивності L та опором R , то спад напруги вздовж провідника буде дорівнювати $L \frac{dI}{dt} + RI$.

8.384. Різниця потенціалів на клемх котушки рівномірно спадає від $E_0 = 2 \text{ В}$ до $E_1 = 1 \text{ В}$ на протязі 10 сек. Який буде струм в кінці десятої секунди, якщо на початку досліду він був рівний $16 \frac{2}{3} \text{ А}$. Опір котушки 0,12 Ом, коефіцієнт індуктивності 0,1 Гн.

8.385. Знайти струм в котушці в момент t , якщо опір її R , коефіцієнт індуктивності L , початковий струм $I_0 = 0$, електрорушійна сила змінюється згідно із законом $E = E_0 \sin \omega t$.

8.386. Напруга та опір ланцюга рівномірно змінюється на протязі хвилини відповідно від нуля до 120 В та від нуля до 120 Ом. Індуктивність ланцюга стала (1 Гн). Початковий струм I_0 . Знайти залежність між струмом та часом на протязі першої хвилини досліду.

8.387. Послідовно з'єднані самоіндукція L , опір R і конденсатор ємності C , заряд якого при $t=0$ дорівнює q . Ланцюг замикається при $t=0$. Знайти силу струму й частоту коливань у припущенні, що розряд має коливний характер.

8.388. Опір R та конденсатор ємністю C з'єднані послідовно. При $t=0$ заряд конденсатора дорівнює q . Знайти силу струму при $t > 0$, якщо ланцюг замкнули при $t=0$.

8.389. Джерело струму, напруга якого змінюється згідно із законом $E = V \sin \omega t$, а опір R та самоіндукція L з'єднані послідовно. Знайти силу струму при усталеному режимі.

8.390. Сповідільноюча дія тертя на диск, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання.

1) Диск, який почав обертатися з кутовою швидкістю 3 оберти за секунду, через одну хвилину обертається з кутовою швидкістю 2 оберти за секунду. Яка буде його кутова швидкість через 3 хвилини після початку обертання?

2) Диск, який почав обертатися з кутовою швидкістю 5 обертів за секунду, через 2 хвилини обертається з кутовою швидкістю 3 оберти за секунду. Через який час після початку обертання він буде мати кутову швидкість, яка рівна 1 оберту за секунду?

ІХ. Ряди

§1. Числові ряди

Числові ряди

9.1. Знаючи загальний член ряду u_n , записати перші п'ять його членів.

$$1) u_n = \frac{n}{10^n + 1};$$

$$2) u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$3) u_n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n;$$

$$4) u_n = \arcsin \frac{1}{2^n};$$

$$5) u_n = \frac{1}{n \ln^2 n};$$

$$6) u_n = \frac{1}{1+n^2};$$

$$7) u_n = \frac{n}{10^n + 1};$$

$$8) u_n = \frac{9}{100^n - 1}.$$

9.2. Записати загальний u_n - член ряду.

$$1) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + u_n + \dots$$

$$2) \frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \dots + u_n + \dots$$

$$3) \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots + u_n + \dots$$

$$4) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots + u_n + \dots$$

$$5) \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \frac{2^4}{4^{10}} + \dots + u_n + \dots$$

$$6) \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \dots + u_n + \dots$$

$$7) \frac{10}{7} + \frac{100}{9} + \frac{1000}{11} + \frac{10000}{13} + \dots + u_n + \dots$$

$$8) \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + u_n + \dots$$

$$9) -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + u_n + \dots$$

В задачах 9.3–9.12 для кожного ряду.

- 1) знайти суму n -перших членів (S_n);
- 2) довести збіжність ряду, користуючись безпосередньо означенням збіжності.

9.3. а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots;$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5};$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}.$

9.4. а) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}.$

9.5. а) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots;$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2};$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)} = n(n-2)(n+2).$

9.6. а) $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \dots;$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 49n - 98};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$

9.7. а) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6};$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}.$

9.8. а) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15};$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}.$

9.9. а) $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{9n^2 + 3n - 20};$

в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{8n-10}{(n^2-1)(n+2)}.$

9.10. а) $\frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \dots + \frac{n}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} + \dots;$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{4n^2 - 9};$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}.$$

$$9.11. а) \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \dots;$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2};$$

$$в) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}.$$

$$9.12. а) \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{8} + \dots + \arctg \frac{1}{2 \cdot n^2} + \dots; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2+7n-12};$$

$$в) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}.$$

Збіжність рядів з додатними членами

9.13. Перевірити виконання необхідної умови збіжності.

$$1) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots;$$

$$2) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots;$$

$$3) \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots;$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3n+4};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+5};$$

$$6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+4};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1};$$

$$8) \sum_{n=0}^{\infty} (0,5 + (0,1)^n);$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arctg \frac{1}{n};$$

$$11) a_n = \frac{4n+3}{5n+1};$$

$$12) a_n = \frac{2n+7}{3n+2};$$

$$13) a_n = \frac{3n+2}{300n+7};$$

$$14) a_n = \frac{4n^2+2}{5n^2-1};$$

$$15) a_n = \left(\frac{6n+1}{7n+9} \right)^4;$$

$$16) a_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n(n+7)} \right)^3,$$

(де a_n – n-й член числового ряду).

9.14. Дослідити збіжність ряду, використовуючи ознаку порівняння:

- 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \alpha|}{n^2}$;
- 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2}$;
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}$;
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2}}$;
- 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+3)^{5/3}}$;
- 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$;
- 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$;
- 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$;
- 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;
- 13) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$;
- 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)n}$;
- 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$;
- 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$;
- 17) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$;
- 18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$;
- 19) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$;
- 20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+4^n}$;
- 21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5+5^n}$.

9.15. Дослідити збіжність даних рядів за допомогою граничної ознаки порівняння:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$;
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$;
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+2}{n^2+1}$ (Вказівка: порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$);
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$;
- 8) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$;
- 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$;

§1. Числові ряди

10) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ (Вказівка: врахувати, що при $n \rightarrow \infty$ $e^{\frac{1}{n}} - 1$

еквівалентно $\frac{1}{n}$);

11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{1}{n^2}$;

13) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \operatorname{tg} \frac{1}{n+1}$;

14) $\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-2n}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$;

16) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{n-1} \sin \frac{2}{3^n}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{e^{2n}}$;

18) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \sin \frac{5}{2^n}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$;

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}}{n\sqrt{n}}$.

9.16. Дослідити збіжність рядів користуючись ознакою Даламбера.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;

6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$;

8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2} \sqrt{n}}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(2n+1)!}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n-1)!}{(2n-1)!}$;

18) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^n}{n!}$;

20) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n-1)!}$.

9.17. Дослідити збіжність рядів, використовуючи радикальною ознакою Коші.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(5n+1)^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}}{3^n}; \quad 11) a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2};$$

$$12) a_n = \left(\ln \frac{2n+3}{2n+1} \right)^n; \quad 13) a_n = \left(\arctg \frac{1}{n+1} \right)^n;$$

$$14) a_n = \frac{1}{5^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}; \quad 15) a_n = \left(\frac{n\sqrt{n+3}}{4\sqrt{n^3-1}} \right)^n;$$

$$16) a_n = \left(\frac{2n+1}{n^2+1} \right)^n; \quad 17) a_n = \left(\arcsin \frac{2}{n} \right)^{3n};$$

$$18) a_n = \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n^2}; \quad 19) a_n = \left(\frac{1+n\sqrt[3]{n}}{5n^{\frac{1}{3}}-3} \right)^n;$$

$$20) a_n = \ln \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^{n^2} \quad (\text{де } a_n - n\text{-й член числового ряду}).$$

9.18. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи інтегральною ознакою Коші.

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n};$$

§1. Числові ряди

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2};$$

$$8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n)^2}{1+n^2};$$

$$9) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)^2}{1+n^2};$$

$$12) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$$

$$13) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n \ln^2 n^3};$$

$$14) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-4n};$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) 2^{3n};$$

$$16) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 5};$$

$$17) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^3(n+3)};$$

$$18) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)^7};$$

$$19) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{(n+2) \ln^2(n+2)^4};$$

$$20) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)^2 - 1}.$$

9.19. Довести кожне із співвідношень за допомогою ряду, загальним членом якого є дана числова функція.

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0;$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^{2n}} = 0 \quad (a > 1);$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0;$$

$$г) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

Знакозмінні ряди

9.20. З'ясувати, які із даних рядів збіжні абсолютно, які не абсолютно, які є розбіжними.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n(n+1)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^n} 4;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1}{2n-1};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3};$$

- | | |
|---|---|
| 9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$; | 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n^2}$; |
| 11) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}$; | 12) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$; |
| 13) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+1}{3n^2+2}$; | 14) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)!}$; |
| 15) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n-1)7^n}$; | 16) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3n!}$; |
| 17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^{n+2}}$; | 18) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n+2)}{5n-7}$; |
| 19) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n-2}$; | 20) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{n^3+1}$. |

§ 2. Функціональні ряди

Інтервали збіжності.

В задачах 9.21-9.32 знайти інтервали збіжності ряду та дослідити збіжність на кінцях інтервалу.

9.21. а) $10x + 100x + \dots + 10^n x^n + \dots$;

б) $a_n = 2^n \sin \frac{x}{3^n}$.

9.22. а) $x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + \dots$;

б) $a_n = \frac{2^n}{n(x+1)^n}$.

9.23. а) $\ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \dots + \ln^n x + \dots$;

б) $a_n = \frac{1}{(2n-1)x^n}$.

9.24. а) $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$;

б) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n(x-5)^n}$.

§ 2. Функціональні ряди

9.25. а) $x + \frac{x}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots$;

б) $a_n = \frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)^2} x^n$.

9.26. а) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \dots + \frac{1}{1+x^n} + \dots$;

б) $a_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}}$.

9.27. а) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3+\sqrt{3}} + \dots + \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \dots$;

б) $a_n = \frac{n^n}{x^n}$.

9.28. а) $\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} + \dots + \sin \frac{x}{2^n} + \dots$;

б) $a_n = \frac{(x+n)^n}{n^n}$.

9.29. а) $x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + x^3 \operatorname{tg} \frac{x}{8} + \dots + x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots$;

б) $a_n = \frac{n}{n^2+1} \left(\frac{1+2x}{1+3x} \right)^n$.

9.30. а) $\frac{\cos x}{e^x} + \frac{\cos 2x}{e^{2x}} + \frac{\cos 3x}{e^{3x}} + \dots + \frac{\cos nx}{e^{nx}} + \dots$;

б) $a_n = \frac{x^n}{2^n}$.

9.31. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2) \cdot 2^n}}$;

б) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

9.32. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n-1}$;

б) $a_n = x^n \sin \frac{x}{a^n}$, де $a > 1$.

Примітка: в пунктах б) a_n -- n -й член ряду.

В задачах 9.33-9.36 показати, що даний ряд рівномірно збіжний при всіх $x \in \mathbb{R}$.

$$9.33. 1 + \frac{\sin x}{1!} + \frac{\sin 2x}{2!} + \frac{\sin 3x}{3!} + \dots + \frac{\sin nx}{n!} + \dots$$

$$9.34. \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{2^3} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$$

$$9.35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}.$$

9.36. Показати, що ряд рівномірно збіжний в області, де визначена функція:

$$1) \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+2x}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} + \dots;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad x \in [-2; 2];$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, \quad x \in [2; 4];$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}, \quad x \in [-7; 3];$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right];$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n^{2n}}, \quad x \in [-1; 1];$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n+1}}{n^3 3^n}, \quad x \in [-5; 1];$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, \quad x \in [-1; 1];$$

$$9) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(x+2)^n}{(n+1)^3 \sqrt{n+2}}, \quad x \in [-3; 1];$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right];$$

§ 2. Функціональні ряди

$$11) \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} (x-2)^n, \quad x \in [1; 3];$$

$$12) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n \ln n}, \quad x \in [-2; 2];$$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}, \quad x \in [-3; -1];$$

$$14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad x \in [-5; -1];$$

$$15) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n \ln n}, \quad x \in [-2; 2].$$

Скільки потрібно взяти членів, щоб при будь-якому невід'ємному x , можливо було обчислити суму ряду з точністю до 10^{-3} ?

9.37. Функція визначена рівністю $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{10^n}$. Показати, що функція $f(x)$ визначена і неперервна при будь-якому x . Знайти $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ і $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Переконайтесь в тому, що для обчислення значень функції $f(x)$ при довільних x з точністю до 0,001 досить врахувати три члени розкладу. Знайти з вказаною точністю $f(1)$ і $f(-0,2)$.

9.38. Обчислити при $|x| < 1$ суму і залишок ряду $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ та показати, що він рівномірно збіжний на відрізку $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. При яких n залишок $|R_n(x)| < 0,001$ для будь-якого x на цьому відрізку?

9.39. Показати, що ряд $x + x(1-x) + x(1-x)^2 + x(1-x)^3 + \dots$ збіжний нерівномірно на відрізку $[0; 1]$ і рівномірно на $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. При яких n залишок задовольнятиме умові $|R_n(x)| < 0,01$ для будь-якого $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$?

9.40. Показати, що ряд $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{3\sqrt{1+3x}} + \frac{1}{3^2\sqrt{1+5x}} + \frac{1}{3^3\sqrt{1+7x}} + \dots$ збіжний рівномірно при $x \in [0; \infty)$.

9.41. Показати, що ряд

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} - \frac{1}{16+x^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^2+x^2} + \dots \quad \text{збіжний}$$

рівномірно на всій числовій осі. При яких n (та будь-якому x) залишок ряду $|R_n(x)| < 0,0001$?

9.42. Довести, що ряд $\sin x + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \dots + \frac{\sin nx}{n^3} + \dots$ почленно можливо диференціювати.

9.43. Довести, що ряд $\frac{\cos x}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2x}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3x}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\cos nx}{n \cdot (n+1)} + \dots$ являє собою неперервну функцію.

9.44. Довести, що ряд $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} \cdot x}{a^{n^2}}$, де $a > 1$ являє собою неперервну функцію. Довести, що при $a > 2$ ця сума має похідну

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^{n^2} \cdot \cos 2^{n^2} \cdot x.$$

Рівномірна збіжність

9.45. Показати що ряд $x^2 + x^6 + \dots + x^{4n-2} + \dots$ рівномірно збіжний в інтервалі $-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega$ де ω -будь-яке додатне число, менше 1. Інтегруванням даного ряду знайти в інтервалі $(-1; 1)$ суму ряду:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots$$

Знайти інтервал збіжності ряду та його суму:

9.46. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$

9.47. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$

Знайти суму ряду:

9.48. $x + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots$

9.49. $\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots$

§ 2. Функціональні ряди

9.50. Функція $f(x)$ визначена рівністю
 $f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \dots + ne^{-nx} + \dots$

Показати, що $f(x)$ неперервна на всій додатній півосі Ox . Обчислити
 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$.

9.51. Знайти суму ряду $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$

Вказівка: позначити суму ряду через S , та розглянути вираз $S - S \cdot x$ в вигляді сумованого ряду.

9.52. Знайти суму ряду $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$

Вказівка: показати, що $\frac{S'}{m} + \frac{S' \cdot x}{m} = S$ і розв'язати це диференціальне рівняння.

9.53. Функція $f(x)$ визначена рівністю
 $f(x) = 1 + 2 \cdot 3x + \dots + n \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots$

Показати, що функція $f(x)$ неперервна при $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Обчислити
 $\int_0^{0,125} f(x) dx$.

9.54. Виходячи із співвідношення $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, знайти суму ряду:

а) $1 - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} + \dots$; б) $1 - \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3} + \dots$

9.55. Виходячи із співвідношення $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n}$, знайти

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

9.56. Виходячи із співвідношення

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2},$$

знайти суму $\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} + \dots$

В задачах 9.57-9.60 прямим диференціюванням знайти суму ряду.

$$9.57. x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad |x| < 1.$$

$$9.58. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1.$$

$$9.59. x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad 9.60. 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Степеневі ряди

В задачах 9.61-9.65 розвинути функцію в ряд Тейлора в околі точки $x = x_0$.

$$9.61. y = \ln x \quad x_0 = 1.$$

$$9.62. y = \sqrt{x^3} \quad x_0 = 1.$$

$$9.63. y = \sin \frac{\pi x}{4} \quad x_0 = 2.$$

$$9.64. y = \frac{1}{x} \quad x_0 = -2.$$

$$9.65. y = \sqrt{x} \quad x_0 = 4.$$

В задачах 9.66-9.70 знайти п'ять членів ряду Маклорена.

$$9.66. y = \ln(1 + e^x). \quad 9.67. y = e^{\cos x}.$$

$$9.68. y = (1 + x)^x. \quad 9.69. y = -\ln \cos x.$$

$$9.70. y = \cos^n x.$$

Використовуючи формули розвинення функцій $[(e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^m$ і т. д.)] в ряд Тейлора в околі точки $x=0$, розвинути функції в ряд:

$$9.71. y = e^{2x}. \quad 9.72. y = e^{-x^2}.$$

$$9.73. y = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}. \quad 9.74. y = \cos^2 x.$$

$$9.75. y = (x - \operatorname{tg} x) \cdot \cos x. \quad 9.76. y = \ln(10 + x).$$

§ 3. Застосування рядів Тейлора

$$9.77. y = \sqrt{1+x^2}.$$

$$9.78. y = \sqrt[3]{8-x^3}.$$

$$9.79. y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$9.80. y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9.81. y = \ln(1+x).$$

$$9.82. y = \sin \frac{x}{2}.$$

$$9.83. y = xe^x.$$

$$9.84. y = \sin \left(xm + \frac{\pi}{3} \right).$$

§ 3. Застосування рядів Тейлора

В задачах 9.85-9.87 обчислити наближені значення виразів, взявши n -членів розвинення в ряд Маклорена та оцінити похибку.

$$9.85. 1) \sqrt[3]{e} \quad n=3; \quad 2) \sqrt{0,992} \quad n=3;$$

$$3) \sin 12^\circ \quad n=2; \quad 4) \pi \quad n=5.$$

$$9.86. 1) \sin 18^\circ \quad n=3; \quad 2) \sqrt[3]{0,991} \quad n=2;$$

$$3) \ln 1,8 \quad n=4; \quad 4) \sqrt[3]{130} \quad n=2.$$

$$9.87. 1) \sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1,25} \quad n=4; \quad 2) \ln 8,2 \quad n=4;$$

$$3) \sqrt{1,004} \quad n=2; \quad 4) \cos 32^\circ \quad n=2.$$

В задачах 9.88-9.92, використовуючи формули розвинення в ряд Маклорена функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$, обчислити дані вирази з вказаною точністю ε :

$$9.88. e^2 \quad \varepsilon = 10^{-3}. \quad 9.89. \sqrt{e} \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$9.90. \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \quad \varepsilon = 10^{-3} \quad 9.91. \cos 1^\circ \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$9.92. \sin 10^\circ \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

В задачах 9.93-9.98, використовуючи розвинення в ряд функцію $(1+x)^m$, в околі $x_0 = 0$ обчислити корені з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$9.93. \sqrt[3]{30}. \quad 9.94. \sqrt[3]{70}. \quad 9.95. \sqrt[3]{500}.$$

$$9.96. \sqrt[3]{1,015}. \quad 9.97. \sqrt[5]{250}. \quad 9.98. \sqrt[19]{1027}.$$

В задачах 9.99-9.101 використовуючи розвинення в ряд функцію $\ln \frac{1+x}{1-x}$, обчислити з точністю ε .

9.99. $\ln 3$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

9.100. $\lg e = \frac{1}{\ln 10}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

9.101. $\lg 5$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

9.102. Задані рівняння:

1) $xy + e^x = y$; (3 члени)

2) $y = \ln(1+x) - xy$; (3 члени)

3) $y^2 + xy = 1$ (3 члени);

4) $2\sin x + \sin y = x - y$ (2 члени);

5) $e^x - e^y = xy$ (3 члени);

6) $y' = y - xe^y$ (4 члени), якщо $y(0) = 1$;

7) $y'' - xy' + y = 0$ (3 члени), якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

8) $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$ (5 членів);

9) $y'' - yy' = -2x^2$ (3 члени);

10) $y' + y^2 = e^x$ (3 члени).

Користуючись методом невизначених коефіцієнтів, знайти розвинення функції в ряд Тейлора за степенями x . Записати вказану в дужках кількість членів в розкладі. Розв'язати задачу, знаходячи коефіцієнти ряду Тейлора послідовним диференціюванням.

9.103. Показати, що $y = 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$ задовольняє диференціальному рівнянню $y'' + xy = 0$.

9.104 Показати, що функція $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ є розв'язком диференціального рівняння $xy'' + y' - y = 0$.

9.105. Показати, що функція $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' - xy = 0$.

9.106. Знайти розвинення в степеневий ряд до вказаного степеня розв'язку диференціального рівняння:

§ 3. Застосування рядів Тейлора

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|------------------|
| 1) $y'' = xy' + y$ | $y(0) = 1, y'(0) = 1$ | (до x^4); |
| 2) $y' = y$ | $y(0) = 1$ | (до x^6); |
| 3) $y' = x^2 - y^2$ | $y(1) = 2$ | (до $(x-1)^2$); |
| 4) $y' = y + xe^y$ | $y(0) = 3$ | (до x^4); |
| 5) $y'' = xy' - y + e^x$ | $y(0) = 1, y'(0) = 0$ | (до x^4); |
| 6) $y'' = x + \cos y'$ | $y(0) = 1, y'(0) = \frac{\pi}{3}$ | (до x^3); |
| 7) $(1+x^2)y'' + xy' - 2y = 0$ | $y(0) = 1, y'(0) = 1$ | (до x^3); |
| 8) $y'' = yy' - x^2$ | $y(0) = 1, y'(0) = 1$ | (до x^4); |
| 9) $y'' = x \sin y'$ | $y(0) = 0, y'(0) = \frac{\pi}{2}$ | (до x^4); |
| 10) $y' + xy^2 = 2 \cos x$ | $y(0) = 1$ | (до x^3); |
| 11) $y'' + \cos x = 0$ | $y(0) = 3, y'(0) = 0$ | (до x^4); |
| 12) $y' = x^2 - y^2$ | $y(0) = 2$ | (до x^4); |
| 13) $y'' = yy' - x^2$ | $y(0) = 1, y'(0) = 0$ | (до x^4); |
| 14) $y'' = xy y'$ | $y(0) = y'(0) = 1$ | (до x^5); |
| 15) $y''' = ye^x$ | $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ | (до x^6); |
| 16) $y'' = xy' - y + 1$ | $y(0) = 3, y'(0) = 1$ | (до x^4); |
| 17) $y''' - y' \sin x + y = 1$ | $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 2$ | (до x^4); |
| 18) $y''' = (y')^2$ | $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ | (до x^5); |
| 19) $y' = y - xe^y$ | $y(0) = 2$ | (до x^4); |
| 20) $y' = x + x^2 + y^2$ | $y(0) = 1$ | (до x^5); |

9.107. Обчислити інтеграли з заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

- | | |
|---|--|
| 1) $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$; | 2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; |
| 3) $\int_0^{0.5} \frac{\arctg x}{x} dx$; | 4) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} dx$; |
| 5) $\int_0^1 \sin x^2 dx$; | 6) $\int_0^{1/10} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; |

7) $\int_0^1 \operatorname{ctg} x dx$;

8) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

9) $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x} dx}{x^3}$;

10) $\int_0^{0,8} x^{10} \sin x dx$;

11) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16+x^4}}$;

12) $\int_0^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx$;

13) $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$;

14) $\int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx$;

15) $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x} dx$;

16) $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$;

17) $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27-x^3}}$;

18) $\int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx$;

19) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$;

20) $\int_0^{0,5} e^{-\frac{3}{25}x^2} dx$.

9.108. Обчислити наближені значення визначних інтегралів, взявши вказане число n членів розкладу підінтегральної функції в ряд. Вказати похибку:

а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x} dx \quad (n=3)$;

б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad (n=2)$;

в) $\int_{0,1}^1 \frac{e^x}{x} dx \quad (n=6)$;

г) $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \arctg x dx \quad (n=2)$.

9.109. Обчислити площу, обмежену лінією $y^2 = x^3 + 1$, віссю ординат та прямою $x = \frac{1}{2}$ з точністю до 0,001.

§ 4. Ряди Фур'є

9.110. Обчислити площу, обмежену лінією $x^4 + y^4 = 1$ з точністю до 0,01.

9.111. Обчислити довжину дуги лінії $25y^2 = 4x^5$ від “вістря” до точки перетину з параболою $5y = x^2$ з точністю до 0,0001.

9.112. Фігура, обмежена лініями $y = \arctg x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання з точністю до 0,001.

9.113. Знайти координати центра мас дуги гіперболи $y = \frac{1}{x}$, обмеженої лініями $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$. Точність обмежень 0,001.

9.114. Знайти координати центра мас криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y = \frac{1}{\ln x}$, прямими $x = 1,5$, $x = 2$ та $y = 0$.

В задачах 9.115-9.118, використовуючи розвинення в ряд Тейлора, обчислити границі виразів.

$$\mathbf{9.115.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}.$$

$$\mathbf{9.116.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^4}{x^5}.$$

$$\mathbf{9.117.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x - 1)}.$$

$$\mathbf{9.118.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^2 \sin x} - \frac{3}{x^4} \right).$$

§ 4. Ряди Фур'є

В завданнях 9.119-9.146 розвинути функцію в ряд Фур'є.

$$\mathbf{9.119.} f(x) = x, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

$$\mathbf{9.120.} f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

$$9.121. f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

$$9.122. f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi; \pi].$$

$$9.123. f(x) = e^x, \quad x \in (0; 2\pi).$$

$$9.124. f(x) = x, \quad x \in (0; 2\pi).$$

$$9.125. f(x) = x^2, \quad x \in (0; 2\pi).$$

$$9.126. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$$

$$9.127. f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ x - 2\pi, & \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \end{cases}.$$

$$9.128. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ 1, & \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \end{cases}.$$

$$9.129. f(x) = \begin{cases} \pi x - x^2, & 0 < x < \pi \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi^2, & \pi < x < 2\pi \end{cases}.$$

$$9.130. f(x) = \frac{a}{\pi}(\pi - x), \quad 0 < x < 2\pi.$$

$$9.131. f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{2}\pi \\ \cos x, & \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi \end{cases}.$$

§ 4. Ряди Фур'є

9.132. $f(x) = x^3, x \in (-\pi; \pi)$.

9.133. $f(x) = e^x, x \in (-l; l)$.

9.134. $f(x) = \sin ax, x \in (-\pi; \pi)$, де a - не ціле число.

9.135. $f(x) = x^2, x \in (-\pi; \pi)$. За допомогою отриманого в задачі 9.122 ряду показати, що:

а) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$;

б) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

9.136. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

9.137. $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, x \in (-\pi; \pi)$.

9.138. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0 \\ -2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$.

9.139. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \quad a < x \leq \pi \\ 1, & 0 < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \quad x = a \end{cases}, \quad T = 2\pi.$

9.140. $f(x) = 2x - 3, x \in [-\pi; \pi]$.

9.141. 1) $f(x) = 5x + 2, x \in (-\pi; \pi)$;

2) $y = |\sin x|, x \in \mathbb{R}$.

9.142. $f(x) = |x| - 5, x \in (-2; 2)$.

9.143. $f(x) = 5x - 1, x \in (-5; 5)$.

9.144. $f(x) = 3 - |x|, x \in (-5; 5)$.

9.145. $f(x) = 2x - 3, x \in (-3; 3)$.

9.146. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in [-\pi; 0] \\ 3x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$.

В завданнях 9.147-9.162 розвинути функцію в ряд Фур'є за синусами або косинусами, довизначивши функцію відповідним способом.

$$9.147. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ 0, & \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi. \\ -\frac{1}{3}\pi, & \frac{2}{3}\pi < x < \pi \end{cases}$$

9.148. $f(x) = x, x \in (0; \pi)$ в ряд синусів.

$$9.149. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$
 в ряд косинусів.

9.150. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}, x \in (0; \pi)$ в ряд синусів.

9.151. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0; \pi)$ в ряд косинусів.

9.152. $f(x) = x(l - x), x \in (0; l)$ в ряд косинусів.

9.153. $f(x) = \cos ax, x \in (0; \pi)$ в ряд синусів.

9.154. $f(x) = \operatorname{ch} x, x \in (0; \pi)$:

а) в ряд косинусів;

б) в ряд синусів.

9.155. $f(x) = \cos 2x, x \in (0; \pi)$ в ряд синусів.

9.156. $f(x) = \sin x, x \in (0; \pi)$ в ряд косинусів.

9.157. $f(x) = 2x, x \in (0; 1)$ в ряд синусів.

9.158. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0; \pi)$ в ряд косинусів.

9.159. $f(x) = |\sin x|, x \in R$ в ряд косинусів.

9.160. $f(x) = x \cdot \sin x, x \in (0; \pi)$ в ряд косинусів.

9.161. $f(x) = \cos 3x, x \in (0; \pi)$ в ряд синусів.

9.162. $f(x) = 1, x \in (0; \pi)$, де $f(-x) = -f(x)$.

§ 4. Ряди Фур'є

В завданнях 9.163-9.172 розвинути функцію в ряд Фур'є на довільному інтервалі.

9.163. $f(x) = x$, $x \in [0; \pi]$, де $f(-x) = f(x)$. За допомогою отриманого ряду в задачі 9.148 показати, що $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$.

9.164. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$.

9.165. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 3 \\ 4 - x, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$.

9.166. $f(x) = e^x - 1$, $x \in (0; 2\pi)$.

9.167. Розвинути в ряд Фур'є функції, графіки яких зображені на:

- а) Рис.6;
- б) Рис.7;
- в) Рис.8;
- г) Рис.9.

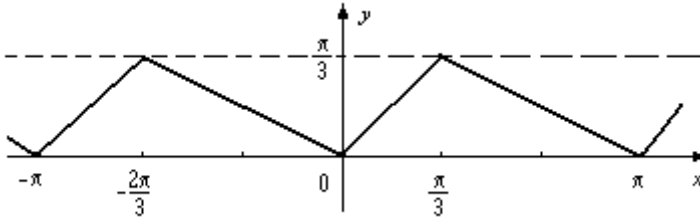


Рис. 6

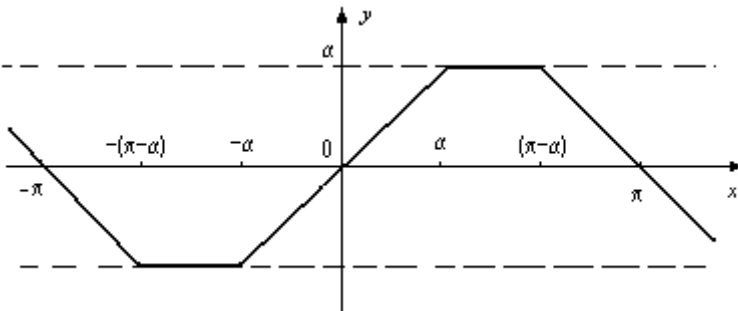


Рис. 7

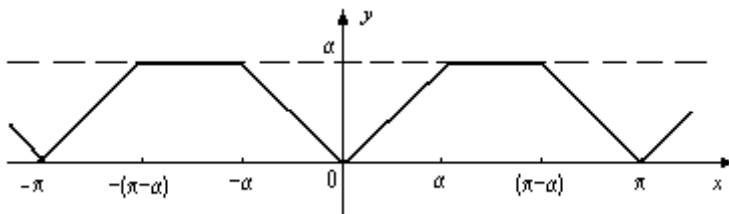


Рис. 8

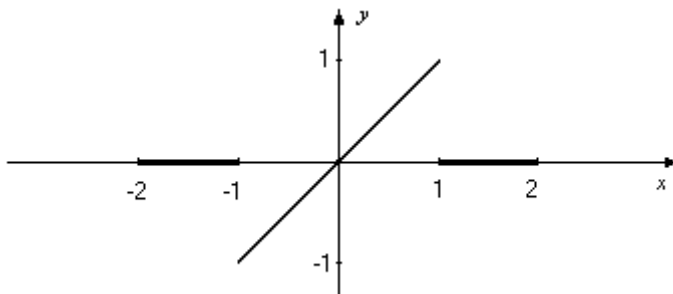


Рис. 9

9.168. $f(x) = |\cos x|, x \in R.$

9.169. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

9.170. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

9.171. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$ на інтервалі $(0; 2)$:

а) в ряд синусів;

б) в ряд косинусів.

9.172.
$$\begin{cases} \frac{4h}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \\ -\frac{4h}{l} \left(x - \frac{l}{2} \right), & \frac{l}{4} < x \leq \frac{3}{4}l \\ \frac{4h}{l} (x-l), & \frac{3}{4}l < x \leq l \end{cases}$$

Комплексна форма ряду Фур'є.

В завданнях 9.173-9.178 записати рядом Фур'є в комплексній формі функцію $f(x)$ з вказаним періодом.

$$9.173. f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0] \\ e^{-x}, & x \in (0; \pi] \end{cases}, \quad T = 2\pi.$$

$$9.174. f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1; 0) \\ 1, & x \in (0; 1) \end{cases}, \quad T = 2 = 2l.$$

$$9.175. f(x) = \operatorname{ch} x, \quad x \in (-\pi; \pi), \quad 2l = 2\pi.$$

$$9.176. f(x) = \operatorname{sh} x, \quad x \in (-\pi; \pi), \quad 2l = 2\pi.$$

$$9.177. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1; 1) \\ 0, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2) \end{cases}, \quad 2l = 4.$$

$$9.178. f(x) = e^{2x}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad 2l = 1.$$

Інтеграл Фур'є

В завданнях 9.179-9.185 записати інтегралом Фур'є функцію.

$$9.179. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = 1. \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$

$$9.180. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$9.181. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$9.182. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1; 1) \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \\ \frac{1}{2}, & x = \pm 1 \end{cases}$$

$$9.183. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi] \\ 0, & x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

$$9.184. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^x, & x < 0 \end{cases}$$

$$9.185. f(x) = \begin{cases} 4, & x \in (-1; 1) \\ 0, & x \notin (-1; 1) \end{cases}$$

В завданнях 9.186-9.190 записати інтегралом Фур'є функцію, продовживши їх парним способом на від'ємну піввісь.

$$9.186. f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & x \in [0; 2] \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$9.187. f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0; 1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$9.188. f(x) = e^{-ax}, \quad x \geq 0, \quad a > 0.$$

$$9.189. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$9.190. f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

В завданнях 9.191-9.199 записати інтегралом Фур'є функцію, продовживши їх непарним способом на від'ємну піввісь.

$$9.191. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [0; 1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$9.192. f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos x, & x \in [0; \pi) \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & x = \pi \end{cases}.$$

$$9.193. f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & x \in \left[0; \frac{2}{3}\right] \\ 0, & x > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$9.194. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi] \\ 0, & x > \pi \end{cases}.$$

9.195. Знайти косинус і синус перетворення Фур'є для функції.

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$$9.196. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; \alpha) \\ \frac{1}{2}, & x = \alpha \\ 0, & x > \alpha \end{cases}.$$

В задачах 9.197-9.199 знайти перетворення Фур'є функції.

$$9.197. f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \\ 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ -x + 1, & x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

$$9.198. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}.$$

$$9.199. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0; \pi] \\ 0, & x \notin [0; \pi] \end{cases}.$$

Комплексна форма інтеграла Фур'є

Знайти спектральну функцію $S(\alpha)$ і амплітудний спектр. Записати функцію $f(x)$ в комплексній формі інтеграла Фур'є.

$$9.200. f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad a > 0.$$

$$9.201. f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 1, & 1 < |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

9.202. Записати функцію $f(x)$ в комплексній формі інтеграла Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

9.203. Записати в комплексній формі інтеграла Фур'є. Знайти спектральну характеристику, амплітудний спектр.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; a) \\ 0, & x \notin (0; a) \end{cases}$$

$$9.204. f(x) = \begin{cases} e^{-ax} \cdot \sin \omega t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0, \quad a > 0 \end{cases}$$

Відповіді

Відповіді

До глави VI

- 6.1. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$. 6.2. $\frac{mx^{\frac{n}{m+1}}}{n+m} + C$. 6.3. $C - \frac{1}{x}$. 6.4. $\approx 0,4343 \cdot 10^x + C$.
- 6.5. $\frac{(ae)^x}{1 + \ln a} + C$. 6.6. $\sqrt{x} + C$. 6.7. $\sqrt{\frac{2h}{g}} + C$. 6.8. $\approx 4,1x^{0,83} + C$.
- 6.9. $u - u^2 + C$. 6.10. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + c$. 6.11. $C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|$.
- 6.12. $C - 10x^{-0,2} + 15x^{0,2} - 3,62x^{1,38}$. 6.13. $z - 2\ln|z| - \frac{1}{z} + C$.
- 6.14. $\frac{2x^2 - 12x - 6}{3\sqrt{x}} + C$. 6.15. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt{x} + C$.
- 6.16. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$. 6.17. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C$. 6.18. $3x - \frac{2 \cdot 1,5^x}{\ln 1,5} + C$.
- 6.19. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x + x) + C$. 6.20. $C - \operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x$. 6.21. $\operatorname{tg}x - x + C$. 6.22. $C - \operatorname{ctg}x - x$.
- 6.23. $x - \sin x + C$. 6.24. $\arctg x - \frac{1}{x} + C$. 6.25. $\ln|x| + 2\arctg x + C$. 6.26. $\operatorname{tg}x + C$.
- 6.27. $\frac{\pi}{2}x + C$. 6.28. $\frac{\sin^2 x}{2} + C$. 6.29. $\operatorname{tg}^4 \frac{x}{4} + C$. 6.30. $2\sqrt{1+x^2} + C$.
- 6.31. $\frac{(x+1)^{16}}{16} + C$. 6.32. $C - \frac{4}{8(2x-3)^4}$. 6.33. $\frac{(a+bx)^{1-c}}{b(1-c)} + C$.
- 6.34. $C - \frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}}$. 6.35. $C - \frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$. 6.36. $\frac{3m}{b}\sqrt[3]{a+bx} + C$.
- 6.37. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$. 6.38. $C - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$. 6.39. $\frac{5}{18}\sqrt[3]{(x^3+2)^6} + C$.
- 6.40. $\sqrt{x^2+1} + C$. 6.41. $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + C$. 6.42. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} + C$.
- 6.43. $\sqrt{3x^2-5x+6} + C$. 6.44. $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$. 6.45. $\sec x + C$. 6.46. $3\sqrt[3]{\sin x} + C$.

Відповіді

- 6.47. $C - \frac{2}{5} \cos^5 x$. 6.48. $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x)^3} + C$. 6.49. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3} + C$.
- 6.50. $C - \frac{1}{2(\arcsin x)^2}$. 6.51. $2\sqrt{1+\operatorname{tg}x} + C$. 6.52. $\sin 3x + C$. 6.53. $\operatorname{tg}(1+\ln x) + C$.
- 6.54. $\frac{1}{3} \sin 3x + C$. 6.55. $x \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin 2x + C$. 6.56. $C - \frac{1}{2} \cos(2x-3)$.
- 6.57. $C - \frac{1}{2} \sin(1-2x)$. 6.58. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C$ або $\frac{1}{2} (\operatorname{tg} 4x - \sec 4x) + C$.
- 6.59. $C - \cos(e^x)$. 6.60. $\ln(1+x^2) + C$. 6.61. $\ln|\arcsin x| + C$.
- 6.62. $\ln(x^2-3x+8) + C$. 6.63. $\frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$. 6.64. $\frac{1}{c} \ln|cx+m| + C$.
- 6.65. $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$. 6.66. $\frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C$. 6.67. $\ln(e^x+1) + C$.
- 6.68. $\frac{1}{2} \ln(e^{2x}+a^2) + C$. 6.69. $C - \ln|\cos x|$. 6.70. $\ln|\sin x| + C$.
- 6.71. $C - \frac{1}{3} \ln|\cos 3x|$. 6.72. $\frac{1}{2} \ln|\sin(2x+1)| + C$. 6.73. $C - \ln(1+\cos^2 x)$.
- 6.74. $\ln|\ln x| + C$. 6.75. $\frac{\ln^{m+1} x}{m+1} + C$, якщо $m \neq -1$ і $\ln|\ln x| + C$, якщо $m = -1$.
- 6.76. $e^{\sin x} + C$. 6.77. $e^{\sin x} + C$. 6.78. $\frac{a^{3x}}{3 \ln a} + C$. 6.79. $C - \frac{a^{-x}}{\ln a}$. 6.80. $C - \frac{e^{1-3x}}{3}$.
- 6.81. $0,5 e^{x^2} + C$. 6.82. $C - \frac{1}{3} e^{-x^3}$. 6.83. $\arcsin \frac{x}{3} + C$. 6.84. $\frac{1}{5} \arcsin 5x + C$.
- 6.85. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C$. 6.86. $\arcsin \frac{x}{2} + C$. 6.87. $\frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3} x + C$.
- 6.88. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C$. 6.89. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$. 6.90. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{a} + C$.
- 6.91. $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C$. 6.92. $\frac{1}{4} \arcsin x^4 + C$. 6.93. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C$.
- 6.94. $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C$. 6.95. $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{a} + C$. 6.96. $e^x + e^{-x} + C$.
- 6.97. $\frac{1}{3} e^{3x} + \frac{3}{2} e^{2x} + 3e^x + x + C$. 6.98. $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$.
- 6.99. $\frac{3}{2} \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$. 6.100. $\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Відповіді

- 6.101. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + C$. 6.102. $\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$.
- 6.103. $\frac{2}{3} \left[x^3 - \sqrt{(x^2 - 1)^3} \right] - x + C$. 6.104. $C - 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3}$.
- 6.105. $C - \frac{1}{9} \left[\sqrt{1-9x^2} + (\arccos 3x)^3 \right]$. 6.106. $x - 4 \ln|x+4| + C$.
- 6.107. $\frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \ln|2x+1| \right] + C$. 6.108. $\frac{A}{b} \left[x - \frac{a}{b} \ln|bx+a| \right] + C$.
- 6.109. $C - x - 6 \ln|3-x|$. 6.110. $2x + 3 \ln|x-2| + C$. 6.111. $\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \ln|2x-1| + C$.
- 6.112. $x + \ln(x^2 + 1) + C$. 6.113. $x - 2 \operatorname{arctg} x + C$. 6.114. $C - \frac{1}{4}x^4 -$
 $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - \ln|1-x|$. 6.115. $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$. 6.116. $\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$.
- 6.117. $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$. 6.118. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2x-3}{x+1} \right| + C$. 6.119. $\frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{b-x}{a-x} \right| + C$.
- 6.120. $x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$. 6.121. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + C$. 6.122. $\frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-2}{x+5} \right| + C$.
- 6.123. $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C$. 6.124. $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}} \right| + C$. 6.125. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C$.
- 6.126. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$. 6.127. $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{1-2x}{3} + C$. 6.128. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2} + C$.
- 6.129. $\frac{1}{2} \arcsin(2x+3) + C$. 6.130. $\arcsin(x-2) + C$. 6.131. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-1}{3} + C$.
- 6.132. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C$. 6.133. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. 6.134. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.
- 6.135. $C - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. 6.136. $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + C$. 6.137. $2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - x + C$.
- 6.138. $2 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - x + C$. 6.139. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$. 6.140. $\ln(2 + \sin 2x) + C$.
- 6.141. $C - \frac{1}{4} \left(\frac{\cos 4x}{2} + \cos 2x \right)$. 6.142. $\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C$.
- 6.143. $\frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$. 6.144. $\frac{1}{8} \left(2x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x \right) + C$.

Відповіді

- 6.145.** $\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$. **6.146.** $\ln(1 + \sin x) + C$. **6.147.** $\frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C$.
6.148. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C$. **6.149.** $2\sqrt{\cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{5} - 1 \right) + C$. **6.150.** $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$.
6.151. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$. **6.152.** $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$. **6.153.** $C - \cos x +$
 $+\frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x$. **6.154.** $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$. **6.155.** $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x +$
 $+\ln |\cos x| + C$. **6.156.** $C - \operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x$. **6.157.** $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + C$.
6.158. $x \sin x + \cos x + C$. **6.159.** $C - e^{-x}(x+1)$. **6.160.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x \ln 3 - 1) + C$.
6.161. $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$. **6.162.** $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$. **6.163.** $x \arccos x -$
 $-\sqrt{1-x^2} + C$. **6.164.** $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$. **6.165.** $2\sqrt{x+1} \arcsin x +$
 $+4\sqrt{1-x} + C$. **6.166.** $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| + C$. **6.167.** $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$.
6.168. $C - \frac{1}{2x^2} \lg(x\sqrt{e})$. **6.169.** $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$.
6.170. $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}) + C$. **6.171.** $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$.
6.172. $\frac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C$. **6.173.** $x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C$.
6.174. $C - e^{-x}(2+2x+x^2)$. **6.175.** $e^x(x^3-3x^2-6x-6) + C$.
6.176. $a^x(x^2/\ln a - 2x/\ln^2 a + 2/\ln^3 a) + C$. **6.177.** $C - x^3 \cos x + 3x^2 \sin x +$
 $+6x \cos x - 6 \sin x$. **6.178.** $\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + C$.
6.179. $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C$. **6.180.** $C - \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6)$.
6.181. $C - \frac{8}{27\sqrt{x^3}} \left(\frac{9}{4} \ln^2 x + 3 \ln x + 2 \right)$. **6.182.** $x \arcsin^2 x + 2 \arcsin x \sqrt{1-x^2} - 2x + C$.
6.183. $\frac{x^2+1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$. **6.184.** $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$.
6.185. $\frac{e^{3x}}{13} (\sin 2x - 5 \cos 2x) + C$. **6.186.** $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2} (n \sin nx + a \cos nx) + C$.

Відповіді

- 6.187.** $\frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$. **6.188.** $\frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + C$.
- 6.189*.** $C - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$. (Покласти $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ і далі $\int \sqrt{1-x^2} dx$ перетворити до виду $\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$).
- 6.190*.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$ (Покласти $u = \sqrt{a^2+x^2}$).
- 6.191.** $\frac{x-2}{x+2}e^x + C$.
- 6.192.** $\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\sin x - (x-1)^2 \cos x\right]e^x + C$. **6.193.** $2\left[\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})\right] + C$.
- 6.194.** $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16) + C$. **6.195.** $C - \frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}$.
- 6.196.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$. **6.197.** $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\arctg\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$.
- 6.198.** $2\left[\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right] + C$. **6.199.** $2\arctg\sqrt{x} + C$.
- 6.200.** $2(\sqrt{x} - \arctg\sqrt{x}) + C$. **6.201.** $\frac{3}{2}(x+1)^{2/3} - 3(x+1)^{1/3} + 3\ln\left|1 + \sqrt[3]{x+1}\right| + C$.
- 6.202.** $\frac{2}{a}\left[\sqrt{ax+b} - m\ln\left|\sqrt{ax+b} + m\right|\right] + C$. **6.203.** $x + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C$. **6.204.** $3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right| + C$. **6.205.** $2\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 4\ln\left(1 + \sqrt[3]{x}\right) + C$. **6.206.** $\frac{6}{5}\left[\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[3]{x^5} + 2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right] + C$.
- 6.207.** $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[3]{(e^x+1)^3} + C$. **6.208.** $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$. **6.209.** $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right| + C$. **6.210.** $0,4\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}(3-2\cos^2 x) + C$.
- 6.211.** $\frac{1}{2}\ln^2 \operatorname{tg} x + C$. **6.212.** $C - \frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}(2a^3+x_3)$. **6.213.** $\frac{x^2-4}{2} + \frac{8}{x^2-4} + 4\ln|x^2-4| + C$. **6.214.** $C - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$. **6.215.** $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$. **6.216.** $C - \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|}$. **6.217.** $C - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

Відповіді

- 6.218. $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x$. 6.219. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$. 6.220. $C - \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{45x^5}$.
- 6.221. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$. 6.222. $\ln \frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + C$. 6.223. $C - \frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$.
- 6.224. $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin \frac{x}{2} + C$. 6.225. $\frac{1}{4\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x\sqrt{15} + 2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15} - 2\sqrt{4x^2+1}} \right| + C$.
- 6.226*. $\arccos \frac{1}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$ (Можна застосувати підстановку $x = \frac{1}{z}$).
- 6.227*. $2\arcsin \sqrt{x} + C$ (Можна застосувати підстановку $x = \sin^2 z$).
- 6.228*. $\ln \left| \frac{x \cdot e^x}{1+x \cdot e^x} \right| + C$ (Помножити чисельник і знаменник на e^x і покласти $xe^x = z$).
- 6.229. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$. 6.230. $\left[(2-\sqrt[3]{x^2})\cos \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x} \right] + C$.
- 6.231. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$. 6.232. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$.
- 6.233. $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$. 6.234. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x)^3} + C$.
- 6.235. $\frac{1}{9}(1+e^{3x})^3 + C$. 6.236. $2e^{\sqrt{x}} + C$. 6.237. $e^{-\cos x} + C$. 6.238. $C - \frac{2}{3}(1-e^x)^{3/2}$.
- 6.239. $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$. 6.240. $C - \frac{5}{24}(2-3x^{4/3})^{6/5}$. 6.241. $C - \frac{1}{3}\ln|1+3x^3-x^6|$.
- 6.242. $\frac{2}{3}\ln(1+x^{3/2}) + C$. 6.243. $C - \ln(3+e^{-x})$.
- 6.244. $C - \arcsin e^{-x}$. 6.245. $2\sqrt{1+x^2} + 3\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$.
- 6.246. $\frac{1}{9}\left[2x\sqrt{9x^2-4} - 3\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}| \right] + C$. 6.247. $2\sin \sqrt{x} + C$.
- 6.248. $\arcsin \frac{\ln x}{\sqrt{3}} + C$. 6.249. $C - \frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x|$. 6.250. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$.
- 6.251. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{n+1} + C$, якщо $n \neq -1$, і $\ln|\operatorname{arctg} x|$, якщо $n = -1$.
- 6.252. $C - 2\operatorname{ctg} 2\varphi$. 6.253. $2x - \operatorname{tg} x + C$. 6.254. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C$.

Відповіді

- 6.255. $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}(5\operatorname{tg}^2 x+9)+C$. 6.256. $\frac{1}{3}(\operatorname{tg} 3x+\ln \cos ^2 3x)+C$.
- 6.257. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln |x+1|+C$. 6.258. $C-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$.
- 6.259. $\frac{\sqrt{2+4x}(x-1)}{6}+C$. 6.260. $x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.
- 6.261. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$. 6.262. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{4}{3}\sqrt{\sin ^3 x}-\cos x+C$.
- 6.263. $\frac{a^{mx}b^{nx}}{m \ln a+n \ln b}+C$. 6.264. $C-\ln \left[1-x+\sqrt{5-2x+x^2}\right]$.
- 6.265. $\frac{1}{3} \ln \left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right|+C$. 6.266. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.
- 6.267. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}}$. 6.268. $\frac{1}{2} \ln \left(x^2+2x+2\right)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.
- 6.269. $\frac{3}{8}\left[\ln \left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{4}\right]+C$. 6.270. $3\sqrt{x^2+2x+2}-$
 $-4 \ln \left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$. 6.271. $\ln \frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$. 6.272. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+$
 $+\frac{13}{9} \ln \left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C$. 6.273. $C-\ln \left|2x^2-3x+1\right|$.
- 6.274. $\frac{29}{45} \operatorname{arctg} \frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10} \ln \left(5x^2+6x+18\right)+C$.
- 6.275. $\frac{61}{16} \ln \left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$. 6.276. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+$
 $+\frac{11}{6\sqrt{3}} \ln \left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}\right|+C$. 6.277. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x}-$
 $-\frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}}\right)+C$. 6.278. $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$.
- 6.279. $x \operatorname{arctg} x-\frac{1}{2} \ln \left(1+x^2\right)+C$. 6.280. $\frac{1}{8} \sin 2x-\frac{1}{4} x \cos 2x+C$.
- 6.281. $\frac{1}{\omega^3}\left[\left(\omega^2 x^2-2\right) \sin \omega x+2 \omega x \cos \omega x\right]+C$. 6.282. $e^{2x}\left(\frac{1}{2} x^3-\frac{3}{4} x^2+\frac{3}{4} x-\frac{3}{8}\right)+$
 $+C$. 6.283. $\operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x+\operatorname{tg} x-x+C$. 6.284. $\ln |\ln \sin x|+C$.

Відповіді

- 6.285. $\frac{1}{4} \left[\ln(1+x^4) + \frac{1}{1+x^4} \right] + C$. 6.286. $\frac{1}{3} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{3x}{2} \right| + \cos 3x \right) + C$.
- 6.287. $\frac{1}{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} \right) + C$. 6.288. $C - \frac{1}{8} \ln \frac{2 + \cos 2x}{2 - \cos 2x}$. 6.289. $\ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C$.
- 6.290. $2 \ln(e^{x/2} + e^{-x/2}) + C$. 6.291. $e^{e^x} + C$. 6.292. $\frac{1}{4} e^{2x^2} + C$.
- 6.293. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[3 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{3} (x^2 - 2) \sqrt{1+x^2} \right] + C$. 6.294. $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$.
- 6.295. $C - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right)$. 6.296. $\frac{e^x}{2} \left(1 - \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{5} \right) + C$.
- 6.297. $\frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + \ln |\operatorname{tg} x|) + C$. 6.298. $\ln |\sin x + \cos x| + C$. 6.299. $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right| + C$.
- 6.300. $\sec x - \operatorname{tg} x + x + C$. 6.301. $\sin x - \operatorname{arctg} \sin x + C$. 6.302. $\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right| + C$.
- 6.303. $\ln x \cdot \ln \ln x - \ln x + C$. 6.304. $\frac{e^x (x^2 - 1)}{2} + C$.
- 6.305. $C - \frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2)$. 6.306. $\frac{1}{6} (x^2 - 1) \sqrt{1 + 2x^2} + C$.
- 6.307. $C - \frac{x(x^2 - 3)}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2} \arcsin x$. 6.308. $\frac{1}{5} \sqrt{(x^2 - a^2)^5} -$
 $-\frac{a^2}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} + a^4 \sqrt{x^2 - a^2} + a^5 \arcsin \frac{a}{|x|} + C$. 6.309. $\frac{\sqrt{4+x^2} (x^2 - 2)}{24x^3} + C$.
- 6.310. $\frac{\sqrt{(x^2 - 8)^3}}{24x^3} + C$. 6.311. $\frac{\sqrt{(4+x^2)^3} (x^2 - 6)}{120x^5} + C$. 6.312. $\frac{\sqrt{x^2 - 3} (2x^2 + 3)}{27x^3} + C$.
- 6.313. $\frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{x^3} - \ln \left(\sqrt[4]{x^3} + 1 \right) \right] + C$. 6.314. $x + 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{1+x} - 1) + C$.
- 6.315. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{1+x} + C$. 6.316. $\ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x+1})^6} + C$. 6.317. $\sqrt{x^2 + 2x} +$
 $+\ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x} \right| + C$. 6.318*. $\frac{x^8}{8(1-x^2)^4} + C$ (Зручна підстановка $x = \sin u$).
- 6.319. $\frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax}{b}} + C$. 6.320. $C \frac{(1+x^8)^{3/2}}{12x^{12}}$. 6.321. $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}} + C$.

Відповіді

- 6.322. $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4} - \ln(x^2 + \sqrt{x^4+4}) + C.$ 6.323. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}\right| + C.$
- 6.324. $C - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}} - \frac{2}{3}\arcsin\sqrt{x^3}.$ 6.325. $C - \frac{x^3}{4(1+x^2)^2} - \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3\arctg x}{8}.$
- 6.326. $\frac{(x^2+1)\arctg x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C.$ 6.327. $\arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}} + C.$
- 6.328. $2\sqrt{e^x-1} - 2\arctg\sqrt{e^x-1} + C.$ 6.329.* $C - \frac{1}{2}\ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ (підстановка $u = 1 + \frac{1}{x}$).
- 6.330. $\arctg x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C.$ 6.331. $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \arctg\sqrt{x} + C.$ 6.332. $x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$
- 6.333. $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\lg^5 x} (5\lg^2 x + 11) + C.$ 6.334. $\frac{\sqrt{2}}{5}(\lg^2 x + 5)\sqrt{\lg x} + C.$
- 6.335. $\ln\left|\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}\right| + C.$ 6.336. $\frac{1}{5}\ln[(x-2)^2\sqrt{2x+1}] + C.$
- 6.337. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C.$ 6.338. $\frac{3}{11}\ln|3x+1| + \frac{2}{33}\ln|2x-3| - \frac{1}{3}\ln|x| + C.$
- 6.339. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C.$ 6.340. $\frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + C.$ 6.341. $\ln|2x-1| - 6\ln|2x-3| + 5\ln|2x-5| + C.$
- 6.342. $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}} + C.$ 6.343. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$
- 6.344. $\frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right| + C.$ 6.345. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right| + \frac{6}{x+1} + C.$
- 6.346. $4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C.$ 6.347. $\frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + C.$
- 6.348. $x + \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{(x-1)^2}{|x|}\right| + C.$ 6.349. $C - \frac{1}{3(x-2)^3} + \frac{1}{2(x-2)^2} + \ln|x-2|.$
- 6.350. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$ 6.351. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right| - \frac{5x+12}{x^2+6x+8} + C.$

Відповіді

- 6.352.** $\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + C.$ **6.353.** $\frac{x}{8} - \ln|x+1| - \frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3} + C.$
- 6.354.** $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + \frac{31}{8} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \ln|x+1| + C.$ **6.355.** $\frac{1}{x-1} + \ln \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|} + C.$ **6.356.** $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4} \ln|x| + 20 \ln|x-3| - \frac{47}{4} \ln|x-2| + C.$
- 6.357.** $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2x} \right) - \frac{1}{2(x-2)} + C.$ **6.358.** $C - \frac{x}{(x^2-1)^2}.$
- 6.359.** $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C.$ **6.360.** $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$
- 6.361.** $\frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$ **6.362.** $\ln \frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + C.$ **6.363.** $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \arctg x + C.$ **6.364.** $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \arctg x + C.$ **6.365.** $\frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctg x + C.$ **6.366.** $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + C.$ **6.367.** $\frac{1}{4} \left[\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} + \arctg x - \frac{7}{(x-1)^2} \right] + C.$
- 6.368.** $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2+2x+2) - 2 \arctg(x+1) + C.$ **6.369.** $\ln \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \arctg \frac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{2} + C.$ **6.370*.** $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$ (В знаменнику підінтегрального виразу додати і відняти $2x^2$).
- 6.371.** $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$ **6.372.** $\frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{18} \ln(x^2+1) + \frac{7}{288} \ln(x^2+4) - \frac{1}{24(x^2+4)} + C.$ **6.373.** $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16} \arctg \frac{x-3}{2} + C.$ **6.374.** $\frac{3}{8} \arctg(x+1) - \frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2} + C.$
- 6.375.** $\frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{1}{648} \arctg \frac{x}{3} + C.$ **6.376.** $\frac{x-1}{2(x^2+1)} -$

Відповіді

$$-\frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C. \quad \mathbf{6.377.} \quad \frac{15x^5 + 40x^3 + 33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{15}{48} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$\mathbf{6.378.} \quad \frac{1}{4} \left(\frac{2x^6 - 3x^2}{x^4 - 1} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| \right) + C. \quad \mathbf{6.379.} \quad \frac{x}{x^2 + x + 1} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 2 \ln(x^2 + x + 1) + \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + C. \quad \mathbf{6.380.} \quad \frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)} +$$

$$+ \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + C. \quad \mathbf{6.381.} \quad C - 6 \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \frac{12x^2 - 5x - 1}{2(x^3 - x^2)}.$$

$$\mathbf{6.382.} \quad \frac{1}{x^2(x^2+1)} + \ln \sqrt{x^2+1} + C. \quad \mathbf{6.383.} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x-2}{x^2+1} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$\mathbf{6.384.} \quad \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x^3+1}{x^3} \right| - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3(x^3+1)} + C. \quad \mathbf{6.385.} \quad \frac{1}{648} \left[\operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + \frac{3(x+1)}{x^2+2x+10} + \right.$$

$$\left. + \frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} \right] + C. \quad \mathbf{6.386.} \quad \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{3}{8} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x}{4(x^2+2x+2)^2} + C.$$

$$\mathbf{6.387.} \quad C - \frac{x}{8(x^2+4)} - \frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \operatorname{arctg}(x+2). \quad \mathbf{6.388.} \quad C - \frac{57}{8} \operatorname{arctg} x -$$

$$- \frac{57x^4 + 103x^2 + 32}{8x(x^2+1)^2}. \quad \mathbf{6.389.} \quad \frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)} + \ln \frac{|x-1|}{(x+1)^2} + C.$$

$$\mathbf{6.390.} \quad \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{5} \right) \frac{1}{x(3-2x^2)^2} + \frac{1}{8\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}} \right| + C. \quad \mathbf{6.391.} \quad \ln \frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}} +$$

$$+ \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + C. \quad \mathbf{6.392.} \quad 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} +$$

$$+ 48\sqrt[12]{x} + 3 \ln(1+\sqrt[12]{x}) + \frac{33}{2} \ln(\sqrt{x} - \sqrt[12]{x} + 2) - \frac{171}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}^2 \frac{\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$\mathbf{6.393.} \quad 6 \left[\frac{1}{9}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{8}(x+1)^{4/3} + \frac{1}{7}(x+1)^{7/6} - \frac{1}{6}(x+1) + \frac{1}{5}(x+1)^{5/6} - \frac{1}{4}(x+1)^{2/3} \right]$$

$$+ C. \quad \mathbf{6.394.} \quad \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \quad \mathbf{6.395.} \quad (\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} -$$

$$- \arcsin \sqrt{x} + C. \quad \mathbf{6.396.} \quad 6\sqrt[3]{(1+x)^2} \left[\frac{(1+x)^2}{16} - \frac{1+x}{5} + \frac{\sqrt{1+x}}{7} + \frac{1}{4} \right] + C.$$

$$\mathbf{6.397.} \quad \ln \frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1+2u^2}{\sqrt{3}} + C, \quad \text{якщо} \quad u = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Відповіді

- 6.398***. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C$ Домножити чисельник і знаменник дробу на $\sqrt[4]{x-1}$ і винести множники за знак кореня. **6.399.** $\arctg \frac{\sqrt{1+x}}{2} + C$. **6.400.** $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5} + \frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2} + C$. **6.401.** $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + C$. **6.402.** $6\arctg\sqrt{x+a} - 6\ln\sqrt[6]{x+a} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+a}| + C$. **6.403.** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} - \frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + C$.
- 6.404.** $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}\right| - 2\arctg\sqrt[4]{x}$. **6.405.** $6\sqrt[6]{x} - 12\arctg\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C$.
- 6.406.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| - 2\arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$. **6.407.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-x^2}}\right| + C$.
- 6.408.** $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **6.409.** $\sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} + C$.
- 6.410.** $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3} - a^2\sqrt{a^2-x^2} + C$. **6.411.** $\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}} + C$.
- 6.412.** $\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$. **6.413.** $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{x} + \ln|x+\sqrt{x^2+5}| + C$.
- 6.414.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$. **6.415.** $\frac{x}{9\sqrt{x^2+9}} + C$.
- 6.416.** $\frac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1} + \frac{3}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$. **6.417.** $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)} - \frac{2}{27}\ln\left|\frac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{|x+2|}\right| + C$. **6.418.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{6}{17}x^2\cdot\sqrt[6]{x^5} + C$. **6.419.** $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right] + C$.
- 6.420.** $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1) - \frac{1}{4}\ln\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctg\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}} + C$.
- 6.421.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C$. **6.422.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctg\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C$, де

Відповіді

$$u = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}. \quad \mathbf{6.623.} \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

$$\mathbf{6.624.} \quad \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} + C. \quad \mathbf{6.425.} \quad \frac{3}{7} (4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3) \sqrt[3]{1+4\sqrt{x}} + C.$$

$$\mathbf{6.426.} \quad 6u + 2 \ln \frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}} - 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C, \quad \text{де} \quad u = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}.$$

$$\mathbf{6.427.} \quad \frac{1}{5} \ln \frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}} + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{1+2u}{\sqrt{3}} + C, \quad \text{де} \quad u = \sqrt[3]{1+x^5}.$$

$$\mathbf{6.428.} \quad C - \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x^3\sqrt[3]{1+x^3}+x^2} \right|.$$

$$\mathbf{6.429.} \quad C - \frac{1}{10} \sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5} + \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}. \quad \mathbf{6.430.} \quad \frac{u}{2(u^3+1)} -$$

$$-\frac{1}{6} \ln \frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C, \quad \text{де} \quad u = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}.$$

$$\mathbf{6.431.} \quad 12 \left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13} - \frac{3\sqrt[3]{u^{10}}}{10} + \frac{3\sqrt[3]{u^7}}{7} - \frac{\sqrt[3]{u^4}}{4} \right] + C, \quad \text{де} \quad u = 1+4\sqrt{x}.$$

$$\mathbf{6.432*} \quad \ln \left| \frac{Cx}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}} \right| \quad (\text{Можна застосувати підстановку, наприклад,}$$

$$x = \frac{1}{z}). \quad \mathbf{6.433.} \quad \frac{1}{2} \arccos \frac{2-x}{x\sqrt{2}} + C. \quad \mathbf{6.434.} \quad \arcsin \frac{x-1}{x\sqrt{2}} + C.$$

$$\mathbf{6.435.} \quad C - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right|. \quad \mathbf{6.436.} \quad \ln \left| x+1+\sqrt{2x+x^2} \right| -$$

$$-\frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}} + C. \quad \mathbf{6.437.} \quad C - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1} \right|.$$

$$\mathbf{6.438.} \quad C - \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3} \right|. \quad \mathbf{6.439.} \quad \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{x^2-2x-1} -$$

$$-\ln \left| x-1+\sqrt{x^2-2x-1} \right| + C. \quad \mathbf{6.440.} \quad \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) \sqrt{3x^2-3x+1} +$$

Відповіді

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{8\sqrt{3}} \ln \left| \sqrt{3x^2 - 3x + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2}(2x - 1) \right| + C. \quad \mathbf{6.441.} \quad \frac{1}{2} \left[(x+2)\sqrt{1-4x-x^2} + \right. \\
 & \left. + 5\arcsin \frac{x+2}{\sqrt{5}} \right] + C. \quad \mathbf{6.442.} \quad C - \frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})} - \\
 & - \frac{3}{2} \ln \left| 2x-1-2\sqrt{x^2-x+1} \right| + 2 \ln \left| x-\sqrt{x^2-x+1} \right|. \quad \mathbf{6.443.} \quad \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x} \right| - \\
 & - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \quad \mathbf{6.444.} \quad \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \ln \left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2} \right) + C. \\
 \mathbf{6.445.} \quad & \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin x \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \quad \mathbf{6.446.} \quad x\sqrt{x^2-2x+5} - \\
 & - 5 \ln \left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5} \right) + C. \quad \mathbf{6.447.} \quad C - \frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2} + 14\arcsin \frac{x+1}{x}. \\
 \mathbf{6.448.} \quad & (x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5} - 15 \ln \left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5} \right) + C. \\
 \mathbf{6.449.} \quad & \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} \right) \sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2} \ln \left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2} \right) + C. \\
 \mathbf{6.450.} \quad & (x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7} + 112 \ln \left| x-2+\sqrt{x^2-4x-7} \right| + C. \\
 \mathbf{6.451.} \quad & \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{95}{24}x - \frac{145}{12} \right) \sqrt{x^2+4x+5} + \frac{35}{8} \ln \left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5} \right) + C. \\
 \mathbf{6.452.} \quad & \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2} + \frac{1}{16} \arccos \frac{2}{x+1} + C. \quad \mathbf{6.453.} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \\
 & + \ln \left(x+\sqrt{x^2+1} \right) + C. \quad \mathbf{6.454.} \quad \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x} + C. \quad \mathbf{6.455.} \quad \ln \frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1} - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1} + C. \quad \mathbf{6.456.} \quad \ln \left| \frac{x}{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}} \right| + C. \\
 \mathbf{6.457.} \quad & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + C. \quad \mathbf{6.458.} \quad -\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{2-x+\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|} + C. \\
 \mathbf{6.459.} \quad & \frac{x+1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \quad \mathbf{6.460.} \quad 6\arcsin \frac{x+1}{2} - \\
 & - \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4} (x^3+3x^2-7x-9) + C. \quad \mathbf{6.461.} \quad \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2-2x+10} +
 \end{aligned}$$

Відповіді

$$\begin{aligned}
 & + \frac{9}{2} \ln \left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 10} \right) + C. \quad \mathbf{6.462.} \quad \sqrt{x^2 - 6x + 1} + C. \quad \mathbf{6.463.} \quad \frac{x-2}{2} \sqrt{4x-x^2} + \\
 & + 2 \arcsin \frac{x-2}{2} + C. \quad \mathbf{6.464.} \quad \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5) + C. \quad \mathbf{6.465.} \quad \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \\
 \mathbf{6.466.} \quad & \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + C. \quad \mathbf{6.467.} \quad \operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{3}{2} x + C. \\
 \mathbf{6.468.} \quad & \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) + 2 \ln |\operatorname{tg} x| + C. \quad \mathbf{6.469.} \quad \frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^4 x + 10 \operatorname{tg}^2 x + 1)}{3 \operatorname{tg}^3 x} + C. \\
 \mathbf{6.470.} \quad & \frac{1}{\cos x - 1} + C. \quad \mathbf{6.471.} \quad \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} + C. \quad \mathbf{6.472.} \quad \frac{5}{16} x + \\
 & + \frac{1}{12} \sin 2x \left(\cos^4 x + \frac{5}{4} \cos^2 x + \frac{15}{8} \right) + C. \quad \mathbf{6.473.} \quad x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C. \\
 \mathbf{6.474.} \quad & \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C. \quad \mathbf{6.475.} \quad x - \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C. \\
 \mathbf{6.476.} \quad & C - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \quad \mathbf{6.477.} \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right| + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C. \\
 \mathbf{6.478.} \quad & -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C. \quad \mathbf{6.479.} \quad \frac{1}{7 \cos^7 x} - \frac{1}{5 \cos^5 x} + C. \\
 \mathbf{6.480.} \quad & \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \quad \mathbf{6.481.} \quad \frac{3x}{8} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C. \\
 \mathbf{6.482.} \quad & \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C. \quad \mathbf{6.483.} \quad \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \quad \mathbf{6.484.} \quad -\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \\
 & - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C. \quad \mathbf{6.485.} \quad \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \quad \mathbf{6.486.} \quad -\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + \\
 & + 3 \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C. \quad \mathbf{6.487.} \quad -\frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + C. \\
 \mathbf{6.488.} \quad & \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) + C. \quad \mathbf{6.489.} \quad \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \\
 & + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C. \quad \mathbf{6.490.} \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C. \quad \mathbf{6.491.} \quad x + 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \\
 & - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} - 2 \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| + C. \quad \mathbf{6.492.} \quad \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C. \\
 \mathbf{6.493.} \quad & \frac{5}{16} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{69} \sin^3 4x + \frac{3}{128} \sin 8x + C. \quad \mathbf{6.494.} \quad \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.
 \end{aligned}$$

Відповіді

- 6.495. $3 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{3} \right| - \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}} + C.$ 6.496. $\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{1}{20} \sin 5x + C.$
- 6.497. $C - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}.$ 6.498. $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$
- 6.499. $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \operatorname{arctg} \frac{a}{b}}{2} \right| + C.$ 6.500. $\ln \left| \frac{C \cdot \sin x}{\sqrt{\cos 2x}} \right|.$ 6.501. $\ln \frac{|C \cdot \sin x|}{\sqrt{1 - 4 \sin^2 x}}.$
- 6.502. $\frac{1}{2} [x + \ln |\sin x + \cos x|] + C.$ 6.503. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$
- 6.504. $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C.$ 6.505. $\ln (2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$
- 6.506. $\frac{\cos x (\cos x - \sin x)}{4} - \frac{1}{4} \ln |\cos x - \sin x| + C.$ 6.507. $\frac{4}{25} x -$
 $-\frac{3}{25} \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{2}{5 (\operatorname{tg} x + 2)} - \frac{3}{25} \ln |\cos x| + C.$ 6.508. $\frac{\cos 2x - 15}{15 (4 + \sin 2x)} +$
 $+\frac{4}{15 \sqrt{15}} \operatorname{arcsin} \frac{4 \sin 2x + 1}{4 + \sin 2x} + C.$ 6.509. $\frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$ 6.510. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x) + C.$
- 6.511. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$ 6.512. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$
- 6.513. $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{atg} x}{b} + C.$ 6.514. $C - \frac{1}{2} \left[\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \right].$
- 6.515. $\ln \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}} + C.$ 6.516. $-\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$
- 6.517. $-\frac{\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10} + C.$ 6.518. $\frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6} + C.$
- 6.519. $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cos x + C.$ 6.520. $\frac{\sin \frac{x}{2}}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 7x}{28} + C.$
- 6.521. $\frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.$ 6.522. $2 \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) + C$ для значень

Відповіді

x , що задовольняють нерівність $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \geq 0$, і $-2\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) + C$ для

значень x , які задовольняють нерівність $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \leq 0$. **6.523.** $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$.

6.524*. $C - \frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}$ (Покласти $u = \operatorname{ctg} x$). **6.525.** $4\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$.

6.526. $-2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C$. **6.527.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right) + C$.

6.528. $2\arcsin\sqrt{\sin x} + C$. **6.529.** $C - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x(2 + \operatorname{tg}^2 x)\sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}$. **6.530.** $\frac{4}{\sqrt{\cos \frac{x}{2}}} +$

$+ 2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos \frac{x}{2}} - \ln \frac{1 + \sqrt{\cos \frac{x}{2}}}{1 - \sqrt{\cos \frac{x}{2}}} + C$. **6.531.** $\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}) +$

$\arcsin(\sin x - \cos x)] + C$. **6.532.** $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C$.

6.533. $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + C$. **6.534.** $\operatorname{sh} x + C$. **6.535.** $\operatorname{ch} x + C$. **6.536.** $\operatorname{th} x + C$.

6.537. $x + C$. **6.538.** $\frac{1}{2a}\operatorname{sh} 2ax + C$. **6.539.** $\frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x - x}{2} + C$. **6.540.** $x - \operatorname{th} x + C$.

6.541. $x - \operatorname{cth} x + C$. **6.542.** $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C$. **6.543.** $\operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + C$.

6.544. $x - \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x + C$. **6.545.** $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + C$.

6.546. $\ln|\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x - \frac{1}{4}\operatorname{cth}^4 x + C$. **6.547.** $\ln|\operatorname{th} x| + C$. **6.548.** $\ln\left|\operatorname{th} \frac{x}{2}\right| + C$.

6.549. $\frac{1}{2}\operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{th}^3 \frac{x}{2} + C$. **6.550.** $\frac{1}{2}\ln \frac{1 + \sqrt{\operatorname{th} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{th} x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} x} + C$.

6.551. $x \operatorname{th} x - \ln \operatorname{ch} x + C$. **6.552.** $C - \frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}$. **6.553.** $C - \frac{1}{8(x-1)^8} - \frac{1}{3(x-1)^9} -$

$-\frac{3}{10(x-1)^{10}} - \frac{1}{11(x-1)^{11}}$. **6.554.** $\frac{1}{3}\left[x^3 + \sqrt{(x^2 - 1)^3}\right] + C$.

6.555. $\frac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28} + C$. **6.556.** $\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) + C$.

Відповіді

- 6.557.** $\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x+2}{2} \sqrt{1-x^2} + C$. **6.558.** $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \ln \frac{|x-1|(x+2)^{32}}{(x+1)^3}$.
- 6.559.** $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$. **6.560.** $\frac{3}{8} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$.
- 6.561.** $2\sqrt{x+1} [\ln|x+1|-2] + C$. **6.562.** $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \cos 2x +$
 $+\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) \sin 2x + C$. **6.563.** $x^2 \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x + C$.
- 6.564.** $x \operatorname{arctg} (1+\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \ln|x+2\sqrt{x}+2| + C$. **6.565.** $\ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + \frac{\arcsin x}{x} + C$.
- 6.566.** $3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C$. **6.567.** $3e^{\sqrt[3]{x}}$
 $\cdot (\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120) + C$. **6.568.** $e^{3x} \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{9} \right) +$
 $+ C$. **6.569.** $2(\sin \sqrt{x} - \sqrt{x} \cos \sqrt{x}) + C$. **6.570.** $\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C$.
- 6.571.** $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$. **6.572.** $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5} -$
 $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$. **6.573.** $\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x\right) \sqrt{x^2+1} + \frac{3}{8} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$.
- 6.574.** $3 \left[\ln|u| - \ln(1+\sqrt{1-u^2}) - \arcsin u \right] + C$, де $u = \sqrt[3]{x}$. **6.575.** $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}} +$
 $+\frac{15}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \right| + C$. **6.576.** $C - \frac{\sqrt{2x+1}}{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right|$.
- 6.577.** $\frac{1}{15} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} \right] + C$, де $z = x^5$. **6.578.** $C - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| +$
 $+\frac{1}{8 \sin^2 \frac{x}{2}}$. **6.579.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$. **6.580.** $\frac{2}{b^2 \sin 2\alpha} \ln \left| \frac{\sin(\alpha-x)}{\sin(\alpha+x)} \right| + C$, де
 $\alpha = \arccos \frac{a}{b}$, якщо $a^2 < b^2$; $\frac{1}{a^2 \sin \alpha} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin \alpha} + C$, де $\alpha = \arccos \frac{b}{a}$, якщо
 $a^2 > b^2$. **6.581.** $\frac{1}{2} x^2 \ln|1+x^3| - \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{4} \ln|x^2-x+1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

Відповіді

- 6.582.** $\frac{x}{\ln x} + C.$ **6.583.** $\arctg \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C.$
- 6.584.** $\frac{1}{2} e^x [(x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x] + C.$ **6.585.** $\frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{2} + C.$
- 6.586.** $\frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 3}{3 \sqrt{\operatorname{tg} x}} + C.$ **6.587.** $\frac{1}{4} (\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{ctg}^4 x) + 2(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) + 6 \ln |\operatorname{tg} x| + C.$
- 6.588.** $\arctg (\operatorname{tg}^2 x) + C.$ **6.589.** $\ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$ **6.590.** $\arctg \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}} +$
 $\ln \left(\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x \right) + C.$ **6.591.** $\ln \frac{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}{x} + C.$
- 6.592.** $C - \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x + 6 + \sqrt{60x - 15x^2}}{2x - 3} \right|.$ **6.593.** $\frac{e^x}{1 + x} + C.$
- 6.594.** $2x\sqrt{1 + e^x} - 4\sqrt{1 + e^x} - 2 \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} + C.$ **6.595.** $\frac{1}{6} \ln \frac{1 + x^2}{x^2} -$
 $-\frac{\arctg x}{3x^2} - \frac{1}{6x^2} + C.$ **6.596.** $C - \frac{\arctg x}{2(1 + x^2)} + \frac{\arctg x}{4} + \frac{x}{4(1 + x^2)}.$
- 6.597.** $\frac{1}{4} \ln \frac{|x + 1|}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{\arctg x}{2(1 + x)^2} - \frac{1}{4(x + 1)} + C.$ **6.598.** $x - \log_2 |1 - 2^x| +$
 $+\frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1}{1 - 2^x} + \frac{1}{2(1 - 2^x)^2} + \frac{1}{3(1 - 2^x)^3} \right] + C.$ **6.599.** $\frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 4) +$
 $+\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x + 1}{\sqrt{3}} + C.$ **6.600.** $\frac{x^2}{2} + x + \ln |x^2 - x - 1| + \frac{2}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x - 1 - \sqrt{5}}{2x - 1 + \sqrt{5}} \right| + C.$
- 6.601.** $-\frac{1}{5(x - 2)} + \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x + 3}{x - 2} \right| + C.$ **6.602.** $-\frac{2}{9} \ln \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 + x + 1}} +$
 $+\frac{2\sqrt{3}}{9} \arctg \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{1 - x^3} + C.$ **6.603.** $\frac{1}{4} \left(2 \ln \frac{x^4 + 1}{x^4} - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^4 + 1} \right) + C.$
- 6.604.** $\sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 2} \right) + C.$ **6.605.** $-\sqrt{6 + 4 \ln x - \ln^2 x} +$
 $+ 2 \arcsin \frac{\ln x - 2}{\sqrt{10}} + C.$ **6.606.** $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x + 2 + \sqrt{x^2 + 8x + 4}}{x} \right| + C.$

Відповіді

- 6.607.** $\frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{3} + C$. **6.608.** $\frac{\sqrt{(x^2+4x-5)^3}}{3} - (x+2)\sqrt{x^2+4x-5} + 9\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right) + C$.
- 6.609.** $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{1}{2}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right) + C$. **6.610.** $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{\sqrt{3}}\arctg\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}} + C$.
- 6.611.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+16}\right) + C$. **6.612.** $\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} + C$.
- 6.613.** $\frac{1}{15}\arctg\frac{5x}{3\sqrt{16-x^2}} + C$. **6.614.** $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$. **6.615.** $-x + \operatorname{tg}x + \sec x + C$.
- 6.616.** $x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$. **6.617.** $\frac{1}{3(1-\sin x)^3} + C$. **6.618.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctg\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$.
- 6.619.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}\right| + C$. **6.620.** $2\operatorname{tg}x - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4x} + C$. **6.621.** $\arcsin\left(\frac{\sec x}{\sqrt{5}}\right) + C$.
- 6.622.** $-\frac{\sin^2x}{2} + 5\sin x - 24\ln(\sin x + 5) + C$. **6.623.** $11|\operatorname{tg}x| + \operatorname{tg}^2x + \frac{\operatorname{tg}^4x}{4} + C$.
- 6.624.** $\operatorname{tg}x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3x + \frac{\operatorname{tg}^5x}{5} + C$. **6.625.** $-\frac{\cos x}{4\sin^2x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.
- 6.626.** $-\frac{x\cos 3x}{6} + \frac{\sin 3x}{18} + \frac{x\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$. **6.627.** $\ln|\operatorname{th}x| + C$.
- 6.628.** $\arctg(\operatorname{th}x) + C$. **6.629.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + \ln|x| + C$.
- 6.630.** $x - e^{-x}\arcsin(e^{-x}) - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}\right) + C, x \leq 0$. **6.631.** $-\frac{x^2}{6} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\arctg x + \frac{1}{2}(\arctg x)^2 + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + C$.
- 6.632.** $-\frac{x}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}(1+x^2)\arctg x + C$.
- 6.633.** $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} - \ln\frac{|1+x|}{\sqrt{1+x+x^2}} + \sqrt{3}\arctg\frac{1+2x}{\sqrt{3}} + C$. **6.634.** $-x^2 + \frac{x^2}{2}\ln(4+x^4) + 2\arctg\frac{x^2}{2} + C$.
- 6.635.** $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} + C, |x| > 1$. **6.636.** $-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C$,

Відповіді

- $0 < x < 1$. **6.637.** $x^x + C$, $x > 0$. **6.638.** $x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-x/2} \arctg e^{x/2} - (\arctg e^{x/2})^2 + C$. **6.639.** $\arctg(e^x - e^{-x}) + C$.
- 6.640.** $\ln \frac{1 + e^x - \sqrt{1 + e^x + e^{2x}}}{1 - e^x + \sqrt{1 + e^x + e^{2x}}} + C$. **6.641.** $x - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1 + 2\text{tg}x}{\sqrt{3}} + C$.
- 6.642.** $\frac{35}{128}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin^3 2x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C$. **6.643.** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\ln(1 + x^2) + \frac{1}{(1 + x^2)^2} + C$. **6.644.** $\frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right| + C$. **6.645.** $C - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctg(\sqrt{2}\text{ctg}2x)$. **6.646.** $x \text{tg} \frac{x}{2} + C$.
- 6.647*.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} + C$ (Розділити чисельник і знаменник на x^2 і застосувати підстановку $x + \frac{1}{x} = z$). **6.648.** $e^{\sin x}(x - \sec x) + C$. **6.649.** $2(\sqrt{8}-1)/3$.
- 6.650.** $7/72$. **6.651.** $-5(\sqrt[3]{16}-1)$. **6.652.** $7\frac{2}{3}$. **6.653.** $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$. **6.654.** 12 .
- 6.655.** $0,2(e-1)^5$. **6.656.** $3\ln\frac{b}{b-a}$. **6.657.** $1/4$. **6.658.** $\pi/2$. **6.659.** $1 + \frac{1}{2}\lg e$.
- 6.660.** $e - \sqrt{e}$. **6.661.** $\pi/6n$. **6.662.** $\ln\frac{3}{2}$. **6.663.** $0,2\ln\frac{4}{3}$. **6.664.** $\arctg\frac{1}{7}$.
- 6.665.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. **6.666.** $\pi/6$. **6.667.** 2 . **6.668.** $2/7$. **6.669.** $4/3$. **6.670.** $\pi/2\omega$.
- 6.671.** $-0,083\dots$. **6.672.** $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} - \alpha + \frac{\text{ctg}^3\alpha}{3} - \text{ctg}\alpha$. **6.673.** 1 . **6.674.** $-\sqrt{2}/3$.
- 6.675.** $1 - 2/e$. **6.676.** $\pi/2 - 1$. **6.677.** $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **6.678.** $\pi^3 - 6\pi$.
- 6.679.** $2 - \frac{3}{4\ln 2}$. **6.680.** 1 . **6.681.** $\frac{141a^3\sqrt{a}}{20}$. **6.682.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **6.683.** $\frac{e^\pi - 2}{5}$.
- 6.684.** $6 - 2e$. **6.685.** $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$. **6.686.** $8/15$; б) $\frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \approx 0,429$;
- в) $\frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{256}{693}$. **6.687.** $I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$. Якщо n непарне, то $I_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)\dots\cdot 4 \cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\dots(m+3)(m+1)}$; якщо m непарне, то

Відповіді

$$I_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\dots\cdot 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\dots(n+3)(n+1)}; \text{ якщо } m \text{ парне, } n \text{ непарне, то}$$

$$I_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)\dots\cdot 3\cdot 1\cdot(m-1)(m-3)\dots\cdot 3\cdot 1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\dots\cdot 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad \mathbf{6.688.} \quad (-1)^n n! \left(1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{e} \left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{1!} + 1 \right] \right). \quad \mathbf{6.689.} \quad 11/48 + 5\pi/64. \quad \mathbf{6.691*} \quad p!q!(p+q+1)!$$

Покласти $x = \sin^2 z$ і використати результат задачі 6.689. **6.692.** $7 + 2\ln 2$.

$$\mathbf{6.693.} \quad 2 - \pi/2. \quad \mathbf{6.694.} \quad 32/3. \quad \mathbf{6.695.} \quad 5/3 - 2\ln 2. \quad \mathbf{6.696.} \quad \ln \frac{e + \sqrt{1+e^2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{6.697.} \quad 8 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi. \quad \mathbf{6.698*} \quad \frac{5}{16} \pi. \text{ Поклавши } x = 2z, \text{ перетворимо даний інтеграл до}$$

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^6 z \, dz. \quad \mathbf{6.699*} \quad 8/35. \quad \text{Покласти } x = z/2. \quad \mathbf{6.700.} \quad \pi/32.$$

$$\mathbf{6.701.} \quad \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}. \quad \mathbf{6.702.} \quad 8/15. \quad \mathbf{6.703.} \quad \sqrt{3} - \pi/3.$$

$$\mathbf{6.704.} \quad \frac{1}{32} \left(\pi + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 8 \right). \quad \mathbf{6.705.} \quad 3\pi/16. \quad \mathbf{6.706.} \quad \pi/16. \quad \mathbf{6.707.} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 - \sqrt{3}).$$

$$\mathbf{6.708.} \quad \pi/4. \quad \mathbf{6.709.} \quad \sqrt{3}/24. \quad \mathbf{6.710.} \quad \pi/3. \quad \mathbf{6.711.} \quad \arctg \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{6.712.} \quad \sqrt{6}/27 + \pi\sqrt{2}/48. \quad \mathbf{6.713.} \quad 20/9. \quad \mathbf{6.714.} \quad 2\ln \frac{6}{5} \approx 0,365. \quad \mathbf{6.715.} \quad 2/\pi; \quad 1/2.$$

$$\mathbf{6.716.} \quad 2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}. \quad \mathbf{6.717.} \quad \text{Якщо } a = e. \quad \mathbf{6.718.} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}. \quad \mathbf{6.719.} \quad 2/45.$$

$$\mathbf{6.720.} \quad 8\ln 3 - 15\ln 2 + \frac{13}{8}. \quad \mathbf{6.721.} \quad \frac{5}{192} (5 + 7\sqrt[3]{125}). \quad \mathbf{6.722.} \quad \pi/6.$$

$$\mathbf{6.723.} \quad a^2 [\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]. \quad \mathbf{6.724.} \quad \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}). \quad \mathbf{6.725.} \quad 848/105. \quad \mathbf{6.726.} \quad 4 - \pi.$$

$$\mathbf{6.727.} \quad \ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}. \quad \mathbf{6.728.} \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \quad \mathbf{6.729.} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \arctg \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \mathbf{6.730.} \quad \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

$$\mathbf{6.731.} \quad \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24. \quad \mathbf{6.732.} \quad \frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}. \quad \mathbf{6.733.} \quad \frac{19}{27} - \frac{5}{6\sqrt{6}}. \quad \mathbf{6.734.} \quad \frac{1}{a^2 - b^2} \ln \left| \frac{a}{b} \right|.$$

$$\mathbf{6.735.} \quad 1/3. \quad \mathbf{6.736.} \quad \text{Розбіжний.} \quad \mathbf{6.737.} \quad 1/a. \quad \mathbf{6.738.} \quad \text{Розбіжний.} \quad \mathbf{6.739.} \quad \pi.$$

$$\mathbf{6.740.} \quad \text{Розбіжний.} \quad \mathbf{6.741.} \quad 1 - \ln 2. \quad \mathbf{6.742.} \quad 1/2. \quad \mathbf{6.743.} \quad \pi/4. \quad \mathbf{6.744.} \quad \ln \frac{\sqrt{a^4 + 1} + 1}{a^2}.$$

Відповіді

- 6.745.** $1/2$. **6.746.** $1/2$. **6.747.** Розбіжний. **6.748.** 2 . **6.749.** $1/2$. **6.750.** $\frac{a}{a^2+b^2}$, якщо $a > 0$; розбіжний, якщо $a \leq 0$. **6.751.** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$. **6.752.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **6.753.** $\pi/2$.
- 6.754.** $1/2 + \pi/4$. **6.755.** Збіжний. **6.756.** Розбіжний. **6.757.** Збіжний. **6.758.** Розбіжний. **6.759.** Збіжний. **6.760.** Розбіжний. **6.761.** Розбіжний. **6.762.** Збіжний. **6.763.** $\pi/2$. **6.764.** Розбіжний. **6.765.** $8/3$. **6.766.** $-1/4$. **6.767.** 1 . **6.768.** Розбіжний. **6.769.** 2 . **6.770.** π . **6.771.** $\pi(a+b)/2$. **6.772.** $33\pi/2$.
- 6.773.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **6.774.** $\pi\sqrt{3}$. **6.775.** $14\frac{4}{7}$. **6.776.** $10/7$. **6.777.** Розбіжний.
- 6.778.** $6 - \frac{9}{2} \ln 3$. **6.779.** $-2/e$. **6.780.** Розбіжний. **6.781.** Збіжний.
- 6.782.** Розбіжний. **6.783.** Збіжний. **6.784.** Збіжний. **6.785.** Розбіжний. **6.786.** Збіжний. **6.787.** Ні. **6.788.** При $k < -1$ збіжний, при $k \geq -1$ розбіжний.
- 6.789.** 1) При $k > 1$ збіжний, при $k \leq 1$ розбіжний; 2) $I = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$, якщо $k > 1$; розбіжний, якщо $k \leq 1$. **6.790.** При $k < 1$ збіжний, при $k \geq 1$ розбіжний.
- 6.791.** Розбіжний при будь-якому k . **6.792.** Збіжний при одночасному виконанні нерівностей $k > -1$ і $t > k+1$. **6.793.** При $m < 3$ збіжний, при $m \geq 3$ розбіжний.
- 6.794.** При $k < 1$ збіжний, при $k \geq 1$ розбіжний. **6.795.** π . **6.796***. $5\pi/3$. Покласти $(x = \cos \varphi)$ і проінтегрувати частинами. **6.797.** $\frac{3+2\sqrt{3}}{4} \pi - \frac{3}{2} \ln 2$.
- 6.798.** $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-3)} \cdot \frac{\pi}{2a^{2n-1}}$. **6.799.** $n!$. **6.800.** $n!/2$. **6.801.** $(-1)^n n!$.
- 6.802***. а) $\frac{(m-1)(m-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{m(m-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$. б) $\frac{(m-1)(m-3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{m(m-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}$. Покласти $x = \sin \varphi$.
- 6.803***. $2 \frac{2n(2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}$. Покласти $x = \sin^2 \varphi$. **6.804.** $\frac{\pi - \alpha}{\sin \alpha}$ ($I = 1$ при $\alpha = \pi$). **6.805***. Для доведення рівності інтегралів покласти в одному з них $x = 1/z$. Потім обчислити їх суму, скориставшись рівністю $\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}} \right)$. **6.806***. Подати інтеграл в вигляді суми двох інтегралів $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}} dx$; в другому інтегралі покласти $x = \frac{1}{y}$. **6.807.** 0 .
- 6.808.** $1 + \ln 2$. **6.809.** $6\sqrt[3]{2}$. **6.810.** $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. **6.811.** $\sqrt{\pi}$. **6.812***. $\sqrt{\pi}/4$. Інтегрувати

Відповіді

частинами. **6.813.** $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot \sqrt{\pi}}{2^n}$. **6.814.** $\pi/2$. **6.815.** $\pi/2$, якщо $a > 0$; 0, якщо $a = 0$; $-\pi/2$, якщо $a < 0$. **6.816.** $\pi/2$, якщо $a > b$; $\pi/4$, якщо $a = b$; 0, якщо $a < b$. **6.817***. $\pi/2$. Інтегрувати частинами. **6.818***. $\pi/4$. Подати чисельник у вигляді різниці синусів кратних дуг. **6.819***. $\pi/4$. Скористатись методами розв'язування задач 6.817 і 6.818. **6.820***. Поклавши $y = \frac{\pi}{2} - z$, приводимо $\varphi(x)$ до виду $\varphi(x) = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln \sin z \, dz$. У відповідності з формулою $\sin z = 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}$ розіб'ємо інтеграл на три, один з яких знаходимо безпосередньо. Два інших за допомогою заміни змінної зводяться до інтегралів типу початкового; $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \ln 2$. **6.821.** $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. **6.822.** $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$. **6.823***. $\frac{\pi}{2} \ln 2$. Інтегрувати частинами. **6.824***. $\frac{\pi}{2} \ln 2$. Заміною змінної зводиться до попередньої задачі.

6.825. $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. **6.826.** $16/3$. **6.827.** $9/4$. **6.828.** $16p^2/3$. **6.829.** $1/3$.

6.830. $\frac{32}{3} \sqrt{6}$. **6.831.** $2 \frac{1}{4}$. **6.832.** $2\pi + \frac{4}{3}$ і $6\pi - \frac{4}{3}$. **6.833.** $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ і $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$. **6.835.** $\frac{b^2c}{a} - ab \ln \frac{c+b}{a} = b \left[\varepsilon b - a \ln \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \right]$, де ε - ексцентриситет. **6.836.** $a^2 \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \right]$; $a^2 \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \right]$ і $a^2 \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \right]$. **6.837.** $S_1 = S_3 = \pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 3 - 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,46$; $S_2 = 2(\pi - S_1)$. **6.838.** $\pi/2 - 1/3$. **6.839.** $1/12$. **6.840.** $1/12$. **6.841.** $\left| \frac{m-n}{m+n} \right|$; $4 \left| \frac{m-n}{m+n} \right|$, якщо m і n - парні; $2 \left| \frac{m-n}{m+n} \right|$, якщо m і n - непарні; $\left| \frac{m-n}{m+n} \right|$, якщо m і n різної парності. **6.842.** а) $3/14$; б) $73 \frac{1}{7}$. **6.843.** 1 (фігура складається з двох частин, площі яких рівні між собою). **6.844.** $8/15$. **6.845.** $3\pi/4$. **6.846.** $4/3$.

6.847. $\pi a^2/8$. **6.848.** $8 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}} - \arctg \sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}} \right)$. **6.849.** $e + 1/e - 2$.

6.850. 4. **6.851.** $3(e^3 - 4)/e$. **6.852.** $18/e^2 - 2$. **6.853.** а) $b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1)$;

Відповіді

- б) $b-a$. **6.854.** $3-e$. **6.855.** $\frac{3-2\ln 2-2\ln^2 2}{16}$. **6.856.** $2-\sqrt{2}$. **6.857.** $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6.858. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. **6.859.** $\sqrt{2}-1$. **6.860.** $\pi/4$. **6.861.** $3\pi a^2$. **6.862.** $3\pi a^2/8$.
6.863. $6\pi a^2$. **6.864.** 1) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n+1)(n+2)$; 2) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n-1)(n-2)$. **6.865.** 1) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$;
2) $8/15$. **6.866.** 1) $4\pi^3 a^2/3$; 2) $76a^2\pi^3/3$. **6.867.** $\pi a^2/4$. **6.868.** $\pi a^2/4$.
6.869. $18\pi \cdot a^2$. **6.870.** $a^2(4-\pi)/8$. **6.871.** $37\pi/6-5\sqrt{3}$. **6.872.** $51\sqrt{3}/16$.
6.873. a^2 . **6.876***. $a^2\frac{5\pi+18\sqrt{3}}{32}$. Для побудови лінії потрібно розглянути зміну φ
від 0 до 3π . **6.877.** $\pi/4$. **6.878.** a^2 . **6.879.** $a^2(1+\pi/6-\sqrt{3}/2)$. **6.880.** $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$.
6.881. a^2 . **6.882.** $\pi\sqrt{2}$. **6.883.** π . **6.884.** 2. **6.885.** $3\pi a^2$. **6.886.** 4π .
6.887*. 1) $\sqrt{\pi}/2$; 2) $\sqrt{\pi}$. Скористайтесь тим, що $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ (інтеграл
Пуассона). **6.888.** $\pi a^2/2$. **6.889.** $2-\pi/2$ і $2+\pi/2$. **6.890.** $a \operatorname{sh} \frac{b}{a}$. **6.891.**
 $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$. **6.892.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **6.893.** $\ln 3 - \frac{1}{2}$. **6.894.**
 $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. **6.895.** $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$. **6.896.** $4\frac{26}{27}$. **6.897.** $4a\sqrt{3}$. **6.898.**
 $\frac{\pi}{2}+2\operatorname{Intg}\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$. **6.899.** $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3$. **6.900.** 2. **6.901.** 8. **6.902.** При
 $t=2\pi/3$ $\left[x=a(2\pi/3-\sqrt{3}/2), y=3a/2\right]$. **6.903.** При $t=\pi/6$
 $(x=3\sqrt{3}R/8, y=R/8)$. **6.904***. $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Покласти $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$.
6.905. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$. **6.906.** $a\ln\frac{a}{y}$. **6.907.** $\pi^2 R/2$. **6.908.** $\pi^3/3$.
6.909. $4\sqrt{3}$. **6.911.** **6.912.** $2(e^t-1)$. **6.914.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.
6.916. $\ln\frac{3}{2} + \frac{5}{12}$. **6.917.** $8a$. **6.918.** $\frac{3}{2}\pi a$. **6.920.** k повинно мати вигляд
 $\frac{2N+1}{2N}$ або $\frac{2N}{2N-1}$, де N -ціле число.

Відповіді

6.921. 4. **6.922.** $\ln \frac{\pi}{2}$. **6.925***. Довести, що довжина еліпса може бути

записана у вигляді $L = 4 \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \right) dt$, і

застосувати теорему про оцінку інтеграла. **6.926.** 2π . **6.927.** 1) $\frac{4}{3} \pi ab^2$;

2) $\frac{4}{3} \pi a^2 b$. **6.928.** $\frac{8}{15} \pi h^2 a$. **6.929.** $\frac{\pi h^2}{3} (3a + h)$. **6.930.** $\frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$. **6.931.**

$\frac{\pi}{4} \left[\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{2} - \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{2} + 2(b-a) \right]$. **6.932.** $3\pi/10$. **6.933.** $\frac{\pi}{2} (15 - 16 \ln 2)$. **6.934.**

$\pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right)$. **6.935.** $8\pi/3$. **6.936.** $2\pi^2$. **6.937.** $\frac{\pi a^3}{4} \left[\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right]$. **6.938.** 1) $\frac{2}{3} \pi a^3$;

2) $\pi^2/16$. **6.939.** $5\pi^2 a^3$. **6.940.** $\pi a^3 \left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right)$. **6.941.** $\frac{32}{105} \pi a^3$. **6.942.** $\frac{16\pi c^6}{105ab^2}$.

6.943. $\pi^2/2$. **6.944.** $\pi e/2$. **6.945***. 1) π ; 2) $\pi \sqrt{\pi/2}$. Див. вказівку до задачі 6.887.

6.946*. $3\pi \sqrt{2\pi/32}$. Див. вказівку до задачі 6.887. **6.947***. π^2 . Скористатись тим, що

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (інтеграл Діріхле). **6.948***. $2\pi^2 a^3$. Доцільно перейти до параметричного

задання, поклавши $x = 2a \sin^2 t$, $y = \frac{2a \sin^3 t}{\cos t}$. **6.949.** $\frac{2}{3} \pi a^3$. **6.950***.

$\frac{4}{3} \pi abc$. Застосувати формулу $V = \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx$, де $S(x)$ - площа поперечного

перерізу. **6.951.** 1) $\pi \sqrt{2}$; 2) 36π . **6.952.** $v_1 = \pi \sqrt{2} (2\sqrt{6} - 11/3)$,

$v_2 = \pi \sqrt{2} (2\sqrt{6} + 11/3)$. **6.953.** $v_1 = v_3 = 4\pi(\sqrt{6} + \sqrt{3} - 4)$, $v_2 = 8\pi(4 - \sqrt{3})$.

6.954. $8\pi \sqrt{6}/3$. **6.955.** 8π . **6.956***. $\frac{2}{3} R^2 H = 400 \text{ см}^3$. Вісь симетрії основи

прийняти за вісь абсцис. **6.957.** $\frac{4}{15} ahH = 128 \text{ см}^3$. **6.958.** $\frac{2}{3} abH = 133 \frac{1}{3} \text{ см}^3$.

6.959*. $\frac{2}{3} \pi R^2 H$. Площа симетричного параболічного сегмента дорівнює $\frac{2}{3} ah$, де a -

основа сегмента, а h - "стрілка". **6.960***. 48π . **6.961.** $\frac{16}{15} \pi a^2 (\sqrt{2} + 1)$. ексцентриситет

еліпса. **6.962.** $3\pi a^2$. **6.963.** $\frac{64}{3} \pi a^2$. **6.964.** а) $9\pi^2 a^2$; б) $24\pi a^2$. **6.965.** $\frac{56}{3} \pi \cdot a^2$.

Відповіді

- 6.966.** $\frac{\pi}{9} \left(\sqrt{(1+a^4)^3} - 1 \right)$. **6.967.** $\frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4)$. **6.968.** $2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon$ і $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, де ε -ексцентриситет еліпса. **6.969.** $2\pi \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$.
- 6.970.** $\pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1} \right]$. **6.971.** $3\pi \cdot a^2$. **6.972.** $\pi a^2 \sqrt{2} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)$. **6.973.** $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5} (e^\pi - 2)$.
- 6.974.** $\frac{12}{5} \pi a^2$. **6.975.** $8\pi a^2 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$. **6.976.** $\frac{32}{5} \pi a^2$. **6.977.** $4\pi^2 r^2$. **6.978.** $2\pi \cdot a^2 (2 - \sqrt{2})$. **6.979.** $\pi \left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$. **6.980.** $4\pi \cdot a^2$. **6.981.** $ah^2/2$. **6.982.** $a^3/6$, $a^3/6$, $a^2\sqrt{2}/12$. **6.984.** Центр мас лежить на осі симетрії сегмента на відстані $\frac{2}{5}h$ від основи. **6.985.** Для S_1 : $\xi = \frac{3}{5}a$, $\eta = \frac{3}{8}b$; для S_2 : $\xi = \frac{3}{10}a$, $\eta = \frac{3}{4}b$.
- 6.986.** $\xi = 0$, $\eta = 2r/\pi$. **6.987.** $\xi = 0$, $\eta = 4r/3\pi$. **6.988.** Центр мас лежить на бісектрисі центрального кута, який стягує дугу, на відстані $\frac{2r}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$ від центра.
- 6.989.** $\xi = a/5$, $\eta = a/5$. **6.990.** $\xi = 4a/(3\pi)$, $\eta = 4b/(3\pi)$. **6.991.** $\frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2\varepsilon} \arcsin \varepsilon$, де ε -ексцентриситет еліпса. **6.992.** $\xi = \pi/2$, $\eta = \pi/8$. **6.993.** $\pi/2 + 4/5$. **6.994.** $\pi/12 + \sqrt{3}/8$. **6.995.** $3/20$. **6.996.** $\xi = 5a/8$, $\eta = 0$. **6.997.** $\xi = 0$, $\eta = a \frac{e^4 + 4e^2 - 1}{4e(e^2 - 1)}$.
- 6.999.** $\xi = \pi a$, $\eta = 4a/3$. **6.1000.** $\xi = \pi a$, $\eta = 5a/6$. **6.1001.** $\xi = 2a/5$, $\eta = 2a/5$. **6.1002.** $\xi = 256a/315\pi$, $\eta = 256a/315\pi$. **6.1004.** $\xi = 6a(4 - \pi^2)/\pi^3$, $\eta = 2a(\pi^2 - 6)/\pi^2$. **6.1005.** Центр мас лежить на осі симетрії сектора на відстані $\frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ від центра круга. **6.1006.** $\xi = 5a/6$, $\eta = 0$. **6.1007.** $\xi = \sqrt{2}\pi a/8$, $\eta = 0$.
- 6.1009.** $\xi = -\frac{a}{5} \frac{2e^{2\pi} + e^\pi}{e^\pi - e^{\pi/2}}$, $\eta = \frac{a}{5} \frac{e^{2\pi} - 2e^\pi}{e^\pi - e^{\pi/2}}$. **6.1010.** $\xi = 4a/5$, $\eta = 4a/5$. **6.1011.** $3R/8$. **6.1012.** Центр мас знаходиться на осі симетрії на відстані $R/2$ від центра.
- 6.1013.** $H/3$, $\frac{H\sqrt{R^2 + H^2}}{3(R + \sqrt{R^2 + H^2})}$, $H/4$. **6.1014.** $h/3$.
- 6.1015.** $\frac{l}{3}(a^2 + ab + b^2)$. **6.1016.** $\frac{\pi R^3}{2} = M \frac{R^2}{2}$ (M -маса півкола).
- 6.1017.** $\frac{\sqrt{(1+e)^3} - 2\sqrt{2}}{3}$. **6.1018.** $I_x = \frac{256}{15} a^3$; $I_y = 16a^3 \left(\pi^2 - \frac{128}{45} \right)$.

Відповіді

- 6.1019.** $ab^3/3$. **6.1020.** 1) $bh^3/12$; 2) $bh^3/4$; 3) $bh^3/36$. **6.1021.** $\pi R^4/8$.
6.1022. $\pi R^4/2$. **6.1023.** $\pi ab^3/4$ і $\pi ba^3/4$. **6.1024.** $\pi R^4 H/2$. **6.1025.** $\pi R^4 H/10$.
6.1026. $8\pi R^5/15$. **6.1027.** $8\pi ab^4/15$, де $2a$ -величина осі, навколо якої відбувається обертання. **6.1028.** $\pi R^4 H/6$. **6.1029.** $56\pi/15$.
6.1030. 1) $I_x = \pi(e^4 - 1)/8$; 2) $I_y = 4\pi(3 - e)$. **6.1031.** MR^2 , де M -маса бічної поверхні циліндра. **6.1032.** $MR^2/2$. **6.1033.** $2MR^2/3$. **6.1034.** $9\pi a^3/2$.
6.1035. $6\pi^2 ab^2$. **6.1036.** Об'єм- $3\sqrt{2}\pi^2 a^3/8$, поверхня- $6\sqrt{2}\pi a^2$. **6.1037.** Об'єм- $12\pi^3 a^3$, поверхня- $32\pi^2 a^3$. **6.1038.** Вісь обертання повинна бути перпендикулярною до діагоналі квадрата; вісь обертання повинна бути перпендикулярною до медіани. **6.1039.** $\frac{v_o^2}{2g}$. **6.1040.** $x = \frac{v_o}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$;
 $v_{cp} = \frac{2}{\pi} v_o$. **6.1041.** $t = 6$ с, $S = 144$ м. **6.1042.** 250 м. **6.1043.** $\frac{1}{12} g\gamma\pi R^2 H^2$.
6.1044. $\frac{1}{3} g\gamma\pi R^2 H^2$. **6.1045.** $\frac{1}{12} g\gamma a^2 H^2$. **6.1046.** $\frac{1}{4} g\gamma\pi H^2 R^2$.
6.1047. $\frac{16}{15} \sqrt{2} g\gamma a p^3$. **6.1048.** $\frac{4}{15} \pi\gamma\omega^3 R^2$. **6.1049.** $\frac{1}{60} \omega^2 \gamma dha^3$.
6.1050. $\frac{1}{24} \gamma alh^3 \omega^2$. **6.1051.** $\frac{1}{4} \pi\omega^2 \gamma R^4 H$. **6.1052.** $\frac{g\gamma ah^2}{3}$. **6.1053.** $g\gamma\pi R^2 H$.
6.1054. $\frac{2}{3} g\gamma ab^2$. **6.1055.** $g\gamma\pi R H^2$. **6.1056.** 20,625 кг. **6.1057.** $\frac{R^2}{3r^2} \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 11$ хв.
6.1058. $\frac{2}{3} \mu ah \sqrt{2gh}$.

До глави VII

- 7.1.** $z = \frac{\pi}{3}(x^2 y - y^3)$. **7.2.** $S = \frac{1}{4} \sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.
7.3. $\frac{\sqrt{3}}{2}(y^2 - x^2)x$. **7.5.** $0 < y < 2$; $-1 < y - \frac{1}{2}x < 0$. **7.6.** $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.
7.7. $V = \frac{S^2}{3\pi^2 e^3} \cdot \sqrt{\pi^2 e^4 - S^4}$, $0 < S < \pi e^2$. **7.8.** $S = \frac{x+y}{4} \sqrt{4z^2 - (x-y)^2}$, $z > \frac{x-y}{2}$.
7.9. $z(2;1) = \frac{1}{4}$; $z = (1;2) = 4$; $z(3;2) = 0$; $z(a;a) = -1$; $z(a;-a) = 1$. **7.10.** 1) $\frac{9}{16}$.
 2) 1; 3) 16; 2; 2. **7.11.** $x^2 + y^2 \leq R^2$. **7.12.** $x^2 + y^2 \geq R^2$. **7.13.** $x^2 + y^2 < R^2$.

7.14. $x+y < 0$. **7.15.** $x \leq x^2 + y^2 < 2x$. **7.16.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.17. $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ при $0 < a < 1$; $x^2 + y^2 \geq 1$ при $a > 1$. **7.18.** Два вертикальні кути утворені прямими $y=0$, $y=-2x$, виключаючи межі без т. $(0; 0)$.

7.19. $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$. **7.20.** $y^2 > 4x - 8$. **7.21.** $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. **7.22.** $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$.

7.23. Внутрішня частина круга $x^2 + y^2 = 1$ і кінець $2n \leq x^2 + y^2 \leq 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.

7.24. Областю є множина точок, що знаходиться всередині кутів бісектрис, включаючи точку $(0; 0)$. **7.25.** Областю є множина внутрішніх точок $y^2 = 4x + 4$.

Сама межа параболи не входить в область. **7.26.** Областю є кільце $1 < x^2 + y^2 \leq 4$.

7.27. Область $|x| \geq |y|$, крім т. $(0; 0)$. **7.29.** Незамкнута область $x+y > 0$, $y-x < 0$.

7.30. Частина простору між сферами $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ та $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, включаючи поверхню зовнішньої внутрішньої сфер. **7.31.** $0 \leq x^2 + y^2 \leq z^2$, $z \neq 0$.

7.32. $x^2 + y^2 - z^2 < 1$. **7.33.** -6 . **7.34.** 1 . **7.35.** e . **7.36.** 1 . **7.37.** $\frac{1}{2}$. **7.38.** 0 .

7.39. Функція немає меж при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. **7.40.** Функція неперервна. Точки розриву належать $y^2 - 2x = 0$.

7.41. Точка розриву $(0; 0)$, в її околі функція z нескінченно велика. **7.42.** Лінія розриву $x = y$, в її околі функція z нескінченно велика.

7.43. Поверхня розриву $z^2 = x^2 + y^2$. **7.44.** Точка зсувного розриву $(0; 0)$, при $z(0; 0) = 0$. **7.45.** Неперервна. **7.46.** Розрив на прямих $x = m$, $y = n$ (m і n - цілі числа).

7.47. Розрив на параболі $y^2 = 2x$. **7.48.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$.

7.49. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2 x$. **7.50.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 - 2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^4 + 3x^2 y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$. **7.51.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 30xy(5x^2 y - y^3 + 7)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3(5x^2 y - y^3 + 7)^2$.

$\cdot (5x^2 - 3y^2)$. **7.52.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$. **7.53.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$. **7.54.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. **7.55.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$. **7.56.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x}{y}}$. **7.57.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \cdot 3^{-\frac{y}{x}} \cdot \ln 3$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x} \cdot 3^{-\frac{y}{x}} \cdot \ln 3$. **7.58.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy + 3y^2 + 3x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 6xy$.

7.59. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. **7.60.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 \cos^2 \frac{y}{x}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x \cos^2 \frac{y}{x}}$.

7.61. $\frac{\partial u}{\partial x} = 4\sqrt{z} - \frac{y}{4x^4\sqrt{x}}; \frac{\partial u}{\partial y} = z + \frac{1}{\sqrt{x}}; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x}{4\sqrt[4]{z^3}} + y$. **7.62.** $z'_x = 5x^4 - 15x^2y^3; z'_y = 5y^4 - 15x^3y^2; z''_{xx} = 20x^3 - 30xy^3; z''_{xy} = -45x^2y^2; z''_{yy} = 20y^3 - 30x^3y$.

7.63. $z'_x = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; z'_y = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; z''_{xx} = \frac{3xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; z''_{xy} = \frac{3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; z''_{yy} = \frac{-3x^3y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. **7.64.** $z'_x = (1 - xy)e^{-xy}; z'_y = -x^2e^{-xy}; z''_{xx} = y(xy - 2)e^{-xy}; z''_{xy} = x(xy - 2)e^{-xy}; z''_{yy} = x^3e^{-xy}$.

7.65. $z'_x = y^x \ln y; z'_y = x \cdot y^{x-1}; z''_{xx} = y^x \ln^2 y; z''_{xy} = y^{x-1}(x \ln y + 1); z''_{yy} = x(x-1)e^{-x-2}$. **7.66.** $z'_x = \frac{y \operatorname{sgn} x}{x^2 + y^2}; z'_y = \frac{|x|}{x^2 + y^2}; z''_{xx} = \frac{2|x|y}{(x^2 + y^2)^2}; z''_{xy} = \frac{(y^2 - x^2) \operatorname{sgn} x}{(x^2 + y^2)^2}; z''_{yy} = -\frac{2|x|y}{(x^2 + y^2)^2}$.

7.67. $u'_x = -\frac{z}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^z; u'_y = \frac{z}{y} \left(\frac{y}{z}\right)^z; u''_{xx} = \frac{z(z+1)}{x^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^z; u''_{yy} = \frac{z(z-1)}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^z; u''_{zz} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \ln^2 \frac{y}{x}; u''_{xy} = -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{y}{x}\right)^z; u''_{xz} = -\frac{1}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^z \left(1 + z \ln \frac{y}{z}\right); u''_{yz} = \frac{1}{y} \left(\frac{y}{x}\right)^z \left(1 + z \ln \frac{y}{x}\right)$.

7.68. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2 + z^2); \frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cos(x^2 + y^2 + z^2)$.

7.69. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot y^{z-1} \cdot x^{y^z} \cdot \ln x; \frac{\partial u}{\partial z} = y^z \cdot x^{y^z} \ln x \ln y$.

7.70. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(2x + y)^{2x+y} [1 + \ln(2x + y)], \frac{\partial z}{\partial y} = (2x + y)^{2x+y} [1 + \ln(2x + y)]$.

7.71. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot e^{\sin \pi xy} \cdot (1 + \pi xy \cos \pi xy), \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{\sin \pi xy} \cdot (1 + \pi xy \cos \pi xy)$.

7.72. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^y} \cdot \ln x}{2(1+x^y)}$. **7.73.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 + 2xy}{\sqrt{1+(xy^2 + xy^2)}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2 + 2xy}{\sqrt{1+(xy^2 + xy^2)}}$.

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{1+(xy^2 + xy^2)^2}}$. **7.74.** $\frac{\partial u}{\partial x} = (3x^2 + y^2 + z^2) \cdot e^{x(x^2+y^2+z^2)}, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \cdot e^{x(x^2+y^2+z^2)}$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xz \cdot e^{x(x^2+y^2+z^2)}$. **7.75.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} e^{\frac{y}{z}-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} (\ln x) \cdot x^{\frac{y}{z}}; \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$.

7.76. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$. **7.92.** $f'_x(3; 2) = 56$;

$f'_y(3; 2) = 42$; $f''_{xx}(3; 2) = 32$. **7.93.** $f'_x(1; 2) = e(2e^4 - 1)$; $f'_y(1; 2) = 4e^5$;

$f''_{xx}(1; 2) = e(6e^4 - 1)$; $f''_{xy}(1; 2) = 8e^5$; $f''_{yy}(1; 2) = 18e^5$. **7.94.** $\frac{3}{2}$. **7.95.** $-\frac{13}{22}$. **7.96.** 45° .

7.97. $\arctg \frac{4}{7}$. **7.98.** $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{1}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial y}(M) = \frac{4}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial z}(M) = \frac{1}{5}$. **7.99.** $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 1$;

$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = -2$; $\frac{\partial u}{\partial z}(M) = \frac{1}{4}$. **7.100.** $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\partial u}{\partial y}(M) = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}(M) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$.

7.101. $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{\partial u}{\partial y}(M) = \frac{1}{6}$; $\frac{\partial u}{\partial z}(M) = \frac{\ln 3}{4}$. **7.102.** $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{3}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial y}(M) = \frac{7}{5}$;

$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = -\frac{12}{5}$. **7.103.** $dz_x = (y^3 - 6xy^2)dx$; $dz_y = (3xy^2 - 6x^2y + 8y^3)dy$.

7.104. $dz_x = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx$; $dz_y = \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy$. **7.105.** $du_x = \frac{3x^2}{x^3 + 2y^2 - z^3} dx$;

$du_y = \frac{6y^2 dy}{x^3 + 2y^2 - z^3}$; $du_z = \frac{-3z^2 dz}{x^3 + 2y^2 - z^3}$. В 7.106-7.109 скористатись формулою

$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y) \Delta x + f'_y(x; y) \Delta y$. **7.111.** $dz =$

$= \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2} (y + \sqrt{x^2 + y^2})} + \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. **7.112.** $dz = \frac{y \cdot (2xdy - ydx)}{x^2 \cos^2 \frac{y^2}{x}}$.

7.113. $dz = \frac{1}{y^2} \operatorname{tg} \frac{x}{y} (xdy - ydx)$. **7.114.** $du = (xy)^z \left(\frac{z}{x} dx + \frac{z}{y} dy + \ln(xy) dz \right)$.

7.115. а) $\frac{3}{40}$; б) $-0,739$. **7.116.** $dz = 3x(x + 2y)dx + 3(x^2 - y^2)dy$;

$d^2z = 6((x + y)dx^2 + 2xdxdy - ydy^2)$. **7.117.** $dz = (xdy - ydx) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$;

$d^2z = 2 \left(\frac{y}{x^3} dx^2 + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx dy - \frac{x}{y^3} dy^2 \right)$. **7.118.** $dz = \frac{(x + y)dx + xdy}{\sqrt{x^2 + 2xy}}$;

$d^2z = \frac{-y^2 dx^2 + 2xy dx dy - x^3 dy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$. **7.119.** $dz = \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) dx + \frac{x}{y} dy$;

$d^2z = -\frac{1}{x} dx^2 + \frac{2}{y} dx dy - \frac{x}{y^2} dy^2$. **7.120.** $du = e^{xyz} (yz dx + xz dy + xy dz)$;

$d^2u = e^{xyz} ((yz dx + xz dy + xy dz)^2 + 2(z dx dy + x dy dz + y dx dz))$. **7.121.** $d^2u =$

$$= \frac{[(ydx - xdy)^2 - (xdx + ydy)^2]}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \mathbf{7.122.} \quad d^3z = e^y(-\cos xdx^3 - 3\sin x dx^2 dy +$$

$$+ 3\cos x dx dy^2 + \sin x dy^3). \quad \mathbf{7.123.} \quad du^3 = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dxdydz).$$

$$\mathbf{7.124.} \quad d^2u = [(ydx + xdy)^2 + 2dxdy] \cdot e^{xy}. \quad \mathbf{7.125.} \quad d^4u = 24(dx^4 + 4dx^3 dy +$$

$$+ 2dxdy^2 dz + 3dzdydz^2 + dz^4). \quad \mathbf{7.126.} \quad 1,2\pi \text{ дм}^3. \quad \mathbf{7.127.} \quad 0,13 \text{ см.}$$

$$\mathbf{7.128.} \quad \Delta V = -15,7 \text{ см}^3. \quad \mathbf{7.129.} \quad \Delta T \approx \frac{\pi}{g\sqrt{gl}}(gd - l_\beta). \quad \mathbf{7.130.} \quad \approx 0,005. \quad \mathbf{7.131.} \quad \approx 1,08.$$

$$\mathbf{7.132.} \quad (1,8 \pm 0,2) \text{ гр.} \quad \mathbf{7.133.} \quad \text{Зростає зі швидкістю } 444 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

$$\mathbf{7.134.} \quad e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2). \quad \mathbf{7.135.} \quad \sin 2t + 2e^{2t} + e'(\sin t + \cos t).$$

$$\mathbf{7.136.} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 3u^3 \sin v \cos v(\cos v - \sin v); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\sin v \cos v).$$

$$\mathbf{7.137.} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 2 \frac{u}{v^2} \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}.$$

$$\mathbf{7.138.} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2 e^{2x}}. \quad \mathbf{7.139.} \quad -4e^{2\cos 2t} \cdot \sin 2t. \quad \mathbf{7.140.} \quad 0. \quad \mathbf{7.141.} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 1.$$

$$\mathbf{7.142.} \quad dz = \frac{y^2 dx + y^2 dy}{(x+y)^2} \operatorname{arctg}(xy + x + y) + \frac{xy[(y+1)dx + (x+1)dy]}{(x+y)[1 + (xy + x + y)^2]}. \quad \mathbf{7.143.} \quad e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$$

$$\cdot [(y^4 - x^4 + 2xy^3)x dy + (x^4 - y^4 + 2x^3y)y dx]. \quad \mathbf{7.144.} \quad \frac{dz}{dt} = e^{2x-3y} \cdot (2\sec^2 t - 3(2t-1)).$$

$$\mathbf{7.145.} \quad \frac{dz}{dt} = x^y \left(\frac{y}{xt} + \ln x \cos t \right). \quad \mathbf{7.146.} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2 + y^2}.$$

$$\mathbf{7.147.} \quad \frac{du}{dt} = \frac{x(z + 2yt^2) - yzt e^t}{tx^2}. \quad \mathbf{7.148.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x + e^y(x^2 + 1)}{e^x + e^y}.$$

$$\mathbf{7.149.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2 + (x+1)^2}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y(1 - 2(x+1)^2)}{y^2 + (x+1)^2}. \quad \mathbf{7.150.} \quad dz =$$

$$= ((2uv - v^2)\sin y - (u^2 - 2uv)y\sin x)dx + ((2uv - v^2)x\cos y + (u^2 - 2uv)\cos x)dy.$$

$$\mathbf{7.151.} \quad dz = (5x^4 f_v''(u;v) - y \cdot f_u''(u;v)\sin(xy))dx - (x\sin(xy)f_u''(u;v) + 7 \cdot f_v''(u;v))dy.$$

$$\mathbf{7.152.} \quad du = (2s \cdot f_x'(x; y; z) + 2s \cdot f_y'(x; y; z) + 2t \cdot f_z'(x; y; z))ds + (2t \cdot f_x'(x; y; z) -$$

$$- 2t \cdot f_y'(x; y; z) + 2s \cdot f_z'(x; y; z))dt. \quad \mathbf{7.153.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 f_{uu}''(u;v) + 2f_{uv}''(u;v) + \frac{1}{y^2} f_{vv}''(u;v);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy \cdot f_{uv}''(u;v) - \frac{x}{y^3} \cdot f_{vv}''(u;v) + f_u''(u;v) - \frac{1}{y^2} \cdot f_u''(u;v); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 f_{uu}''(u;v) -$$

- $-\frac{2x^2}{y^2} f''_{uv}(u;v) + \frac{x^2}{y^4} f''_{vv}(u;v) + \frac{2x}{y^3} f'_v(u;v)$. **7.154.** $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 y - y^3}{3xy^2 - x^3}$. **7.155.** $\frac{dy}{dx} =$
 $= \frac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}$. **7.156.** $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$. **7.157.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{2(x^2 + y^2) - a^2}{2(x^2 + y^2) + a^2}$.
7.158. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{2x + e^{xy} - \cos xy}{\cos xy - e^{xy} - x}$. **7.159.** $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **7.160.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$.
7.161. $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(x+y)^2}$. **7.162.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x(y-1)}$. **7.163.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}$.
7.164. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \ln x - 1}{x^2 \ln y - 1}$. **7.165.** $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\substack{x=6 \\ y=2}} = \frac{4}{3}$; $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{\substack{x=6 \\ y=8}} = -\frac{4}{3}$. **7.166.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$;
 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$. **7.167.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{z+1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z+1}$. **7.168.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-yz}{xy+z^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy+z^2}$.
7.169. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(z-1)}$. **7.170.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y}{x}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$.
7.171. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{y}{x}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$. **7.172.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}$.
7.173. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}$. **7.174.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+y+1}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^2}$.
7.175. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^3}{y^2}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(1+y^2)}{y^5}$. **7.176.** $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 0$; $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{3}$; $\left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{1}{3}$.
7.177. $dz = \frac{zdx - z(1+x^2 z^2)dy}{y(1+x^2 z^2) - x}$. **7.178.** $dz = \frac{y^2(z+3x^2)dx + (3y^4 + ze^{z/y})dy}{y(e^{z/y} - xy)}$.
7.179. $d^2 z = \frac{c^4}{a^2 b^2 z^3} \cdot ((y^2 - b^2)dx^2 - 2xy dx dy + (x^2 - a^2)dy^2)$. **7.180.** $dz =$
 $= e^{-y} [((y^2 - b^2)dx^2 - 2xy dx dy + (x^2 - a^2)dy^2)]$. **7.181.** $2(xdx + ydy)$.
7.182. $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$. **7.183.** а) $\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$; б) $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$.
7.184. $(r')^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}$. **7.185.** $\omega = r \cdot \frac{\partial u}{\partial r}$. **7.186.** $\omega = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} +$
 $+ \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\text{ctg} \theta}{\rho^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$. **7.188.** а) $(-2; 1)$;
б) $(10xy - 3y^3; 5x^2 - 9xy^2 + 4y^3)$. **7.189.** 1) $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; 2) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$; 3) $\frac{-y_0 \mathbf{i} + x_0 \mathbf{j}}{x_0^2 + y_0^2}$.

- 7.190.** 1) $\varphi \approx 18^\circ 52'$. **7.191.** Від'ємна піввісь. **7.192.** $\alpha \approx 8^\circ$. **7.193.** а) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$; б) точки, що лежать на колі $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$. **7.196.** $-\sqrt{5}$. **7.197.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- 7.199.** $\frac{1}{r^2}$. **7.200.** $-\frac{1}{5}$. **7.201.** $-\frac{92}{13}$. **7.202.** 12. Зростає. **7.203.** $\frac{\pi}{2}$.
- 7.204.** $\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u(M_0)| = \sqrt{17 + 16 \ln^2 2}$. **7.205.** $\frac{3}{5} \sqrt{15}$. **7.206.** $(-4; 1)$.
- 7.207.** $(4; 4)$. **7.208.** $(1; 0.5)$; $(0; 0)$. **7.209.** $(1; 2)$. **7.210.** $(0; 0)$; $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$; $(-1; 2)$; $(-1; 2)$. **7.211.** $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$. **7.212.** $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$. **7.213.** $(2; 1; 7)$. **7.214.** а) $(-2; 0)$; б) $\left(\frac{16}{7}; 0\right)$. **7.215.** $z_{\min} = -1$ в точці $(1; 0)$. **7.216.** $z_{\max} = 108$ в точці $(3; 2)$.
- 7.217.** $z_{\min} = 3\sqrt[3]{3}$ в точці $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$. **7.218.** $z_{\min} = 0$ в точці $(0; \pm 1)$, екстремумів немає $z_{\max} = \frac{2}{e}$ в точці $(\pm 1; 0)$. **7.219.** $z_{\max} = \frac{1}{64}$ при $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$.
- 7.220.** $z_{\min} = -\frac{4}{3}$ при $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$. **7.221.** $z_{\min} = 10 - 18 \ln 3$ при $x = 1$, $y = 3$.
- 7.222.** $z_{\min} = -28$ при $x = 2$, $y = 1$; $z_{\max} = 28$ при $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$. В стаціонарних точках екстремумів немає. **7.223.** $z_{\min} = 0$ в точці $(0; 0)$, $z_{\max} = 2e^{-1}$ в точці $(\pm 1; 0)$. В стаціонарних точках екстремумів немає. **7.224.** $u_{\min} = 2^{9/4}$ при $x = 2^{1/4}$; $y = 2^{1/2}$; $z = 2^{3/4}$. **7.225.** Рівняння визначає дві функції із яких одна має максимум $z_{\max} = 6$ при $(-2; 1)$; друга функція має $z_{\min} = -2$ при $(-2; 1)$; в точках кола $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ функції мають екстремум $z = 2$. **7.226.** $z_{\min} = -\frac{19}{4}$ в точці $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. **7.227.** $z_{\min} = 2$ в точці $(1; 1)$. **7.228.** $z_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$ при $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $z_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. **7.229.** $z_{\min} = 0$ в точці $(1; 0)$; $z_{\max} = \frac{1}{27}$ в точці $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **7.230.** $z_{\min} = -\sqrt{5}$ в точці $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $z_{\max} = \sqrt{5}$ в

точці $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **7.231.** $z_{\min} = 0$ в точці $(1; 0)$; $z_{\max} = \frac{1}{27}$ в точці $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

7.232. $u_{\max} = 2$ в точках $(2; 1; 1)$, $(1; 2; 1)$, $(1; 1; 2)$; $u_{\min} = \frac{50}{27}$ в точках $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$,

$\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **7.233.** $(a; a)$ або $(-a; -a)$ $z_{\max} = a^2$; $(a; -a)$ або $(-a; a)$

$z_{\min} = -a^2$. **7.234.** $(3; 3; 3)$ $u = 9$ (мінімум). **7.235.** Найбільше та найменше значення функції лежить на межі області: $z = 4$ в точках $(2; 0)$ і $(-2; 0)$; найменше $z = -4$ при $(0; 2)$ та $(0; -2)$. Стационарна точка $(0; 0)$ не є

екстремумом. **7.236.** $z_{\max} = z(1; 2) = 17$; $z_{\min} = z(1; 0) = -3$. **7.237.** $z_{\max} = z\left(1; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$;

$z_{\min} = z(4; 2) = -128$. **7.238.** $z_{\max} = z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$; $z_{\min} = z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$.

7.239. $z_{\text{найб}} = 5$ в точці $(0; 0)$. **7.240.** $z_{\text{найб}} = 6$ в точці $(3; 0)$ та $(0; 3)$. $z_{\text{найб}} = -1$ в

точці $(1; 1)$. **7.241.** $z_{\text{найб}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $z_{\text{найб}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

7.242. $z_{\max} = z(2; -1) = 13$; $z_{\min} = z(1; 1) = z(0; -1) = -1$. **7.243.** $z_{\min} = z(0; 3) = -19$;

$z_{\max} = z(0; 0) = -1$. **7.244.** $x = y = \sqrt[3]{2v}$; $z = 0,5\sqrt[3]{2v}$. **7.245.** $(\pm\sqrt{5}; 1)$.

7.246. $R = 1$ дм; $H = 2$ дм. **7.247.** Куб з довжиною ребра a . **7.248.** Довжина сторін

$\frac{2\sqrt{2}}{3}R$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$; $\frac{H}{3}$. **7.249.** $x = y = z = \sqrt[3]{a}$. **7.250.** $a = b = c = \frac{2p}{3}$.

7.251. $R = \frac{h\sqrt{5}}{2}$, $H = \frac{h}{2}$, де R - радіус основи намету; H - висота циліндричної

частини; h - висота конічної верхівки. **7.252.** $\left(-\frac{5}{9}; -\frac{1}{9}\right)$. **7.253.** Тетраedr.

7.254. $\frac{2}{3}p; \frac{1}{3}p$, якщо обертання трикутника навколо основи.

7.255. $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

До глави VIII

- 8.1. $1 + y^2 = C(1 - x^2)$. 8.2. $\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = C$; $x = \pm 1$. 8.3. $7^x + 7^{-y} = C$.
- 8.4. $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$. 8.5. $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$. 8.6. $y \sin y + \cos y - x \cos x + \sin x = C$.
- 8.7. $y = C \sin x - a$. 8.8. $\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) = C$. 8.9. $y = C \sqrt{1 + e^{2x}}$.
- 8.10. $(1 + e^x)^2 \operatorname{tg} y = C$. 8.11. $\arcsin y + \arcsin x = C$. 8.12. $\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + C$.
- 8.13. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{4} \right| = C - 2 \sin \frac{x}{2}$. 8.14. $x + y = \ln C(x+1)(y+1)$. 8.15. $y = e^{\sqrt{x-2}}$.
- 8.16. $y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$. 8.17. $y = -x$. 8.18. $x^2 - y^2 = 1$. 8.19. $\sqrt{y} = x \ln x - x + 1$.
- 8.20. $\cos x = \sqrt{2} \cos y$. 8.21. $y - 2x = Cx^3(y+x)$. 8.22. $y = \pm x \sqrt{2 \ln |Cx|}$.
- 8.23. $y - x = Ce^{\frac{x}{y-x}}$. 8.24. $x^2 - y^2 = Cx$. 8.25. $y = 2x \operatorname{arctg} Cx$. 8.26. $x^2 - 2xy - y^2 = C$. 8.27. $xe^{\frac{y}{x}} = C$. 8.28. $\ln |Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$. 8.29. $x^2 = C^2 + 2Cy$.
- 8.30. $e^{\frac{y}{x}} = Cy$. 8.31. $\arcsin \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - y^2} - \ln x = C$. 8.32. $(x+y)^2 = Cx^3 e^{\frac{x}{x+y}}$.
- 8.33. $y = xe^{1-x}$. 8.34. $\ln y + 2 \sqrt{\frac{x}{y}} = 2$. 8.35. $y = \frac{2x}{1-3x^2}$. 8.36. $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$.
- 8.37. $y^3 = y^2 - x^2$. 8.38. $y = -x$. 8.39. $y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$. 8.40. $y = Cx^3 - x^2$.
- 8.41. $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$. 8.42. $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$. 8.43. $y = Cx^2 e^x + x^2$.
- 8.44. $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$. 8.45. $y = \ln x + \frac{C}{x}$. 8.46. $y = \frac{x^3}{2} + Cx$.
- 8.47. $xy = C - \ln |x|$. 8.48. $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$. 8.49. $y^2 - 2x = Cy^3$.
- 8.50. $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$. 8.51. $y = \sin x$. 8.52. $y = e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.
- 8.53. $y = x + \sqrt{1 - x^2}$. 8.54. $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$. 8.55. $y = 1$. 8.56. $x = Ce^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$.
- 8.57. $y = Cx - 1$. 8.58. $y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. 8.59. $\ln |y| + \frac{x}{y} = C$, $y = 0$.

Відповіді

- 8.60.** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$. **8.61.** $2y \cos x + \cos 2x = C$. **8.62.** $y = \frac{x-1}{3} + \frac{C}{\sqrt{2x+1}}$. **8.63.** $y = Cx^2 + \frac{1}{x}$. **8.64.** $y = \frac{C}{x} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{(1+x^2)^2}{3x}$.
- 8.65.** $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$. **8.66.** $x = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$. **8.67.** $(x+y)^2(2x+y)^3 = C$.
- 8.68.** $\sin \frac{y}{x} = Cx$. **8.69.** $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$. **8.70.** $y(y-2x)^3 = C(y-x)^2$.
- 8.71.** $y = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y)$. **8.72.** $x = y^2 \left(1 + C e^{\frac{1}{y}} \right)$. **8.73.** $y^4 = 4xy + C$.
- 8.74.** $y = (C + e^x)(1+x)^n$. **8.75.** $y = Cx^2 + e^x$. **8.76.** $y = xe^{-\frac{x}{2}}$. **8.77.** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4} + \ln 2$. **8.78.** $y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left[2 + x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right]$. **8.79.** $(1+y)e^{-x} = \ln \frac{1+e^x}{2} + 1 - x$. **8.80.** $y = \frac{5}{3} e^{x^3} - \frac{1}{3}(2+x^3)$. **8.81.** $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$. **8.82.** $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$. **8.83.** $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$; $y = x+1$.
- 8.84.** $(y-x+5)^5(x+2y-2) = C$. **8.85.** $(y+2)^2 = C(x+y-1)$; $y = 1-x$.
- 8.86.** $(y-x+2)^2 + 2x = C$. **8.87.** $e^{-2\operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}} = C(y+2)$. **8.88.** $y^2 = x + (x+1) \ln \frac{C}{x+1}$.
- 8.89.** $2y^2 - 3xy + \frac{7}{2}x^2 + 2x - 5y = C$. **8.90.** $x + 2y + 3 \ln(x+y-2) = C$.
- 8.91.** $C(3y-2x+1)^3(y-x-1)^2 = 0$. **8.92.** $y^2 e^{-\frac{y^2}{x}} = C$. **8.93.** $(1+Cx)e^y = 1$.
- 8.94.** $y = \frac{1}{x} \operatorname{tg} \ln |Cx|$. **8.95.** $x^2 y^2 + 1 = Cy$. **8.96.** $Cx = 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}$. **8.97.** $y^4 + 2x^2 y^2 + 2y^2 = C$. **8.98.** $y = x \operatorname{tg}(x+C)$. **8.99.** $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$.
- 8.100.** $y = x \sqrt{2x+C}$. **8.101.** $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$; $y = 0$. **8.102.** $y^3 = Cx^3 - 3x^2$.
- 8.103.** $y^{-3} = C \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x$; $y = 0$. **8.104.** $y^2 = Cx^2 - 2x$; $x = 0$.
- 8.105.** $y = x^4 \ln^2 Cx$; $y = 0$. **8.106.** $y^2 = x^2 - 1 + C \sqrt{|x^2 - 1|}$.
- 8.107.** $y = \frac{1}{(1+x)[C + \ln|1+x|]}$. **8.108.** $y(1 + \ln x + Cx) = 1$.

Відповіді

8.109. $y = \left(\frac{C + \ln |\cos x|}{x} + \operatorname{tg} x \right)^2$. **8.110.** $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$; $y = 0$.

8.111. $y = e^{-2x^2} \left(C + \frac{1}{2}x^2 \right)^2$. **8.112.** $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + C}}$. **8.113.** $x^2 + xy + y^2 = C$.

8.114. $5x^2y - 8xy + x + 3y = C$. **8.115.** $x^3 + 2xy - 3y = C$. **8.116.** $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$. **8.117.** $4x^2 + y^2 = Cx$. **8.118.** $y + xe^{-y} = C$. **8.119.** $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$.

8.120. $\frac{x^2 \cos 2y}{2} + x = C$. **8.121.** $x^2 + ye^{\frac{x}{y}} = C$. **8.122.** $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C$.

8.123. $\mu = \frac{1}{x^2}$; $x + \frac{y}{x} = C$. **8.124.** $\mu = \frac{1}{y}$; $xy - \ln y = 0$.

8.125. $\mu = \frac{1}{x^2}$; $y^2 = Cx^3 + x^2$. **8.126.** $\mu = e^{-2x}$; $y^2 = (C - 2x)e^{2x}$. **8.127.** $\mu = \frac{1}{\sin y}$;

$\frac{x}{\sin y} + x^3 = C$. **8.128.** $\mu = e^{-y}$; $e^{-y} \cos x = C + x$. **8.129.** $abx + b^2y + a + bd = Ce^{bx}$.

8.130. $x + y = a \operatorname{tg} \left(C + \frac{y}{a} \right)$. **8.131.** $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$. **8.132.** $\frac{2x}{x-y} +$

$\ln|x+y| + 3\ln|y-x| = C$. **8.133.** $x^2 - y^2 = Cy^3$. **8.134.** $3x^2y + x^3y^3 = C$.

8.135. $y \left(x^2 + \frac{1}{3}y^2 \right) = Ce^{-x}$. **8.136.** $\ln|1+y| - \frac{1+y}{x} = C$. **8.137.** $y^2 - 1 + Cxy = 0$.

8.138. $3\sqrt{y} = C\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1$. **8.139.** $\frac{xy}{x-y} + \ln \left| \frac{x}{y} \right| = C$. **8.140.** $y = \sin x + C \cos x$.

8.141. $y = \frac{2e^x}{C + e^x(\cos x + \sin x)}$. **8.142.** $xe^{\frac{\sin y}{x}} = C$. **8.143.** $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$.

8.144. $y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{C + \sin x}$. **8.145.** $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$. **8.146.** $\ln|Cx| = -e^{-\frac{x^2+y^2}{x}}$.

8.147. $xy \cos \frac{y}{x} = C$. **8.148.** $\operatorname{tg} x - \frac{\sin y}{\sin x} = C$. **8.149.** $y = Cx - C^2$; особливий

розв'язок $y = \frac{x^2}{4}$. **8.150.** $y = Cx - C - 2$. **8.151.** $y = Cx - 3C^3$; особливий розв'язок

$9y \pm 2x\sqrt{x} = 0$. **8.152.** $y = Cx + \frac{1}{C}$; особливий розв'язок $y^2 = 4x$.

8.153. $y = Cx + \frac{1}{2C^2}$; особливий розв'язок $y = 1,5x^{\frac{2}{3}}$. **8.154.** $y = Cx - a\sqrt{1+C^2}$;

особливий розв'язок $x^2 + y^2 = a^2$. **8.155.** $y = Cx + C + C^2$; особливий розв'язок

Відповіді

$y = -\frac{(x+1)^2}{4}$. **8.156.** $y = Cx - \ln C$; особливий розв'язок $y = \ln x + 1$.

8.157. $y = (C + \sqrt{x+1})^2$; особливий розв'язок $y = 0$. **8.158.** $x = 3p^2 + C|p|^{\frac{3}{2}}$,

$y = 2p^3 + 3C|p|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} p$; особливий розв'язок $y = 0$. **8.159.** $x^2 = p + C$,

$y = 2 + 2Cp^{-1} - \ln p$. **8.160.** $x = C(p-1)^{-2} + 2p + 1$, $y = Cp^2(p-1)^{-2} + p^2$; особливі

розв'язки $y = 0$, $y = x - 2$. **8.161.** $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{p^3}$, $y = \frac{2C}{p} - \frac{3}{p^2}$.

8.162. $x = Cp - \ln p - 2$, $y = \frac{1}{2}Cp^2 - p$. **8.163.** $y = \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{2C}$; особливі розв'язки

$y = \pm x$. **8.164.** $Cy = (x - C)^2$; особливі розв'язки $y = 0$, $y = -4x$.

8.165. $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$; особливий розв'язок $y^2 - 4x^2 = 0$.

8.166. $x = Ce^{-p} + 2(1-p)$, $y = x(1+p) + p^2$. **8.167.** $y = Cx + C + C^2$; особливий

розв'язок $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2$. **8.168.** $(C-x)y = C^2$; особливий розв'язок $y = 4x$.

8.169. $y = \frac{x^3}{6} + \sin x + C_1x + C_2$. **8.170.** $y = \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{3}{2} \right] + C_1x + C_2$.

8.171. $y = (C_1 + \arctg x)x - \ln \sqrt{1+x^2} + C_2$. **8.172.** $y = C_1x^2 + C_2$.

8.173. $y = C_1e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$. **8.174.** $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2$.

8.175. $y = \frac{1}{C_1}e^{C_1x+1} \left(x - \frac{1}{C_1} \right) + C_2$, $y = \frac{1}{2}ex^2 + C$. **8.176.** $y = \frac{1}{C_1} \arctg \frac{x}{C_1} + C_2$,

$y = \frac{1}{2C_1} \ln \left| \frac{x-C_1}{x+C_1} \right| + C_2$, $y = C - \frac{1}{x}$. **8.177.** $C_1^2y = (C_1^2x^2 + 1) \arctg C_1x - C_1x + C_2$

$y = \frac{1}{2}k\pi x^2 + C$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.178.** $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$. **8.179.** $y = \frac{1}{12}(x+C_1)^3 + C_2$.

8.180. $y = \frac{2}{3C_1} \sqrt{(C_1x-1)^3} + C_2$. **8.181.** $y = C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}$.

8.182. $(x+C_2)^2 = 4C_1(y-C_1)$. **8.183.** $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}$. **8.184.** $y = -\frac{1}{3} \sin^3 x +$

$+ C_1 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) + C_2$. **8.185.** $y = C_1 \left(x\sqrt{x^2-1} - \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| \right) + x^2 + C_2$,

$y = C_1 \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) + x^2 + C_2$. **8.186.** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$.

Відповіді

- 8.187.** $x = \pm \frac{2}{3}(\sqrt{y-2C_1})\sqrt{\sqrt{y+C_1}+C_2} + C_2$. **8.188.** $x = 2C_1 p - \ln|p| + C_2$
 $y = C_1 p^2 - p$; $y = Ce^{-x}$; $y = C$. **8.189.** $\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1 y^2 + 1} = C_2 \pm x$.
- 8.190.** $C_1^2 y + 1 = \pm \operatorname{ch}(C_1 x + C_2)$, $C_1^2 y - 1 = \sin(C_1 x + C_2)$, $2y = (x + C)^2$, $y = 0$.
- 8.191.** $\operatorname{ctg} y = C_2 + C_1 x$. **8.192.** $y = 1 + \frac{1}{C_1 x + C_2}$. **8.193.** $(x + C_2)^2 - y^2 = C_1$.
- 8.194.** $y = C_1 e^{C_2 x}$. **8.195.** $y \cos^2(x + C_1) = C_2$. **8.196.** $C_1 x + C_2 = \ln \left| \frac{y}{y + C_2} \right|$.
- 8.197.** $\frac{x + C_2}{2} = C_1 \operatorname{arctg}(C_1 \ln y)$, $C_1 > 0$. **8.198.** $\ln|C_1 y| = 2 \operatorname{tg}(2x + C_2)$
- 8.199.** $y = x^3 + 3x + 1$. **8.200.** $y = \frac{2}{5}x^2 \sqrt{2x} - \frac{16}{5}$. **8.201.** $y = \frac{4}{(x+4)^2}$.
- 8.202.** $y = (x-2)e^x + x + 3$. **8.203.** $y = 2 \ln|x+1| - x + 1$. **8.204.** $y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}$.
- 8.205.** $y = x + 2 \ln|y|$. **8.206.** $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$. **8.207.** $y = -\ln|1-x|$.
- 8.208.** $y = \sqrt{2x-x^2}$. **8.209.** $\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right| = 2(x+1)$. **8.210.** $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$.
- 8.211.** $(3-x)y^5 = 8(x+2)$. **8.212.** $y = 1 + \sin x$. **8.213.** $y = \frac{x+1}{x}$.
- 8.214.** $y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$. **8.215.** $y = -\frac{1}{8} \sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.
- 8.216.** $y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. **8.217.** $y = \frac{e^{ax}}{a^{10}} + C_1 x^9 + C_2 x^8 + C_3 x^7 +$
 $+ C_4 x^6 + C_5 x^5 + C_6 x^4 + C_7 x^3 + C_8 x^2 + C_9 x + C_{10}$. **8.218.** $y = C_1 \frac{x^2}{2} +$
 $+ C_2 x + C_3 - C_1^2 (x + C_1) \ln|x + C_1|$. **8.219.** $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^3 + C_2 x + C_3$.
- 8.220.** $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$. **8.221.** $2y = C_1 \cos 2x + (1 + 2C_1)x^2 + C_2 x + C_3$.
- 8.222.** $y = C_3 - (x + C_1) \ln|x + C_1| + C_2 x$, $y = C_1 x + C_2$. **8.223.** $y = \frac{1}{12}(x^3 +$
 $+ 6x^2)C_1 x \ln|x| + C_2 x + C_3$. **8.224.** $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.
- 8.225.** $(x + C_2)^2 + (y + C_3)^2 = C_1^2$. **8.226.** Розв'язок $y_2(x)$ можна знайти за допомогою заміни $y = y_1(x) \cdot z(x)$, де $z(x)$ невідома функція. Можна також

Відповіді

використати формулу Остроградського. **8.227.** $y = C_1 x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 2C_1 + C_2 x$.

8.228. $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$. **8.229.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. **8.230.** $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$.

8.231. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x^2}$. **8.232.** 1) $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$; 2) $xy'' -$

$-(2x+1)y' + (x+1)y = 0$. **8.233.** $(x^3 - 3x^2 + 3x)y''' - (x^3 - 3x + 3)y'' - 3x(1-x)y' +$
 $+ 3(1-x)y = 0$. **8.234.** $y = C_1 x + C_2 x \int \frac{e^x dx}{x^2}$. **8.235.** $y = C_1 \sin x +$

$+ C_2 \left[1 - \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \right]$. **8.236.** $y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1)$. **8.237.** $y = x^3 + x(C_1 + C_2 \ln|x|)$.

8.238. $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$. **8.239.** $y = C_1 x^3 + C_2 (x+1) - x$.

8.240. 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$; 2) $y = C_1 e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{3})x}$; 3) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$;

4) $y = C_1 + C_2 e^{7x}$; 5) $y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$; 6) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{4}{3}x}$;

7) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$; 8) $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 9) $y =$

$= e^x \left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} \right)$; 10) $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$. **8.241.** $y = e^x$. **8.242.** $y =$

$= (7-3x)e^{x-2}$. **8.243.** $y = 4e^x + 2e^{3x}$. **8.244.** $y = 3e^{-2x} \sin 5x$. **8.245.** $y = e^{\frac{x}{2}}(2+x)$.

8.246. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$. **8.247.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} e^{4x}$. **8.248.** $y = C_1 \cos x +$

$+ C_2 \sin x + (2x-2)e^x$. **8.249.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$. **8.250.** $y = C_1 e^x +$

$+ C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) e^x$. **8.251.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9} x^2 + \frac{5}{27} x + \frac{11}{27}$.

8.252. $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1$. **8.253.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - 0,2$.

8.254. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 0,1 \sin x + 0,3 \cos x$. **8.255.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$.

8.256. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x$. **8.257.** $y = C_1 e^x +$

$+ C_2 e^{2x} + (0,1x - 0,12) \cos x - (0,3x + 0,34) \sin x$. **8.258.** $y = C_1 e^x +$

$+ C_2 e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$. **8.259.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36} \right) e^{-x}$.

8.260. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} \right) e^x$. **8.261.** $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) +$

$+ 0,25 e^{2x} + 0,1 \cos 2x + 0,05 \sin 2x$. **8.262.** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} +$

Відповіді

$+ e^{3x} \left(\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x \right)$. **8.263.** $y = (C_1 + C_2 x + x^3) e^x$. **8.264.** $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{4} \right) \cos x +$

$+ \left(C_2 + \frac{x}{4} \right) \sin x$. **8.265.** $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x} + \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32} \right) e^{2x}$.

8.266. $y = C_1 + C_2 e^{5x} - 0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x + 0,02(\cos 5x - \sin 5x)$.

8.267. $y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x}{3} e^{3x} + 3x^2 + 2x$. **8.268.** $y = C_1 + C_2 e^{\frac{5}{2}x} + \bar{y}$, де \bar{y} рівне:

1) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$; 2) $\frac{1}{7}e^x$; 3) $5\sin x - 2\cos x$; 4) $\frac{1}{10}x + \frac{5}{164}\sin 2x - \frac{1}{41}\cos 2x$; 5) $\cos 2,5x + \sin 2,5x - 0,02xe^{-2,5x}$; 6) $\left(-5x - \frac{16}{29} \right) \cos x - \left(2x - \frac{185}{29} \right) \sin x$; 7) $e^{-x}[(10x+18)\sin x - (20x+1)\cos x]$; 8) $\frac{3}{10} \left(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x} - xe^{\frac{5}{2}x} \right)$.

8.269. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \bar{y}$, де \bar{y} рівне: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{-x}$;

3) $\frac{3}{2}x^2 e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{169} \left(-\frac{5}{2}\sin 3x + 6\cos 3x \right) - \frac{1}{50}(3\sin x + 4\cos x)$;

6) $\frac{3}{100}(3\sin x + 4\cos x) + \frac{1}{676}(5\sin 3x - 12\cos 3x)$; 7) $2x^2 + 4x + 3 + 4x^2 e^{2x} + \cos 2x$;

8) $\frac{1}{4} \left(x^2 e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} \right)$; 9) $\frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{9}e^{-x} \right) + \frac{1}{25}(3\sin x + 4\cos x)$; 10) $e^x - \frac{1}{2}e^{x-1} + \frac{1}{18}e^{1-x}$.

8.270. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \bar{y}$ де \bar{y} рівне: 1) $2x^3 - 13x + 2$; 2) $\cos 3x$;

3) $\frac{1}{2}x \sin x$; 4) $-\frac{1}{2}x \cos x - e^{-x}$; 5) $\frac{1}{4} \left(x \sin x - \frac{1}{4} \cos 3x \right)$; 6) $9 + 4\cos 2x -$

$-0,2\cos 4x$; 7) $0,5\operatorname{ch} x$. **8.271.** $y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.

8.272. $y = e^x \left(C_1 + C_2 x - \ln \sqrt{x^2 + 1} + x \operatorname{arctg} x \right)$. **8.273.** $y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) +$

$+ C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. **8.274.** $y = (C_1 + \ln|\sin x|) \sin x +$

$+ (C_2 - x) \cos x$. **8.275.** $y = \sin 2x \ln|\cos x| - x \cos 2x + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

8.276. $y = e^{-x} \left(\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C_1 + C_2 x \right)$. **8.277.** 1) $y = e^x(x + C_1) + C_2 - (e^x + 1) \ln(e^x + 1)$;

2) $y = \frac{1}{2}e^x \left[\arcsin e^x + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + C_1 \right] + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2$; 3) $y = C_1 e^x - \cos e^x + C_2$.

Відповіді

- 8.278.** $y = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x$. **8.279.** $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$. **8.280.** $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - 2x$.
- 8.281.** $y = (1+x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x}$. **8.282.** $y = e^x(0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84$.
- 8.283.** $y = e^x + x^2$. **8.284.** $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1)$. **8.285.** $y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x - \cos x$.
- 8.286.** $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$. **8.287.** $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-1}$. **5.288.** $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3$.
- 8.289.** $y = C_1 \cos(2 \ln|x|) + C_2 \sin(2 \ln|x|) + 2x$. **8.290.** $y = x^2(C_1 \cos \ln|x| + C_2 \sin \ln|x| + 3)$. **8.291.** $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-2} + x^3 \ln|x| - 2x^2$. **8.292.** $y = x[C_1 + C_2 \ln|x| + \ln^2|x|]$. **8.293.** $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos(x\sqrt{3}) + C_3 \sin(x\sqrt{3}))$.
- 8.294.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. **8.295.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5 x)$. **8.296.** $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$. **8.297.** $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$. **8.298.** $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$. **8.299.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$. **8.300.** $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos 2x + (C_4 + C_5 x) \sin 2x$.
- 8.301.** $y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-2x}$. **8.302.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos(x\sqrt{3}) + C_4 \sin(x\sqrt{3})$. **8.303.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x^{n-3} + C_4 x^{n-4} + \dots + C_{n-1} x + C_n$.
- 8.304.** $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$. **8.305.** $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{-2x} + (x^2 + x - 1)e^{-x}$. **8.306.** $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + x)e^{-x} + x^3 - 3x^2$. **8.307.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^2}{12}(x^2 + 2x - 12)$. **8.308.** $y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x + \frac{1}{9} \cos x$.
- 8.309.** $y = \frac{1}{60} x^5 - \frac{1}{2} x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x$. **8.310.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \left(\frac{1}{8} x^2 - \frac{3}{8} x\right) e^x - \frac{1}{4} x \sin x$. **8.311.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{x^4}{24} + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + C_5\right) e^x$. **8.312.** $y = 1 + \cos x$. **8.313.** $y = e^x + \cos x - 2$.
- 8.314.** $y = 2 + e^{-x}$. **8.315.** $y = e^x - e^{-x} + x^2$. **8.316.** $y = \cos x + 2 \sin x + e^{-x} - 3e^x + 2xe^x$. **8.317.** $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$, $y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}$. **8.318.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$, $y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$. **8.319.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, $y = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}$.
- 8.320.** $x = e^{-2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$, $y = \frac{1}{5} e^{-2t}((4C_1 - 3C_2) \cos 3t + (3C_1 + 4C_2) \sin 3t)$.
- 8.321.** $x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$, $y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$.

Відповіді

8.322. $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t$, $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$.

8.323. $x = (C_1 + C_2t)e^{3t}$, $y = (C_1 + C_2 + C_2t)e^t$. **8.324.** $x = (C_1 + C_2t)e^t$,

$y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)e^t$. **8.325.** $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t - 3C_3e^{-t}$,

$z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$. **8.326.** $x = C_1 + 3C_2e^{2t}$ $y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$

$z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}$. **8.327.** $x = C_1e^t + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$,

$z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}$. **8.328.** $x = e^t(2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t)$, $y = e^t(C_1 - C_2 \cos 2t +$

$+ C_3 \sin 2t)$, $z = e^t(-C_1 - 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t)$. **8.329.** $x = C_1e^{2t} +$

$+ e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t)$, $y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t]$, $z = C_1e^{2t} +$

$+ e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t + (2C_3 + C_2)\sin t]$. **8.330.** $x = C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t$,

$y = 2C_1e^t + C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t$ $z = C_1e^t + C_3 \cos t - (C_2 + C_3)\sin t$.

8.331. $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$, $y = -C_1e^{3t} + (C_2 + 2C_3)e^{-t}$, $z = -3C_1e^{3t} + C_3e^{-t}$.

8.332. $x = C_1 + C_2t + 4C_3e^{3t}$, $y = C_2 - 2C_1 - 2C_2t + 4C_3e^{3t}$, $z = C_1 - C_2 + C_2t + C_3e^{3t}$.

8.333. $x = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{2t}$, $y = [2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3t^2]e^{2t}$,

$z = [C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 + 2C_3)t + C_3t^2]e^{2t}$. **8.334.** $x = C_1e^t + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t}$,

$y = -C_1e^t + C_2e^{4t} + e^{5t}$. **8.335.** $x = 2C_1e^{8t} - 2C_2 - 6t + 1$, $y = 3C_1e^{8t} + C_2 + 3t$.

8.336. $x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$.

8.337. $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t} + 3\sin t$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} - \cos t + 2\sin t$.

8.338. $x = C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t + 2t + 2$, $y = (C_1 + 2C_2)\cos t + (2C_1 - C_2)\sin 2t + 10t$.

8.339. $x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$.

8.340. $x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(C_3 \cos t + C_4 \sin t)$, $y = e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t) +$

$+ e^{-t}(C_4 \cos t - C_3 \sin t)$. **8.341.** $x = 2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t} + 2C_3 \cos 2t + 2C_4 \sin 2t$,

$y = 3C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t} - C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t$. **8.342.** $x = 3e^{2t}$, $y = e^{2t}$.

8.343. $x = e^{5t}(\cos 2t - \sin 2t)$, $y = 2e^{5t} \sin 2t$. **8.344.** $x = 2te^{-3t}$, $y = (1 - 2t)e^{-3t}$.

8.345. $x = y = z = e^t$. **8.346.** $x = e^{2t} + e^{-t}$, $y = e^{2t} + e^{-t}$, $z = e^{2t} - 2e^{-t}$.

8.347. Гіпербола $y = \frac{6}{x}$. **8.348.** Параболи $y^2 = Cx$. **8.349.** $y^k = Cx$. **8.350.** $y = e^{\frac{x-a}{a}}$.

8.351. Трактриса $y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x} \right|$. **8.352.** $(x - C)^2 + y^2 = a^2$.

8.353. $y = \frac{1}{k} \ln |C(k^2 x^2 - 1)|$. **8.354.** $x = Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$. **8.355.** $x = y \ln |Cy|$.

8.356. $y = k \ln |x| + C$. **8.357.** $(x - y)^2 - Cy = 0$. **8.358.** $\sqrt{x^2 + y^2} =$

Відповіді

$$= C \exp\left(-\frac{1}{k} \arctg \frac{y}{x}\right). \quad \mathbf{8.359.} \quad y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}, \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ (астроїда).}$$

$$\mathbf{8.360.} \quad y = Cx - x \ln|x| - 2. \quad \mathbf{8.361.} \quad y = \frac{1}{2k} (e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}). \quad \mathbf{8.362.} \quad x^2 + y^2 = Cx.$$

$$\mathbf{8.363.} \quad (y-x)^2(x+2y)=1. \quad \mathbf{8.364.} \quad 1) \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1; \quad 2) \quad \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1.$$

$$\mathbf{8.365.} \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = C, \quad C=1. \quad \mathbf{8.366.} \quad (x+C_1)^2 + (y+C_2)^2 = 1. \quad \mathbf{8.367.} \quad y'' = \frac{1}{ky^3};$$

$$kC_1 y^2 = C_1^2(x+C_2)^2 + k. \quad \mathbf{8.368.} \quad e^{\frac{y}{a}} = C_2 \sec\left(\frac{x}{a} + C_1\right). \quad \mathbf{8.369.} \quad \text{Ланцюгова лінія.}$$

$$\mathbf{8.370.} \quad \frac{dN}{dt} = kN, \quad k > 0; \quad N = N_0 e^{kt}. \quad \mathbf{8.371.} \quad x(t) = x(0) \cdot 2^{-\frac{t}{20}}; \quad x(t) = 0,01 \cdot x(0) \text{ при}$$

$$t = \frac{60}{\lg 2} \approx 200 \text{ днів.} \quad \mathbf{8.372.} \quad \frac{dT}{dt} = k(T-20); \quad T = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}; \quad 60 \text{ хвилин.}$$

$$\mathbf{8.373.} \quad v(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{7}} \text{ м/с; } v(t) = 0,01 \text{ при } t = 4\left(\frac{2}{\lg 1,5} + 1\right) \approx 50 \text{ с, шлях } S = \frac{6}{\lg 1,5} \approx 15 \text{ м.}$$

$$\mathbf{8.374.} \quad \text{Після згоряння маси } x \text{ палива швидкість ракети } v(x) = C \ln \frac{M}{M-x};$$

$$v(M-m) = C \ln \frac{M}{m}. \quad \mathbf{8.375.} \quad y(x) = y(0) \cdot 2^{-\frac{x}{35}}; \quad y(200) = y(0) \cdot 2^{-\frac{40}{7}} \approx 0,02 \cdot y(0);$$

$$\text{поглинається } 98\%. \quad \mathbf{8.376.} \quad h(t) \text{-висота рівня води; } \sqrt{H} - \sqrt{h} = 0,3 \sqrt{2g} \frac{r^2}{R^2} t;$$

$$h(t) = 0 \text{ при } t = \frac{R^2}{0,3r^2} \sqrt{\frac{H}{2g}} \approx 1050 \text{ с} \approx 17,5 \text{ хв.} \quad \mathbf{8.377.} \quad (2R-h(t))^{\frac{3}{2}} = 0,45\pi r^2 \sqrt{2g} \frac{t}{H};$$

$$h(t) = 0 \text{ при } t = \frac{2RH}{0,45\pi r^2} \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad \mathbf{8.378.} \quad H^{\frac{5}{2}} - (h(t))^{\frac{5}{2}} = \frac{3d^2 H^2 t}{8R^2} \sqrt{2g}; \quad h(t) = 0 \text{ при}$$

$$t = \frac{4R^2}{3d^2} \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad \mathbf{8.379.} \quad x(t) \text{-кількість речовини } C; \quad \frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \quad x(0) = 0;$$

$$x(t) = ab \frac{1 - e^{k(a-b)t}}{b - a e^{k(a-b)t}}. \quad \mathbf{8.380.} \quad v = \frac{\alpha}{\beta} \left(t - \frac{m}{\beta} + \frac{m}{\beta} e^{-\frac{\beta t}{m}} \right). \quad \mathbf{8.381.} \quad v = (v_0 + b) e^{-at} +$$

$$+ b(at^2 - 1), \text{ де } a = \frac{\beta}{2m}, \quad b = \frac{2\alpha m}{\beta^2}. \quad \mathbf{8.382.} \quad 2,5 \text{ кг.} \quad \mathbf{8.383.} \quad t = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m}{g}} \arctg \frac{100k}{\sqrt{mg}}, \text{ де}$$

$$m \text{-маса ракети.} \quad \mathbf{8.384.} \quad 9,03 \text{ А.} \quad \mathbf{8.385.} \quad I = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\omega L e^{-\frac{Rt}{L}} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t \right]$$

Відповіді

8.386. $I = 1 + (I_0 - 1)e^{-t^2}$. **8.387.** $I = \frac{q}{\omega CL} \sin \omega t$; $CR^2 < 4L$, $\omega = \frac{\sqrt{4CL - R^2 C^2}}{2LC}$.

8.388. $I = \frac{q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$. **8.389.** $I = A \sin(\omega t - \varphi)$, де $A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$;

$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$, $\max A = \frac{V}{R}$ при $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. **8.390.** 1) $\frac{8}{9}$ оберта за секунду;
2) через 6 хвилин 18 секунд.

До глави ІХ

9.2. 1) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 2) $\frac{n+1}{4n-1}$; 3) $\frac{2n-1}{2^n}$; 4) $\frac{1}{3n}$; 5) $\frac{2^n}{n^{10}}$;

б) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2+1}$ $n=1,2,3,\dots$; 7) $\frac{10^n}{2n+5}$; 8) $\frac{2^n}{n!}$; 9) $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

9.3. а) $S_n = 1 - \frac{1}{1+n}$, $S = 1$; б) $S_n = 4 \left[-\frac{5}{4} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n-2} \right]$, $S = -5$;

в) $S_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{2} + \frac{4}{n-2} + \frac{4}{n-1} + \frac{4}{n} \right)$, $S = -\frac{7}{4}$. **9.4.** а) $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$, $S = \frac{1}{2}$;

б) $S_n = 8/3 - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+3}$, $S = 8/3$. **9.5.** а) $S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)$, $S = \frac{1}{3}$;

б) $S_n = \frac{2}{3} \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \right)$, $S = \frac{11}{18}$; в) $S_n = \frac{7}{8} \left(7/12 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \right)$,

$S = 7/96$. **9.6.** а) $S_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+3} \right)$, $S = \frac{23}{90}$;

б) $S_n = \frac{1}{21} \left(-\frac{11}{6} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$, $S = -\frac{11}{126}$; в) $S_n = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$,

$S = -1/2$. **9.7.** а) $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$, $S = \frac{1}{4}$; б) $S_n = 8/5 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5n+3} \right)$,

$S = -\frac{8}{15}$; в) $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3(n+2)}$, $S = \frac{1}{2}$. **9.8.** а) $S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$, $S = \frac{3}{2}$;

б) $S_n = -6/5 + \frac{1}{4n+5} + \frac{1}{4n+1}$, $S = -6/5$; в) $S_n = 7/3 - \frac{1}{n+1}$, $S = 7/3$. **9.9.** а) $S_n =$

Відповіді

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \quad S = 1; \quad \text{б)} \quad S_n = \frac{14}{9} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+5} \right), \quad S = 7/9;$$

$$\text{в)} \quad S_n = -\frac{2}{3} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{12}{n+2}, \quad S = -2/3. \quad \mathbf{9.10.} \quad \text{а)} \quad S_n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right), \quad S = \frac{1}{8};$$

$$\text{б)} \quad S_n = \frac{5}{6} \left(-\frac{23}{15} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right), \quad S = -\frac{23}{18}; \quad \text{в)} \quad S_n = 4 - \frac{2}{n+1} -$$

$$-\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}, \quad S = 4. \quad \mathbf{9.11.} \quad \text{а)} \quad S_n = -\frac{1}{8} \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right), \quad S = 1/12;$$

$$\text{б)} \quad S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n+2}, \quad S = -\frac{1}{2}; \quad \text{в)} \quad S_n = 3 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n+1}, \quad S = 3. \quad \mathbf{9.12.} \quad \text{а)} \quad S_n = \arctg \frac{n}{n+1},$$

$$S = \frac{\pi}{4}; \quad \text{б)} \quad S_n = 2 \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{14n+8} \right), \quad S = -\frac{1}{4}; \quad \text{в)} \quad S_n = -\frac{1}{3} + \frac{2}{n} - \frac{2}{n-1}, \quad S = -\frac{1}{3}.$$

9.13. Виконується для всіх пунктів. **9.14.** 1) розбіжний; 2) збіжний; 3) збіжний; 4) розбіжний; 5) розбіжний; 6) збіжний; 7) розбіжний; 8) збіжний; 9) збіжний; 10) збіжний; 11) збіжний; 12) збіжний; 13) розбіжний; 14) розбіжний; 15) збіжний; 16) збіжний; 17) збіжний; 18) розбіжний; 19) розбіжний; 20) збіжний; 21) збіжний. **9.15.** 1) розбіжний; 2) збіжний; 3) розбіжний;

4) збіжний; 5) розбіжний; 6) збіжний; 7) збіжний; 8) збіжний; 9) збіжний; 10) розбіжний; 11) розбіжний; 12) розбіжний; 13) розбіжний; 14) розбіжний; 15) розбіжний; 16) збіжний; 17) збіжний; 18) розбіжний; 19) розбіжний; 20) збіжний. **9.16.** 1) збіжний; 2) збіжний; 3) збіжний; 4) розбіжний; 5) збіжний; 6) розбіжний; 7) збіжний; 8) збіжний; 9) збіжний; 10) розбіжний; 11) збіжний; 12) розбіжний; 13) розбіжний; 14) збіжний; 15) збіжний; 16) збіжний;

17) збіжний; 18) збіжний; 19) збіжний; 20) збіжний. **9.17.** 1) збіжний; 2) збіжний; 3) збіжний; 4) збіжний; 5) розбіжний; 6) розбіжний; 7) збіжний; 8) розбіжний; 9) збіжний; 10) збіжний; 11) розбіжний; 12) збіжний; 13) збіжний; 14) збіжний; 15) збіжний; 16) збіжний; 17) збіжний; 18) збіжний; 19) розбіжний; 20) збіжний.

9.18. 1) розбіжний; 2) розбіжний; 3) збіжний; 4) збіжний; 5) розбіжний; 6) збіжний; 7) збіжний; 8) збіжний; 9) розбіжний; 10) збіжний; 11) збіжний; 12) збіжний; 13) збіжний; 14) збіжний; 15) розбіжний; 17) збіжний; 18) збіжний; 19) збіжний; 20) збіжний. **9.20.** 1) умовно розбіжний; 2) розбіжний; 3) умовно збіжний; 4) абсолютно збіжний; 5) абсолютно збіжний; 6) умовно збіжний;

7) збіжний, але не абсолютно; 8) абсолютно збіжний; 9) розбіжний; 10) абсолютно збіжний; 11) абсолютно збіжний; 12) збіжний не абсолютно; 13) розбіжний; 14) абсолютно збіжний; 15) абсолютно збіжний; 16) розбіжний;

17) збіжний; 18) розбіжний; 19) розбіжний; 20) збіжний. **9.21.** а) $|x| < \frac{1}{2}$;

$$\text{б)} \quad x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right). \quad \mathbf{9.22.} \quad \text{а)} \quad -1 < x \leq 1; \quad \text{б)} \quad x \in (-\infty; -3] \cup (1; +\infty). \quad \mathbf{9.23.} \quad \text{а)} \quad \frac{1}{e} < x < e;$$

$$\text{б)} \quad x \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty). \quad \mathbf{9.24.} \quad \text{а)} \quad |x| \leq 1; \quad \text{б)} \quad x \in (-\infty; 5] \cup \left(\frac{16}{3}; +\infty \right). \quad \mathbf{9.25.} \quad \text{а)} \quad -1 \leq x < 1;$$

Відповіді

б) $x \in [-1; 1]$. **9.26.** а) $x < -1$ та $x > 1$; б) $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. **9.27.** а) $-1 \leq x < 1$;

б) $x \in \emptyset$. **9.28.** а) $x \in R$; б) $x \in \emptyset$. **9.29.** а) $|x| < 2$; б) $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.

9.30. а) $x > 0$; б) $x \in (-2; 2)$. **9.31.** а) $|x| < \frac{2}{3}$; б) $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

9.32. а) $1 < x \leq 2$; б) $|x| < a$, де $a > 1$. **9.36.** 1) $n = 11$ членів. **9.37.** $f(0) = \frac{1}{9}$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{101}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{44}{1001}$; $f(1) = 0,049$; $f(-0,2) = 0,108$. **9.38.** $S = \frac{1}{1-x}$ при

$x < 1$, залишок $R_n = S - S_n = \frac{x^n}{1-x}$. На відрізку $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

$|R_n| < \frac{1}{2^{n-1}} < 0,001$ при $n-1 > \frac{\lg 1000}{\lg 2}$ $n \geq 11$. **9.39.** $S = \frac{x}{1-(1-x)} =$

$= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ та $R_n = \begin{cases} (1-x)^n & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$. При будь-якому n R_n

буде більше, наприклад, $0,9$, якщо $x < 1 - \sqrt[3]{0,9}$, тобто на $[0; 1]$ ряд збіжний

нерівномірно; на $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ - збіжний ряд рівномірно. Тоді при будь-якому x

$|R_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, коли $n > \frac{-\lg \varepsilon}{\lg 2}$. Зокрема $|R_n| < 0,01$ при $n > 7$. **9.40.** При будь-якому

невід'ємному x члени даного ряду менші або рівні членів числового збіжного

ряду $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$. Тоді ряд збіжний рівномірно для всіх $x \geq 0$; $R_n(x)$ -

менше залишку числового ряду тобто, $R_n(x) < \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < 0,01 \Rightarrow n \geq 5$ при

$x \geq 0$. **9.41.** $|R_n(x)| < \frac{1}{n^2} \leq 0,0001$ при $n \geq 100$. $x \in R$. **9.46.** $|x| < 1$, $S = \frac{1}{(1-x)^2}$.

9.47. $\arctg x$ при $|x| < 1$. **9.48.** $S = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$. **9.49.** $S = (x+1) \ln(x+1) - x$.

9.50. $\frac{1}{2}$. **9.51.** $S = \frac{1+x}{(1-x)^2}$ при $|x| < 1$. **9.52.** $S = (1+x)^m$. **9.53.** $0,2$.

9.54. а) $\frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$; б) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} \right]$. **9.55.** $\ln 2$. **9.56.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Відповіді

9.57. $\ln(1+x)$, де $1 < x \leq 1$. **9.58.** $\arctg x$, де $|x| \leq 1$. **9.59.** $\sin x$, $x \in R$.

9.61. $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$ **9.62.** $1 + \frac{3}{2} \left[(x-1) + \frac{1}{2} \frac{(x-1)^2}{2!} - \right.$

$\left. - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-5)}{2^{n-1}} \cdot \frac{(x-1)^n}{n!} + \dots \right]$ **9.63.** $1 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2$

$\cdot \left(\frac{(x-2)^2}{2!} \right) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2n-2} \cdot \frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$ **9.64.** $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} (x+2) -$

$-\frac{1}{2^3} (x+2)^2 + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (x+2)^n + \dots$ **9.65.** $2 \left(1 + \frac{x-4}{2^3 \cdot 1!} - \dots + \dots + \right.$

$\left. + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-4)^n}{2^{3n} \cdot n!} + \dots \right)$. **9.66.** $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \dots$ **9.67.** $e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \dots \right)$.

9.68. $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \dots$ **9.69.** $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \dots$ **9.70.** $1 - \frac{nx^2}{2} + \frac{3n^2 - 2n}{24} x^4 + \dots$

9.71. $1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots + \frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$ **9.72.** $1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} + \dots$

9.73. $1 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + \dots + \frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!} + \dots$ **9.74.** $1 - \left[x^2 + \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} + \dots + \right.$

$\left. + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right]$. **9.75.** $-\frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{2n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ **9.76.** $\ln 10 +$

$+ \left(\frac{x}{10} - \frac{x^2}{2 \cdot 10^2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n \cdot 10^n} + \dots \right)$. **9.77.** $1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \dots + \right.$

$\left. + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2) 2n} + \dots \right)$. **9.78.** $2 - 2 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 - \frac{2}{3 \cdot 6} \left(\frac{x}{2} \right)^6 + \dots \right.$

$\left. + (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{3n} + \dots \right)$. **9.79.** $1 - \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1 \cdot 4}{3^2 \cdot 2!} x^6 + \right.$

$\left. + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^n \cdot n!} \cdot x^{3n} + \dots \right)$. **9.80.** $x^2 + \left(\frac{1}{2} x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^6 + \right.$

$\left. + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n+2} \right)$. **9.81.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n}$ **9.82.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1} \cdot (2n-1)!}$

9.83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ **9.84.** $S = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^4 x^4}{4!} + \dots \right) +$

Відповіді

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{mn}{1!} - \frac{m^3 x^3}{3!} + \frac{m^5 x^5}{5!} + \dots \right). \mathbf{9.85.}$$

1) 1,39, похибка 0,01; 2) 0,996; 3) 3,142. **9.86.**
1) 0,3090, похибка 0,0001; 2) 0,996, похибка 0,0001; 4) $5 \frac{1}{15}$. **9.87.** 1) 2,154,

похибка 0,001. **9.88.** 7,389. **9.89.** 1,649. **9.90.** 0,7788. **9.91.** 1,000. **9.92.** 0,17365.
9.93. 3,107. **9.94.** 4,121. **9.95.** 7,937. **9.96.** 1,005. **9.97.** 3,017. **9.98.** 2,001. **9.99.** 1,0986.

9.100. 0,434294. **9.101.** 0,6990. **9.102.** 1) $y = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2$; 2) $y = \frac{x}{1!} - \frac{3}{2!}x^2 + \frac{8x^3}{3!}$;

3) $y = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$; 4) $y = \frac{3x}{1!} - \frac{7x^3}{3!}$; 5) $y = t + \frac{(1-t)}{1!}x + \frac{4t-2-t^2}{2!e^t} \cdot x^2$, де $t \in R$;

6) $y = 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{3-e}{2!}x^2 - \frac{4e}{4!}x^4$; 7) $y = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$; 8) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{4!}$;

9) $y = 0 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$; 10) $y = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$. **9.106.** 1) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} +$

$+\frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!}$; 2) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$; 3) $y = 2 - \frac{3(x-1)}{1!} +$

$+\frac{14(x-1)^2}{2!}$; 4) $y = 2 + \frac{2x}{1!} + \frac{2+e^2}{2!} \cdot x^2 + \frac{2+5e^2}{3!} \cdot x^3 + \frac{23e^2+3e^4}{4!} \cdot x^4$; 5) $y =$

$= 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!}$; 6) $y = 1 + \frac{\pi/3}{1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{12-2\pi-3\sqrt{3}}{12 \cdot 3!} x^3$; 7) $y = 1 +$

$+\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!}$; 8) $y = 1 + \frac{\pi/3x}{1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{12-2\pi-3\sqrt{3}}{12 \cdot 3!} \cdot x^3$; $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}$;

9) $y = \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$; 10) $y = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{10x^3}{3!}$; 11) $y = 3 - \frac{3x^2}{2!} + \frac{6x^4}{4!}$;

12) $y = 2 - \frac{4x}{1!} + \frac{16x^2}{2!} + \frac{94x^3}{3!} + \frac{10x^4}{4!}$; 13) $y = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{2x^3}{2!} + \frac{6x^3}{3!} - \frac{16x^4}{4!}$;

14) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{6x^5}{5!}$; 15) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} + \frac{8x^6}{6!}$;

16) $y = -3 + \frac{x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!}$; 17) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!}$; 18) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} +$

$+\frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{4x^5}{4!}$; 19) $y = 2 + \frac{2x}{1!} + \frac{2-e^2}{2!} \cdot x^2 + \frac{2-5e^2}{3!} \cdot x^3 + \frac{2+3e^2-e^4}{4!} \cdot x^4$;

20) $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{10x^3}{3!} + \frac{38^4}{4!} + \frac{168x^5}{5!}$. **9.107.** 1) 0,24488, $\varepsilon = 10^{-5}$;

3) 0,487, $\varepsilon = 10^{-3}$; 9) 32,831, $\varepsilon = 10^{-3}$; 10) 0,006, $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$9.119. \quad x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \quad 9.120. \quad f(x) = \begin{cases} 4/\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1) \cdot x}{2n-1} \\ \frac{f(-0)+f(+0)}{2} = 0 \end{cases}$$

$$9.121. \quad |x| = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, & n - \text{непарне} \\ 0, & n - \text{парне} \end{cases}. \quad 9.122. \quad x^2 = \frac{\pi^2}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

$$9.123. \quad e^x = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin nx}{1+n^2} \right]. \quad 9.124. \quad x =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{n}}{\pi} & \text{при } x = 2\pi n, n = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{при } x = 2\pi \end{cases}. \quad 9.125. \quad x^2 = \begin{cases} \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \\ 2\pi^2, & \text{при } x = 2\pi \end{cases}$$

$$9.126. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin 2nx}{2n} \\ \frac{\pi}{4}, & \text{при } x = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad 9.127. \quad |x| =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin nx}{n^2}, & n - \text{непарне} \\ 0, & n - \text{парне} \end{cases}. \quad 9.128. \quad |x| = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos nx}{n}, & n - \text{непарне} \\ 0, & \text{при } x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$9.129. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \dots \right), & n - \text{непарне} \\ 0, & n - \text{парне} \end{cases}. \quad 9.130. \quad f(x) =$$

$$= \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad 9.131. \quad f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}. \quad 9.132. \quad f(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx. \quad 9.133. \quad f(x) = \frac{e^l - e^{-l}}{2l} + l(e^{-l} - e^{-l}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi nx}{l}}{l^2 + \pi^2 n^2} +$$

$$+ \pi(e^l - e^{-l}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n \sin \frac{\pi nx}{l}}{e^2 + \pi^2 n^2}. \quad 9.134. \quad f(x) = \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \frac{\sin x}{1-a^2} -$$

$$- \frac{2 \sin 2x}{2^2 - a^2} + \dots \right). \quad 9.136. \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \cos nx +$$

$$+ \frac{(1+\pi)(-1)^n - 1}{\pi n} \cdot \sin nx. \quad 9.137. \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2}. \quad 9.138. \quad f(x) = -\frac{1}{2} -$$

Відповіді

$$-\frac{6}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad \mathbf{9.139.} \quad y = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na \cdot \cos nx + (1 - \cos nx) \cdot \sin nx}{n} \right].$$

$$\mathbf{9.140.} \quad f(x) = -3 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}. \quad \mathbf{9.141.} \quad 1) \quad f(x) = 2 + 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx;$$

$$2) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots + \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} + \dots \right). \quad \mathbf{9.142.} \quad f(x) = -4 -$$

$$-\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2}. \quad \mathbf{9.143.} \quad f(x) = -1 + \frac{50}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{\pi nx}{5}.$$

$$\mathbf{9.144.} \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{20}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1) \cdot \frac{\pi x}{5}}{(2n+1)^2}. \quad \mathbf{9.145.} \quad f(x) = -3 + \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\cdot \sin \frac{\pi nx}{3}. \quad \mathbf{9.146.} \quad f(x) = 5\pi - \frac{10}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\pi nx}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right). \quad \mathbf{9.147.} \quad f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 5x}{5} +$$

$$+ \frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 11x}{11} + \frac{\cos 13x}{13} - \frac{\cos 17x}{17} + \dots \right). \quad \mathbf{9.148.} \quad f(x) = \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x +$$

$$\frac{1}{4} \sin 8x + \frac{1}{5} \sin 10x + \dots \quad \mathbf{9.149.} \quad f(x) = \frac{3}{8} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right) \cos nx.$$

$$\mathbf{9.150.} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad \mathbf{9.151.} \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x - \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 3x}{2 \cdot 4} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \dots$$

$$\mathbf{9.152.} \quad f(x) = \frac{4l^2}{\pi^3} \sum \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \cdot \sin \frac{\pi nx}{l}. \quad \mathbf{9.153.} \quad f(x) =$$

$$= \left[-\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{a^2 - 1^2} + \frac{3 \sin 3x}{a^2 - 3^2} + \frac{5 \sin 5x}{a^2 - 5^2} \right], \text{ при } a - \text{ парному} \right]. \quad \mathbf{9.154.} \quad \text{a) } f(x) = \frac{\text{sh } \pi}{\pi}.$$

$$\left[-\frac{4}{\pi} \left[\frac{2 \sin 2x}{a^2 - 2^2} + \frac{4 \sin 4x}{a^2 - 4^2} + \frac{6 \sin 6x}{a^2 - 6^2} \right], \text{ при } a - \text{ непарному} \right].$$

$$\cdot \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{1 + n^2} \right]; \quad \text{б) } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \text{ch } \pi}{1 + n^2} \cdot n \sin nx. \quad \mathbf{9.155.} \quad f(x) =$$

$$= -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \sin(2n+1)x}{2^2 - (2n+1)^2}. \quad \mathbf{9.156.} \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos^2 x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \frac{\cos 6x}{1-6^2} + \dots \right].$$

$$\mathbf{9.157.} \quad f(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n}. \quad \mathbf{9.158.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Відповіді

9.159. $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots + \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} + \dots \right)$. **9.160.** $f(x) =$

$f(x) = 1 - \frac{\cos x}{2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$. **9.161.** $f(x) = -\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin 3x}{2^2 - 3^2} + \frac{3 \sin 9x}{2^2 - 9^2} + \frac{5 \sin 15x}{2^2 - 15^2} \right]$. **9.164.** $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{\pi nx}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi nx}{2}}{2}$.

9.165. $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \pi n \cdot \cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right) \cos \frac{\pi nx}{2}$. **9.166.** $f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}$.

$\cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right] - 1$. **9.167.** а) $\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{n^2} \left(\cos \frac{\pi n}{3} \sin 2\pi x - \sin \frac{\pi n}{3} \cos 2\pi x \right)$; б) $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin a \cdot \sin x}{1^2} + \frac{\sin 3a \cdot \sin 3x}{3^2} + \dots \right)$; в) $f(x) =$

$= \frac{a(\pi - a)}{\pi} - \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2na}{n^2} \cos 2nx$; г) $f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{\pi} \sin \pi x -$

$-\frac{4}{3^2 n^2} \sin \frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x + \dots$. **9.168.** $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

9.169. $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{2\pi n}{3}}{n^2}$, $0 \leq x \leq 3$. **9.170.** $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$

$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin nx}{n}$. **9.171.** а) $f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot$

$\frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$; б) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^n}$. **9.172.** $f(x) = -\frac{32h}{\pi^2}$

$\cdot \left(\frac{\sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2} - \frac{\sin \frac{6\pi x}{l}}{6^2} + \frac{\sin \frac{10\pi x}{l}}{10^2} + \dots \right)$. **9.173.** $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1 - i n}{1 + n^2} e^{inx}$.

9.174. $f(x) = -\frac{i}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot e^{in\pi x}$. **9.175.** $f(x) = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cdot e^{inx}$. **9.176.** $f(x) =$

$= \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot i n}{1+n^2} \cdot e^{inx}$. **9.177.** $f(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{2} \cdot e^{\frac{i\pi n x}{2}}$. **9.178.** $f(x) =$

Відповіді

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n (\operatorname{sh} 1) \frac{1 + i n \pi}{1 + \pi^2 n^2} \cdot e^{i 2 \pi n x} . \quad \mathbf{9.179.} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha} d\alpha \\ \frac{1}{2} \quad \text{при } x=0, x=1 \end{cases} .$$

$$\mathbf{9.180.} \quad f(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha x + \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^2} \cdot \sin \alpha x \right) d\alpha . \quad \mathbf{9.181.} \quad f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\cos \frac{\pi \alpha}{2}}{1 - \alpha^2} \cos \alpha x + \frac{\sin \frac{\pi \alpha}{2} - \alpha}{1 - \alpha^2} \sin \alpha x \right) d\alpha , \quad x \neq 0 . \quad \mathbf{9.182.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha .$$

$$\mathbf{9.183.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{\alpha \pi}{2} \cdot \cos \frac{(\pi - 2x)\alpha}{2}}{1 - \alpha^2} \cdot d\alpha . \quad \mathbf{9.184.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha .$$

$$\mathbf{9.185.} \quad f(x) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha . \quad \mathbf{9.186.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cos \alpha x d\alpha .$$

$$\mathbf{9.187.} \quad f(x) = \frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha . \quad \mathbf{9.188.} \quad f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 + \alpha^2} d\alpha . \quad \mathbf{9.189.} \quad f(x) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\alpha^2} \cdot \cos \alpha x d\alpha , \quad x \neq \pm 1 . \quad \mathbf{9.190.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha .$$

$$\mathbf{9.191.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha + \sin \alpha}{\alpha^2} \cdot \sin \alpha x d\alpha . \quad \mathbf{9.192.} \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin \pi \alpha}{1 - \alpha^2} \sin \alpha x d\alpha .$$

$$\mathbf{9.193.} \quad f(x) = \frac{12}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{3}}{\alpha^2} \cdot \cos \alpha x d\alpha , \quad x \neq 0 . \quad \mathbf{9.194.} \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi \alpha}{1 - \alpha^2} \cdot \sin \alpha x d\alpha .$$

$$\mathbf{9.195.} \quad f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{z^2 + 1} , \quad f_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z}{z^2 + 1} . \quad \mathbf{9.196.} \quad f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \alpha z}{z} ,$$

$$f_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos \alpha z}{z} . \quad \mathbf{9.197.} \quad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{2 \cos z}{z^2} + \frac{\sin \frac{z}{2}}{z} + \frac{2 \cos \frac{z}{2}}{z} \right) .$$

$$\mathbf{9.198.} \quad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{4 \cos \pi z}{1 - 4z^2} . \quad \mathbf{9.199.} \quad F(z) = \frac{iz}{2\pi} (e^{-i\pi z} - 1) . \quad \mathbf{9.200.} \quad C(\alpha) = \frac{1}{2\pi(a + i\alpha)} ,$$

$$|C(\alpha)| = \frac{1}{2\pi(\sqrt{a^2 + \alpha^2})} , \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha . \quad \mathbf{9.201.} \quad C(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha}{\alpha} .$$

Відповіді

$$\cdot \left(2 \cos \alpha + \frac{i}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2} \right). \quad \mathbf{9.202.} \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot e^{i\alpha x} d\alpha, \quad x \neq \pm 1. \quad \mathbf{9.203.} \quad C(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\pi \alpha} \cdot \sin \frac{a\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{i a \alpha}{2}}, \quad |C(\alpha)| = \frac{1}{\pi \alpha} \left| \sin \frac{a\alpha}{2} \right|, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{a\alpha}{2}}{\alpha} \cdot e^{i\alpha \left(x - \frac{a}{2}\right)} d\alpha.$$

$$\mathbf{9.204.} \quad f(x) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{(\alpha + i\alpha^2 + \omega^2)} d\alpha, \quad C(\alpha) = \frac{\omega}{2\pi [(a + i\alpha)^2 + \omega^2]}, \quad |C(\alpha)| =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi \sqrt{(a^2 + \omega^2)^2 + \alpha^4 + 2\alpha^2(a^2 - \omega^2)}}.$$

Зміст

Глава VI. Інтегральне числення функцій однієї змінної	3
§1. Невизначений інтеграл.....	3
Найпростіші прийоми інтегрування.....	3
Основні методи інтегрування.....	7
Основні класи інтегрованих функцій.....	12
§2. Означений інтеграл.....	23
Способи точного обчислення інтегралів.....	23
Невласні інтеграли.....	27
§3. Застосування інтеграла.....	31
Деякі задачі геометрії і статистики.....	31
Деякі задачі фізики.....	50
Глава VII. Функції багатьох змінних	52
§1. Найпростіші властивості функції.....	52
Основні поняття.....	52
Область визначення.....	53
Границі функцій. Неперервність.....	54
§2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.....	54
Частинні похідні.....	54
Диференціали. Наближені обчислення.....	58
Диференціювання складних функцій.....	60
Диференціювання функцій заданих неявно та параметрично.....	61
Заміна змінних в диференціальних виразах.....	63
§3. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних.....	64
Інтегрування повних диференціалів.....	64
Скалярне поле. Градієнт функції. Похідна за напрямом.....	64
Екстремум функції кількох змінних.....	66
Умовний екстремум.....	67
Найбільше та найменше значення функції в області.....	67
Глава VIII. Диференціальні рівняння	69
§1. Рівняння першого порядку.....	69
Рівняння з відокремлюваними змінними.....	69
Однорідні рівняння.....	69
Лінійні рівняння.....	70

Різні задачі.....	71
Інші приклади рівнянь першого порядку.....	72
§2. Рівняння другого та вищих порядків.....	75
Окремі випадки рівнянь другого порядку.....	75
Частинні випадки рівнянь вищих порядків.....	77
§3. Лінійні рівняння.....	77
Рівняння зі сталими коефіцієнтами.....	78
Рівняння вищих порядків.....	81
§4. Системи диференціальних рівнянь.....	81
§5. Геометричні задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.....	83
Диференціальні рівняння першого порядку.....	83
Рівняння другого порядку.....	85
§6. Текстові задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.....	85
Глава IX. Ряди	89
§1. Числові ряди.....	89
Числові ряди.....	89
Збіжність рядів з додатними членами.....	91
Знакозмінні ряди.....	95
§2. Функціональні ряди.....	96
Інтервали збіжності.....	96
Рівномірна збіжність.....	100
Степеневі ряди.....	102
§3. Застосування рядів Тейлора.....	103
§4. Ряди Фур'є.....	107
Комплексна форма ряду Фур'є.....	113
Інтеграл Фур'є.....	113
Комплексна форма інтеграла Фур'є.....	116
Відповіді.....	117

В.І. Беспальчук, Р.М. Головня, В.В. Івахненкова,
Р.Б. Кондратюк, С.П. Онуфрійчук, Н.В. Письменчук,
О.І. Прилипко

Збірник задач з математики

Частина 2

Інтегральне числення однієї змінної
Диференціальне рівняння
Диференціальне числення функцій багатьох змінних
Ряди

Комп'ютерний набір та верстка
Макетування

Собко І.О.
Андрейчиков В.Л.

Підписано до друку 28.02.2001. Формат 60×84 1/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 10,88. Наклад 400 прим. Зам. 94.

Редакційно видавничий відділ
Житомирського інженерно-технологічного інституту
10005, м. Житомир, вул. Черняховського, 103