

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

Частина 1

Елементи лінійної алгебри

Векторна алгебра

Аналітична геометрія

Вступ до математичного аналізу

Диференціальне числення функцій однієї змінної

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
Протокол № 1 від 6.09.99



2001

УДК 51
341

Колектив авторів:

В.І. Беспальчук, Р.М. Головня, В.В. Івахненкова, Р.Б. Кондратюк,
С.П. Онуфрійчук, Н.В. Письменчук, О.І. Прилипка

341 **Збірник задач з математики.** Частина 1. Елементи лінійної алгебри. Векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної.: у 3-х частинах. – Ч. 1. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 162 с.

Збірник задач складено згідно з діючими програмами з вищої математики для інженерно-технічних та економічних спеціальностей вузів.

Перша частина збірника містить задачі з таких розділів вищої математики: елементи лінійної алгебри, векторна алгебра та аналітична геометрія (укладачі С.П. Онуфрійчук, Р.Б. Кондратюк), вступ до математичного аналізу та диференціальне числення функцій однієї змінної (укладач О.І. Прилипка).

Лл.: 1.

© В.І. Беспальчук, 2001
© Р.М. Головня, 2001
© В.В. Івахненкова, 2001
© Р.Б. Кондратюк, 2001
© С.П. Онуфрійчук, 2001
© Н.В. Письменчук, 2001
© О.І. Прилипка, 2001

I. Елементи лінійної алгебри

§1. Обчислення визначників

В задачах 1.1-1.52 обчислити визначники.

$$1.1. \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$1.2. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.4. \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}.$$

$$1.5. \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.6. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.7. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$1.8. \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.9. \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.10. \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.11. \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$1.12. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$1.13. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$1.14. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.15. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$1.16. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

$$1.17. \begin{vmatrix} -5 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.18. \begin{vmatrix} 9 & 7 & 5 \\ -7 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & -8 \end{vmatrix}.$$

$$1.19. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.20. \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$1.21. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$1.22. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$1.23. \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$1.24. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$1.25. \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$1.26. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$1.27. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}.$$

$$1.28. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$$

$$1.30. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$1.32. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.34. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.36. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 11 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$1.38. \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$1.40. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$1.42. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$1.29. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$1.31. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.33. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

$$1.35. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.37. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.39. \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 9 & 16 \\ 1 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

$$1.41. \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$1.43. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$1.44. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$1.46. \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$1.48. \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.50. \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.52. \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$1.45. \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$1.47. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.49. \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$1.51. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

§ 2. Дії над матрицями

В задачах 1.53-1.58 знайти ранг матриці.

$$1.53. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$1.54. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.55. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.57. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$1.56. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.58. \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.59-1.75 знайти обернені матриці до заданих.

$$1.59. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.61. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.63. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$1.65. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.67. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.69. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$1.71. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.60. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.62. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$1.64. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.66. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.68. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.70. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.72. \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.73. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.74. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.75. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.76-1.84 обчислити.

$$1.76. (1, 2, 1, -1) + (3, 2, -1, 2).$$

$$1.77. 3(1, -1, 0, 3) + 2(-1, 2, 3, 1) - (1, 1, 6, 11).$$

$$1.78. 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.79. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.80. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

$$1.81. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.82. \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.83. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.84. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.85. \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.86-1.89 знайти всі матриці, перестановочні з заданою матрицею.

$$1.86. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.87. \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.88. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.89. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.90-1.95 розв'язати матричні рівняння.

$$1.90. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$1.91. X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$1.92. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$1.93. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$1.94. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.95. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера

В задачах 1.96-1.122 розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера.

$$1.96. \begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$$

$$1.97. \begin{cases} 3y - 4x = 1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$$

$$1.98. \begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 4x - 6y = 5. \end{cases}$$

$$1.99. \begin{cases} x + y - z = 36, \\ x + z - y = 13, \\ y + z - x = 7. \end{cases}$$

$$1.100. \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

$$1.101. \begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

$$1.102. \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

$$1.103. \begin{cases} x + y + z = 36, \\ 2x - 3z = -17, \\ 6x - 5z = 7. \end{cases}$$

$$1.104. \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$$

$$1.105. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$1.106. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$1.107. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$1.108. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

$$1.109. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

$$1.110. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

$$1.111. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

$$1.112. \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

$$1.113. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$1.114. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

$$1.115. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

$$1.116. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

$$1.117. \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.118. \begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0. \end{cases}$$

$$1.119. \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$$

$$1.120. \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$1.121. \begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$$

$$1.122. \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5, \\ 3x - 7y + 3z - t = -1, \\ 5x - 9y + 6z + 2t = 7, \\ 4x - 6y + 3z + t = 8. \end{cases}$$

1.123. Визначити, при яких a та b система рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

- 1) має єдиний розв'язок;
- 2) не має розв'язків;
- 3) має безліч розв'язків.

1.124. Визначити, при якому значенні a система однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ ax - 14y = 15z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

має тривіальний розв'язок.

§ 4. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана-Гауса

$$1.125. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$1.126. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$$

$$1.127. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0,5. \end{cases}$$

$$1.128. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.129. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$$

$$1.130. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$$

$$1.131. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 3 = 0. \end{cases}$$

$$1.132. \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

$$1.133. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 0. \end{cases}$$

$$1.134. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$1.135. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

$$1.136. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{1.137.} \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases} \\
\mathbf{1.138.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146, \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92. \end{cases} \\
\mathbf{1.139.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 = 0. \end{cases} \\
\mathbf{1.140.} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \\
\mathbf{1.141.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases} \\
\mathbf{1.142.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases} \\
\mathbf{1.143.} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases} \\
\mathbf{1.144.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases} \\
\mathbf{1.145.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \\
\mathbf{1.146.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \\
\mathbf{1.147.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases} \\
\mathbf{1.148.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases} \\
\mathbf{1.149.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases} \\
\mathbf{1.150.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.151.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1. \end{array} \right. \\
 \mathbf{1.152.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.153.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{array} \right. \\
 \mathbf{1.154.} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.155.} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{array} \right. \\
 \mathbf{1.156.} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.157.} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{array} \right. \\
 \mathbf{1.158.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126, \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\mathbf{1.159.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{1.160.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{array} \right.$$

В задачах 1.161-1.164 з'ясувати, чи є лінійно залежною система векторів.

1.161. $x_1 = (-3; 1; 5)$, $x_2 = (6; -2; 15)$.

1.162. $x_1 = (1; j; 2 - j; 3 + j)$, $x_2 = (-j; 1 + j; 1 - 3j; 4 - 2j)$, ($j^2 = -1$).

1.163. $x_1 = (1; 2; 3)$, $x_2 = (2; 5; 7)$, $x_3 = (3; 7; 10)$.

1.164. $x_1 = (5; 4; 3)$, $x_2 = (3; 3; 2)$, $x_3 = (8; 1; 3)$.

В задачах 1.165-1.166 з'ясувати, чи можна в просторі многочленів, степені яких не вищі від другого, вибрати за базис многочлени.

1.165. $1 + t^2$, $1 - t^2$, $1 + 2t^2$.

1.166. $1 + t^2$, $1 - t^2$, $1 + 2t$.

1.167. Чи можна в тривимірному просторі вибрати за базис трійку векторів a , b і c якщо:

а) $a = (1; 2; 3)$, $b = (0; -1; 2)$, $c = (3; 1; 4)$;

б) $a = (1; -2; -3)$, $b = (2; 0; 2)$, $c = (3; 1; -1)$;

в) $a = (0; 1; 2)$, $b = (-1; 2; 3)$, $c = (-1; 3; 7)$;

г) $a = (-5; -4; -3)$, $b = (1; 1; 1)$, $c = (-4; -3; -2)$.

1.168. Довести, що система многочленів $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n$ утворює базис в просторі P_{n+1} всіх многочленів степеня не вище n , і, отже, розмірність P_{n+1} дорівнює $n+1$ (цей базис називають канонічним).

Знайти координати:

а) многочлена $-3t^2 + 1$ в канонічному базисі простору P_3 ;

б) многочлена $t^2 - 2t$ в канонічному базисі простору P_3 .

1.169. Довести, що система многочленів $t^3 + t^2 + t + 1$, $t^2 + t + i$, $t + 1$, 1 лінійно незалежна.

1.170. Довести, що система матриць вигляду

$$A\alpha\beta = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \alpha$$

β

$$\alpha = \overline{1, m}, \beta = \overline{1, n}$$

утворює базис в просторі $M_{m,n}$ всіх матриць розміру $m \times n$ і розмірність простору $M_{m,n}$ дорівнює $m * n$. Знайти координати довільної матриці $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ в цьому базисі.

1.171. Знайти розмірність лінійного простору, утвореного квадратними матрицями n -го порядку.

1.172. Чи утворюють лінійний простір вектори n -вимірного простору, якщо їх координати – цілі числа?

1.173. Довести, що вектори e_1, e_2, e_3 утворюють базис та знайти координати вектора x в базисі e_1, e_2, e_3 :

а) $e_1 = (1; 3; 5), e_2 = (0; 4; 5), e_3 = (7; -8; 4), x = (2; -1; 3);$

б) $e_1 = (1; 2; 5), e_2 = (-1; 6; 3), e_3 = (0; 0; 2), x = (1; 0; 4);$

в) $e_1 = (-1; 2; 1), e_2 = (2; 1; -1), e_3 = (1; 2; -1), x = (7; 9; -4);$

г) $e_1 = (2; 3; 4), e_2 = (3; -2; 1), e_3 = (-1; 2; 1), x = (4; 3; 6);$

д) $e_1 = (1; -1; 1), e_2 = (2; 1; 1), e_3 = (1; 3; 1), x = (3; -4; 2).$

1.174. Нехай $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Довести, що данні матриці утворюють базис і знайти розклад матриці

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ за цим базисом.}$$

1.175.* Довести, що в будь-якому дійсному лінійному просторі можна визначити скалярний добуток.

1.176. Нехай $x = (x_1; x_2)$ і $y = (y_1; y_2)$ – довільні вектори арифметичного простору R^2 . Показати, що скалярний добуток в R^2 можна визначити таким способом:

а) $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2;$

б) $(x, y) = 2x_1 y_1 + 5x_2 y_2;$

в) $(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$

Обчислити скалярний добуток векторів $x = (1; 1)$ і $y = (-3; 2)$ кожним із цих способів.

1.177. Довести, що в просторі P_n многочленів степеня не вищого за $n-1$ скалярний добуток многочленів $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$ і $q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{n-1} t^{n-1}$ можна ввести таким способом-

$(p, q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1}$. Обчислити скалярний добуток многочленів $p(t)$ і $q(t)$, якщо:

а) $p(t) = 1 + t + t^2$, $q(t) = t - 2t^2 + 3t^3$;

б) $p(t) = 4 - 2t + 3t^2 - t^3$, $q(t) = 2 + t + t^2$;

в) $p(t) = t^3 - 2t$, $q(t) = 2 + 6t + 8t^3$.

1.178. Нехай вектори x і y задані в ортонормованому базисі. Знайти їх скалярний добуток:

а) $x = (3; -1; -2, 1)$, $y = (3; -1; -2, 1)$;

б) $x = (1; 2; 1; -1)$, $y = (-2; 3; -5; -1)$.

1.179. Знайти норму вектора в ортонормованому базисі:

а) $x = (-1; 3; 5; 1)$;

б) $x = (-5; 2; 4; 2)$.

1.180. Знайти кут між векторами x і y .

а) $x = (2; 1; 3; 2)$, $y = (1; 2; -2; 1)$;

б) $x = (1; 2; 2; 3)$, $y = (3; 1; 5; 1)$;

в) $x = (1; -11; -1)$, $y = (2; -2; 4; 5)$.

1.181. Перевірити ортогональність векторів x і y . Доповнити систему до ортогонального базису і знайти відповідний ортонормований базис:

а) $x = (2; 1; 3)$, $y = (-1; -4; 2)$;

б) $x = (-1; -4; 2)$, $y = (2; 1; 3)$.

1.182. Оператор $\hat{A}(x) = \lambda x$, який довільний елемент $x \in L$, переводить в елемент λx , де λ - фіксоване число, називається оператором подібного розтягу, або оператором подібності. Показати, що оператор подібності є лінійним оператором.

1.183. Довести, що в просторі $C_{[a, b]}$ множення заданої функції на будь-яку фіксовану неперервну функцію $\phi(t)$ є лінійним оператором.

1.184. Оператор $\hat{A}(x) = a$ будь-який елемент $x \in L$ переводить у фіксований елемент a . Чи буде цей оператор лінійним?

1.185. Оператор $\hat{A}(x) = x + a$, де a - фіксований елемент. Чи буде цей оператор лінійним?

В задачах 1.186–1.194 встановити, які з заданих перетворень є лінійними.

1.186. $\hat{A}(x) = |x|a$; a - фіксований вектор.

1.187. $\hat{A}(x) = (a, x)a$; a - фіксований вектор.

1.188. $\hat{A}(x) = (x, e)e$; e - заданий одиничний вектор. З'ясувати геометричний зміст цього перетворення.

1.189. $\hat{A}(x) = [a, x]$; a - фіксований вектор.

1.190. $\hat{A}(x) = (a, x)x$; a - фіксований вектор.

1.191. Якщо $x = xi + yj + zk$,

то $\hat{A}(x) = (y + z)i + (2x + z)j + (3x - y + z)k$.

1.192. $\hat{A}(x) = (\sin x_1 \cos x_2, 0)$, де $x = (x_1, x_2)$.

1.193. Оператор \hat{A} - множення матриці X із простору квадратних матриць порядку 2:

а) зліва на матрицю $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$;

б) справа на матрицю A .

1.194. Оператор \hat{A} - транспонування, тобто оператор, який кожній матриці X ставить у відповідність транспоновану матрицю.

В задачах 1.195–1.200 встановити, які з заданих перетворень простору R^3 арифметичних векторів в себе є лінійними.

1.195. $\hat{A}(x) = (x_2 + x_3; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3)$.

1.196. $\hat{A}(x) = (x_1; x_2 + 1; x_3 + 2)$.

1.197. $\hat{A}(x) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3; -3x_2 + x_3; 2x_1 + 3x_3)$.

1.198. $\hat{A}(x) = (3x_1 + 5x_3; x_1 + x_2 + 1; 3x_2 - 6x_3)$.

1.199. $\hat{A}(x) = (x_1; x_2^3; x_1 + x_2)$.

1.200. $\hat{A}(x) = (x_3; x_1; x_1 + 3x_2 - x_3)$.

1.201. Довести, що поворот площини на кут α навколо початку координат є лінійним перетворенням.

1.202. Довести, що проектування тривимірного простору на координатну вісь вектора e_1 паралельно координатній площині векторів e_2, e_3 є лінійним перетворенням.

1.203. Довести, що проектування тривимірного простору на координатну площину векторів e_1, e_2 паралельно осі координат вектора e_3 є лінійним перетворенням.

1.204. Довести, що ортогональне проектування тривимірного простору на вісь, яка утворює однакові кути з осями прямокутної системи координат, є лінійним перетворенням.

1.205. Довести, що диференціювання є лінійним оператором простору всіх многочленів степеня $\leq n$ від одного невідомого.

1.206. Знайти матрицю, яка відповідає одиничному оператору \hat{E} .

1.207. Знайти матрицю, яка відповідає оператору подібності.

В задачах 1.208–1.212 знайти матриці лінійних операторів в канонічному базисі $e_1 = (1; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0)$, $e_3 = (0; 0; 1)$.

1.208. $\hat{A}(x) = (x_1; x_3; x_2 - 2x_3)$.

1.209. $\hat{A}(x) = (0; x_2 - x_3; 0)$.

1.210. $\hat{A}(x) = (x_1 + x_2; x_2 + x_3; x_1 + x_2 - x_3)$.

1.211. $\hat{A}(x) = (x_1; x_2 + 3x_1; x_3)$.

1.212. $\hat{A}(x) = (x_3; x_2; x_1 + 3x_2 - x_3)$.

В задачах 1.213–1.216 знайти лінійне перетворення тривимірного простору R^3 , що переводить вектори a_1, a_2, a_3 відповідно у вектори b_1, b_2, b_3 . Знайти матрицю цього перетворення в базисі, в якому задані координати всіх векторів.

1.213. $a_1 = (1; -1; 4)$, $a_2 = (0; 3; -1)$, $a_3 = (-1; 3; -5)$,

$b_1 = (3; -8; 5)$, $b_2 = (6; -1; 7)$, $b_3 = (1; -2; -3)$.

1.214. $a_1 = (1; 2; 3)$, $a_2 = (1; 1; 2)$, $a_3 = (3; 1; 1)$,

$b_1 = (-2; 4; 9)$, $b_2 = (-1; 2; 6)$, $b_3 = (2; -1; 6)$.

1.215. $a_1 = (-1; 2; 3)$, $a_2 = (1; -2; -1)$, $a_3 = (2; 1; 1)$,

$b_1 = (6; 9; 8)$, $b_2 = (-4; -3; -6)$, $b_3 = (5; 8; 6)$.

1.216. $a_1 = (1; 0; 0)$, $a_2 = (0; 1; 0)$, $a_3 = (0; 0; 2)$,

$$\mathbf{b}_1 = (1; 2; 0), \mathbf{b}_2 = (4; 1; 1), \mathbf{b}_3 = (1; 2; 3).$$

В задачах 1.217–1.220 знайти координати вектора \mathbf{x} , де $\mathbf{x} = \hat{A}(\mathbf{x})$, якщо задана матриця A оператора \hat{A} і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.

$$1.217. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.218. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.219. (A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.220. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.221. Нехай заданий простір квадратних матриць другого порядку з дійсними елементами. Знайти матрицю оператора \hat{A} - множення матриць простору зліва на матрицю $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисі

$$\bar{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.222. Знайти матрицю лінійного оператора $\hat{A}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}; \mathbf{x}]$, де $\mathbf{a} = (1; 1; 1)$, в канонічному базисі.

1.223. Нехай лінійний оператор \hat{A} - це поворот на кут α декартової системи координат (на площині) проти годинникової стрілки. Знайти матрицю оператора \hat{A} .

1.224. Нехай лінійний оператор \hat{A} - проектування простору R^3 на координатну вісь вектора \mathbf{e}_1 паралельно координатній площині векторів $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Знайти матрицю A оператора \hat{A} .

1.225. Задане перетворення нерівномірного розтягу простору $x_1 = \alpha x, y_1 = \beta y, z_1 = \gamma z$, де $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Знайти матрицю цього перетворення. З'ясувати, як перетворюється при цьому сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

1.226. Знайти матрицю оператора диференціювання всіх многочленів степеня $\leq n$ від одного невідомого в базисі:

$$\text{а) } 1, x, x^2, x^3; \quad \text{б) } 1, (x-a), \frac{(x-a)^2}{2}, \dots, \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

1.227. Як зміниться матриця лінійного оператора, якщо в базисі $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ поміняти місцями \mathbf{e}_i та \mathbf{e}_j .

1.228. Довести, що введені над лінійними операторами операції мають такі властивості:

- 1) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$;
- 2) $(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C})$;
- 3) $\hat{A} + \hat{0} = \hat{A}$;
- 4) $\hat{A} + (-1)\hat{A} = \hat{0}$;
- 5) $\lambda_1(\lambda_2\hat{A}) = (\lambda_1\lambda_2)\hat{A}$;
- 6) $1*\hat{A} = \hat{A}$;
- 7) $(\lambda_1 + \lambda_2)\hat{A} = \lambda_1\hat{A} + \lambda_2\hat{A}$;
- 8) $\lambda(\hat{A} + \hat{B}) = \lambda\hat{A} + \lambda\hat{B}$;
- 9) $\lambda(\hat{A}\hat{B}) = (\lambda\hat{A})\hat{B}$;
- 10) $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$;
- 11) $(\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}$;
- 12) $\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$.

1.229. Довести, що множина лінійних операторів утворює лінійний простір.

1.230. Лінійні оператори \hat{A} і \hat{B} задані матрицями $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю C оператора $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$.

1.231. Дано лінійні перетворення $u = A*v$, $v = B*w$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю C перетворення \hat{C} , що переводить елемент w в u .

1.232. Знайти матрицю лінійного оператора, що повертає площину навколо початку координат спочатку на кут φ , а потім на кут ψ .

1.233. Знайти лінійне перетворення, що відповідає матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ і з'ясувати, як змінюються координати перетворюваного вектора.

1.234. Знайти добуток таких лінійних перетворень:

$$u_1 = 2v_1 - v_2 + 3v_3, \quad v_1 = 3w_1 - 2w_2 + w_3;$$

$$u_2 = 3v_1 - 2v_2 + v_3, \quad v_2 = 2w_1 - w_2 + 3w_3;$$

$$u_3 = 4v_1 - 3v_2 - 2v_3, \quad v_3 = w_1 - w_2 - 3w_3.$$

1.235. Знайти матрицю перетворення, оберненого до перетворення

$$U = A * V, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.236. Знайти обернене перетворення до перетворення $u_1 = v_2$,
 $u_2 = -4v_1 + 4v_2$, $u_3 = -2v_1 + v_2 + 2v_3$.

1.237. Нехай $p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ - деякий многочлен і \hat{A} - лінійний оператор. Розглянемо оператор $p(\hat{A}) = a_{n-1}\hat{A}^{n-1} + \dots + a_1\hat{A} + a_0\hat{E}$. Знайти матрицю оператора $p(\hat{A})$, якщо $p(t) = 3t^2 - 2t + 5$, а оператор \hat{A} заданий матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

В задачах 1.238-1.240 в просторі R^3 задані два лінійні оператори \hat{A} і \hat{B} . Знайти матрицю C лінійного оператора $\hat{C} = \hat{A} * \hat{B} - \hat{B} * \hat{A}$ і явний вигляд $\hat{C}(x)$ в канонічному базисі.

$$\mathbf{1.238.} \quad \hat{A}(x) = (7x_1 + 4x_3, 4x_2 - 9x_3, 3x_1 + x_2),$$

$$\hat{B}(x) = (x_2 - 6x_3, 3x_1 + 7x_3, x_1 + x_2 - x_3).$$

$$\mathbf{1.239.} \quad \hat{A}(x) = (2x_1 - x_2 + 5x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, 3x_1 - 5x_2 + 2x_3).$$

$$\hat{B}(x) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3, 3x_2 - x_3).$$

$$\mathbf{1.240.} \quad \hat{A}(x) = (3x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + 4x_3, -3x_1 + 5x_2 - x_3),$$

$$\hat{B}(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3).$$

В задачах 1.241-1.247 перевірити, чи буде оператор \hat{A} невивірженими і якщо так, то знайти обернений оператор \hat{A}^{-1} .

$$\mathbf{1.241.} \quad \hat{A}(x) = \lambda * x, \quad \lambda \text{ - фіксоване число.}$$

$$\mathbf{1.242.} \quad \hat{A}(x) = (x; e)e, \quad e \text{ - одиничний вектор.}$$

$$\mathbf{1.243.} \quad \hat{A}(x) = 2zi + (x - z)j + (2x + 3z)k.$$

1.244. $\hat{A}(x) = (y+z)\mathbf{i} + (2x+z)\mathbf{j} + (3x-y+z)\mathbf{k}$.

1.245. $\hat{A}(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

1.246. $\hat{A}(x) = (x_2 + 2x_3, -x_2, 2x_2 - x_3)$.

1.247. $\hat{A}(x) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

1.248. Лінійний оператор \hat{A} в базисі $(e) = (e_1; e_2; e_3)$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Знайти матрицю } A' \text{ цього оператора в базисі}$$

$(e') = (e'_1; e'_2; e'_3)$, якщо:

а) $e'_1 = e_1, e'_2 = e_3, e'_3 = e_2$;

б) $e'_1 = e_1, e'_2 = e_1 + e_2, e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

1.249. Лінійний оператор \hat{A} в базисі $(e) = (e_1; e_2)$, де $e_1 = (3; 7)$, $e_2 = (2; 5)$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю A' в базисі

$(e') = (e'_1; e'_2)$, де $e'_1 = (1; 2)$, $e'_2 = (-3; -5)$.

1.250. Задано матрицю A оператора \hat{A} в базисі $(i; j)$. Знайти матрицю A' оператора \hat{A} в базисі $(e) = (e_1; e_2)$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = i + j, e_2 = i - j$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, e_1 = i, e_2 = 2i + j$.

1.251. Задано матрицю A оператора \hat{A} в базисі $(i; j; k)$. Знайти матрицю A' оператора \hat{A} в базисі $(e) = (e_1; e_2; e_3)$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = i, e_2 = k, e_3 = j$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = i + j, e_2 = 2k, e_3 = i - k$.

1.252. Матриця лінійного оператора \hat{A} в базисі $(e) = (e_1; e_2; e_3; e_4)$

дорівнює $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A' цього оператора в

базисі $(e') = (e'_1; e'_2; e'_3; e'_4)$, якщо:

а) $e'_1 = e_1, e'_2 = e_3, e'_3 = e_4, e'_4 = e_4$;

б) $e'_1 = e_1, e'_2 = e_1 + e_2, e'_3 = e_1 + e_2 + e_3, e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

1.253. Знайти формули перетворення координат при переході від базису $(e) = (e_1; e_2; e_3; e_4)$ до базису $(e') = (e'_1; e'_2; e'_3; e'_4)$, якщо:

$e_1 = (1; 0; 0; 0), e'_1 = (1; 10; 0);$ $e_1 = (1; 2; -1; 0), e'_1 = (2; 1; 0; 1);$

$e_2 = (0; 1; 0; 0), e'_2 = (1; 0; 1; 0);$ $\tilde{e}_2 = (1; -1; 1; 1), e'_2 = (0; 1; 2; 2);$

$e_3 = (0; 0; 1; 0), e'_3 = (1; 0; 0; 1);$ $e_3 = (-1; 2; 1; 1), e'_3 = (-2; 1; 12);$

$e_4 = (0; 0; 0; 1), e'_4 = (1; 1; 1; 1);$ $e_4 = (-1; -1; 0; 1), e'_4 = (1; 3; 1; 2).$

1.254. В просторі L_2 оператор A в базисі $(e') = (e'_1; e'_2)$, де

$e'_1 = e_1 + 2e_2, e'_2 = 2e_1 + 3e_2$ має матрицю $A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Оператор \hat{B} в

базисі $(e'') = (e''_1; e''_2)$, де $e''_1 = 3e_1 + e_2, e''_2 = 4e_1 + 2e_2$ має матрицю

$B'' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти:

а) матрицю C'' оператора $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ в базисі (e'') ;

б) матрицю C' оператора $\hat{C} = \hat{A} + \frac{1}{2}\hat{B}$ в базисі (e'') .

1.255. Оператор \hat{A} в базисі $(e') = (e'_1; e'_2)$, де $e'_1 = (-3; 7)$,

$e'_2 = (-1; 2)$ має матрицю $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а оператор \hat{B} в базисі

$(e'') = (e''_1; e''_2)$, де $e''_1 = (1; -1), e''_2 = (4; -5)$ має матрицю $B'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю C оператора $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ в тому ж базисі, в якому задано координати всіх векторів.

1.256. Нехай лінійний оператор \hat{A} простору R^n переводить лінійно-незалежні вектори a_1, a_2, \dots, a_n відповідно у вектори b_1, b_2, \dots, b_n .

Показати, що матрицю A_c цього оператора в деякому базисі $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ можна знайти за формулою $A_c = BA^{-1}$, де стовпці матриць A та B складаються з координат векторів a_1, a_2, \dots, a_n та b_1, b_2, \dots, b_n .

1.257. За яких умов діагональна матриця буде ортогональною?

1.258. Показати, що матриця $\begin{pmatrix} \cos 2 & -\sin 2 \\ \sin 2 & \cos 2 \end{pmatrix}$ ортогональна.

1.259. Матриця A задана в канонічному базисі (e) . Знайти матрицю A' в базисі (e') , якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_3$, $e'_3 = e_2$.

1.260. Лінійний оператор \hat{A} в базисі (e') має матрицю A' . Знайти матрицю спряженого оператора \hat{A}^* в тому самому базисі (e') , якщо

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_1 + e_2.$$

1.261. Довести, що спряжений оператор має такі властивості:

а) $(\hat{A}^*)^* = \hat{A}$;

б) $(\hat{A}\hat{B})^* = \hat{B}^* \hat{A}^*$;

в) $(\alpha\hat{A})^* = \alpha\hat{A}^*$;

г) якщо \hat{A} - невідроджений оператор, то $(\hat{A}^{-1})^* = (\hat{A}^*)^{-1}$.

1.262. Знайти матрицю лінійного оператора \hat{A}^* , спряженого до оператора \hat{A} в ортонормованому базисі $(e) = (e_1; e_2; e_3)$, якщо \hat{A} переводить вектори a_1, a_2, a_3 у вектори b_1, b_2, b_3 відповідно. Тут координати всіх векторів задані в базисі (e) .

а) $a_1 = (2; 3; 5)$, $b_1 = (1; 1; 1)$, $a_2 = (0; 1; 2)$, $b_2 = (1; 1; -1)$, $a_3 = (1; 0; 0)$, $b_3 = (2; 1; 2)$;

б) $\mathbf{a}_1 = (2; 0; 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1; 2; -1)$, $\mathbf{a}_2 = (4; 1; 5)$, $\mathbf{b}_2 = (4; 5; -2)$, $\mathbf{a}_3 = (3; 1; 2)$, $\mathbf{b}_3 = (1; -1; 1)$.

В задачах 1.263–1.271 знайти власні значення та власні вектори лінійних перетворень, які задані своїми матрицями.

$$1.263. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.264. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.265. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.266. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.267. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.268. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.269. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$1.270. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.271. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.272. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Показати, що:

1) $A^*B \neq B^*A$;

2) Власні числа матриць AB та BA збігаються.

В задачах 1.273–1.276 знайти нормовані власні вектори оператора \hat{A} , матриця якого A , якщо:

$$1.273. A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$1.274. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.275. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.276. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.277–1.281 звести матриці лінійних операторів до діагонального вигляду і знайти матрицю переходу до базису з власних векторів.

$$1.277. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.278. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.279. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.280. A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.281. A = \begin{pmatrix} 144 & -60 \\ -60 & 25 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.282–1.286 з'ясувати, які з заданих матриць лінійних операторів можна звести до діагонального вигляду шляхом переходу до іншого базису. Знайти цей нормований базис і відповідну йому діагональну форму матриці.

$$1.282. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.283. \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$1.284. \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.285. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.286. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.287–1.290 знайти ортонормований базис із власних векторів і матрицю A' в цьому базисі для симетричного оператора \hat{A} , що заданий в деякому ортонормованому базисі матрицею A .

$$1.287. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.288. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.289. A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}. \quad 1.290. A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

В задачах 1.291–1.304 звести квадратичну форму до канонічного вигляду і знайти відповідне ортогональне перетворення.

$$1.291. F(x; y) = 29x^2 + 144xy + 71y^2.$$

$$1.292. F(x; y) = 9x^2 - 6xy + y^2.$$

$$1.293. F(x; y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

$$1.294. F(x; y) = 12xy + 5y^2.$$

$$1.295. F(x; y) = 4x^2 + 24xy + 11y^2.$$

$$1.296. F(x; y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2.$$

$$1.297. F(x; y) = 9x^2 + 24xy + 16y^2.$$

$$1.298. F(x; y) = x^2 - 3xy + y^2.$$

$$1.299. F(x; y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2.$$

$$1.300. F(x_1; x_2; x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3.$$

$$1.301. F(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

$$1.302. F(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

$$1.303. F(x_1; x_2; x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

$$1.304. F(x_1; x_2; x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

В задачах 1.305–1.316 звести до канонічного вигляду рівняння кривих та побудувати їх графіки.

$$1.305. 2x^2 + 10xy + 2y^2 + 9x + 12y - 2 = 0.$$

$$1.306. 4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0.$$

$$1.307. 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

$$1.308. x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

$$1.309. 5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

$$1.310. 25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$$

$$1.311. 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

1.312. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

1.313. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$.

1.314. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

1.315. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$.

1.316. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.

II. Векторна алгебра

§ 1. Лінійні операції над векторами

2.1. Обчислити модуль вектора $\mathbf{a} = (6; 3; -2)$.

2.2. Дано дві координати вектора $x = 4$, $y = -12$. Визначити його третю координату z . Якщо $\mathbf{a} = 13$.

2.3. Дано точки $A(3; -1; 2)$ і $B(-1; 2; 1)$. Знайти координати векторів \overline{AB} і \overline{BA} .

2.4. Знайти точку N з якою співпадає кінець вектора $\mathbf{a} = (3; -1; 4)$, якщо його початок співпадає з точкою $M(1; 2; -3)$.

2.5. Визначити початок вектора $\mathbf{a} = (2; -3; -1)$, якщо його кінець міститься в точці $M(1; -1; 2)$.

2.6. Дано модуль вектора $|\mathbf{a}| = 2$ і кути $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Обчислити проєкції вектора \mathbf{a} на координатні осі.

2.7. Обчислити напрямні косинуси вектора $\mathbf{a} = (12; -15; -16)$.

2.8. Обчислити напрямні синуси вектора $\mathbf{a} = \left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right)$.

2.9. Чи може вектор утворити з координатними осями кути:

1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$;

2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;

3) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

2.10. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути:

1) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$;

2) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;

3) $\alpha = 150^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

2.11. Кути вектора з осями Ox і Oz дорівнюють відповідно 120° і 45° . Який кут він складає з віссю Oy .

2.12. За заданими векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} побудувати кожен із векторів:

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;

2) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$;

3) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$;

4) $-\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

2.13. Дано $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$ і $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 24$. Обчислити $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

2.14. Дано $|\mathbf{a}| = 11$, $|\mathbf{b}| = 23$ і $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 30$. Обчислити $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

2.15. Вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} взаємно перпендикулярні, причому $|\mathbf{a}| = 5$ і $|\mathbf{b}| = 12$. Знайти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ і $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

2.16. Вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, причому $|\mathbf{a}| = 5$ і $|\mathbf{b}| = 8$. Знайти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ і $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

2.17. Вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} утворюють кут $\varphi = 120^\circ$, причому $|\mathbf{a}| = 3$ і $|\mathbf{b}| = 5$. Знайти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ і $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

2.18. Якій умові мають задовольняти вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} , щоб виконувались співвідношення:

1) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$;

2) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$;

3) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

2.19. Якій умові мають задовольняти вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} , щоб вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ділив навпіл кут між векторами \mathbf{a} і \mathbf{b} .

2.20. По заданим векторам \mathbf{a} і \mathbf{b} побудувати кожен із векторів:

1) $3\mathbf{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$; 3) $2\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$; 4) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

2.21. В трикутнику ABC вектор $\overline{AB} = \mathbf{m}$ і вектор $\overline{AC} = \mathbf{n}$. Побудувати кожен із векторів:

1) $\frac{\mathbf{m} + \mathbf{n}}{2}$; 2) $\frac{\mathbf{m} - \mathbf{n}}{2}$; 3) $\frac{\mathbf{n} - \mathbf{m}}{2}$; 4) $-\frac{\mathbf{m} + \mathbf{n}}{2}$.

Приймаючи за масштабну одиницю $\frac{1}{2}|\mathbf{n}|$, побудувати також вектори:

5) $|\mathbf{n}|\mathbf{m} + |\mathbf{m}|\mathbf{n}$; 6) $|\mathbf{n}|\mathbf{m} - |\mathbf{m}|\mathbf{n}$.

2.22. В правильному п'ятикутнику $ABCDE$ задано вектори, які співпадають з його сторонами $\overline{AB} = \mathbf{m}$, $\overline{BC} = \mathbf{n}$, $\overline{CD} = \mathbf{p}$, $\overline{DE} = \mathbf{q}$ і $\overline{EA} = \mathbf{r}$.

Побудувати вектори:

1) $\mathbf{m} - \mathbf{n} + \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r}$; 2) $\mathbf{m} + 2\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{r}$; 3) $2\mathbf{m} + \frac{1}{2}\mathbf{n} - 3\mathbf{p} - \mathbf{q} + 2\mathbf{r}$.

2.33. Дано розклад вектора c по базису $i, j, k - c = 16i - 15j + 12k$. Визначити розклад по цьому ж базису вектора d , паралельного вектору c і протилежного з ним напрямку, при умові, що $|d| = 75$.

2.34. Вектори $\overline{AB} = (2; 6; -4)$ і $\overline{AC} = (4; 2; -2)$ співпадають із сторонами трикутника ABC . Визначити координати векторів, що прикладені до вершин трикутника і співпадають з його медіанами.

2.35. На площині дано два вектори $p = (2; -3)$, $q = (1; 2)$. Знайти розклад вектора $a = (9; 4)$ по базису p, q .

2.36. На площині дано три вектори $a = (3; -2)$, $b = (-2; 1)$ і $c = (7; -4)$. Знайти розклад кожного з цих трьох векторів, приймаючи за базис два інших.

2.37. Дано три вектори $a = (3; -1)$, $b = (1; -2)$, $c = (-1; 7)$. Знайти розклад вектора $p = a + b + c$ по базису a, b .

2.38. Дано три вектори $p = (3; -2; 1)$, $q = (-1; 1; -2)$, $r = (2; 1; -3)$. Знайти розклад вектора $c = (1; -6; 5)$ по базису p, q, r .

2.39. Дано чотири вектори $a = (2; 1; 0)$, $b = (1; -1; 2)$, $c = (2; 2; -1)$ і $d = (3; 7; -7)$. Знайти розклад кожного з цих чотирьох векторів, приймаючи за базис три інших.

§ 2. Скалярний добуток векторів

2.40. Вектори a і b утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, знаючи, що $|a| = 3$, $|b| = 4$, обчислити:

- | | | |
|----------------|----------------------|------------|
| 1) ab ; | 2) a^2 ; | 3) b^2 ; |
| 4) $(a+b)^2$; | 5) $(3a-2b)(a+2b)$; | |
| 6) $(a-b)^2$; | 7) $(3a+2b)^2$. | |

2.41. Вектори a і b взаємно перпендикулярні. Вектор c утворює з ними кути рівні $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|c| = 8$, обчислити:

- | | | |
|----------------------|------------------|--------------------|
| 1) $(3a-2b)(b+3c)$; | 2) $(a+b+c)^2$; | 3) $(a+2b-3c)^2$. |
|----------------------|------------------|--------------------|

2.42. Довести справедливість тотожності $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ і встановити її геометричний зміст.

2.43. Якій умові мають задовольняти вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} , щоб вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ був перпендикулярний до вектора $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

2.44. Довести, що вектор $\mathbf{p} = (\mathbf{b}, (\mathbf{a}, \mathbf{c})) - (\mathbf{c}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ перпендикулярний до вектора \mathbf{a} .

2.45. Довести, що вектор $\mathbf{p} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{a}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}))}{a^2}$ перпендикулярний до вектора \mathbf{a} .

2.46. Дано вектори $\mathbf{a} = (4; -2; -4)$, $\mathbf{b} = (6; -3; 2)$. Обчислити:

1) ab ; 2) $\sqrt{a^2}$; 3) $\sqrt{b^2}$;

4) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$; 5) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$; 6) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$.

2.47. Обчислити, яку роботу виконує сила $\mathbf{f} = (3; -5; 2)$, точка до якої прикладена сила переміщується з початку в кінець вектора $\mathbf{s} = (2; -5; -7)$ (Прим., якщо вектор \mathbf{f} зображує силу, точка прикладення якої переміщується з початку в кінець вектора \mathbf{s} , то робота ϖ цієї сили визначається рівністю $\varpi = \mathbf{f} \cdot \mathbf{s}$).

2.48. Дано точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$ і $C(0; 1; -5)$. Обчислити:

1) $(2\overline{AB} - \overline{CB})(2\overline{BC} + \overline{BA})$; 2) $\sqrt{AB^2}$; 3) $\sqrt{AC^2}$;

4) Знайти координати векторів $(\overline{AB} \ \overline{AC})\overline{BC}$ і $AB(\overline{AC} \ \overline{BC})$.

2.49. Обчислити, яку роботу виконує сила $\mathbf{f} = (3; -2; -5)$, якщо точка, до якої прикладена сила, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $A(2; -3; 5)$ в точку $B(3; -2; -1)$.

2.50. Дано три сили $\mathbf{M} = (3; -4; 2)$, $\mathbf{N} = (2; 3; -5)$ і $\mathbf{P} = (-3; -2; 4)$, які прикладені до однієї точки. Обчислити, яку роботу виконує рівнодійна цих сил, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $M_1(5; 3; -3)$ в точку $M_2(4; -1; -4)$.

2.51. Дано вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ і $D(-5; -5; 3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

2.52. Визначити, при якому значенні α вектори $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ і $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$ взаємно перпендикулярні.

2.53. Обчислити косинус кута, утвореного векторами $\mathbf{a} = (2; -4; 4)$ і $\mathbf{b} = (-3; 2; 6)$.

2.54. Дано вершини трикутника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ і $C(3; -2; 1)$. Знайти його внутрішній кут при вершині B .

2.55. Дано вершини трикутника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ і $C(1; -2; 1)$. Знайти його зовнішній кут при вершині A .

2.56. Знайти внутрішні кути трикутника $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$. Переконатись, що цей трикутник рівнобедрений.

2.57. Вектор x колінеарний вектору $a = (6; -8; -7, 5)$, утворює гострий кут з віссю Oz . Знаючи, що $|x| = 50$, знайти його координати.

2.58. Знайти вектор x , якщо він колінеарний вектору $a = (2; 1; -1)$ і задовольняє умову $xa = 3$.

2.59. Вектор x , перпендикулярний до векторів $a = 3i + 2j + 2k$ і $b = 18i - 22j - 5k$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, якщо $|x| = 14$.

2.60. Знайти вектор x , знаючи, що він перпендикулярний до векторів $a = (2; 3; -1)$ і $b = (1; -2; 3)$ і задовольняє умову $x(2i - j + k) = -6$.

2.61. Дано два вектори $a = (3; -1; 5)$ і $b = (1; 2; -3)$. Знайти вектор x при умові, що він перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умови $xa = 9$, $xb = -4$.

2.62. Дано три вектори $a = 2i - j + 3k$, $b = i - 3j + 2k$ і $c = 3i + 2j - 4k$. Знайти вектор x , такий, що $xa = -5$, $xb = -11$, $xc = 20$.

2.63. Знайти проекцію вектора $s = (4; -3; 2)$ на вісь, яка складає з координатними осями рівні гострі кути.

2.64. Знайти проекцію вектора $s = (\sqrt{2}; -3; -5)$ на вісь, яка складає з координатними осями Ox , Oz кути $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, а з віссю Oy – гострий кут β .

2.65. Дано дві точки $A(3; -4; -2)$, $B(2; 5; -2)$. Знайти проекцію вектора \overline{AB} на вісь, яка складає з координатними осями Ox , Oy кути $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, а з віссю Oz – тупий кут γ .

2.66. Обчислити проекцію вектора $a = (5; 2; 5)$ на вісь вектора $b = (2; -1; 2)$.

2.78. Сила $P = (2; -4; 5)$ прикладена до точки $M_0(4; -2; 3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(3; 2; -1)$.

2.79. Сила $Q = (3; 4; -2)$ прикладена до точки $C(2; -1; -2)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно початку координат.

2.80. Сила $P = (2; 2; 9)$ прикладена до точки $A(4; 2; -3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $C(2; 4; 0)$.

2.81. Дано три сили $M = (2; -1; -3)$, $N = (3; 2; -1)$ і $P = (-4; 1; 3)$, прикладені до точки $C(-1; 4; -2)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $A(2; 3; -1)$.

2.82. Дано точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ і $C(5; 2; 6)$. Обчислити площу трикутника ABC .

2.83. Дано вершини трикутника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ і $C(1; 3; -1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .

2.84. Обчислити синус кута, утвореного векторами $a = (2; -2; 1)$ і $b = (2; 3; 6)$.

2.85. Вектор x , перпендикулярний до векторів $a = (4; -2; -3)$ і $b = (0; 1; 3)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знаючи, що $|x| = 26$, знайти його координати.

2.86. Вектор m , перпендикулярний до осі Oz і до вектора $a = (8; -15; 3)$, утворює гострий кут з віссю Ox . Знаючи, що $|m| = 51$, знайти його координати.

2.87. Знайти вектор x , знаючи, що він перпендикулярний до векторів $a = (2; -3; 1)$ і $b = (1; -2; 3)$ і задовольняє умові $x(i + 2j - 7k) = 10$.

2.88. Дано вектори $a = (2; -3; 1)$, $b = (-3; 1; 2)$ і $c = (1; 2; 3)$. Обчислити $[[a, b], c]$ і $[a, [b, c]]$.

§ 4. Мішаний добуток векторів

2.89. Визначити, якою є трійка векторів a, b, c (правою чи лівою), якщо:

1) $a = k$, $b = i$, $c = j$;

2) $a = i$, $b = k$, $c = j$;

3) $a = j$, $b = i$, $c = k$;

4) $a = i + j$, $b = j$, $c = k$;

5) $a = i + j$, $b = i - j$, $c = j$; 6) $a = i + j$, $b = i - j$, $c = k$.

2.90. Вектори a, b, c утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знайти, що $|a| = 4$, $|b| = 3$, $|c| = 3$, обчислити abc .

2.91. Вектор c перпендикулярний до векторів a і b , кут між a і b дорівнює 30° . Знаючи, що $|a| = 6$, $|b| = 3$, $|c| = 3$, обчислити abc .

2.92. Довести, що $|abc| \leq |a| \cdot |b| \cdot |c|$, в якому випадку тут може мати місце знак рівності.

2.93. Довести тотожність $(a + b)(b + c)(c + a) = 2abc$.

2.94. Довести тотожність $ab(c + \lambda a + \mu b) = abc$, де λ і μ – будь-які числа.

2.95. Довести, що якщо вектори a, b, c задовольняють умову $[a, b] + [b, c] + [c, a] = 0$, то вони колінеарні.

2.96. Довести, що необхідною і достатньою умовою компланарності векторів a, b, c є залежність $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$, де хоча б одне з чисел α, β, γ відмінне від нуля.

2.97. Дано три вектори: $a = (1; -1; 3)$, $b = (-2; 2; 1)$ і $c = (3; -2; 5)$. Обчислити abc .

2.98. Встановити, чи компланарні вектори, якщо:

1) $a = (2; 3; -1)$, $b = (1; -1; 3)$, $c = (1; 9; -11)$;

2) $a = (3; -2; 1)$, $b = (2; 1; 2)$, $c = (3; -1; -2)$;

3) $a = (2; -1; 2)$, $b = (1; 2; -3)$, $c = (3; -4; 7)$.

2.99. Довести, що чотири точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежать в одній площині.

2.100. Обчислити об'єм тетраедра, вершинами якого є точки $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

2.101. Дано вершини тетраедра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D .

2.102. Об'єм тетраедра $V = 5$, три його вершини: $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини D , якщо відомо, що вона лежить на осі Oy .

Аналітична геометрія

§ 1. Пряма на площині

3.1. Визначити, які з точок $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ лежать на прямій $2x-3y-3=0$ і які не лежать на ній.

3.2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 лежать на прямій $3x-2y-6=0$; їх абсциси відповідно дорівнюють числам: 4, 0, 2, -2, -6. Визначити ординати цих точок.

3.3. Точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 лежать на прямій $x-3y+2=0$; їх ординати відповідно дорівнюють числам: 1, 0, 2, -1, -3. Обчислити абсциси цих точок.

3.4. Визначити точки перетину прямої $2x-3y-12=0$ з координатними осями і побудувати цю пряму.

3.5. Знайти точку перетину двох прямих $3x-4y-29=0$, $2x+5y=19=0$.

3.6. Сторони AB, BC і AC трикутника ABC задані відповідно рівняннями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Визначити координати його вершин.

3.7. Дано рівняння двох сторін паралелограма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $3x+2y+3=0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

3.8. Сторони трикутника лежать на прямих $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Обчислити його площу S .

3.9. Площа трикутника $S=8$ кв.од.; дві його вершини— точки $A(1;-2)$, $B(2;3)$, а третя вершина C лежить на прямій $2x+y-2=0$. Визначити координати вершини C .

3.10. Площа трикутника $S=1,5$ кв.од.; дві його вершини— точки $A(2;-3)$ і $B(3;-2)$; центр мас цього трикутника лежить на прямій $3x-y-8=0$. Визначити координати вершини C .

3.11. Скласти рівняння прямої і побудувати цю пряму, знаючи її кутовий коефіцієнт k і відрізок b , який вона відтинає на осі Oy :

$$1) k = \frac{2}{3}, b = 3; \quad 2) k = 3, b = 0; \quad 3) k = 0, b = -2;$$

$$4) k = -\frac{3}{4}, b = 3; \quad 5) k = -2, b = -5; \quad 6) k = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}.$$

3.12. Визначити кутовий коефіцієнт k і відрізок b , який відтинається на осі Oy , для кожної з прямих:

$$1) 5x - y + 3 = 0; \quad 2) 2x + 3y - 6 = 0; \quad 3) 5x + 3y + 2 = 0;$$

$$4) 3x + 2y = 0; \quad 5) y - 3 = 0.$$

3.13. Дано пряму $5x + 3y - 3 = 0$. Визначити кутовий коефіцієнт k прямої:

- 1) паралельної до даної прямої;
- 2) перпендикулярної до даної прямої.

3.14. Дано пряму $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; 1)$:

- 1) паралельно до даної прямої;
- 2) перпендикулярно до даної прямої.

3.15. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ і одна з його вершин $A(2; -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника.

3.16. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти вершини прямокутника.

3.17. Знайти проекцію точки $P(-6; 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

3.18. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-5; 13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

3.19. В кожному з випадків знайти рівняння прямої, яка проходить паралельно до двох заданих прямих та посередині між ними:

$$1) 3x - 2y - 1 = 0, \quad 2) 5x + y + 3 = 0, \quad 3)$$

$$2x + 3y - 6 = 0,$$

$$3x - 2y - 13 = 0; \quad 5x + y - 17 = 0; \quad 4x + 6y + 17 = 0;$$

$$4) 5x + 7y + 15 = 0, \quad 5) 3x - 15y - 1 = 0,$$

$$5x + 7y + 3 = 0; \quad x - 5y - 2 = 0.$$

3.20. Обчислити кутовий коефіцієнт k прямої, яка проходить через дві задані точки:

$$а) M_1(2; -5), M_2(3; 2);$$

$$б) P(-3; 1), Q(7; 8);$$

$$в) A(5; -3), B(-1; 6).$$

3.21. Скласти рівняння прямих, які проходять через вершини трикутника $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; -2)$ паралельно до протилежних сторін.

3.22. Дано середини сторін трикутника: $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$ і $M_3(3; -4)$. Скласти рівняння його сторін.

3.23. Дано дві точки: $P(2; 3)$ і $Q(-1; 0)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Q перпендикулярно до відрізка PQ .

3.24. Скласти рівняння прямої, якщо точка $P(2; 3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

3.25. Дано вершини трикутника $M_1(2; 1)$, $M_2(-1; -1)$, $M_3(3; 2)$. Скласти рівняння його висот.

3.26. Сторони трикутника задано рівняннями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$. Визначити точку перетину висот трикутника.

3.27. Дано вершини трикутника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ і $C(3; 5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, проведену з вершини B .

3.28. Дано вершини трикутника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ і $C(5; 7)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині A .

3.29. Скласти рівняння сторін і медіан трикутника з вершинами $A(3; 2)$, $B(5; -2)$ і $C(1; 0)$.

3.30. Через точки $M_1(-1; 2)$ і $M_2(2; 3)$ проведено пряму. Визначити точки перетину цієї прямої з осями координат.

3.31. Дано послідовні вершини випуклого чотирикутника $A(-3; 1)$, $B(3; 9)$ і $C(7; 6)$ і $D(-2; -6)$. Визначити точку перетину його діагоналей.

3.32. Дано дві суміжні вершини $A(-3; -1)$ і $B(2; 2)$ паралелограма $ABCD$ і точка $Q(3; 0)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін цього паралелограма.

3.33. Дано рівняння двох сторін прямокутника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ і рівняння його діагоналі $3x + 7y - 10 = 0$. Скласти рівняння інших сторін і другої діагоналі прямокутника.

3.34. Дано вершини трикутника $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ і $C(-2; 0)$. Скласти рівняння бісектрис його внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A .

3.35. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(3;5)$ на однакових відстанях від точок $A(-7;3)$ і $B(11;-15)$.

3.36. Знайти проекцію точки $P(-8;12)$ на пряму, що проходить через точки $A(2;-3)$ і $B(-5;1)$.

3.37. Знайти точку M_1 , симетричну точці $M_2(8;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3;-4)$ і $B(-1;-2)$.

3.38. Визначити кут φ між двома прямими:

1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$;

2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$;

3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$;

4) $3x + 2y - 1 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$.

3.39. Дано пряму $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;1)$ під кутом 45° до даної прямої.

3.40. Точка $A(-4;5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x - y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін та другої діагоналі квадрата.

3.41. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(-1;3)$ і $C(6;2)$. Скласти рівняння його сторін.

3.42. Точка $E(1;-1)$ є центром квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x - 2y + 12 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони цього квадрата.

3.43. З точки $M_0(-2;3)$ під кутом α до осі Ox проходить промінь світла. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Дійшовши до осі Ox промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямих, на яких лежать падаючий і відбитий промені.

3.44. Промінь світла проходить по прямій $x - 2y + 5 = 0$. Дійшовши до прямої $3x - 2y + 7 = 0$, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

3.45. Дано рівняння сторін трикутника $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$. Довести, що цей трикутник рівнобедрений. Розв'язати цю задачу за допомогою порівняння кутів трикутника.

3.46. Довести, що умова перпендикулярності прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ може бути записана у вигляді: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

3.47. Встановити, які з пар прямих перпендикулярні:

- 1) $3x - y + 5 = 0$, 2) $3x - 4y + 1 = 0$, 3) $6x - 15y + 7 = 0$,
 $x + 3y - 1 = 0$; $4x - 3y + 7 = 0$; $10x + 4y - 3 = 0$;
4) $9x - 12y + 5 = 0$, 5) $7x - 2y + 1 = 0$, 6) $5x - 7y + 3 = 0$,
 $8x + 6y - 13 = 0$; $4x + 6y + 17 = 0$; $3x + 2y - 5 = 0$.

Розв'язати задачу, не обчислюючи кутових коефіцієнтів.

Вказівка. Скористатися умовою перпендикулярності прямих, наведеною в задачі 3.46.

3.48. Довести, що формула для визначення кута φ між прямими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ може бути записана в наступному вигляді $\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$.

3.49. Визначити кут φ , утворений двома прямими:

- 1) $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$;
2) $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} - 5 = 0$, $(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0$;
3) $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$, $x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0$.

Розв'язати задачу не використовуючи кутових коефіцієнтів даних прямих.

Вказівка. Скористатися формулою задачі 3.48. для визначення кута між двома прямими.

3.50. Дано дві вершини трикутника $M_1(-10; 2)$ і $M_2(6; 4)$. Його висоти перетинаються в точці $N(5; 2)$. Визначити координати третьої вершини M_3 .

3.51. Дано дві вершини $A(3; -1)$, $B(5; 7)$ трикутника ABC і точка $N(4; -1)$ перетину його висот. Скласти рівняння сторін цього трикутника.

3.52. В трикутнику ABC дано: рівняння сторони AB $5x - 3y + 2 = 0$, рівняння висот AM $4x - 3y + 1 = 0$ і BN $7x + 2y - 22 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін і третьої висоти цього трикутника.

3.53. Скласти рівняння сторін трикутника ABC , якщо дано одну з його вершин $A(1; 3)$ і рівняння двох медіан $x - 2y + 1 = 0$ і $y - 1 = 0$.

3.54. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо дано одну з його вершин $B(-4; -5)$ і рівняння двох висот $5x + 3y - 4 = 0$ і $3x + 8y + 13 = 0$.

3.55. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(4; -1)$ і рівняння двох бісектрис $x - 1 = 0$ і $x - y - 1 = 0$.

3.56. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2; 6)$, а також рівняння висоти $x - 7y + 15 = 0$ і бісектриси $7x + y + 5 = 0$, проведених з однієї вершини.

3.57. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2; -1)$, а також рівняння висоти $3x - 4y + 27 = 0$ і бісектриси $x + 2y - 5 = 0$, проведених з різних вершин.

3.58. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4; -1)$, а також рівняння висоти $2x - 3y + 12 = 0$ і медіани $2x + 3y = 0$, проведених з однієї вершини.

3.59. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2; -7)$, а також рівняння висоти $3x + y + 11 = 0$ і медіани $x + 2y + 7 = 0$, проведених з різних вершин.

3.60. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4; 3)$, а також рівняння бісектриси $x + 2y - 5 = 0$ і медіани $4x + 13y - 10 = 0$, проведених з однієї вершини.

3.61. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(3; -1)$, а також рівняння бісектриси $x - 4y + 10 = 0$ і медіани $6x + 10y - 59 = 0$, проведених з різних вершин.

3.62. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і разом з прямими $x - y + 12 = 0$, $2x + y + 9 = 0$ утворює трикутник площею 1,5 кв.од.

3.63. Серед прямих, що проходять через точку $P(3; 0)$, знайти таку, відрізок якої знаходиться між прямими $2x - y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$ і ділиться точкою P навпіл.

3.64. Через точку $P(0; 1)$ проведено довільним чином прямі. Довести, що серед них немає прямої, відрізок якої, розміщений між прямими $x - 2y - 3 = 0$ і $x - 2y + 17 = 0$, ділиться б точкою P навпіл.

3.65. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат, знаючи, що довжина її відрізка, розміщеного між прямими $2x - y + 5 = 0$ і $2x - y + 10 = 0$ дорівнює $\sqrt{10}$.

3.66. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $C(-5; 4)$, знаючи, що довжина її відрізка, розміщеного між прямими $x + 2y + 1 = 0$ і $x + 2y - 1 = 0$ дорівнює 5.

3.67. Дано прямі:

- 1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $4x - 3y + 24 = 0$;

3) $2x + 3y - 9 = 0$; 4) $3x - 5y - 2 = 0$; 5) $5x + 2y - 1 = 0$.

Скласти для них рівняння “у відрізках на осях” і побудувати ці прямі.

3.68. Обчислити площу трикутника, що відтинається прямою $3x - 4y - 12 = 0$ від координатного кута.

3.69. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(3; -7)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини (вважаючи кожен відрізок напрямленим від початку координат).

3.70. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(2; 3)$ і відтинає на координатних осях відрізки рівної довжини, відраховуючи кожен відрізок від початку координат.

3.71. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $C(1; 1)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 2 кв.од.

3.72. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $B(5; -5)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 50 кв.од. .

3.73. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(8; 6)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 12 кв.од.

3.74. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(12; 6)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 150 кв.од.

3.75. Через точку $M(4; 3)$ проведено пряму, яка відтинає від координатного кута трикутник, площею 3 кв.од.

3.76. В кожному з випадків звести загальне рівняння прямої до нормального вигляду:

1) $4x - 3y - 10 = 0$; 2) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$; 3) $12x - 5y + 13 = 0$;

4) $x + 2 = 0$; 5) $2x - y - \sqrt{5} = 0$.

3.77. Обчислити величину відхилення δ і відстань d точки від прямої в кожному з випадків:

1) $A(2; -1)$, $4x + 3y + 10 = 0$; 2) $B(0; -3)$, $4x - 12y - 23 = 0$;

3) $P(-2; 3)$, $3x - 4y - 2 = 0$; 4) $Q(1; -2)$, $x - 2y - 5 = 0$.

3.78. Встановити взаємне розташування точки $M(1; -3)$ та початку координат відносно кожної з прямих:

1) $2x - y + 5 = 0$; 2) $x - 3y - 5 = 0$; 3) $3x + 2y - 1 = 0$;

4) $x - 3y + 2 = 0$; 5) $10x + 24y + 15 = 0$.

3.79. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ і одну з його вершин $A(-2; 1)$. Обчислити площу цього прямокутника.

3.80. Обчислити відстань між паралельними прямими в кожному з випадків:

- 1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$;
- 2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
- 3) $4x - 3y + 15 = 0$, $24x - 18y + 39 = 0$;
- 4) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 5y - 26 = 0$.

3.81. Дано рівняння двох сторін квадрата $4x - 3y + 3 = 0$, $4x - 3y - 17 = 0$ і одну з його вершин $A(2; -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього квадрата.

3.82. Дано рівняння двох сторін квадрата $5x + 12y - 10 = 0$, $5x + 12y + 29 = 0$. Скласти рівняння двох інших його сторін, при умові що точка $M_1(-3; 5)$ лежить на стороні цього квадрата.

3.83. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими, що перетинаються:

- 1) $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y - 2 = 0$;
- 2) $x - 2y - 3 = 0$, $2x + 4y + 7 = 0$;
- 3) $3x + 4y - 1 = 0$, $5x + 12y - 2 = 0$;

3.84. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $P(2; -1)$ і разом з прямими $2x - y + 5 = 0$, $3x + 6y - 1 = 0$ утворюють рівнобедрені трикутники.

3.85. Визначити чи лежить початок координат всередині трикутника, сторони якого задано рівняннями $7x - 5y - 11 = 0$, $8x + 3y + 31 = 0$, $x + 8y - 19 = 0$.

3.86. Визначити чи лежить точка $M(-3; 2)$ всередині трикутника, сторони якого задано рівняннями $x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$, $4x - y - 31 = 0$.

3.87. Визначити, який з кутів, гострий чи тупий, що утворені двома прямими $3x - 2y + 5 = 0$ і $2x + y - 3 = 0$, містить початок координат.

3.88. Визначити, який з кутів, гострий чи тупий, що утворені двома прямими $3x - 5y - 4 = 0$ і $x + 2y + 3 = 0$, містить точку $M(2; -5)$.

3.89. Скласти рівняння бісектриси кута утвореного прямими $3x - y - 4 = 0$ і $2x + 6y + 3 = 0$, в якому лежить початок координат.

3.90. Скласти рівняння бісектриси кута утвореного прямими $x-7y+5=0$, $5x+5y-3=0$, суміжного з кутом, що містить початок координат.

3.91. Скласти рівняння бісектриси кута утвореного прямими $x+2y-11=0$ і $3x-6y-5=0$, в якому лежить точка $M(1;-3)$.

3.92. Скласти рівняння бісектриси кута утвореного прямими $2x-3y-5=0$, $6x-4y+7=0$ суміжного з кутом, що містить точку $C(2;-1)$.

3.93. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x-2y+5=0$, $4x+3y-1=0$ і відтинає на осі ординат відрізок $b=-3$. Розв'язати задачу, не визначаючи координат точки перетину даних прямих.

§ 2. Рівняння площини та прямої в просторі

3.94. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;1;-1)$ і має нормальний вектор $\mathbf{n}=(1;-2;3)$.

3.95. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат і має нормальний вектор $\mathbf{n}=(5;0;-3)$.

3.96. Точка $P(2;-1;-1)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

3.97. Дано дві точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$.

3.98. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3;4;-5)$ паралельно до двох векторів $\mathbf{a}_1=(3;1;-1)$ і $\mathbf{a}_2=(1;-2;1)$.

3.99. Довести, що рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ паралельно вектору $\mathbf{a}=(l; m; n)$ може бути подано в вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

3.100. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ і $M_3(2;0;2)$.

3.101. Визначити координати якого-небудь нормального вектора кожної з наступних площин. В кожному випадку написати загальний вираз координат довільного нормального вектора:

1) $2x - y - 2z + 5 = 0$; 2) $x + 5y - z = 0$;

3) $3x - 2y - 7 = 0$; 4) $5y - 3z = 0$;

5) $x + 2 = 0$; 6) $y - 3 = 0$.

3.102. Встановити, які з пар рівнянь визначають паралельні площини:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

3.103. Встановити, які з пар рівнянь визначають перпендикулярні площини:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

2) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

3.104. Знайти значення l і m при яких пари рівнянь будуть визначати паралельні площини:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

2) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$;

3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

3.105. Знайти значення l при яких пари рівнянь будуть визначати перпендикулярні площини:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

3) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

3.106. Знайти двогранні кути, утворені площинами:

1) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$;

2) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$;

3) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;

4) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

3.107. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

3.108. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

3.109. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2; -1; -1)$ перпендикулярно до двох площин $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$.

3.110. Скласти рівняння площини, що проходить через дві точки $M_1(1; -1; -2)$ і $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

3.111. Довести, що три площини $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ мають одну спільну точку. Обчислити її координати.

3.112. Довести, що три площини $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ проходять через одну пряму.

3.113. Довести, що три площини $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x + y + 2z - 1 = 0$, $4x + 3y + z + 2 = 0$ перетинаються по трьох різних паралельних прямих.

3.114. Знайти, при яких значеннях a і b площини $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$:

- 1) мають єдину спільну точку;
- 2) проходять через одну пряму;
- 3) перетинаються по трьох різних паралельних прямих.

3.115. Скласти рівняння площини, що проходить:

- 1) через точку $M_1(2; -3; 3)$ паралельно площині Oxy ;
- 2) через точку $M_2(1; -2; 4)$ паралельно площині Oxz ;
- 3) через точку $M_3(-5; 2; -1)$ паралельно площині Oyz .

3.116. Скласти рівняння площини, що проходить:

- 1) через вісь Ox і точку $M_1(4; -1; 2)$;
- 2) через вісь Oy і точку $M_2(1; 4; -3)$;
- 3) через вісь Oz і точку $M_3(3; -4; -7)$.

3.117. Скласти рівняння площини, яка проходить:

- 1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ і $M_2(5; 6; -4)$ паралельно осі Ox ;
- 2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ і $P_2(3; 1; 2)$ паралельно осі Oy ;
- 3) через точки $Q_1(3; -2; 5)$ і $Q_2(2; 3; 1)$ паралельно осі Oz .

3.118. Знайти точки перетину площини $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ з осями координат.

3.119. Дано рівняння площини $x + 2y - 3z - 6 = 0$. Написати для неї рівняння "у відрізках на осях".

3.120. Знайти відрізки, що відтинаються площиною $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ на координатних осях.

3.121. Обчислити площу трикутника, який відтинає площина $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ від координатного кута Oxy .

3.122. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ і координатними площинами.

3.123. Площина проходить через точку $M_1(6; -10; 1)$ і відтинає на осі абсцис напрямлений відрізок $a = -3$ і на осі аплікату відрізок $c = 2$. Скласти для цієї площини рівняння “у відрізках на осях”.

3.124. Площина проходить через точки $M_1(1; 2; -1)$ і $M_2(-3; 2; 1)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b = 3$. Скласти для цієї площини рівняння “у відрізках на осях”.

3.125. Скласти рівняння площини, яка відтинає на осі Oz відрізок $c = 5$ і перпендикулярна до вектора $\mathbf{n} = (-2; 1; 3)$.

3.126. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2; -3; -4)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини (вважаючи, що кожен відрізок напрямлений від початку координат).

3.127. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$ і відтинає на осях абсцис і аплікату відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

3.128. Скласти рівняння площини, які проходять через точку $M_1(4; 3; 2)$ і відтинають на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

3.129. Скласти рівняння площини, яка відтинає на осі Oz напрямлений відрізок $c = -5$ і перпендикулярна вектору $\mathbf{n} = (-2; 1; 3)$.

3.130. Скласти рівняння площини, що відтинає на координатних осях Ox і Oy напрямлені відрізки $a = 3$, $b = -2$ і проходить паралельно вектору $\mathbf{l} = (2; 1; -1)$.

3.131. Скласти рівняння площини, що відтинає на координатних осях Ox і Oy напрямлені відрізки $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$ і проходить перпендикулярно до площини $2x - 2y + 4z - 5 = 0$.

3.132. Обчислити величину відхилення δ і відстань d точки від площини в кожному з випадків:

1) $M_1(-2; -4; 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$;

2) $M_2(2; -1; -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$;

3) $M_3(1; 2; -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$;

$$4) M_4(3; -6; 7), \quad 4x - 3z - 1 = 0;$$

$$5) M_5(9; 2; -2), \quad 12y - 5z + 5 = 0.$$

3.133. Обчислити відстань d від точки $P(-1; 1; -2)$ до площини, яка проходить через три точки $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$ і $M_3(4; -5; -2)$.

3.134. Довести, що площина $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ перетинає відрізок обмеженого точками $M_1(3; -2; 1)$ і $M_2(-2; 5; 2)$.

3.135. Довести, що площина $5x - 2y + z - 1 = 0$ не перетинає відрізка, обмеженого точками $M_1(1; 4; -3)$ і $M_2(2; 5; 0)$.

3.136. В кожному з випадків обчислити відстань між паралельними площинами:

$$1) x - 2y - 2z - 12 = 0, \quad x - 2y - 2z - 6 = 0;$$

$$2) 2x - 3y + 6z - 14 = 0, \quad 4x - 6y + 12z + 21 = 0;$$

$$3) 2x - y + 2z + 9 = 0, \quad 4x - 2y + 4z - 21 = 0;$$

$$4) 16x + 12y - 15z + 50 = 0, \quad 16x + 12y - 15z + 25 = 0;$$

$$5) 30x - 32y + 24z - 75 = 0, \quad 15x - 16y + 12z - 25 = 0;$$

$$6) 6x - 18y - 9z - 28 = 0, \quad 4x - 12y - 6z - 7 = 0.$$

3.137. На осі Oy знайти точку, віддалену від площини $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на відстань $d = 4$.

3.138. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $M(1; -2; 0)$ і від площини $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

3.139. Скласти рівняння площин, паралельних площині $2x - 2y - z - 3 = 0$ і віддалених від неї на відстань $d = 5$.

3.140. В кожному з випадків скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних площин:

$$1) 4x - y - 2z - 3 = 0, \quad 4x - y - 2z - 5 = 0;$$

$$2) 3x + 2y - z + 3 = 0, \quad 3x + 2y - z - 1 = 0;$$

$$3) 5x - 3y + z + 3 = 0, \quad 10x - 6y = 2z + 7 = 0.$$

3.141. Скласти рівняння прямих, утворених перетином площини $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ з координатними площинами.

3.142. Скласти рівняння прямої, утвореної перетином площини $3x - y - 7z + 9 = 0$ з площиною, що проходить через вісь Ox і точку $E(3; 2; -5)$.

$$3.143. \text{ Знайти точки перетину прямої } \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

з координатними площинами.

3.144. Довести, що пряма $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0, \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$ перетинає вісь Oy .

3.145. Знайти, при якому α пряма $\begin{cases} 2x + 3y - z + \alpha = 0, \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ перетинає:

1) вісь Ox ; 2) вісь Oy ; 3) вісь Oz .

3.146. В пучку площин $2x - 3y + z - 3\lambda + (x + 3y + 2z + 1) = 0$ знайти площину, яка:

- 1) проходить через точку $M_1(1; -2; 3)$;
- 2) паралельна осі Ox ;
- 3) паралельна осі Oy ;
- 4) паралельна осі Oz .

3.147. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$:

- 1) і через точку $M_1(4; -2; -3)$;
- 2) паралельно осі Ox ;
- 3) паралельно осі Oy ;
- 4) паралельно осі Oz .

3.148. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ паралельно вектору $l = (2; -1; -2)$.

3.149. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ паралельно вектору $l = (7; 9; 17)$.

3.150. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ перпендикулярно до площини $x - 2y + z + 5 = 0$.

3.151. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму

$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярно до площини $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

3.152. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $2x + y - z + 1 = 0$, $x + y + 2z + 1 = 0$ паралельно відрізку, обмеженому точками $M_1(2; 5; -3)$ і $M_2(3; -2; 2)$.

3.153. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(2; 0; -3)$ паралельно:

- 1) вектору $\mathbf{a} = (2; -3; 5)$;
- 2) прямій $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$;
- 3) осі Ox ;
- 4) осі Oy ;
- 5) осі Oz .

3.154. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки:

- 1) $(1; -2; 1)$, $(3; 1; -1)$;
- 2) $(3; -1; 0)$, $(1; 0; -3)$;
- 3) $(0; -2; 3)$, $(3; -2; 1)$;
- 4) $(1; 2; -4)$, $(-1; 2; -4)$.

3.155. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(1; -1; -3)$ паралельно:

- 1) вектору $\mathbf{a} = (2; -3; 4)$;
- 2) прямій $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$;
- 3) $x = 3t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 5t + 2$.

3.156. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

- 1) $(3; -1; 2)$, $(2; 1; 1)$;
- 2) $(1; 1; -2)$, $(3; -1; 0)$;
- 3) $(0; 0; 1)$, $(0; 1; -2)$.

3.157. Через точки $M_1(-6; 6; -5)$ і $M_2(12; -6; 1)$ проведено пряму. Знайти точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

3.158. Дано вершини трикутника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ і $C(4; -7; -2)$. Скласти параметричне рівняння його медіани, проведеної з вершини C .

3.159. Дано вершини трикутника $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ і $C(-5; 14; -3)$. Скласти канонічне рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині C .

3.160. Дано вершини трикутника $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$, $C(-7; 11; 6)$. Скласти канонічне рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A .

3.161. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(2; 3; -5)$ паралельно прямій
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

3.162. Скласти канонічні рівняння прямих:

$$1) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$$

3.163. Скласти параметричні рівняння прямих:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0; \end{cases}$$

3.164. Довести перпендикулярність прямих:

$$1) \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$$

$$2) x = 2t + 1, y = 3t - 2, z = -6 + 1 \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

3.165. Знайти гострий кут між прямими:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{1}$$

3.166. Дано прямі

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

при якому значенні l вони перетинаються?

3.167. Довести, що пряма

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

лежить в площині $4x - 3y + 7z = 0$.

3.168. Знайти точку перетину прямої і площини:

$$1) \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}, \quad 2x + 3y + z - 1 = 0;$$

$$2) \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}, \quad x - 2y + z - 15 = 0;$$

$$3) \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \quad x+2y-2z+6=0.$$

3.169. Обчислити відстань d від точки $P(1;-1;-2)$ до прямої

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}.$$

3.170. Обчислити відстань d від точки $P(2;3;-1)$ до прямих:

$$1) \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2};$$

$$2) x = t + 1; y = t + 2; z = 4t + 13;$$

$$3) \begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$$

3.171. Переконатись, що прямі

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, & \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$$

паралельні. Обчислити відстань d між ними.

3.172. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;2;-3)$ паралельно до прямих

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$$

3.173. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $x = 2t + 1, y = -3t + 2, z = 2t - 3$, і точку $M(2;-2;1)$.

3.174. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

3.175. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-3; 2; 5)$ відносно площини, яка проходить через $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ і $M_3(10; -7; -1)$.

3.176. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-3; 2; 5)$ відносно площини, яка проходить через прямі

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ x - 2y - 4z + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

IV. Вступ до математичного аналізу

§1. Функції

Функції та способи їх задання

4.1. Задано функції:

а) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$;

б) $\varphi(x) = \frac{|x-4|}{x+2}$.

Знайти: $f(0)$; $f(1)$; $f(4)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{3})$; $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$; $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi(4)$; $\varphi(-4)$; $\varphi(2)$. Чи існують $f(-2)$ та $\varphi(-2)$?

4.2. Задано функцію $f(z) = z^3 + 1$. Знайти: $f(1)$; $f(a)$; $f(a-1)$; $f(a+1)$; $2f(2a)$; $f(-1)$.

4.3. Задано функції $f(z) = 2^{z-2}$ і $\varphi(z) = 2^{|z|-2}$. Знайти: $f(0)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(-1)$; $f(2,5)$; $f(-1,5)$ і $\varphi(0)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(x)$; $\varphi(-1) + f(1)$.

4.4. Задано функцію $\psi(t) = t \cdot a^{-t}$. Знайти: $\psi(0)$; $\psi(1)$; $\psi(-1)$; $\psi\left(-\frac{1}{a}\right)$; $\psi(a)$; $\psi(-a)$.

4.5. $\varphi(t) = t^2 + 1$. Знайти: $\varphi(t^3)$ і $[\varphi(t)]^3$.

4.6. $F(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$. Довести, що $F(a) = F(-a)$.

4.7. $\phi(z) = 2z^3 - 7z$. Довести, що $\phi(-z) = -\phi(z)$.

4.8. $f(t) = 4t^2 + \frac{4}{t^2} - \frac{3}{t} - 3t + 1$. Довести, що $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

4.9. $\psi(x) = \ln x$. Довести, що для додатніх значень аргумента справедлива рівність $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$.

4.10. $F(z) = a^z$.

1) Довести, що при довільному z справедливе співвідношення $F(-z) \cdot F(z) - 1 = 0$;

2) Довести, що $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$.

Неявні функції

4.23. Записати в явному вигляді функцію y , задану неявно наступним рівнянням:

1) $x^2 - y^2 = 5$;

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

3) $x^3 + y^3 = a^3$;

4) $xy = c$;

5) $3^{xy} = 7$;

6) $\lg x + \lg(y+1) = 2$;

7) $5^{2x+y}(x^3 + 7) = x^4 - 8$;

8) $(1 - 3x^2)\sin y = 1 + 2x$;

9) $\ln(y+x) - \cos x = 1$;

10) $\operatorname{tg}(y - 5x) = \ln(x^2 + 4)$.

Область визначення функції

4.24. В кулю радіуса R вписано циліндр. Знайти функціональну залежність об'єму V циліндра від його висоти x . Вказати область визначення цієї функції.

4.25. В кулю радіуса R вписано прямий конус. Знайти функціональну залежність площі бічної поверхні S конуса від його твірної x . Вказати область визначення цієї функції.

В задачах 4.26-4.27 знайти області визначення заданих функцій.

4.26. 1) $y = 5 + \log_2 x$;

2) $y = \ln(x-7)$;

3) $y = \sqrt[3]{2-7x}$;

4) $y = \sqrt{3+4x}$;

5) $y = \sqrt{-px} \ (p > 0)$;

6) $y = \frac{1}{x^2+4}$;

7) $y = \frac{1}{x^2-2}$;

8) $y = \frac{1}{x^4-9x^2}$;

9) $y = \frac{x+7}{x^2-5x+4}$;

10) $y = 1 - \sqrt{4-x^2}$;

11) $y = \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}$;

12) $y = \sqrt{x^2+8x-9}$;

13) $y = \sqrt{8-7x-x^2}$;

14) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2x-3}}$;

15) $y = \frac{3x^2+7}{\sqrt{x^2-6x+5}}$;

16) $y = \arccos \frac{x}{9}$;

17) $y = \arcsin(x+5);$

19) $y = \arcsin \frac{1-4x}{3};$

21) $y = \sqrt{4-|x|};$

23) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}};$

25) $y = \sqrt{\log_2 \left(\frac{5x-x^2}{4} \right)};$

27) $y = \arcsin \frac{5}{5+\cos x};$

29) $y = \frac{\sqrt{5-x}}{\log_3 x};$

31) $y = \sqrt{\frac{1-x}{2+x}};$

33) $y = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{3+x-2}};$

18) $y = \arccos(2-5x);$

20) $y = \arccos \sqrt{7x};$

22) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|+x}};$

24) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}};$

26) $y = \ln \cos x;$

28) $y = \log_x 7;$

30) $y = \arccos(\log_4 x);$

32) $y = \frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{x-1}}};$

34) $y = \sqrt{2-\log_5(x-4)}.$

4.27. 1) $y = \arcsin(2x-3) + \frac{1}{x-1};$

2) $y = \sqrt{x^2-4} + \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}};$

3) $y = \frac{1}{\log_2(x+3)} + \sin(2x-1);$

4) $y = \arccos(2^x) + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}};$

5) $y = 3^{2x+9} - \arcsin(x+4);$

6) $y = \operatorname{arctg}(1+8x) - \sqrt[5]{1-7x};$

7) $y = \arcsin(1-2x) + \sqrt{x};$

8) $y = \arccos(1-5x) + \log_x 3;$

9) $y = \frac{1}{\lg(2-x)} + \sqrt{x+5};$

10) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[5]{\frac{1}{x-4}} - \log_2(9x-4);$

11) $y = \sqrt{x-3} + 5 \cdot \sqrt[6]{3-x} + \sqrt[4]{x^2+5};$

12) $y = \frac{5x+1}{9-x^2} - \log_3(x^3-4x);$

13) $y = \ln \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2};$

14) $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}} + \sqrt[5]{\sin x};$

$$15) y = \log_7 \frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt{x+15}; \quad 16) y = \sqrt[4]{\frac{5-x}{5+x}} - \sqrt{\frac{2+x}{2-x}};$$

$$17) y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}; \quad 18) y = (x^2-x+2)^{\frac{5}{2}};$$

$$19) y = \lg(\sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}); \quad 20) y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x + 16)].$$

4.28. Чи тотожні функції:

$$1) f(x) = \frac{1}{x} \text{ і } \varphi(x) = \frac{x^2}{x^3};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2}{x} \text{ і } \varphi(x) = x;$$

$$3) f(x) = x \text{ і } \varphi(x) = \sqrt[3]{x^3};$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2} \text{ і } \varphi(x) = x;$$

$$5) f(x) = 2\ln x \text{ і } \varphi(x) = \ln x^2?$$

4.29. Придумати приклад аналітично заданої функції:

1) визначеної тільки в інтервалі $-4 < x < 4$.

2) визначеної тільки в інтервалі $-4 < x < 4$ і не визначеної при $x = 0$.

3) визначеної для всіх дійсних значень x , за виключенням $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Елементи поведінки функцій

4.30. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+6}$. Вказати область визначення функції $f(x)$ і

переконатися, що ця функція додатня.

4.31. Знайти інтервали знакосталості та нулі функції:

$$1) y = 2x + 14;$$

$$2) y = x^2 + 7x - 8;$$

$$3) y = 5^{3x-4};$$

$$4) y = |x - 4|.$$

4.32. Які з вказаних нижче функцій є парними, непарними, не парними і не непарними?

$$1) y = x^6 - 4x^2 + 1;$$

$$2) y = x^3 + x^2 - x;$$

$$3) y = \sin x;$$

$$4) y = 7^x;$$

$$5) y = x - \frac{x^5}{7};$$

$$6) y = \cos x;$$

$$7) y = \sin x + \cos x;$$

$$8) y = 5 - x^4;$$

$$9) y = \operatorname{ctg} x;$$

$$10) y = 3^{-x^2};$$

$$11) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2};$$

$$12) y = \frac{a^x - a^{-x}}{2};$$

$$13) y = \frac{x^2 + 1}{7^x - 3};$$

$$14) y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1};$$

$$15) y = 5^{x^3 - x^2};$$

$$16) y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

4.33. Кожну з наступних функцій представити у вигляді суми парної та непарної функцій:

$$1) y = 3x^2 - 5x + 1;$$

$$2) y = 5 + x - 2x^2 - 7x^3 + x^4;$$

$$3) y = \operatorname{ctg} 5x + \sin 8x + \cos \frac{x}{5}.$$

4.34. Довести, що $f(x) + f(-x)$ - парна функція, а $f(x) - f(-x)$ - непарна функція.

4.35. Представити у вигляді суми парної та непарної функцій нижченаведені функції:

$$1) y = 8^x;$$

$$2) y = (1+x)^{50} \text{ (див. задачу 4.34).}$$

4.36. Довести, що добуток двох парних функцій є парна функція, добуток двох непарних - парна функція, добуток парної та непарної - непарна функція.

4.37. Які з нижченаведених функцій є періодичними?

$$1) y = \cos^2 x; \quad 2) y = \cos x^2; \quad 3) y = x^3 \sin x; \quad 4) y = \cos \frac{1}{x};$$

$$5) y = 1 + \operatorname{ctg} x; \quad 6) y = 6; \quad 7) y = [x]; \quad 8) y = x - [x].$$

(Функція $[x]$ визначається так: якщо x - ціле число, то $[x] = x$. Якщо x не ціле число, то $[x]$ дорівнює найбільшому цілому числу, меншому за x . Так, $[5] = 5$; $[7,31] = 7$; $[-2,87] = -3$).

4.38. Вказати інтервали зростання, спадання і сталості функцій:

$$1) y = -|x|;$$

$$2) y = |x| + x.$$

4.39. Вказати найбільше та найменше значення функцій:

$$1) y = 4 \cos^2 x;$$

$$2) y = \sin x^5;$$

$$3) y = 2 + \cos x;$$

$$4) y = 3^{x^2}.$$

В задачах 4.40–4.46 Побудувати графіки функцій.

$$4.40. 1) y = 2x + 3;$$

$$2) y = -3x - 1;$$

$$3) y = |x+2| + |x-2|;$$

$$4) y = |x+2| - |x-2|;$$

$$5) y = |x+4| - 3|x-2| + |x| - 1.$$

$$4.41. 1) y = \frac{1}{4}x^2;$$

$$3) y = x^2 - 4;$$

$$5) y = 4 - x^2;$$

$$7) y = x^2 - x;$$

$$9) y = 3x^2 + 2;$$

$$11) y = |5 + 8x - 4x^2|;$$

$$4.42. 1) y = \frac{x+1}{x+3};$$

$$3) y = \frac{4x-5}{3x-3,75};$$

$$5) y = \frac{x-4}{5-2x}.$$

$$4.43. 1) y = \frac{1}{2}x^3;$$

$$4) y = 4 \cdot x^{\frac{3}{4}};$$

$$7) y = \frac{1}{3}x^{-0,3};$$

$$4.44. 1) y = -3^x;$$

$$4) y = 1 - 2^{x+1};$$

$$4.45. 1) y = \log_3 x;$$

$$3) y = |\log_3 x|;$$

$$5) y = \lg \frac{100}{x};$$

$$7) y = \log_3 |1 + x|;$$

$$4.46. 1) y = -\cos x;$$

$$3) y = 1 - \sin x;$$

$$5) y = \cos \frac{x}{3};$$

$$2) y = x^2 + 1;$$

$$4) y = |x^2 - 4|;$$

$$6) y = 3 - x - x^2;$$

$$8) y = |x^2 - x|;$$

$$10) y = 5 + 8x - 4x^2;$$

$$12) y = -x|x|.$$

$$2) y = \frac{3x}{2-x};$$

$$4) y = \frac{x+2}{1-\frac{1}{3}x};$$

$$2) y = -\frac{1}{3}x^3; \quad 3) y = x^3 - 3x^2;$$

$$5) y = x^{0,7}; \quad 6) y = x^{3,5};$$

$$8) y = 3x^{-1,5}.$$

$$2) y = 3^{x+2}; \quad 3) y = \frac{1}{4} \cdot 2^x;$$

$$5) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-|x|}; \quad 6) y = 3^{-x^2}.$$

$$2) y = -\log_3 x;$$

$$4) y = \log_3 |x|;$$

$$6) y = 2 + \lg(x-1);$$

$$8) y = \log_x 3.$$

$$2) y = 1 + \cos x;$$

$$4) y = \cos 3x;$$

$$6) y = -4 \cos \frac{x}{2};$$

- 7) $y = \sin 3x$;
- 8) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
- 9) $y = 3\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$;
- 10) $y = 2\sin\frac{x - \pi}{6}$;
- 11) $y = |\sin x|$;
- 12) $y = |\cos x|$;
- 13) $y = |\operatorname{tg} x|$;
- 14) $y = |\operatorname{ctg} x|$;
- 15) $y = \sec x$;
- 16) $y = \operatorname{cosec} x$;
- 17) $y = \operatorname{arctg} x$;
- 18) $y = 3\arccos\frac{x}{3}$;
- 19) $y = 2 + \operatorname{arccotg} 3x$;
- 20) $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin 3x$;
- 21) $y = \arccos\frac{1+x}{4}$;
- 22) $y = \arcsin(\sin 2x)$;
- 23) $y = \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$;
- 24) $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$.

4.47. Розв'язати графічно рівняння:

- 1) $2^x - 2x = 0$;
- 2) $x = 2\sin x$;
- 3) $x - \cos x = 0$;
- 4) $4\sin x = 4 - x$.

4.48. Знайти функцію, обернену до заданої:

- 1) $y = 3x$;
- 2) $y = \frac{1}{5}x$;
- 3) $y = 2 + 9x$;
- 4) $y = x^2 + 4$;
- 5) $y = -\frac{1}{x}$;
- 6) $y = \frac{1}{x+3}$;
- 7) $y = x^2 + 4x + 3$;
- 8) $y = \sqrt[5]{x^2 - 2}$;
- 9) $y = e^{2x-3}$;
- 10) $y = 5 + \log_3(x+4)$;
- 11) $y = \log_x 7$;
- 12) $y = \frac{2-3^x}{5+3^x}$;
- 13) $y = 5\cos 2x$;
- 14) $y = 3 + 5\cos\frac{x-1}{x+1}$;
- 15) $y = 5 + \operatorname{arctg} 3x$;
- 16) $y = 4\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

§ 2. Границя. Неперервність

Поняття послідовності

4.49. Написати перші п'ять членів послідовності:

1) $x_n = 1 - (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$;

2) $x_n = n(1 + (-1)^n)$;

3) $x_n = \frac{2n-1}{3n+7}$;

4) $x_n = (-1)^n \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$.

4.50. Написати формулу загального члена послідовності:

1) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

2) $-2; 0; -2; 0; -2; \dots$

3) $4; \frac{7}{4}; \frac{10}{7}; \frac{13}{10}; \dots$

4) $-1; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{3}{6}; \dots$

Границя послідовності

В задачах 4.51- 4.78 обчислити границі.

4.51. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+3}$.

4.52. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-1}{3n+4}$.

4.53. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-7}{9-2n}$.

4.54. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3}{3n^4}$.

4.55. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-7n+1}{2+3n-10n^2}$.

4.56. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n-7}{9n^2-30n+5}$.

4.57. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{(n+2)^2 + (n-2)^2}$.

4.58. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-2)^3}{59n^3 + 73n}$.

4.59. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^4 - (n-3)^4}{(n+3)^4 + (n-3)^4}$.

4.60. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 99n^2 - 7}{31n^2 + 149n}$.

4.61. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n^3 - 49n}{0,01n^4 - 0,1n + 2}$.

4.62. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^4 - (2n-1)^4}{(3n+1)^4 + (2n-1)^4}$.

4.63. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{7n-2} - \frac{2+3n^2}{5+7n^2} \right)$.

4.64. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5n-1}}{n+2}$.

4.65. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^4-2n^3+3}}{2n-1}$.

4.66. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-2n+9}}{n+2}$.

$$\begin{aligned}
4.67. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^4 - 7n + 1}}{n^2 + 2}. & \quad 4.68. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3} - n)^2}{\sqrt[4]{n^8 + 3}}. \\
4.69. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}). & \quad 4.70. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} (\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3 - 1}). \\
4.71. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^3 - 5} - \sqrt[5]{n^3 + 2n - 1}}{\sqrt[6]{n^8 + 4n^5 - n} + \sqrt[7]{n^5 + 3n^2 + 1}}. & \quad 4.72. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 7^n}{4^n + 7^n}. \\
4.73. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1}{3^n - 2}. & \quad 4.74. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! + n!}. \\
4.75. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+1)!}{(n+2)!}. & \\
4.76. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}}. & \\
4.77. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right). & \\
4.78. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right). &
\end{aligned}$$

В задачах 4.79-4.82 встановити, які із заданих послідовностей є нескінченно великими.

$$4.79. x_n = 8^{\sqrt[3]{n}}. \quad 4.80. x_n = n^{(-1)^n}. \quad 4.81. x_n = n \cdot \cos \frac{\pi n}{2}.$$

$$4.82. x_n = \ln(\ln n), \quad n \geq 2.$$

Границя функції. Неперервність. Функція неперервного аргументу

В задачах 4.83-4.105 знайти границі.

$$4.83. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + x - 3}{2x^2 - x + 1}. \quad 4.84. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 7}. \quad 4.85. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 - 5x^2 + 1}{2x - 3} + \frac{1}{2} \right).$$

$$4.86. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2}. \quad 4.87. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+3}{|x+5|}. \quad 4.88. \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^2-5}{x^4-2x^2+7}.$$

$$4.89. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x+4}{x^3-4x}. \quad 4.90. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-5x+6}.$$

$$4.91. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3+7x^2-4x}{x^2+6x+8}. \quad 4.92. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)\sqrt{3+x}}{x^2-4}.$$

$$4.93. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{27x^3-1}{3x^2+2x-1}. \quad 4.94. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+2x+3}{x^3+x^2+x+1}.$$

$$4.95. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} \right). \quad 4.96. \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right].$$

$$4.97. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}; \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad 4.98. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x}{x^4+7x-3}.$$

$$4.99. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+x-1}{x^2-5x+2}. \quad 4.100. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x}{5x^3+2x^2+1}.$$

$$4.101. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x-7}{9x^2-5x+2}. \quad 4.102. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2+2} - 2x \right).$$

$$4.103. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{3x-1} - \frac{x^3}{3x^2+2} \right). \quad 4.104. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right].$$

$$4.105. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^7 + (x+2)^7 + \dots + (x+30)^7}{x^7+30^7}.$$

4.106. Довести, що якщо $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$,

$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m, \\ a_0/b_0, & \text{при } n = m, \\ \infty, & \text{при } n > m. \end{cases}$$

В задачах 4.107-4.134 знайти границі.

$$4.107. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+5} - \sqrt{x^4}}{\sqrt{x^2+3+x}}.$$

$$4.108. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^3+3} - \sqrt[5]{x^5+1}}.$$

- 4.109. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^7+5} + \sqrt[5]{x^3+8}}{\sqrt[5]{x^{11}+2} - x^2}$.
- 4.110. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^5+2} - \sqrt[3]{x^4-3}}{\sqrt[3]{x^9+1}}$.
- 4.111. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$.
- 4.112. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x^2}$.
- 4.113. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^3}$.
- 4.114. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$.
- 4.115. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3}$.
- 4.116. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{\sqrt{2+x} - 3}$.
- 4.117. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x^2+x-12}$.
- 4.118. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$.
- 4.119. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3 - \sqrt{x+4}}{\sqrt{3x+1} - 4}$.
- 4.120. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}}$.
- 4.121. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$.
- 4.122. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.
- 4.123. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - 2}{x^2 - 1}$.
- 4.124. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[3]{1-2x}}{x}$.
- 4.125. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$; $m, n \in \mathbb{N}$.
- 4.126*. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$.
- 4.127. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x})$.
- 4.128. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3+3} - \sqrt{x^3-3})$.
- 4.129. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\sqrt[3]{x^3+1} - x)$.
- 4.130. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2-3x+7} - \sqrt{x^2-10x+3})$.
- 4.131. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2-4x+5} - 3x)$.
- 4.132. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3+5} - \sqrt{x^3-5})$.
- 4.133. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$.
- 4.134. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2})$.

В прикладах, де вказано $x \rightarrow \pm\infty$, потрібно окремо розглянути випадки $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$.

В задачах 4.135- 4.162 знайти границі.

$$4.135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}. \quad 4.136. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}. \quad 4.137. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$4.138. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} ax}. \quad 4.139. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 9x}{\sin 4x}. \quad 4.140. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - \cos^5 x}.$$

$$4.141. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}. \quad 4.142. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}. \quad 4.143. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x^2 \operatorname{ctg} 2x}.$$

$$4.144. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 6x}. \quad 4.145. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 7x.$$

$$4.146. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^n \alpha}{\sin \alpha^m}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad 4.147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \arcsin x}{4x}.$$

$$4.148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\arctg 3x}. \quad 4.149. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\arctg 4x}.$$

$$4.150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \arctg 2x}{5x - \arcsin 4x}. \quad 4.151. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 3x}.$$

$$4.152. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 3x - \cos 2x}{1 - \sin 4x + \cos 2x}. \quad 4.153. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha^3}.$$

$$4.154. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad 4.155. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$4.156. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2}. \quad 4.157. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}.$$

$$4.158. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}. \quad 4.159. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 7x}{1 - \cos 6x}.$$

$$4.160. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot \operatorname{tg} x. \quad 4.161. \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \sin \frac{x - \alpha}{2}.$$

$$4.162. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}, \quad \alpha \neq \beta.$$

4.163*. Довести наступні співвідношення:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

В задачах 4.164- 4.186 знайти границі.

$$4.164. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x.$$

$$4.165. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^x.$$

$$4.166. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^x.$$

$$4.167. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^x.$$

$$4.168. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{5+2x}.$$

$$4.169. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}.$$

$$4.170. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+x}{4+x} \right)^{3+4x}.$$

$$4.171. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2+2} \right)^{4-2x^2}.$$

$$4.172. \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{4}{x}}.$$

$$4.173. \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{3x}{2-x}}.$$

$$4.174. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{4x}{x-1}}.$$

$$4.175. \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{4x}{x^2-4}}.$$

$$4.176. \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln x].$$

$$4.177. \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)[\ln(x-5) - \ln x].$$

$$4.178. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x-2)[\ln(2x-1) - \ln(2x+1)].$$

$$4.179. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4)[\ln(2-3x) - \ln(5-3x)]$$

$$4.180. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\operatorname{cosec} x}.$$

$$4.181. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$4.182. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{tg} x)^{\frac{4}{x}}.$$

$$4.183. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x^5 - 5}{x - e}.$$

$$4.184. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{4x}.$$

$$4.185. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}.$$

$$4.186. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}.$$

В задачах 4.187- 4.196 знайти односторонні границі.

$$4.187. \lim_{x \rightarrow 5 \pm 0} \frac{|x-5|}{x-5} .$$

$$4.188. \lim_{x \rightarrow 9 \pm 0} \frac{x+9}{81-x^2} .$$

$$4.189. \lim_{x \rightarrow \pm 0} (4+x)^{\frac{1}{x}} .$$

$$4.190. \lim_{x \rightarrow 7 \pm 0} 5^{\frac{1}{7-x}} .$$

$$4.191. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \operatorname{arctg} x .$$

$$4.192. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{1}{x^3} \right] .$$

$$4.193. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\operatorname{tg} x}{|x|} .$$

$$4.194. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x^2-1}{|x-1|} .$$

$$4.195. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} .$$

$$4.196. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin x}{x^2-4x} .$$

Нескінченно малі та нескінченно великі

4.197. При $x \rightarrow 1$ функції $y = \frac{1-x^3}{1+x}$ і $y = 1-x$ є нескінченно малими. Яка з них вищого порядку малості.

4.198. Переконалися в тому, що при $x \rightarrow 1$ нескінченно малі величини $1-x$ і $1-\sqrt{x}$ будуть одного порядку малості. Чи будуть вони еквівалентними?

4.199. Визначити порядок відносно x функції $\alpha(x)$ нескінченно малої при $x \rightarrow 0$:

$$1) \alpha(x) = x^5 + 150x^3;$$

$$2) \alpha(x) = \sqrt[5]{x^3} - \sqrt[3]{x};$$

$$3) \alpha(x) = \frac{x^2(x+3)}{1+\sqrt[3]{x}};$$

$$4) \alpha(x) = \frac{5x^7}{x^2+1};$$

$$5) \alpha(x) = \operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x;$$

$$6) \alpha(x) = \frac{1-\cos 2x}{x};$$

$$7) \alpha(x) = 2\sin^5 x - x^7;$$

$$8) \alpha(x) = 5^{\sqrt[3]{x}} - 1;$$

$$9) \alpha(x) = 3^{x^2} - \cos x;$$

$$10) \alpha(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{1+x}-1).$$

4.200. Довести, що при $x \rightarrow 0$ нескінченно малі величини $e^{2x} - e^x$ і $\sin 2x - \sin x$ будуть еквівалентними.

В задачах 4.206- 4.208 задано функцію $f(x)$. При якому виборі параметрів, які входять в їх визначення, $f(x)$ буде неперервною.

$$4.206. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & x \neq 2, \\ A, & x = 2. \end{cases}$$

$$4.207. f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq -2, \\ 2 - ax^2, & x > -2. \end{cases}$$

$$4.208. f(x) = \begin{cases} ax - 1, & x < \pi, \\ \cos x + b, & x \geq \pi. \end{cases}$$

4.209. Функція $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ не визначена при $x = 2$. Яким повинно бути значення $f(2)$, щоб довизначена цим значенням функція стала неперервною при $x = 2$?

4.210. Дослідити неперервність функції

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0, \\ x, & x = 0. \end{cases}$$

Побудувати графік цієї функції.

4.211. Дослідити неперервність і побудувати графік функції:

$$1) y = x - [x]; \quad 2) y = \frac{1}{x - [x]}; \quad 3) y = (-1)^{[x]}.$$

[Функція $[x]$ дорівнює найбільшому цілому числу, що не перевищує x (див. задач 4.37)].

В задачах 4.212- 4.228 знайти точки розриву функції, дослідити їх характер, у випадку розриву усувного типу довизначити функцію, щоб вона стала неперервною.

$$4.212. f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

$$4.213. f(x) = \frac{|2x+3|}{2x+3}.$$

$$4.214. f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$4.215. f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

$$4.216. f(x) = 5 + \frac{1}{x} \sin x.$$

$$4.217. f(x) = 7^{\frac{x}{9-x^2}}.$$

$$4.218. f(x) = (x-1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$4.219. f(x) = \frac{|x-3|}{\operatorname{arctg}(x-3)}.$$

$$4.220. f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x+4}} - 1}{\frac{1}{5^{\frac{1}{x+4}} + 1}}.$$

$$4.221. f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$4.222. f(x) = \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}.$$

$$4.223. f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}.$$

$$4.224. f(x) = \begin{cases} 5^x, & -10 \leq x < 1, \\ 4x-7, & 1 < x < 10, \\ 2, & x=1. \end{cases}$$

$$4.225. f(x) = \frac{1}{4^{\frac{1}{3-x} + 1}}.$$

$$4.226. f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x-1}, & 2 \leq x \leq 5, \\ x+1, & 5 < x < 6, \\ 8-2x, & 6 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

$$4.227. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & x = \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{4}, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$4.228. f(x) = \begin{cases} 4x-1, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & \frac{\pi}{2} \leq x < 4. \end{cases}$$

V. Диференціальне числення функцій однієї змінної

§1. Похідна. Швидкість зміни функції

Деякі задачі фізики

5.1. Задано рівняння прямолінійного руху точки $S = 7t + 2$. Визначити середню швидкість руху:

а) за перші 5 секунд;

б) за проміжок часу від кінця 2-ї до кінця 5-ї секунди.

5.2. Задано рівняння прямолінійного руху $S = t^3 + \frac{3}{t}$. Знайти середню швидкість руху за проміжок часу від $t = 4$ до $t = 4 + \Delta t$, вважаючи $\Delta t = 2; 1; 0,1; 0,03$.

5.3. Знайти миттєву швидкість точки, яка рухається прямолінійно, якщо її координата в момент часу t задається формулою $x = t^3 + 5t^2 - 3t + 1$.

5.4. Знайти миттєву кутову швидкість тіла, що обертається, якщо в момент часу t кут повороту рівний $\varphi = 2t^4 - 3t^2 + 5$.

5.5. Тіло, що вільно падає, рухається по закону $S = \frac{gt^2}{2}$, де $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ є прискорення сили тяжіння. Знайти середню швидкість руху за проміжок часу від $t = 5$ сек до $(t + \Delta t)$ сек, вважаючи $\Delta t = 1$ сек; 0,1 сек; 0,05 сек; 0,001 сек; знайти швидкість падаючого тіла в кінці 5-ї секунди, в кінці 10-ї секунди. Отримати формулу для швидкості падаючого тіла для будь-якого моменту часу t .

5.6. Кількість тепла Q (в калоріях), необхідного для нагрівання 1г води від 0 до $t^\circ \text{C}$, визначається формулою $Q = t + 0,00002t^2 + 0,000003t^3$. Обчислити теплоємність води для $t = 30^\circ$, $t = 100^\circ$.

5.7. Точка здійснює гармонічні коливання за законом $x(t) = 10 \sin 2t$. Знайти миттєву швидкість точки в момент часу t_0 .

5.8. Кількість радіоактивної речовини в момент часу t виражається формулою $m = M \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, де T - період піврозпаду, а M - початкова

кількість речовини (при $t=0$). Знайти миттєву швидкість розпаду речовини в момент часу t_0 .

Похідна функції

5.9. Знайти приріст функції $y = x^3$ в точці $x = 2$, вважаючи приріст незалежної змінної Δx рівним: 1) 2; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0,1.

5.10. Задано функцію $y = x^2$. Знайти наближені значення похідної в точці $x = 1$, покладаючи послідовно Δx рівним: а) 0,5; б) 0,2; в) 0,1; г) 0,01; д) 0,001.

5.11. $f(x) = x^2$. Знайти $f'(-3)$; $f'(1)$; $f'\left(\frac{5}{2}\right)$.

5.12. $f(x) = x^3$. Знайти $f'(2)$; $f'(0)$; $f'\left(-\frac{1}{3}\right)$; $f'(-\sqrt{5})$.

5.13. $f(x) = x^3$. В якій точці $f(x) = f'(x)$?

5.14. Користуючись означенням похідної, обчислити похідні таких функцій:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y = \frac{1}{x^2 - 5}$; | 2) $y = \sqrt{x}$; | 3) $y = \sqrt[3]{x}$; |
| 4) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; | 5) $y = \operatorname{ctg} ax$; | 6) $y = \operatorname{ctg}^2 x$; |
| 7) $y = e^{ax}$; | 8) $y = \arcsin x$; | 9) $y = \cos x$; |
| 10) $y = \cos^2 x$; | 11) $y = \sin^2 x$; | 12) $y = \ln(x^2 + 2)$. |

5.15. Знайти похідну функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x = 0$.

5.16. Знайти похідну функції $y = \ln x$ при $x = 0,5$.

Геометричний зміст похідної

5.17. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до параболи $y = x^2$:

- 1) в початку координат;
- 2) в точці $(2; 4)$;
- 3) в точці $(-3; 9)$; в точках перетину її з прямою $y = 5x - 4$.

5.18. В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 12?

5.19. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$:

- 1) паралельна осі Ox ;
- 2) утворює з віссю Ox кут 45° ?

5.20. Під якими кутами перетинаються параболи $y = x^2$ і $y^2 = x$?

5.21. Під якими кутами перетинаються парабола $y = x^2$ і пряма $3x - y - 2 = 0$?

5.22. Під якими кутами крива $y = \sin x$ перетинає вісь Ox ?

5.23. Під яким кутом перетинаються криві $2y = x^2$ і $2y = 8 - x^2$?

5.24. Написати рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3$ в точці з абсцисою 2. Знайти піддотичну та піднормаль.

5.25. Написати рівняння дотичної до кривої $y = \ln(2x - 1)$ в точці з абсцисою $x = 1$.

5.26. Написати рівняння дотичної до кривої $y = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ в точці з абсцисою $x = 0$.

5.27. При якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих $y = x^3$ і $y = x^4$ паралельні?

§ 2. Диференціювання функцій

Степеневі функції

В задачах цього розділу x, y, z, t, u, v, s - незалежні змінні; a, b, c, d, m, n, p, q - сталі.

5.28. Продиференціювати функцію:

1) $5x^2 + 3x - 4$;

3) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 - 0,5x + 1,7$;

5) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{5}$;

7) $0,6\sqrt[6]{y} - \frac{y^4}{0,2} + \frac{1}{5y^3}$;

2) $2x^3 + 4x^2 - 8x + 7$;

4) $ax^3 + bx^2 + cx + d$;

6) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{2}$;

8) $\frac{x}{n} - \frac{n}{x} + \frac{x^2}{m^2} - \frac{m^2}{x^2}$;

$$9) \frac{my^2}{\sqrt{y}} - \frac{2ny\sqrt{y}}{\sqrt[3]{y}} + \frac{p\sqrt{y}}{y};$$

$$10) 0,3t^{\frac{2}{3}} - 10t^{-1,4} + \frac{25}{\sqrt[5]{t}};$$

$$11) (x-3,5)^2;$$

$$12) \sqrt{x} \left(x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right);$$

$$13) (z+1)^2(z-1);$$

$$14) 1,5 - 5(a-y)^2;$$

$$15) \frac{ax^3 + bx^2 + c}{(a+b)x};$$

$$16) \left(\frac{av+b}{c} \right)^4.$$

5.29. $f(x) = 5x - 2\sqrt{x}$. Знайти $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

5.30. $f(z) = \frac{z^2 - 5z - 1}{z^3}$. Знайти $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

5.31. $f(t) = \frac{2t^3 - 3t + \sqrt{t} - 1}{t}$. Знайти $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

5.32. $f(x) = 7 - 5x^3 + 4x^5 - x^9$. Показати, що $f'(a) = f'(-a)$.

В задачах 5.33- 5.51 продиференціювати задані функції.

5.33. 1) $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$; 2) $y = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$;

3) $y = (\sqrt{x} - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right)$; 4) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3} \right) \left(4x\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x} \right)$;

5) $y = (\sqrt[3]{x} + 2x) \left(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x \right)$; 6) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$;

7) $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x})$.

$$5.34. y = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$5.35. y = \frac{x}{x^2+1}.$$

$$5.36. s = \frac{2t^3-1}{t+1}.$$

$$5.37. u = \frac{z^3-2z}{z^2+z+1}.$$

$$5.38. y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

$$5.39. u = \frac{v^7}{v^5-3}.$$

$$5.40. y = \frac{x^2+1}{3(x^2-1)} + (x^2-1)(1-x).$$

$$5.41. v = \frac{z^5}{z^3-2}.$$

$$5.42. y = \frac{1+x^4}{1-x^4}.$$

$$5.44. v = \frac{u^2 - 5u + 3}{a^2 + 5}.$$

$$5.46. u = \frac{1}{t^3 - t^2 + 1}.$$

$$5.48. y = \frac{3x^4}{c^2 - x^2}.$$

$$5.50. y = \frac{5}{(1-x^2)(1-2x^3)}.$$

$$5.52. f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1), \text{ знайти } f'(0) \text{ та } f'(1).$$

$$5.53. F(x) = (x-1)(x-2)(x-3), \text{ знайти } F'(0), F'(1) \text{ та } F'(2).$$

$$5.54. F(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}, \text{ знайти } F'(0) \text{ та } F'(-1).$$

$$5.55. s(t) = \frac{3}{5-t} + \frac{t^2}{5}, \text{ знайти } s'(0) \text{ та } s'(2).$$

$$5.56. y(x) = \left(1+x^3\right)\left(5-\frac{1}{x^2}\right), \text{ знайти } y'(1) \text{ та } y'(a).$$

$$5.57. \rho(\varphi) = \frac{\varphi}{1-\varphi^2}, \text{ знайти } \rho'(2) \text{ та } \rho'(0).$$

$$5.58. \varphi(u) = \frac{b-u}{1+u}, \text{ знайти } \varphi'(1).$$

$$5.59. z(t) = \left(\sqrt[3]{t^5} + 7\right)t, \text{ знайти } z'(0).$$

$$5.43. y = \frac{3}{1-x^5}.$$

$$5.45. y = \frac{3-x^8}{\sqrt{e}}.$$

$$5.47. z = \frac{1}{t^2 + 5t - 4}.$$

$$5.49. y = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}.$$

$$5.51. y = \frac{ax^2 + bx + c}{ad + bcd^2}.$$

В задачах 5.60-5.75 продиференціювати задані функції.

$$5.60. 1) (x-a)(x-b)(x-c)(x-d);$$

$$2) (x^3 - 5)^5;$$

$$3) (1-3x)^{15};$$

$$4) (1+4x)^{50};$$

$$5) (4-x^2)^7;$$

$$6) (3x^3 - 7x^2 + 8)^9;$$

$$7) (x^3 + x^2 - x)^4;$$

$$8) \left(5x^2 + \frac{3}{x} - 1\right)^8;$$

$$9) s = \left(t^4 - \frac{1}{t^5} + 2t \right)^6;$$

$$10) y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3;$$

$$11) y = \left(\frac{1+x^2}{1+x} \right)^5;$$

$$12) y = (x^3 - 7x^2 + 5x - 2)^3.$$

$$5.61. u = \frac{(v+4)^2}{v+3}.$$

$$5.62. s = \frac{t^3}{(1-t)^2}.$$

$$5.63. y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}.$$

$$5.64. y = \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}.$$

$$5.65. y = \sqrt{1-x^4}.$$

$$5.66. y = \left(8-3x^{\frac{1}{3}} \right)^5.$$

$$5.67. u = \left(\frac{v}{1-v} \right)^m.$$

$$5.68. y = \frac{3}{(x^3-2x^2+1)^4}.$$

$$5.69. y = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

$$5.70. y = \sqrt[3]{\frac{1}{1-x^2}}.$$

$$5.71. y = \frac{1}{\sqrt{1-x^5+2x^{10}}}.$$

$$5.72. y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}.$$

$$5.73. y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

$$5.74. u = \frac{1}{z-\sqrt{a^2+z^2}}.$$

$$5.75. y = \frac{1}{\sqrt[5]{3x+1}} - \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+4)^4}}.$$

$$5.76. u(v) = 2(v^2 + 5v + 3)^{5/2}; \text{ знайти } u'(1).$$

$$5.77. y(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}; \text{ знайти } y'(2).$$

$$5.78. y(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}; \text{ знайти } y'(0).$$

Тригонометричні функції

В задачах 5.79-5.108 продиференціювати задані функції.

$$5.79. y = \sin x - \cos x.$$

$$5.80. y = \frac{x}{1 - \cos x}.$$

$$5.81. y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

$$5.82. \rho = \varphi \cos \varphi - \sin \varphi.$$

$$5.83. v = \frac{\sin t}{t} + \frac{t}{\sin t}.$$

$$5.85. y = \frac{x}{\sin x + \cos x}.$$

$$5.87. y = \sin^2 x.$$

$$5.89. y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x.$$

$$5.91. y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x.$$

$$5.93. y = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x.$$

$$5.95. y = a \sin \frac{x}{5}.$$

$$5.97. y = \operatorname{ctg} \frac{x-3}{4}.$$

$$5.99. y = \cos \frac{1}{x^2}.$$

$$5.101. y = \sin^5 3x.$$

$$5.103. y = \cos \sqrt{1+x^3}.$$

$$5.105. y = (1 + \cos^2 x)^8.$$

$$5.107. y = \sqrt{1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{1}{x} \right)}.$$

5.109. Вивести формули:

$$\left(\sin^n x \cos nx \right)' = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x;$$

$$\left(\sin^n x \sin nx \right)' = n \sin^{n-1} x \sin(n+1)x;$$

$$\left(\cos^n x \sin nx \right)' = n \cos^{n-1} x \cos(n+1)x;$$

$$\left(\cos^n x \cos nx \right)' = -n \cos^{n-1} x \sin(n+1)x.$$

$$5.84. s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$5.86. y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$5.88. y = \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x.$$

$$5.90. y = 6 \cos^2 x - 2 \cos^3 x.$$

$$5.92. y = x \sec^2 x - \operatorname{tg} x.$$

$$5.94. y = \cos 9x.$$

$$5.96. y = 2 \cos(7x-3).$$

$$5.98. y = \sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg} x}.$$

$$5.100. y = \cos(\cos x).$$

$$5.102. y = \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{x}{3}}.$$

$$5.104. y = \operatorname{tg}^5 \sqrt{1+x^4}.$$

$$5.106. y = \sin^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

$$5.108. y = \cos^2(\sin 7x).$$

$$5.140. y = x \cos x \ln x.$$

$$5.142. y = \frac{\ln x}{x^n}.$$

$$5.144. y = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

$$5.146. y = \sqrt[3]{1-\ln^2 x}.$$

$$5.148. y = \ln(x^3 - 2x^2 + x).$$

$$5.150. y = \log_7(x^2 + 4).$$

$$5.152. y = \ln \arcsin 3x.$$

$$5.154. y = \operatorname{arccctg}[\ln(ax+b)].$$

$$5.156. y = \log_3[\log_5(\log_7 x)].$$

$$5.158. y = \arccos^4[\ln(a^3 + x^3)].$$

$$5.141. y = \frac{1}{\ln x}.$$

$$5.143. y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}.$$

$$5.145. y = x^n \ln x.$$

$$5.147. y = \ln(1+5x).$$

$$5.149. y = \ln \cos x.$$

$$5.151. y = \ln \operatorname{ctg} x.$$

$$5.153. y = \ln^5 \sin x.$$

$$5.155. y = (1 + \ln \cos x)^n.$$

$$5.157. y = \ln \arctg \sqrt{1+x^2}.$$

$$5.159. y = \sqrt[5]{\ln \cos \frac{x+3}{7}}.$$

Показникові функції

В задачах 5.160-5.197 продиференціювати задані функції.

$$5.160. y = 7^x.$$

$$5.161. y = 10^x.$$

$$5.162. y = \frac{1}{5^x}.$$

$$5.163. y = \frac{x}{9^x}.$$

$$5.164. y = x \cdot 10^x.$$

$$5.165. y = xe^x.$$

$$5.166. y = \frac{x}{e^x}.$$

$$5.167. y = \frac{x}{a^x}.$$

$$5.168. y = \frac{x^5 + 3^x}{e^x}.$$

$$5.169. y = e^x \sin x.$$

$$5.170. y = \frac{e^x}{\cos x}.$$

$$5.171. y = \frac{\sin x}{e^x}.$$

$$5.172. y = 4^{\frac{x}{\ln x}}.$$

$$5.173. y = x^7 + 2^x.$$

$$5.174. y = \sqrt{4 + e^x}.$$

$$5.175. y = \sqrt[5]{1 - e^{2x}}.$$

$$5.176. y = (x^2 - 2x + 5)e^x.$$

$$5.177. y = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

$$5.178. y = \frac{1 + 10^x}{1 - 10^x}.$$

$$5.179. y = \frac{e^x}{1 + x^2}.$$

$$5.180. y = xe^x(\cos x + \sin x).$$

$$5.182. y = 10^{3x-7}.$$

$$5.184. y = \cos(7^x).$$

$$5.186. y = a^{\cos^5 x}.$$

$$5.188. y = 5^{7^x}.$$

$$5.190. y = \cos\left(e^{-(x^2+5x+1)}\right).$$

$$5.192. y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}.$$

$$5.194. y = ae^{-b^3x^3}.$$

$$5.196. y = Ae^{-k^2x} \sin(\omega x + \alpha).$$

$$5.181. y = e^{-5x}.$$

$$5.183. y = e^{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$5.185. y = 2^{\cos x}.$$

$$5.187. y = e^{\operatorname{arctg} 3x}.$$

$$5.189. y = e^{\sqrt{\ln x}}.$$

$$5.191. y = 10^{1+\cos^3 2x}.$$

$$5.193. y = \ln \operatorname{tg} \sqrt[4]{\operatorname{arcsin} e^{5x}}.$$

$$5.195. y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}.$$

$$5.197. y = a^x \cdot x^a.$$

Гіперболічні функції

В задачах 5.198-5.215 продиференціювати задані функції.

$$5.198. y = \operatorname{ch}^5 x.$$

$$5.200. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x).$$

$$5.202. y = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x.$$

$$5.204. y = \operatorname{sh}(\operatorname{ch} x).$$

$$5.206. y = e^{\operatorname{sh}^3 x}.$$

$$5.208. y = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$5.210. y = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}.$$

$$5.212. y = \frac{1}{x} \operatorname{ch} 2x + \sqrt{x} \operatorname{sh} 2x.$$

$$5.214. y = \ln(\operatorname{sh} x) + \frac{1}{2 \operatorname{sh} x}.$$

$$5.199. y = \ln \operatorname{sh} x.$$

$$5.201. y = \operatorname{th}(1+x^3).$$

$$5.203. y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x.$$

$$5.205. y = \sqrt{\operatorname{sh} x}.$$

$$5.207. y = \operatorname{cth}(\ln x).$$

$$5.209. y = \sqrt[7]{(1+\operatorname{cth}^2 x)^4}.$$

$$5.211. y = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}.$$

$$5.213. y = \frac{x^2 e^{3x}}{\operatorname{sh} x}.$$

$$5.215. y = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

Логарифмічне диференціювання

В задачах 5.216-5.235 продиференціювати задані функції, використовуючи правило логарифмічного диференціювання.

$$5.216. y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}.$$

$$5.217. y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}.$$

$$5.218. y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}.$$

$$5.219. y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}.$$

$$5.220. y = \frac{x+1^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$$

$$5.221. y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$$

$$5.222. y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}.$$

$$5.223. y = x^{x^2}.$$

$$5.224. y = x^{x^x}.$$

$$5.225. y = x^{\ln x}.$$

$$5.226. y = (\arctg x)^x.$$

$$5.227. y = (\sin x)^{\ln x}.$$

$$5.228. y = (x^3 + 4)^{\lg x x^3 + 4}.$$

$$5.229. y = (\ln x)^x.$$

$$5.230. y = x^{e^{\cos x}}.$$

$$5.231. y = (\cos x)^{x^2}.$$

$$5.232. y = x^{\arcsin x}.$$

$$5.233. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$5.234. y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

$$5.235. y = 2x^{\sqrt{x}}.$$

Різні функції

В задачах 5.236-5.308 продиференціювати задані функції.

$$5.236. y = (1 - \sqrt[5]{x})^5.$$

$$5.237. y = \arctg\left(\frac{x}{b} + c\right).$$

$$5.238. y = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}.$$

$$5.239. y = \arcsin(x^2 - 5x + 6).$$

$$5.240. y = \log_3(x + \sin x).$$

$$5.241. y = 3 \sin^2 x - 2 \sin^3 x.$$

$$5.242. y = 7 \operatorname{tg} \frac{x}{7} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}.$$

$$5.243. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}.$$

$$5.244. y = \cos \frac{x}{3} \cos 5x.$$

$$5.245. y = \cos x e^{\sin x}.$$

$$5.246. y = e^{x^3} \ln x.$$

$$5.247. y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^7.$$

$$5.248. y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}.$$

$$5.249. y = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right).$$

$$5.250. y = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x}.$$

$$5.251. y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

$$5.252. y = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{x}.$$

$$5.253. y = \sin^2 \frac{x}{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$5.254. y = \frac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}.$$

$$5.255. y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$5.256. y = \sin 3x \ln x.$$

$$5.257. y = \arcsin \sqrt{\sin x}.$$

$$5.258. y = \frac{1}{30} \sin^6 5x - \frac{1}{40} \sin^8 5x. \quad 5.259. y = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

$$5.260. y = \sin \frac{\arccos x}{2}.$$

$$5.261. y = \arcsin \sqrt{1-3x}.$$

$$5.262. y = \sin^4 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right).$$

$$5.263. y = \log_3 (x^2 - \sin x).$$

$$5.264. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$5.265. y = x \arcsin(\ln x).$$

$$5.266. y = \operatorname{ctg} \frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

$$5.267. y = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}.$$

$$5.268. y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}.$$

$$5.269. y = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 5x}.$$

$$5.270. y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}.$$

$$5.271. y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$5.272. y = \sqrt[3]{1+x} \sqrt{x+3}.$$

$$5.273. y = x^2 \sqrt{1+\sqrt{x}}.$$

$$5.274. y = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

$$5.275. y = x^5 \operatorname{arctg} x^5.$$

$$5.276. y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}.$$

$$5.277. y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$\begin{array}{ll}
5.278. y = \frac{\arccos 7x}{1-7x}. & 5.279. y = 5^{\frac{1}{\ln x}}. \\
5.280. y = \ln \frac{1-e^x}{e^x}. & 5.281. y = e^{x \operatorname{ctg} x}. \\
5.282. y = \cos^2 x \cdot \cos x^2. & 5.283. y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos 2x}}. \\
5.284. y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1-x}{1+x}. & 5.285. y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}. \\
5.286. y = 10^{\frac{x}{\ln x}}. & 5.287. y = \sqrt{x^2+1} - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right). \\
5.288. y = 6^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}. & 5.289. y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}. \\
5.290. y = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}. & 5.291. y = x e^{1+\sin x}. \\
5.292. y = \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 e^{-3x}}. & 5.293. y = e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x). \\
5.294. y = 3x^3 \arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}. & 5.295. y = \frac{1}{\sqrt{1-e^{\sqrt{x}}}}. \\
5.296. y = 2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}. & 5.297. y = \frac{1+x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}. \\
5.298. y = \frac{1}{\sin x(x+\cos x)}. & 5.299. y = e^x \sin x \cos^3 x. \\
5.300. y = \sqrt[7]{5+4\sqrt[5]{x^9}}. & 5.301. y = x - \ln \left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1} \right). \\
5.302. y = \operatorname{Intg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \ln(1 + \sin x) - x. & \\
5.303. y = 2 \ln \left(2x - 3\sqrt{1-4x^2} \right) - 6 \arcsin 2x. & \\
5.304. y = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x. & \\
5.305. y = \ln \left(x \sin x \sqrt{1-x^2} \right). & 5.306. y = x \sqrt{1+x^2} \sin x.
\end{array}$$

$$5.307. y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}.$$

$$5.308. y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}.$$

5.309. Довести, що функція $y = \ln \frac{1}{1+x}$ задовольняє співвідношенню $xy' + 1 = e^y$.

5.310. Довести, що функція $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ задовольняє співвідношенню $(1-x^2)y' - xy = 1$.

Обернені функції

5.311. $x = e^{\arcsin y}$; знайти вираз для $\frac{dy}{dx}$ через y ; через x .

5.312. $t = 2 - 3s + s^3$; виразити $\frac{ds}{dt}$ через s .

5.313. $u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}$; перевірити співвідношення $\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{du} = 1$.

5.314. Знаючи, що функції $\arcsin \sqrt{x}$ і $\sin^2 x$ - взаємно обернені функції та, що $(\sin^2 x)' = \sin 2x$, знайти $(\arcsin \sqrt{x})'$.

5.315. Функції, обернені гіперболічним, позначаються символами $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$. Знайти похідні від цих функцій.

5.316. $s = te^{-t}$; знайти $\frac{dt}{ds}$.

5.317. $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$. Виразити $\frac{dx}{dy}$ через x ; через y . Показати

справедливість співвідношення $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$.

5.318. $x = y^5 - 2y^2 + 3$; знайти $\frac{dy}{dx}$.

5.319. $x = y^3 + 5y - 7$; знайти $\frac{dy}{dx}$.

5.320. $t = \arcsin 2^s$; знайти вираз для $\frac{ds}{dt}$ через s ; через t .

Функції, задані неявно

В задачах 5.321-5.340 знайти похідні від функцій y , заданих неявно.

$$5.321. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$5.322. y^2 \cos x = a^2 \sin 3x.$$

$$5.323. y^2 - 2xy + b^2 = 0.$$

$$5.324. x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = b^3.$$

$$5.325. x^5 + y^5 - 5axy = 0.$$

$$5.326. y^4 - 4y^2 + 3ax = 0.$$

$$5.327. x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0.$$

$$5.328. x^4 + y^4 = x^2y^2.$$

$$5.329. 5^x + 5^y = 5^{x+y}.$$

$$5.330. \sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y).$$

$$5.331. 2y \ln y = x.$$

$$5.332. x^y = y^x.$$

$$5.333. x - y = \arcsin x - \arcsin y.$$

$$5.334. y = \cos(x+y).$$

$$5.335. y = 1 + xe^y.$$

$$5.336. \cos(xy) = x.$$

$$5.337. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$5.338. x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0.$$

$$5.339. y = x + \operatorname{arctg} y.$$

$$5.340. y \sin x - \cos(x-y) = 0.$$

Застосування похідної

5.341. Скласти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $y = \frac{1}{x}$ в

точці з абсцисою $x = -\frac{1}{2}$. Знайти піддотичну та піднормаль.

5.342. Показати, що лінія $y = x^5 + 3x - 8$ в усіх своїх точках нахилена до осі Ox під гострим кутом.

5.343. В яких точках лінії $y = x^3 + x - 2$ дотична до неї паралельна прямій $y = 4x - 1$?

В задачах 5.344-5.349 написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці x_0 .

$$5.344. y = x^2 - 5x + 4, x_0 = -1.$$

$$5.345. y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, x_0 = -2.$$

$$5.346. y = \sqrt{x}, x_0 = 4.$$

$$5.347. y = \operatorname{tg} 2x, x_0 = 0.$$

5.348. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

5.349. $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$.

5.350. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точці з ординатою $y_0 = 3$.

5.351. Написати рівняння дотичної до кривої $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точці $M_0(1;1)$.

5.352. Написати рівняння нормалі до лінії $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ в точці з абсцисою $x = 3$.

5.353. Написати рівняння нормалі до лінії $y = -\sqrt{x} + 2$ в точці її перетину з бісектрисою першого координатного кута.

В задачах 5.354-5.357 знайти кути, під якими перетинаються задані криві.

5.354. $y = x^2$ і $y = x^3$.

5.355. $y = (x-2)^2$ і $y = 4x - x^2 + 4$.

5.356. $y = \sin x$ і $y = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$.

5.357. $y^2 = \frac{x}{2a-x}$ і $x^2 + y^2 = 8ax$.

5.358. Точка рухається по прямій так, що її відстань s від початкового пункту через t секунд рівна $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

а) В які моменти часу точка була в початковому пункті?

б) В які моменти часу її швидкість дорівнює нулю?

в) В які моменти часу її прискорення дорівнює нулю?

5.359. Точка рухається по логарифмічній спіралі $\rho = e^{a\varphi}$. Знайти швидкість зміни полярного радіуса, якщо відомо, що він обертається з кутовою швидкістю ω .

5.360. Сторона квадрата збільшується з швидкістю v . Яка швидкість зміни периметра і площі квадрата в той момент, коли сторона його рівна a ?

5.361. Радіус круга змінюється з швидкістю v . Яка швидкість зміни довжини кола та площі круга в той момент, коли його радіус дорівнює r ?

5.362. Радіус кулі змінюється з швидкістю v . З якою швидкістю змінюється об'єм та площа поверхні кулі?

Функції, задані параметрично

5.363. З рівнянь, які задають функцію параметрично, виключити параметр:

1) $x = 2t$, $y = 8t + 4t^2$;

2) $x = \cos t$, $y = \sin 2t$;

3) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$;

4) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2\cos 2t$.

В задачах 5.364-5.374 знайти похідні від y по x (y'_x).

5.364. $x = 2t$, $y = 3t^2 + 8t$, $t \in (-\infty; +\infty)$.

5.365. $x = t^3 - 7$, $y = 0,5t^2 + 3$, $t \in (-\infty; +\infty)$.

5.366. $x = \frac{1}{t+1}$, $y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$, $t \neq -1$.

5.367. $x = 5^{-t}$, $y = 5^{5t}$, $t \in (-\infty; +\infty)$.

5.368. $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, $\varphi \in (0; \pi)$.

5.369. $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2\cos 2t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

5.370. $x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $t \in (0; +\infty)$.

5.371. $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$, $t \in (0; +\infty)$.

5.372. $x = 3 \log_2 \operatorname{ctg} t$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

5.373. $x = \arcsin(t^2 - 1)$, $y = \arccos\left(\frac{t}{2}\right)$, $t \in (0; \sqrt{2})$.

5.374. $x = a \operatorname{sh} t$, $y = b \operatorname{ch} t$, $t \in (0; +\infty)$.

В задачах 5.375-5.378 знайти y'_x в заданій точці t_0 .

5.375. $x = t \ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$, $t_0 = 1$.

5.376. $x = t(t \cos t - 2 \sin t)$, $y = t(t \sin t + 2 \cos t)$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.377. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

5.378. $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$, $t_0 = 2$.

§3. Диференціал. Диференційовність функції

Диференціал

5.379. Знайти приріст функції $y = x^2$, який відповідає приросту Δx незалежної змінної. Обчислити Δy , якщо $x = 1$ і $\Delta x = 0,1$; $0,01$. Якою буде похибка (абсолютна та відносна) значення Δy , якщо обмежитися членом, який містить Δx в першому ступені?

5.380. Довести, що для лінійної функції $y = ax + b$ приріст Δy і диференціал dy співпадають.

5.381. Задана функція $y = x^3 + 2x$. Знайти значення приросту та його лінійної головної частини, які відповідають зміні x від $x = 2$ до $x = 2,1$.

5.382. Який приріст отримує функція $y = 3x^2 - x$ при переході незалежної змінної x від значення $x = 1$ до значення $x = 1,02$. Яке значення має відповідна лінійна головна частина? Знайти відношення другої величини до першої.

5.383. Задана функція $f(x) = x^2$. Відомо, що в деякій точці приросту незалежної змінної $\Delta x = 0,2$ відповідає головна частина приросту функції $df(x) = -0,8$. Знайти початкове значення незалежної змінної.

5.384. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^2 - x$ при $x = 10$ та $\Delta x = 0,1$. Обчислити абсолютну та відносну похибки, які отримуються при заміні приросту диференціалом. Зробити рисунок.

5.385. Знайти приріст Δy і диференціал dy функції $y = x^3$, які відповідають значенню аргументу $x_0 = 2$ та двом різним приростам аргументу $(\Delta x)_1 = 0,1$ і $(\Delta x)_2 = 0,01$.

5.386. Знайти приріст і диференціал функції $y = \sqrt{x}$ при $x = 4$ і $\Delta x = 0,41$. Обчислити абсолютну та відносну похибки. Зробити рисунок.

5.387. Ребра куба збільшено на 1 см. При цьому диференціал dV об'єму V куба став рівним 12 см^3 . Знайти початкову довжину ребер.

5.388. Радіус круга збільшено на 1 см. Диференціал площі круга став при цьому рівним $6\pi \text{ см}^2$. Знайти початкову величину радіуса.

5.389. Знайти диференціал функції:

- 1) $2\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{1}{2x^2}$; 4) $\frac{1}{7x^7}$;
 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{\sqrt{x^3}}{a+b}$; 7) $\frac{p}{q^x}$; 8) $\frac{a+b}{\sqrt{x}}$;
 9) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$; 10) $\frac{1}{t^2+1}$; 11) $(1+3x-2x^2)^5$; 12) $\text{ctg}^4 x$;
 13) $3^{\text{Int}x}$; 14) $7^{\cos x}$; 15) $\ln \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$; 16) $\frac{\cos x}{x^2+1}$;
 17) $\sqrt{\arcsin x} + (\arctg x)^3$; 18) $x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2}$;
 19) $\ln x - x + 1$; 20) $x \arcsin x - \sqrt{1-x^2} - 3$.

В задачах 5.390-5.394 знайти диференціали неявно заданих функцій

5.390. $y^5 + y^3 - x^2 = 9$.

5.391. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

5.392. $e^y = x^3 + y^2$.

5.393. $\cos(xy) = x^5$.

5.394. $\arctg \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

В задачах 5.395-5.397 виконати вказані наближені обчислення, використовуючи заміну приросту Δy відповідної функції $y = f(x)$ диференціалом dy цієї функції при малій абсолютній величині приросту Δx аргументу x .

5.395. Обчислити наближено:

а) $\arctg 1,04$;

б) $\arcsin 0,05$;

в) $\ln 1,2$;

г) $\sqrt[3]{25}$.

5.396. Знайти наближене значення функції $f(x) = e^{x^2-x}$ при $x = 1,2$.

5.397. Обчислити наближено $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$.

5.398. Виразити диференціал складеної функції через незалежну змінну та її диференціал:

- 1) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x}$, $x = t^3 + 2t + 1$;
- 2) $s = \cos^2 z$, $z = \frac{t^2 - 1}{4}$;
- 3) $z = \operatorname{arctg} v$, $v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}$;
- 4) $s = e^z$, $z = \frac{1}{2} \ln t$, $t = 5u^3 + 2u - 7$;
- 5) $y = \operatorname{Intg} \frac{u}{2}$, $u = \arcsin v$, $v = \cos 2s$.

Диференційовність функцій

5.399. Функція $y = |x|$ неперервна при довільному x . Переконайтеся, що при $x = 0$ вона недиференційовна.

5.400. Дослідити неперервність та диференційовність функції $y = |x^3|$ при $x = 0$.

5.401. Функція $y = |\sin x|$ неперервна при довільному x . Переконайтеся, що при $x = 0$ вона недиференційовна. Вказати інші значення незалежної змінної, при яких функція недиференційовна.

5.402. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Чи буде функція $f(x)$ диференційовною при $x = 0$?

5.403. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Чи буде функція $f(x)$ при $x = 0$ неперервною та диференційовною?

5.404. $f(x) = \frac{x}{1 + e^x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Чи буде функція $f(x)$ при $x = 0$ неперервною та диференційовною?

§4. Повторне диференціювання

Функції, задані в явному вигляді

- 5.405. $y = x^2 + 7x - 9$; $y'' = ?$
5.406. $y = 3 - 5x^2 - 2x^4$; $y''' = ?$
5.407. $f(x) = (x + 8)^6$; $f'''(4) = ?$
5.408. $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; $f^{IV}(1) = ?$
5.409. $f(x) = \ln(x - 4)$; $f'''(5) = ?$
5.410. $f(x) = x^3 \ln x$; $f^{IV}(1) = ?$
5.411. $y = (x^2 + 1)^3$; $y'' = ?$
5.412. $y = \sin^2 x$; $y''' = ?$
5.413. $f(x) = e^{2x-1}$; $f'''(0) = ?$
5.414. $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $f''(1) = ?$
5.415. $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $f^V(x) = ?$
5.416. $y = \frac{x-1}{x+1}$; $y^{(n)} = ?$

В задачах 5.417-5.426 знайти другі похідні функцій.

- 5.417. $y = e^{-x^2}$. 5.418. $y = xe^{x^2}$.
5.419. $y = \frac{1}{1+x^3}$. 5.420. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.
5.421. $y = \operatorname{arctg} x^2$. 5.422. $y = \log_5 \sqrt[3]{1-x^2}$.
5.423. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. 5.424. $y = e^{\sqrt{x}}$.
5.425. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 5.426. $y = x^{\sqrt{x}}$.

В задачах 5.427-5.436 знайти формулу для похідної порядку n заданих функцій.

5.427. $y = a^{bx}$, $b \in R$.

5.428. $y = e^{-x}$. 5.429. $y = \sin x$.

5.430. $y = \ln x$.

5.431. $y = x \ln x$ 5.432. $y = \cos^2 x$.

5.433. $y = \log_a x$.

5.434. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

5.435. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

5.436. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

5.437. Довести, що функція $y = \frac{x-3}{x+4}$ задовольняє співвідношення $2y'^2 = (y-1)y''$.

5.438. Довести, що функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ задовольняє рівняння $y^3 y' + 1 = 0$.

5.439. Довести, що функція $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ задовольняє рівняння $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$.

5.440. Довести, що функція $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ задовольняє рівняння $y'' - 13y' - 12y = 0$.

5.441. Довести, що функція $y = \sin e^x + \cos e^x$ задовольняє рівняння $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

Функції, задані неявно

5.442. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

5.443. $y = 1 + xe^y$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

5.444. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

5.445. $y = \operatorname{tg}(x+y)$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

5.446. $y = \sin(x+y)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

5.447. $e^{x-y} = xy$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

$$5.448. \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$5.449. \text{Довести, що якщо } (a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x, \text{ то } x^3 y'' = (xy' - y)^2.$$

Функції, задані параметрично

В задачах 5.450-5.458 знайти похідні другого порядку $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$

заданих функцій.

$$5.450. x = at^2, y = bt^3.$$

$$5.451. x = \ln t, y = t^3.$$

$$5.452. x = a \cos t, y = a \sin t.$$

$$5.453. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

$$5.454. x = a \cos^2 t, y = a \sin^2 t.$$

$$5.455. x = \arcsin t, y = \ln(1 - t^2).$$

$$5.456. x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1 + t^2).$$

$$5.457. x = at \cos t, y = at \sin t.$$

$$5.458. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

Формула Лейбніца

В задачах 5.459-5.464, застосовуючи формулу Лейбніца, знайти похідні вказаних порядків від заданих функцій.

$$5.459. y = (x^2 + x + 1) \sin x; \text{ знайти } y^{(15)}.$$

$$5.460. y = (x^2 - x)e^x; \text{ знайти } y^{(20)}.$$

$$5.461. y = e^{-x} \sin x; \text{ знайти } y^{(5)}.$$

$$5.462. y = x \log_2 x; \text{ знайти } y^{(10)}.$$

$$5.463. y = x \operatorname{sh} x; \text{ знайти } y^{(100)}.$$

$$5.464. y = e^x \sin x; \text{ знайти } y^{(n)}.$$

$$5.465. \text{Довести, що } \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

Диференціали вищих порядків

В задачах 5.466-5.473 знайти диференціали другого порядку заданих функцій у аргумента x .

$$5.466. y = a \sin(bx + c).$$

$$5.467. y = \sqrt[3]{x^2}.$$

$$5.468. y = (x+1)^3(x-1)^2.$$

$$5.469. y = 5^{-x^2}.$$

$$5.470. y = \arctg\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x\right).$$

$$5.471. y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$5.472. y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

$$5.473. y = \sqrt{\ln^2 x - 4}.$$

В задачах 5.474-5.477 знайти диференціали другого порядку неявно заданих функцій.

$$5.474. xy + y^2 = 1.$$

$$5.475. x^3 + y^3 = y.$$

$$5.476. x = y - a \sin y.$$

$$5.477. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

§ 5. Застосування першої похідної

Теорема Ролля та Лагранжа

5.478. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на відрізку $[-1; 2]$.

5.479. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = 7^{\sin x}$ на відрізку $[0; \pi]$.

5.480. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ на відрізку $[1; 2]$.

5.481. Функція $y = \frac{7-x^2}{x^4}$ приймає рівні значення на кінцях відрізка $[-1; 1]$. Переконайтеся в тому, що похідна цієї функції ніде на відрізку $[-1; 1]$ в нуль не перетворюється. Пояснити причину відхилення від теореми Ролля.

5.482. Функція $y = |x|$ приймає рівні значення на кінцях відрізка $[-a; a]$. Переконайтеся в тому, що похідна цієї функції ніде на

вiдрiзку $[-a; a]$ в нуль не перетворюється. Пояснити причину вiдхилення вiд теореми Ролля.

5.483. Не шукаючи похiдну функцiї $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, з'ясувати, скiльки дійсних коренiв має рiвняння $f'(x) = 0$. Вказати iнтервали, в яких вони лежать.

5.484. Написати формулу Лагранжа для функцiї $y = \sin 3x$ на вiдрiзку $[a; b]$.

5.485. Записавши формулу Лагранжа для функцiї $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$ на вiдрiзку $[0; 1]$, знайти на iнтервалi $(0; 1)$ вiдповiдне значення ξ .

5.486. Написати формулу Лагранжа для функцiї $y = x(1 - \ln x)$ на вiдрiзку $[a; b]$.

5.487. Написати формулу Лагранжа для функцiї $y = \arcsin 2x$ на вiдрiзку $[a; b]$.

5.488. Перевiрити справедливiсть теореми Лагранжа для функцiї $y = \ln x$ на вiдрiзку $[1; e]$.

Поведiнка функцiї в iнтервалi

5.489. Показати, що функцiя $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ спадає в iнтервалi $(-2; 1)$.

5.490. Показати, що функцiя $y = \sqrt{2x - x^2}$ зростає в iнтервалi $(0; 1)$ i спадає в iнтервалi $(1; 2)$. Побудувати графiк даної функцiї.

5.491. Показати, що функцiя $y = x^3 + x - 3$ зростає на всiй числовiй осi.

5.492. Показати, що функцiя $y = \arctg x - x$ спадає на всiй числовiй осi.

5.493. Показати, що функцiя $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ зростає в довiльному iнтервалi, який не мiстить точку $x = 0$.

5.494. Знайти iнтервали монотонностi функцiї $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ i побудувати по точкам її графiк в iнтервалi $(-2; 4)$.

5.495. Знайти iнтервали монотонностi функцiї $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

В задачах 5.496-5.508 знайти інтервали монотонності функцій.

$$5.496. y = (x-2)^5(2x+1)^4.$$

$$5.497. y = \sqrt[3]{(2x-3)(3-x)^2}.$$

$$5.498. y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$$

$$5.499. y = \frac{5}{4x^3-9x^2+6x}.$$

$$5.500. y = e^x - x + 2.$$

$$5.501. y = x^2 e^{-x}.$$

$$5.502. y = \frac{x}{\ln x}.$$

$$5.503. y = \ln x - 2x^2 + 5.$$

$$5.504. y = 2 \sin x - x + 1, (0 \leq x \leq 2\pi).$$

$$5.505. y = 2 \sin x + \cos 2x, (0 \leq x \leq 2\pi).$$

$$5.506. y = x + \cos x.$$

$$5.507. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$5.508. y = x\sqrt{ax-x^2}, (a > 0).$$

В задачах 5.509-5.529 знайти екстремуми функцій.

$$5.509. y = 2x^3 - 3x^2 + 5.$$

$$5.510. y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1.$$

$$5.511. y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$$

$$5.512. y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}.$$

$$5.513. y = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}.$$

$$5.514. y = x^2 \sqrt{x^2 + 2}.$$

$$5.515. y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

$$5.516. y = \sqrt[3]{x^2} - 1.$$

$$5.517. y = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$5.518. y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}.$$

$$5.519. y = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

$$5.520. y = x - \operatorname{arctg} 2x.$$

$$5.521. y = \sqrt{e^{x^2} - 1}.$$

$$5.522. y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}.$$

$$5.523. y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}.$$

$$5.524. y = x - \ln(1+x^2).$$

$$5.525. y = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

$$5.526. y = (x^2 - 2x) \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$$

$$5.527. y = 4x - \operatorname{tg} x \text{ в інтервалі } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$5.528. y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x \text{ в інтервалі } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$5.529. y = \ln \sqrt{1+x^2} - \operatorname{arctg} x.$$

В задачах 5.530-5.540 знайти найбільше та найменше значення функцій на заданих відрізках.

$$5.530. y = -3x^4 + 6x^2; [-2; 2].$$

$$5.531. y = x + 2\sqrt{x}; [0; 4].$$

$$5.532. y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2; [-1; 1].$$

$$5.533. y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; [-1; 2].$$

$$5.534. y = \sqrt{100-x^2}; [-6; 8].$$

$$5.535. y = \frac{x-1}{x+1}; [0; 4].$$

$$5.536. y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}; [0; 1].$$

$$5.537. y = \sin 2x - x; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$5.538. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}; [0; 1].$$

$$5.539. y = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}; [0; 3].$$

$$5.540. y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}; [0; 1].$$

Нерівності

В задачах 5.541-5.550 довести справедливості нерівностей.

$$5.541. 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \quad (x > 1).$$

$$5.542. e^x > 1 + x, \quad (x \neq 0).$$

$$5.543. \ln(1+x) < x, \quad (x > 0).$$

$$5.544. \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}, \quad (x > 1).$$

$$5.545. \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad (x > 0).$$

$$5.546. \cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad (x \neq 0).$$

$$5.547. 2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2).$$

$$5.548. \ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}, \quad (x > 0).$$

$$5.549. \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$5.550. \operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}, \quad (x \neq 0).$$

Задачі на знаходження найбільших та найменших значень функції

5.551. Число 10 розбити на два таких доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

5.552. При якому додатному числі його сума з оберненим числом буде найменшою?

5.553. Число 16 розкласти на два таких множника, щоб сума їх квадратів була найменшою.

5.554. Потрібно виготовити ящик з кришкою об'єму 72 см^3 , щоб його сторони основи задовільняли відношення 1:2. Які повинні бути розміри всіх його сторін, щоб повна поверхня ящика була найменшою?

5.555. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V . Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою.

5.556. Необхідно виготовити відкритий циліндричний бак заданого об'єму V . Якими повинні бути радіус основи і висота бака, щоб витрати матеріалів на його виготовлення були найменшими.

5.557. Знайти співвідношення між радіусом R і висотою H циліндра, що має при заданому об'ємі найменшу повну поверхню.

5.558. Потрібно виготовити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 дм. Якою повинна бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим?

5.559. Із круга вирізано сектор із центральним кутом α . Із сектора згорнено конічну поверхню. При якому значенні кута α об'єм отриманого конуса буде найбільшим?

5.560. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $2p$. Якими повинні бути його сторони, щоб об'єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо його основи, був найбільшим?

5.561. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $2p$. Якими повинні бути його сторони, щоб об'єм конуса, утвореного обертанням цього трикутника навколо висоти, опущеної на основу, був найбільшим?

5.562. Знайти висоту циліндра найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса R .

5.563. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса R .

5.564. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіуса R .

5.565. Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі радіуса R .

5.566. Навколо заданого циліндра описати конус найменшого об'єму (площини основ конуса та циліндра повинні співпадати).

5.567. Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса з найменшою бічною поверхнею, якщо він описаний навколо заданої кулі.

5.568. Яким повинен бути кут при вершині рівнобедреного трикутника заданої площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник круга був найбільшим?

5.569. Знайти висоту конуса найменшого об'єму, описаного навколо півкулі радіуса R (центр основи конуса лежить в центрі кулі).

5.570. Яка повинна бути висота конуса, вписаного в кулю радіуса R , для того щоб його бічна поверхня була найбільшою?

5.571. Довести, що конічний намет заданої місткості потребує найменшої кількості матерії, якщо його висота в $\sqrt{2}$ разів більша радіуса основи.

5.572. Канал шириною 27 м під прямим кутом впадає в інший канал, що має ширину 64 м. Знайти найбільшу довжину деревини, яку можна сплавити по цим каналам.

5.573. На відрізку довжиною a , що з'єднує два джерела світла з силою відповідно F_1 і F_2 , знайти найменш освітлювану точку. (Освітлення точки джерелом світла, що має силу F , обернено пропорційне квадрату її відстані r до джерела: $E = \frac{kF}{r^2}$, $k = \text{const}$).

5.574. Із круглої колоди, що має діаметр d , необхідно вирізати балку прямокутного поперечного перерізу. Якими повинні бути ширина і висота цього перерізу, щоб балка чинила найбільший опір на згин? (Опір балки на згин пропорційний добутку ширини x її поперечного перерізу і квадрату його висоти y : $Q = kxy^2$, $k = \text{const}$).

5.575. Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 , має траєкторію $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$, де g - прискорення земного тяжіння; x - дальність польоту; y - висота польоту. При якому значенні x тіло досягає найбільшої висоти?

5.576. Тиск води по твірній на конічну посудину при витіканні визначають за формулою $p = kx(h - x)$, де h - висота посудини; x - віддаль від рівня води; k - стала. На якій глибині тиск найбільший?

5.577. Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого рівні відповідно 2 м і 1 м. Потрібно вирізати з колоди балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якого співпадала б із вісю

колоди і об'єм якого був би найбільшим. Якими повинні бути розміри балки?

§6. Застосування другої похідної

Екстремуми

В задачах 5.578-5.586 знайти екстремуми заданих функцій, користуючись другою похідною.

$$5.578. y = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

$$5.579. y = x^2(4-x)^2.$$

$$5.580. y = x + \frac{9}{x}.$$

$$5.581. y = x + \sqrt{1-x}.$$

$$5.582. y = x\sqrt{2-x^2}.$$

$$5.583. y = \operatorname{ch} ax.$$

$$5.584. y = x^2 e^{-x}.$$

$$5.585. y = \frac{x}{\ln x}.$$

$$5.586. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

5.587. Знайти значення a і b , при яких функція $y = a \ln x + bx^2 + x$ має екстремуми в точках $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$. Показати, що при цих значеннях a і b задана функція має мінімум в точці x_1 та максимум в точці x_2 .

Опуклість, вгнутість, точки перегику

5.588. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ в околах точок $A(1; 11)$ та $B(3; 3)$.

5.589. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y = \operatorname{arctg} x$ в околах точок $A\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$ та $B\left(-1; -\frac{\pi}{4}\right)$.

5.590. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y = x^2 \ln x$ в околах точок $A(1; 0)$ та $B\left(\frac{1}{e^2}; -\frac{2}{e^4}\right)$.

5.591. Показати, що графік функції $y = x \operatorname{arctg} x$ скрізь вгнутий.

5.592. Показати, що крива $y = x^2 + x^4$ скрізь вгнута.

5.593. Показати, що крива $y = 2x^2 + 3x - 1$ скрізь вгнута.

5.594. Показати, що крива $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опукла.

5.595. Довести, що якщо графік функції скрізь опуклий або скрізь вгнутий, то ця функція не може мати більше одного екстремума.

В задачах 5.596-5.610 знайти точки перегину та інтервали вгнутості та опуклості графіків заданих функцій.

5.596. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

5.597. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 100$.

5.598. $y = x^7 + 7x + 1$.

5.599. $y = x^4 + 6x^2$.

5.600. $y = (x+1)^4 + e^x$.

5.601. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 1$.

5.602. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

5.603. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x + 5$.

5.604. $y = (x+8)^6 + 3x + 1$.

5.605. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

5.606. $y = \ln(1+x^2)$.

5.607. $y = e^{\arctg x}$.

5.608. $y = xe^{2x} + 1$.

5.609. $y = x^3 \ln x + 9$.

5.610. $y = x^4(12 \ln x - 7)$.

5.611. Показати, що крива $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

5.612. Показати, що точки перегину кривої $y = x \sin x$ лежать на кривій $y^2(4+x^2) = 4x^2$.

5.613. При яких значеннях a і b точка $(1;3)$ є точкою перегину кривої $y = ax^3 + bx^2$?

5.614. При яких значеннях a графік функції $y = e^x + ax^3$ має точки перегину?

5.615. Крива задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Переконатись в тому, що значенням t , при яких вираз $\frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'}$ змінює знак (штрихом позначено диференціювання по t), а $\varphi'(t) \neq 0$, відповідають точки перегину кривої.

5.616. Знайти точки перегину кривої $x = t^2$, $y = 3t + t^3$.

5.617. Знайти точки перегину кривої $x = e^t$, $y = \sin t$.

§ 7. Додаткові питання

Формула Коші та правило Лопіталя

5.618. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = \sin x$ та $\varphi(x) = \ln x$ в інтервалі $[a; b]$, $0 < a < b$.

5.619. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = e^{2x}$ та $\varphi(x) = 1 + e^x$ в інтервалі $[a; b]$.

5.620. Перевірити справедливість формули Коші для функцій $f(x) = x^3$ та $\varphi(x) = x^2 + 1$ в інтервалі $[1; 2]$.

5.621. Перевірити справедливість формули Коші для функцій $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = x + \cos x$ в інтервалі $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

В задачах 5.622-5.676 знайти границі.

$$5.622. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$5.623. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$$

$$5.624. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

$$5.625. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

$$5.626. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}.$$

$$5.627. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}.$$

$$5.628. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \sin x}{x + \sin x}.$$

$$5.629. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}.$$

$$5.630. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$5.631. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$5.632. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$5.633. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}.$$

$$5.634. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$$

$$5.635. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

$$5.636. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}.$$

$$5.637. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}.$$

- 5.638. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.
- 5.640. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.
- 5.642. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.
- 5.644. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.
- 5.646. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}$.
- 5.648. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$.
- 5.650. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$.
- 5.652. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
- 5.654. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.
- 5.656. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x}$.
- 5.658. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$.
- 5.660. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right)$.
- 5.662. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$.
- 5.664. $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.
- 5.666. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.
- 5.639. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$.
- 5.641. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.
- 5.643. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$.
- 5.645. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.
- 5.647. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$.
- 5.649. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.
- 5.651. $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln^3 x$.
- 5.653. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) \operatorname{ctg} x$.
- 5.655. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{ctg} \pi(x-1)$.
- 5.657. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.
- 5.659. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.
- 5.661. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$.
- 5.663. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$.
- 5.665. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$.
- 5.667. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{5.668.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}} & \mathbf{5.669.} \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} & \mathbf{5.670.} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi} \\
 \mathbf{5.671.} \lim_{x \rightarrow -1} x^{\frac{1}{1-x}} & \mathbf{5.672.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x & \mathbf{5.673.} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \\
 \mathbf{5.674.} \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} & \mathbf{5.675.} \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}} & \mathbf{5.676.} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}
 \end{array}$$

Асимптотичні зміни функцій та асимптоти кривих

5.677. Перевірити безпосередньо за визначенням, що пряма $y = 3x + 4$ є асимптотою кривої $y = \frac{3x^5 + 4x^4 + 1}{x^4}$.

5.678. Перевірити безпосередньо за визначенням, що пряма $x + y = 0$ є асимптотою кривої $x^2y + xy^2 = 1$.

5.679. Довести, що криві $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$ та $y = \frac{x^2}{x-1}$ асимптотично наближаються одна до другої при $x \rightarrow \pm\infty$.

В задачах 5.680-5.695 знайти асимптоти заданих кривих.

$$\mathbf{5.680.} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\mathbf{5.681.} xy = a.$$

$$\mathbf{5.682.} y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$$

$$\mathbf{5.683.} 2y(x+1)^2 = x^3.$$

$$\mathbf{5.684.} y^3 = a^3 - x^3.$$

$$\mathbf{5.685.} y^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1).$$

$$\mathbf{5.686.} y^3 = 6x^2 + x^3.$$

$$\mathbf{5.687.} xy^2 + x^2y = a.$$

$$\mathbf{5.688.} (y + x + 1)^2 = x^2 + 1.$$

$$\mathbf{5.689.} y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right).$$

$$\mathbf{5.690.} y = xe^x.$$

$$\mathbf{5.691.} y = xe^{\frac{2}{x}} + 1.$$

$$5.692. y = 3x + \arctg 5x.$$

$$5.693. y = \sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}.$$

$$5.694. y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x.$$

$$5.695. y = \frac{\sin x}{x}.$$

5.696. Крива задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Довести, що асимптоти, які не паралельні координатним осям, можуть бути лише при таких значеннях $t = t_0$, при яких одночасно $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \infty$ та $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \infty$. При цьому, якщо рівнянням асимптоти є пряма $y = ax + b$, то $a = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$, $b = \lim_{t \rightarrow t_0} [\psi(t) - a\varphi(t)]$. Як знайти асимптоти, які паралельні координатним осям?

5.697. Знайти асимптоти кривої $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{t}{t+1}$.

5.698. Знайти асимптоти кривої $x = \frac{2e^t}{t-1}$, $y = \frac{te^t}{t-1}$.

5.699. Знайти асимптоти кривої $x = \frac{2t}{1-t^2}$, $y = \frac{t^2}{1-t^2}$.

5.700. Знайти асимптоти декартового листа $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

5.701. Знайти асимптоти кривої $x = \frac{t-8}{t^2-4}$, $y = \frac{3}{t(t^2-4)}$.

§8. Загальне дослідження функцій та кривих

В задачах 5.702-5.765 провести повне дослідження заданих функцій та побудувати їх графіки.

5.702. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

5.703. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

5.704. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

5.705. $y(x-1)(x-2)(x-3) = 1$.

5.706. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

5.707. $y = (x^2-1)^3$.

5.708. $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$.

5.709. $y = 32x^2(x^2-1)^3$.

$$5.710. y = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

$$5.712. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$5.714. y = \frac{x^3}{x-1}.$$

$$5.716. y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}.$$

$$5.718. y = \frac{x^3}{x^3+1}.$$

$$5.720. y = \frac{x^3}{x^4-1}.$$

$$5.722. y = \sqrt[3]{x^2-2x}.$$

$$5.724. y = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

$$5.726. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$5.728. y = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}.$$

$$5.730. y = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}.$$

$$5.732. y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}.$$

$$5.734. y = \frac{x^3}{3\sqrt[3]{x^3+2}}.$$

$$5.736. y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}.$$

$$5.738. y = \sqrt{|x^2-2|}^3.$$

$$5.740. y = \frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}.$$

$$5.711. y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$5.713. y = \frac{x^3}{3-x^2}.$$

$$5.715. y = \frac{x^4}{x^3-1}.$$

$$5.717. y = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$$5.719. y = \frac{x}{2-x^3}.$$

$$5.721. y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}.$$

$$5.723. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}.$$

$$5.725. y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$5.727. y = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}.$$

$$5.729. y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$5.731. y = \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}.$$

$$5.733. y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$5.735. y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}.$$

$$5.737. y = \frac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}.$$

$$5.739. y = \sqrt[3]{|x^2-1|}.$$

$$5.741. y = xe^{-x}.$$

$$5.742. y = \frac{e^x}{x}.$$

$$5.744. y = e^{2x-x^2}.$$

$$5.746. y = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}.$$

$$5.748. y = x^3 e^{-x}.$$

$$5.750. y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$5.752. y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$$

$$5.754. y = \frac{1}{x \ln x}.$$

$$5.756. y = x - \ln(x+1).$$

$$5.758. y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

$$5.760. y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

$$5.762. y = x \sin x.$$

$$5.764. y = x - 2 \arctg x.$$

$$5.743. y = x^2 e^{-x}.$$

$$5.745. y = x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$5.747. y = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$5.749. y = x^2 e^{-x^2}.$$

$$5.751. y = (2x-1)e^{\frac{2}{x}}.$$

$$5.753. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$5.755. y = x^2 \ln x.$$

$$5.757. y = \ln(x^2 + 1).$$

$$5.759. y = \sin x + \cos x.$$

$$5.761. y = x + \sin x.$$

$$5.763. y = \ln \cos x.$$

$$5.765. y = x \arctg x.$$

В задачах 5.766-5.770 дослідити функції задані параметрично та намалювати їх графіки.

$$5.766. x = t^3 + 3t + 1, y = t^3 - 3t + 1.$$

$$5.767. x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6 \arctg t.$$

$$5.768. x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

$$5.769. x = te^t, y = te^{-t}.$$

$$5.770. x = 2a \cos t - a \cos 2t, y = 2a \sin t - a \sin 2t \text{ (кардіоїда)}.$$

В задачах 5.771-5.777 дослідити криві, рівняння яких задані в полярних координатах.

$$5.771. \rho = a \sin 3\varphi \text{ (трипелюсткова роза)}.$$

$$5.772. \rho = a \operatorname{tg} \varphi .$$

$$5.773. \rho = a(1 + \operatorname{tg} \varphi) .$$

$$5.774. \rho = a(1 + \cos \varphi) \text{ (кардіоїда).}$$

$$5.775. \rho = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \text{ (жезл).}$$

$$5.776. \rho = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{\pi} .$$

$$5.777. \rho = \sqrt{1-t^2}, \quad \varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2} .$$

В задачах 5.778-5.781 дослідити та побудувати криві, спочатку звівши їх рівняння до полярних координат.

$$5.778. (x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2 .$$

$$5.779. (x^2 + y^2)x = a^2 y .$$

$$5.780. x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2) .$$

$$5.781. (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2 y^2 .$$

§ 9. Формула Тейлора та її застосування

Формула Тейлора

5.782. Розкласти многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями двочлена $x - 4$.

5.783. Розкласти многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $x + 1$.

5.784. Розкласти многочлен $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ за степенями двочлена $x + 1$.

5.785. Розкласти многочлен $x^{10} - 3x^5 + 1$ за степенями двочлена $x - 1$.

5.786. Функцію $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ розкласти за степенями x , використовуючи формулу Тейлора.

5.787. Нехай $P(x)$ - многочлен 4-го степеня, $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{IV}(2) = 24$. Обчислити $P(-1)$, $P'(0)$ та $P''(1)$.

В задачах 5.788-5.793 для заданих функцій написати формулу Маклорена n -го порядку.

5.788. $y = e^x$.

5.789. $y = \sin x$.

5.790. $y = \cos x$.

5.791. $y = \ln(1+x)$.

5.792. $y = \arctg x$.

5.793. $y = (1+x)^\alpha$.

В задачах 5.794-5.799 написати перші n членів формули Маклорена (без залишкового члена) для заданих функцій, використовуючи формули, отримані в задачах 5.788-5.793.

5.788. $y = xe^x$.

5.795. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

5.796. $y = \sin^2 x$.

5.797. $y = \sin \frac{5x}{2}$.

5.798. $y = \ln(4+x^2)$.

5.799. $y = \sqrt[3]{8+x^2}$.

5.800. Написати формулу Тейлора n -го порядку для функції $y = \frac{1}{x}$ при $x_0 = -1$.

5.801. Написати формулу Тейлора n -го порядку для функції $y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 4$.

5.802. Написати формулу Тейлора 3-го порядку для функції $y = \frac{x}{x-1}$ при $x_0 = 2$ і побудувати графіки даної функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня.

5.803. Написати формулу Тейлора 2-го порядку для функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x_0 = 0$ і побудувати графіки даної функції та її многочлена Тейлора 2-го степеня.

5.804. Написати формулу Тейлора 3-го порядку для функції $y = \arcsin x$ при $x_0 = 0$ і побудувати графіки даної функції та її многочлена Тейлора 3-го степеня.

Деякі застосування формули Тейлора

В задачах 5.805-5.809 з'ясувати поведінку заданих функцій у вказаних точках.

5.805. $y = 2x^6 - x^3 + 3$ в точці $x = 0$.

5.806. $y = x^{11} + 3x^6 + 1$ в точці $x = 0$.

5.807. $y = 2 \cos x + x^2$ в точці $x = 0$.

5.808. $y = 6 \ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ в точці $x = 1$.

5.809. $y = 6 \sin x + x^2$ в точці $x = 0$.

5.810. $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$. Знайти перші три члени розкладу за формулою Тейлора при $x_0 = 1$. Обчислити наближено $f(1,03)$.

5.811. $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. Знайти перші три члени розкладу за формулою Тейлора при $x_0 = 2$. Обчислити наближено $f(2,02)$ та $f(1,97)$.

5.812. $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Знайти перші три члени розкладу $f(x)$ за степенями $x - 1$ та обчислити наближено $f(1,005)$.

5.813. $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. Знайти перші три члени розкладу за степенями $x - 2$. Обчислити наближено $f(2,1)$. Обчислити $f(2,1)$ точно та знайти абсолютну та відносну похибки.

5.814. Користуючись наближеною формулою $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, знайти $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ та оцінити похибку.

5.815. Знайти $\cos 10^\circ$ з точністю до 0,001. Переконайся в тому, що для досягнення заданої точності досить взяти відповідну формулу Тейлора 2-го порядку.

5.816. Користуючись наближеною формулою $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ знайти $\ln 1,5$ та оцінити похибку.

§ 10. Кривина

В задачах 5.817-5.825 обчислити кривину заданих кривих.

5.817. $y = x^2$ в початку координат і в точці $M(1; 1)$.

5.818. $x^2 + 9y^2 = 9$ в вершинах еліпса $A(3; 0)$, $B(0; 1)$.

5.819. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ в початку координат.

5.820. $y^2 = 8x$ в точці $\left(\frac{9}{8}; 3\right)$.

5.821. $y = \ln x$ в точці $(1; 0)$.

5.822. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ в початку координат.

5.823. $x^2 - xy + y^2 = 1$ в точці $M(1; 1)$.

5.824. Листка Декарта $x^3 + y^3 = 3axy$ в точці $\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right)$.

5.825. Гіперболи $xy = 4$ в точці $(2; 2)$.

В задачах 5.826-5.830 обчислити кривину заданих кривих в довільній точці $(x; y)$.

5.826. $y = x^3$.

5.827. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5.828. $y = \ln \sec x$.

5.829. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

5.830. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

В задачах 5.831-5.840 обчислити кривину заданих кривих.

5.831. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ при $t = 1$.

5.832. $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$ при $t = 1$.

5.833. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ при $t = t_0$.

5.834. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ при $t = \frac{\pi}{2}$.

5.835. $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ в довільній точці.

5.836. $\rho = a^\varphi$ в точці $\rho = 1$, $\varphi = 0$.

5.837. $\rho = a\varphi$ в довільній точці.

5.838. $\rho = a\varphi^K$ в довільній точці.

5.839. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ в довільній точці.

5.840. $\rho = a^2 \sin 2\varphi$ при $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

В задачах 5.841-5.844 знайти радіуси кривини (в довільній точці) заданих кривих.

$$5.841. y = \sqrt[3]{x}.$$

$$5.842. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$5.843. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

$$5.844. \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

В задачах 5.845-5.849 знайти координати центрів кривини та написати рівняння кіл кривини заданих кривих в указаних точках.

$$5.845. y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} \text{ в точці } M(0; a).$$

$$5.846. y = e^{-x^2} \text{ в точці } M(0; 1).$$

$$5.847. y = xe^x \text{ в точці } M\left(-1; -\frac{1}{e}\right).$$

$$5.848. y = \sin x \text{ в точці } M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right).$$

$$5.849. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \text{ в точці } M(\pi a; 2a).$$

В задачах 5.850-5.855 знайти рівняння еволюти заданих кривих.

$$5.850. y = x^3.$$

$$5.851. x^2 - y^2 = a^2.$$

$$5.852. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$5.853. y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

$$5.854. x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}. \quad 5.855. x = 2t, y = t^2 - 2.$$

В задачах 5.856-5.859 знайти вершини (точки, в яких кривина приймає екстремальне значення) заданих кривих.

$$5.856. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

$$5.857. y = \ln x.$$

$$5.858. y = e^x.$$

$$5.859. x = a(3\cos t + \cos 3t), y = a(3\sin t + \sin 3t).$$

5.860. Показати, що довільну евольвенту кола можна отримати шляхом повороту однієї з них на відповідний кут.

Відповіді

До глави I

1.1. 1. 1.2. -2. 1.3. -1. 1.4. 0. 1.5. 6. 1.6. 7. 1.7. -2. 1.8. 23. 1.9. 11. 1.10. 5. 1.11. -7. 1.12. -5. 1.13. 31. 1.14. -252. 1.15. 12. 1.16. 48. 1.17. -473. 1.18. -1264. 1.19. -62. 1.20. -31. 1.21. 40. 1.22. -3. 1.23. 100. 1.24. -5. 1.25. 0. 1.26. 1. 1.27. 6. 1.28. 20. 1.29. 0. 1.30. -8. 1.31. -3. 1.32. 30. 1.33. -12. 1.34. -28. 1.35. 0. 1.36. 14. 1.37. -1872. 1.38. -3168. 1.39. 4950. 1.40. -9. 1.41. 18. 1.42. 18. 1.43. 4. 1.44. 90. 1.45. 27. 1.46. 17. 1.47. -6. 1.48. -10. 1.49. 100. 1.50. 150. 1.51. 52. 1.52. 5. 1.53. 2.

1.54. 2. 1.55. 2. 1.56. 3. 1.57. 2. 1.58. 1. 1.59. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. 1.60. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.61. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 1.62. $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. 1.63. $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

1.64. $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 7 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. 1.65. $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. 1.66. $-\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ -11 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

1.67. $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 1.68. $-\frac{1}{37} \begin{pmatrix} -30 & -4 & 5 \\ 23 & 8 & -10 \\ 18 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. 1.69. A^{-1} не існує.

1.70. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. 1.71. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. 1.72. $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.73. $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 1.74. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 1.75. $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.76. $(4; 4; 0; 1)$. 1.77. $(0; 0; 0; 0)$. 1.78. $\begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 1.79. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

1.80. $\begin{pmatrix} \alpha\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$. 1.81. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. 1.82. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

$$1.83. \begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}. \quad 1.84. \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad 1.85. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad 1.86. \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix},$$

$$a, b \in R. \quad 1.87. \begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}, \quad a, b \in R. \quad 1.88. \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad 1.89. \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

$$1.90. \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 1.91. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}. \quad 1.92. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 1.93. \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad 1.94. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$1.95. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1.96. (16; 7)^T. \quad 1.97. (2; 3)^T. \quad 1.98. \text{ Система несумісна.}$$

$$1.99. (24, 5; 21, 5; 10)^T. \quad 1.100. (1; 1; 1)^T. \quad 1.101. (2; 3; 4)^T. \quad 1.102. (1; 3; 5)^T.$$

$$1.103. (13, 25; 8, 25; 14, 5)^T. \quad 1.104. (2; -1; 1)^T. \quad 1.105. (3; 1; 1)^T. \quad 1.106. (1; 2; -2)^T.$$

$$1.107. (2; -2; 3)^T. \quad 1.108. (3; 4; 5)^T. \quad 1.109. (-1; -1; 0, 1)^T. \quad 1.110. (1; 2; -1; -2)^T.$$

$$1.111. (-2; 2; -3; 3)^T. \quad 1.112. (1; 2; 1; -1)^T. \quad 1.113. (1; 1; -1; -1)^T.$$

$$1.114. (-2; 0; 1; -1)^T. \quad 1.115. (1; 2; 2; 0)^T. \quad 1.116. (2; -2; 1; -1)^T.$$

$$1.117. (-0, 4; -1, 2; 3, 4; 1)^T. \quad 1.118. \left(\frac{2}{3}; -1; \frac{3}{2}; 0\right)^T. \quad 1.119. \left(-3; 0; -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)^T.$$

$$1.120. \left(2; -3; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)^T. \quad 1.121. \text{ Система несумісна.} \quad 1.122. \text{ Система несумісна.}$$

$$1.123. \quad 1) \quad a \neq -3; \quad 2) \quad a = -3, \quad b \neq \frac{1}{3}; \quad 3) \quad a = -3, \quad b = \frac{1}{3}. \quad 1.124. \quad a = 5.$$

$$1.125. \left(-\frac{1}{4}C_1 + \frac{3}{4}C_2 - \frac{1}{4}; \quad \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2}; C_1; C_2 \right)^T. \quad 1.126. \left(2+8C; -1-5C;$$

$$1+C; C \right)^T. \quad 1.127. \left(C_1; C_1 - \frac{1}{2}; C_2 + \frac{1}{2}; C_2 \right)^T. \quad 1.128. \left(2C_1 - \frac{1}{2}C_2; C_1;$$

$$-\frac{5}{7}C_2; C_2 \right)^T. \quad 1.129. (-1; 3; -2; 2)^T. \quad 1.130. (2; 1; -3; 1)^T. \quad 1.131. (-2; 1; 4; 3)^T.$$

- 1.132.** $\left(0; 2; \frac{1}{3}; -\frac{3}{2}\right)^T$. **1.133.** $\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; 2; -3\right)^T$. **1.134.** Система несумісна.
- 1.135.** $(3; 2; 1)^T$. **1.136.** $(-1; 0; 1)^T$. **1.137.** $\left(0; -3; -\frac{16}{3}; 6\right)^T$.
- 1.138.** $\left(104\frac{6}{7}; 7\frac{4}{7}; -10; 1\right)^T$. **1.139.** $(0; 0; 0; 0; 0)^T$. **1.140.** $\left(-\frac{11C}{7}; -\frac{C}{7}; C\right)^T$.
- 1.141.** $(C_1; C_2; 2C_2 - C_1; 1)^T$. **1.142.** Система несумісна. **1.143.** $(1; 2; 1)^T$.
- 1.144.** Система несумісна. **1.145.** $(-8; 3 + C_1; 6 + 2C_1; C_1)^T$.
- 1.146.** $\left(\frac{3C_1 - 13C_2}{17}; \frac{19C_1 - 20C_2}{17}; C_1; C_2\right)^T$. **1.147.** $\left(\frac{-4C_1 + 7C_2}{8}; \frac{-4C_1 + 5C_2}{8}; \frac{4C_1 - 5C_2}{8}; C_1; C_2\right)^T$.
- 1.148.** $\left(\frac{7}{6}C_2 - C_1; \frac{5}{6}C_2 + C_1; C_1; \frac{C_2}{3}; C_2\right)^T$.
- 1.149.** $\left(\frac{1 + C_3}{3}; \frac{1 + 3C_1 + 3C_2 - 5C_3}{3}; C_1; C_2; C_3\right)^T$. **1.150.** Система несумісна.
- 1.151.** $\left(-\frac{C}{2}; -1 - \frac{C}{2}; 0; -1 - \frac{C}{2}; C\right)^T$. **1.152.** Система несумісна.
- 1.153.** $\left(\frac{1 + 5C}{6}; \frac{1 - 7C}{6}; \frac{1 + 5C}{6}; C\right)^T$. **1.154.** $\left(6 - 26C_1 + 17C_2; -1 + 7C_1 - 5C_2; C_1; C_2\right)^T$.
- 1.155.** $\left(\frac{1}{10}(6 - 15C_1 - C_2); C_1; \frac{1}{5}(1 + 4C_2); C_2\right)^T$. **1.156.** Система несумісна.
- 1.157.** Система несумісна. **1.158.** $(5; 4; 3; 2; 1)^T$. **1.159.** $(3; -5; 4; -2; 1)^T$.
- 1.160.** $(0; 0; 0; C; C)$. **1.161.** Ні. **1.162.** Так. **1.163.** Так. **1.164.** Так. **1.165.** Ні.
- 1.166.** Так. **1.167.** а) так; б) ні; в) так; г) ні. **1.168.** а) $(1; 0; -3)$; б) $(0; -2; 1)$.
- 1.170.** Координати матриці в цьому базисі збігаються з її елементами. **1.171.** n^2 .
- 1.172.** Ні. **1.173.** а) $x = 1 - \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$; б) $x = \frac{3}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{2}e_3$;
- в) $x = e_1 + 3e_2 + 2e_3$; г) $x = e_1 + e_2 + e_3$; д) $x = 2e_1 + e_2 - e_3$.
- 1.174.** $B = -2A_1 + 2A_2 + 5A_3$. **1.175.** Нехай $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ - базис лінійного простору, для $\forall x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ і $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ приймемо $(x; y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$. Перевірити, чи всі властивості скалярного добутку будуть виконуватись.
- 1.176.** а) $(x; y) = -1$; б) $(x; y) = 4$; в) $(x; y) = 0$. **1.177.** а) $(p; q) = -1$; б) $(p; q) = 9$; в) $(p; q) = -4$.

1.178. а) 9; б) 0. **1.179.** а) 6; б) 7. **1.180.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\arccos \frac{3}{14}$.

1.181. а) $z = \alpha(-2; 1; 1)$, $\alpha \neq 0$, $e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$, $e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{21}}; -\frac{4}{\sqrt{21}}; \frac{2}{\sqrt{21}} \right)$,

$e_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$; б) $z = \alpha \left(-\frac{1}{2}; -2; 1 \right)$, $\alpha \neq 0$, $e_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$,

$e_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$, $e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}; \frac{4}{\sqrt{21}}; -\frac{2}{\sqrt{21}} \right)$. **1.184.** Ні. **1.185.** Ні. **1.186.** Ні.

1.187. Так. **1.188.** Так. Цей оператор є оператором проектування на вісь, що задається вектором e . **1.189.** Так. **1.190.** Ні. **1.191.** Так. **1.192.** Ні. **1.193.** а) так; б) так. **1.194.** Так. **1.195.** Так. **1.196.** Ні. **1.197.** Так. **1.198.** Ні. **1.199.** Ні. **1.200.** Так.

1.206. Одиначна матриця. **1.207.** $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **1.208.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.209. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.210.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **1.211.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.212. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **1.213.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -111 & 9 & 28 \\ -22 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. **1.214.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.215. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **1.216.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$. **1.217.** $(2x_1 - 3x_2; x_1 - x_3; 2x_2)$.

1.218. $(x_2; x_1 + x_3; x_1)$. **1.219.** $(0; x_2)$. **1.220.** $(-x_1; x_2)$. **1.221.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.222. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **1.223.** $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. **1.224.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.225. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Дане перетворення переводить сферу в еліпсоїд з

півосями $a = \alpha R$, $b = \beta R$, $c = \gamma R$. **1.226.** а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.227.** У матриці поміняються місцями i -й та j -

й рядки, i -й та j -й стовпці. **1.230.** $C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. **1.231.** $C = \begin{pmatrix} 21 & -8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.232. $\begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix}$. **1.233.** $x'_1 = x_3$; $x'_2 = x_2 + 2x_3$; $x'_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

1.234. $u_1 = 7w_1 - 6w_2 - 10w_3$, $u_2 = 6w_1 - 5w_2 - 6w_3$, $u_3 = 4w_1 - 3w_2 + w_3$.

1.235. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$. **1.236.** $v_1 = u_1 - \frac{1}{4}u_2$, $v_2 = u_1$, $v_3 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3$.

1.237. $\begin{pmatrix} -6 & 22 \\ -22 & 49 \end{pmatrix}$. **1.238.** $C = \begin{pmatrix} 22 & 13 & -37 \\ -39 & -16 & 25 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; $\hat{C}(x) =$

$= (22x_1 + 13x_2 - 37x_3; -39x_1 - 16x_2 + 25x_3; -x_1 - 6x_3)$. **1.239.** $C = \begin{pmatrix} -15 & 23 & -7 \\ 2 & 8 & -4 \\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

$\hat{C}(x) = (-15x_1 + 23x_2 - 7x_3; 2x_1 + 8x_2 - 4x_3; -7x_1 + x_2 + 7x_3)$. **1.240.** $C = 0$, $\hat{C}(x) = 0$.

1.241. $\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda}x$. **1.242.** Немає оберненого. **1.243.** Немає оберненого.

1.244. $\hat{A}^{-1} = (x) = (-x + 2y - z)\mathbf{i} + (-x + 3y - 2z)\mathbf{j} + (2x - 3y + 2z)\mathbf{k}$. **1.245.** $\hat{A}^{-1} = A$.

1.246. Немає оберненого. **1.247.** $\hat{A}^{-1} = \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3; 2x_1 + x_2 - 2x_3; 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

1.248. а) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. **1.249.** $A' = \begin{pmatrix} 75 & -31 \\ 179 & -74 \end{pmatrix}$.

1.250. а) $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A' = \begin{pmatrix} -6 & -23 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$. **1.251.** а) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. **1.252.** а) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1.253. а) $x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, $x'_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$, $x'_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$,
 $x'_4 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$; б) $x'_1 = x_2 - x_3 + x_4$, $x'_2 = -x_1 + x_2$, $x'_3 = x_4$,

$x'_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$. **1.254.** а) $C'' = A'' + B''$, $A'' = H^{-1}A'H$, $C'' = \begin{pmatrix} 44 & 49 \\ -29,5 & -25 \end{pmatrix}$;

б) $C' = A' + \frac{1}{2}B' = \begin{pmatrix} -57 & -95 \\ 42 & 70 \end{pmatrix}$. **1.255.** $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -403 & -146 \\ 875 & 317 \end{pmatrix}$.

1.257. Діагональні елементи дорівнюють ± 1 . **1.259.** а) $A' = H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **1.260.** $A^{*'} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. **1.262.** а) $A^{*'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -11 & -7 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A^{*'} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 11 & 13 & -5 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$. **1.263.** $\lambda_1 = 2$, $x_1 = (1; -1)$, $\lambda_2 = 3$, $x_2 = (1; -2)$.

1.264. $\lambda_1 = -2$, $x_1 = (1; -1)$, $\lambda_2 = 7$, $x_2 = (5; 4)$. **1.265.** $\lambda_1 = 2$, $x_2 = (1; 0; -1)$, $\lambda_2 = 3$,
 $x_2 = (1; 1; -1)$, $\lambda_3 = 6$, $x_3 = (1; -2; 1)$. **1.266.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $x = \alpha(1; 1; -1)$, $\alpha \neq 0$.

1.267. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $x = (\alpha_1; 2\alpha_1; \alpha_2)$, α_1, α_2 . Одночасно не дорівнюють нулю. **1.268.** $\lambda_1 = 1$, $x_1 = \alpha(1; 1; 1)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $x_2 = x_3 = \alpha(1; 2; 3)$, $\alpha \neq 0$.

1.269. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $x = \alpha(3; 1; 1)$, $\alpha \neq 0$. **1.270.** $\lambda_1 = 3$, $x_1 = \alpha\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$, $\alpha \neq 0$,

$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $x_2 = x_3 = \alpha(1; 2; 1)$, $\alpha \neq 0$. **1.271.** $\lambda_1 = -1$, $x_1 = \alpha(1; 1; 1)$, $\lambda_2 = 2$,
 $x_2 = \alpha(4; 1; 7)$, $\lambda_3 = -2$, $x_3 = \alpha(2; 3; 3)$, $\alpha \neq 0$. **1.272.** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$.

1.273. $x_1^0 = \left(\frac{4}{\sqrt{41}}; -\frac{5}{\sqrt{41}}\right)$, $x_2^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **1.274.** $x_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$$x_2^0 = \left(\frac{4}{\sqrt{66}}; \frac{1}{\sqrt{66}}; \frac{7}{\sqrt{66}} \right), \quad x_3^0 = \left(\frac{2}{\sqrt{22}}; \frac{3}{\sqrt{22}}; \frac{3}{\sqrt{22}} \right). \quad \mathbf{1.275.} \quad x_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$x_2^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad x_3^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right). \quad \mathbf{1.276.} \quad x_1^0 = x_2^0 = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$x_3^0 = \left(\frac{3}{\sqrt{29}}; \frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{2}{\sqrt{29}} \right). \quad \mathbf{1.277.} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.278.} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & -8 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.279.} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.280.} \quad A' = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.281.} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.282.} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad x_2^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$x_3^0 = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad \mathbf{1.283.} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad x_2^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$x_3^0 = (0; 1; 0). \quad \mathbf{1.284.} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}; 0; -\frac{3}{\sqrt{10}} \right), \quad x_2^0 = \left(0; \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}} \right),$$

$$x_3^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad \mathbf{1.285.} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right), \quad x_2^0 = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right),$$

$$x_3^0 = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right). \quad \mathbf{1.286.} \quad \text{Матриця не може бути діагоналізована.}$$

$$\mathbf{1.287.} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right), \quad x_2^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$x_3^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right). \quad \mathbf{1.288.} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right), \quad x_2^0 = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right),$$

$$x_3^0 = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right). \quad \mathbf{1.289.} \quad A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \quad x_2^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}; -\frac{1}{\sqrt{18}}; -\frac{4}{\sqrt{18}}\right),$$

$$x_3^0 = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right). \quad \mathbf{1.290.} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad x_1^0 = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), \quad x_2^0 = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right),$$

$$x_3^0 = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right). \quad \mathbf{1.291.} \quad F(x'; y') = 125x'^2 - 25y'^2, \quad x = \frac{1}{5}(3x' + 4y'), \quad y = \frac{1}{5}(4x' - 3y').$$

$$\mathbf{1.292.} \quad F(x'; y') = 10y'^2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y'). \quad \mathbf{1.293.} \quad F(x'; y') = 2x'^2,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'). \quad \mathbf{1.294.} \quad F(x'; y') = -4x'^2 + 9y'^2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y'),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2x' + 3y'). \quad \mathbf{1.295.} \quad F(x'; y') = -5x'^2 + 20y'^2, \quad x = \frac{1}{5}(4x' + 3y'),$$

$$y = \frac{1}{5}(-3x' + 4y'). \quad \mathbf{1.296.} \quad F(x'; y') = 20x'^2 + 5y'^2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y'),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y'). \quad \mathbf{1.297.} \quad F(x'; y') = 25y'^2, \quad x = \frac{1}{5}(4x' + 3y'), \quad y = \frac{1}{5}(-3x' + 4y').$$

$$\mathbf{1.298.} \quad F(x'; y') = \frac{2}{5}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y').$$

$$\mathbf{1.299.} \quad F(x'; y') = 8x'^2 - 2y'^2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y').$$

$$\mathbf{1.300.} \quad F(x'_1; x'_2; x'_3) = 9x_1'^2 + 18x_2'^2 - 9x_3'^2, \quad x_1 = \frac{1}{3}(2x'_1 + 2x'_2 - x'_3), \quad x_2 = \frac{1}{3}(-x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(2x'_1 - x'_2 + 2x'_3). \quad \mathbf{1.301.} \quad F(x'_1; x'_2; x'_3) = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 - 2x_3'^2, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x'_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_3,$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x'_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_3, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x'_2. \quad \mathbf{1.302.} \quad F(x'_1; x'_2; x'_3) = 5x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2,$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x'_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_3, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x'_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x'_3, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x'_2.$$

$$\mathbf{1.303.} \quad F(x'_1; x'_2; x'_3) = 4x_1'^2 + 4x_2'^2 - 2x_3'^2, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x'_3, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}}x'_3, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x'_3. \quad \mathbf{1.304.} \quad F(x'_1; x'_2; x'_3) = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2,$$

Відповіді

$$x_1 = \frac{1}{3}(2x'_1 - x'_2 + 2x'_3), \quad x_2 = \frac{1}{3}(2x'_1 + 2x'_2 - x'_3), \quad x_3 = \frac{1}{3}(-x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3). \quad \mathbf{1.305.} \quad \frac{x''^2}{19/14} - \frac{y''^2}{19/6} = 1. \quad \mathbf{1.306.} \quad y''^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x''^2. \quad \mathbf{1.307.} \quad \frac{x''^2}{2} + y''^2 = 1. \quad \mathbf{1.308.} \quad y''^2 = 4\sqrt{2}x''^2.$$

$$\mathbf{1.309.} \quad \frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1. \quad \mathbf{1.310.} \quad \frac{x''^2}{16} + \frac{y''^2}{9} = 1. \quad \mathbf{1.311.} \quad \frac{x''^2}{9} - \frac{y''^2}{36} = 1.$$

$$\mathbf{1.312.} \quad -2x''^2 + 8y''^2 = 0. \quad \mathbf{1.313.} \quad x''^2 + \frac{y''^2}{1/2} = -1. \quad \mathbf{1.314.} \quad 4x''^2 + 6y''^2 = 0.$$

$$\mathbf{1.315.} \quad x''^2 = 1. \quad \mathbf{1.316.} \quad y''^2 = -1.$$

До глави II

- 2.1.** 7. **2.2.** ± 3 . **2.3.** $(-4; 3; -1), (4; -3; 1)$. **2.4.** $(4; 1; 1)$. **2.5.** $(-1; 2; 3)$.
- 2.6.** $x = \sqrt{2}; \quad y = 1; \quad z = -1$. **2.7.** $\cos \alpha = \frac{12}{25}; \quad \cos \beta = -\frac{3}{5}; \quad \cos \gamma = -\frac{16}{25}$.
- 2.8.** $\cos \alpha = \frac{3}{13}; \quad \cos \beta = \frac{4}{13}; \quad \cos \gamma = \frac{12}{13}$. **2.9.** 1) так; 2) ні; 3) так. **2.10.** 1) ні; 2) так; 3) ні. **2.11.** 60° або 120° . **2.13.** 22. **2.14.** 20. **2.15.** $|a+b| = |a-b| = 13$.
- 2.16.** $\sqrt{129}$; 7. **2.17.** $\sqrt{19}$; 7. **2.18.** 1) $\angle(a, b) = 90^\circ$; 2) $\angle(a, b) < 90^\circ$; 3) $\angle(a, b) > 90^\circ$. **2.19.** $|a| = |b|$. **2.24.** $|R| = 15$. **2.25.** 1) $(1; -1; 6)$; 2) $(5; -3; 6)$; 3) $(6; -4; 12)$; 4) $(1; -\frac{1}{2}; 0)$; 5) $(0; -2; 12)$; 6) $(3; -\frac{5}{3}; 2)$. **2.26.** $|b| = 3|a|$.
- В протилежні сторони. **2.27.** $\alpha = 4; \quad b = -1$. **2.29.** $|\overline{AB}| = 2|\overline{CD}|$. В одну сторону.
- 2.30.** $(\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7})$. **2.31.** $(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13})$. **2.32.** $|a+b| = 6, \quad |a-b| = 14$.
- 2.33.** $d = -48i + 45j - 36k$. **2.34.** $(3; 4; -3); \quad (0; -5; 3); \quad (-3; 1; 0)$.
- 2.35.** $a = 2p + 5q$. **2.36.** $a = 2b + c; \quad b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c; \quad c = a - 2b$. **2.37.** $p = 2a - 3b$.
- 2.38.** $c = 2p - 3q + r$. **2.39.** $d = 2a - 3b + c, \quad c = -2a + 3 + d, \quad b = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}d,$
 $a = \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$. **2.40.** 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61; 6) 37; 7) 73. **2.41.** 1) -62; 2) 162; 3) 373. **2.42.** Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі

- квадратів його сторін. **2.43.** $|a|=|b|$. **2.46.** 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) -200; 5) 129; 6) 41. **2.47.** 17. **2.48.** 1) -524; 2) 13; 3) 3; 4) (-70; 70; -350), (-78; 104; -312). **2.49.** 31. **2.50.** 13. **2.52.** -6. **2.53.** $\frac{5}{21}$. **2.54.** 45° . **2.55.** $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.
- 2.57.** $(-24; 32; 30)$. **2.58.** $\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **2.59.** $x = -4i - 6j + 12k$. **2.60.** $(-3; 3; 3)$.
- 2.61.** $(2; -3; 0)$. **2.62.** $x = 2i + 3j - 2k$. **2.63.** $\sqrt{3}$. **2.64.** -3. **2.65.** -5. **2.66.** 6. **2.67.** 15. **2.68.** 16. **2.69.** ± 30 . **2.70.** 1) 24; 2) 60. **2.71.** 1) 3; 2) 27; 3) 300. **2.72.** a і b мають бути колінеарні. **2.75.** 1) $(5; 1; 7)$; 2) $(10; 2; 14)$; 3) $(20; 4; 28)$. **2.76.** 1) $(6; -4; -6)$; 2) $(-12; 8; 12)$. **2.77.** $(2; 11; 7)$. **2.78.** $(-4; 3; 4)$. **2.79.** 15; $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = -\frac{2}{15}$; $\cos \gamma = \frac{11}{15}$. **2.80.** 28; $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$; $\cos \beta = -\frac{6}{7}$; $\cos \gamma = \frac{2}{7}$. **2.81.** $\sqrt{66}$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{66}}$; $\cos \beta = -\frac{4}{\sqrt{66}}$; $\cos \gamma = -\frac{7}{\sqrt{66}}$. **2.82.** 14. **2.83.** 5. **2.84.** $\sin \gamma = -\frac{5\sqrt{17}}{21}$.
- 2.85.** $(-6; -24; 8)$. **2.86.** $(45; 24; 0)$. **2.87.** $(7; 5; 1)$. **2.88.** $(-7; 14; -7)$; $(10; 13; 19)$. **2.89.** 1) права; 2) ліва; 3) ліва; 4) права; 5) вектори компланарні; 6) ліва. **2.90.** 24. **2.91.** 27, якщо трійка векторів a , b , c права; -27, якщо ліва. **2.92.** Якщо вектори a , b , c взаємно перпендикулярні. **2.97.** -7. **2.98.** 1) компланарні; 2) не компланарні; 3) компланарні. **2.100.** 3. **2.101.** 11. **2.102.** $D_1(0; 8; 0)$; $D_2(0; -7; 0)$.

До глави III

- 3.1.** M_1 , M_3 , M_4 - лежать; M_2 , M_5 , M_6 - не лежать. **3.2.** 3, -3, 0, -6, -12. **3.3.** 1, -2, 4, -5, 7. **3.4.** $(6; 0)$; $(0; -4)$. **3.5.** $(3; -5)$. **3.6.** $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 4)$. **3.7.** $(1; -3)$, $(-2; 5)$, $(5; -9)$, $(8; -17)$. **3.8.** 17. **3.9.** $(-1; 4)$ або $\left(\frac{25}{7}; -\frac{36}{7}\right)$. **3.10.** $(1; -1)$ або $(-2; -10)$. **3.11.** 1) $2x - 3y + 9 = 0$; 2) $3x - y = 0$; 3) $y + 2 = 0$; 4) $3x + 4y - 12 = 0$; 5) $2x + y + 5 = 0$; 6) $x + 3y - 2 = 0$. **3.12.** 1) $k = 5$, $b = 3$; 2) $k = -\frac{2}{3}$, $b = 2$; 3) $k = -\frac{5}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{2}{3}$, $b = 0$; 5) $k = 0$, $b = 3$.
- 3.13.** 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$. **3.14.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$. **3.15.** $3x + 2y = 0$, $2x - 3y - 13 = 0$. **3.16.** $(2; 1)$, $(4; 2)$, $(-1; 7)$, $(1; 8)$. **3.17.** $(-2; -1)$. **3.18.** $(11; -11)$. **3.19.** 1) $3x - 2y - 7 = 0$; 2) $5x + y - 7 = 0$; 3) $8x + 12y + 5 = 0$;

Відповіді

- 4) $5x+7y+9=0$; 5) $6x-30y-7=0$; 6) $6x-30y-7=0$. **3.20.** а) $k=7$;
 б) $k=\frac{7}{10}$; в) $k=-\frac{3}{2}$. **3.21.** $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$.
3.22. $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$. **3.23.** $x+y+1=0$.
3.24. $2x+3y-13=0$. **3.25.** $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$.
3.26. (3;4). **3.27.** $4x+y-3=0$. **3.28.** $x-5=0$. **3.29.** $AB:2x+y-8=0$,
 $BC:x+2y-1=0$, $CA:x-y-1=0$. Рівняння медіани, проведеної з вершини
 $A:x-3=0$; з вершини $B:x+y-3=0$; з вершини $C:y=0$. **3.30.** $(-7;0)$; $(0;2\frac{1}{3})$.
3.31. (1;3). **3.32.** $3x-5y+4=0$, $x+7y-16=0$, $3x-5y-22=0$, $x+7y+10=0$.
3.33. Сторони: $2x-5y+3=0$, $2x-5y-26=0$; діагональ $7x-3y-33=0$.
3.34. $5x+y-3=0$, $x-5y-11=0$. **3.35.** $x+y-8=0$, $11x-y-28=0$.
3.36. $(-12;5)$. **3.37.** (10;-5). **3.38.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi=0$ - прями паралельні;
 4) $\arctg\frac{16}{11}$. **3.39.** $x-5y+3=0$ або $5x+y-11=0$. **3.40.** Сторони: $4x+3y+1=0$,
 $3x-4y+32=0$, $4x+3y-24=0$, $3x-4y+7=0$; діагональ $x+7y-31=0$.
3.41. $3x-4y+15=0$, $4x+3y-30=0$, $3x-4y-10=0$, $4x+3y-5=0$.
3.42. $2x+y-16=0$, $2x+y+14=0$, $x-2y-18=0$. **3.43.** $3x-y+9=0$,
 $3x+y+9=0$. **3.44.** $29x-2y+33=0$. **3.47.** Перпендикулярні 1), 3), 4).
3.49. 1) 45^0 ; 2) 60^0 ; 3) 90^0 . **3.50.** (6;-6).
3.51. $4x-y-13=0$, $x-5=0$, $x+8y+5=0$. **3.52.** $3x+4y-22=0$,
 $2x-7y-5=0$, $3x+5y-23=0$. **3.53.** $x+2y-7=0$, $x-4y-1=0$, $x-y+2=0$.
3.54. $3x-5y-13=0$, $8x-3y+17=0$, $5x+2y-1=0$. **3.55.** $2x-y+3=0$,
 $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$. **3.56.** $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$,
 $3x+4y-5=0$. **3.57.** $4x+7y-1=0$, $y-3=0$, $4x+3y-5=0$.
3.58. $3x+7y-5=0$, $3x+2y-10=0$, $9x+11y+5=0$. **3.59.** $x-3y-23=0$,
 $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$. **3.60.** $x+y-7=0$, $x+7y+5=0$,
 $x-8y+20=0$. **3.61.** $2x+9y-65=0$, $6x-7y-25=0$, $18x+13y-41=0$.
3.62. $x+2y=0$, $23x+25y=0$. **3.63.** $8x-y-24=0$. **3.65.** $3x+y=0$, $x-3y=0$.
3.66. $3x+4y-1=0$, $7x+24y-61=0$. **6.67.** 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{8}=1$;
 3) $\frac{x}{9/2}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{2/3}+\frac{y}{-2/5}=1$; 5) $\frac{x}{1/5}+\frac{y}{1/2}=1$. **3.68.** 6 кв. од.
3.69. $x+y+4=0$. **3.70.** $x+y-5=0$, $x-y+1=0$, $3x-2y=0$.
3.71. $x+y-2=0$, $(1+\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})y-2=0$, $(1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})y-2=0$.

- 3.72.** $(\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}-1)y - 10 = 0$, $(\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}+1)y + 10 = 0$, $x - y - 10 = 0$.
- 3.73.** $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$. **3.74.** $x + 3y - 30 = 0$, $3x + 4y - 60 = 0$, $3x - y - 30 = 0$, $x - 12y + 60 = 0$. **3.75.** Умову задачі задовольняють дві прями, які перетинають координати осі відповідно в точках $(2; 0)$, $(0; -3)$ і $(-4; 0)$, $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.
- 3.76.** 1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$; 2) $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 10 = 0$; 3) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0$;
4) $-x - 2 = 0$; 5) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - 1 = 0$. **3.77.** 1) $\delta = -3$, $d = 3$; 2) $\delta = 1$, $d = 1$;
3) $\delta = -4$, $d = 4$; 4) $\delta = 0$, $d = 0$. **3.78.** 1) з однієї сторони; 2) з різних сторін;
3) з однієї сторони; 4) з однієї сторони; 5) з різних сторін. **3.79.** 6 кв. од.
- 3.80.** 1) $d = 2,5$; 2) $d = 3$; 3) $d = 0,5$; 4) $d = 3,5$. **3.81.** $3x + 4y + 6 = 0$,
 $3x + 4y - 14 = 0$ або $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y + 26 = 0$. **3.82.** $12x - 5y + 61 = 0$,
 $12x - 5y + 22 = 0$, або $12x - 5y + 61 = 0$, $12x - 5y + 100 = 0$.
- 3.83.** 1) $4x - 4y + 3 = 0$, $2x + 2y - 7 = 0$; 2) $4x + 1 = 0$, $8y + 13 = 0$;
3) $14x - 8y - 3 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$. **3.84.** $x - 3y - 5 = 0$, $3x + y - 5 = 0$.
- 3.85.** Всередині. **3.86.** Зовні. **3.87.** Гострий. **3.88.** Тупий. **3.89.** $8x + 4y - 5 = 0$.
- 3.90.** $x + 3y - 2 = 0$. **3.91.** $3x - 19 = 0$. **3.92.** $10x - 10y - 3 = 0$.
- 3.93.** $74x + 13y + 39 = 0$. **3.94.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$. **3.95.** $5x - 3z = 0$.
- 3.96.** $2x - y - z - 6 = 0$. **3.97.** $x - y - 3z + 2 = 0$. **3.98.** $x + 4y + 7z + 16 = 0$.
- 3.100.** $3x + 3y + z - 8 = 0$. **3.101.** 1) $\mathbf{n} = (2; -1; -2)$, $\mathbf{n} = (2\lambda; -\lambda; -2\lambda)$; 2) $\mathbf{n} = (1; 5; -1)$,
 $\mathbf{n} = (\lambda; 5\lambda; -\lambda)$; 3) $\mathbf{n} = (3; -2; 0)$, $\mathbf{n} = (3\lambda; -2\lambda; 0)$; 4) $\mathbf{n} = (0; 5; -3)$, $\mathbf{n} = (0; 5\lambda; -3\lambda)$;
5) $\mathbf{n} = (1; 0; 0)$, $\mathbf{n} = (\lambda; 0; 0)$; 6) $\mathbf{n} = (0; 1; 0)$, $\mathbf{n} = (0; \lambda; 0)$, $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$. **3.102.** 1) і 3).
- 3.103.** 1) і 2). **3.104.** 1) $l = 3$, $m = -4$; 2) $l = 3$, $m = -\frac{2}{3}$; 3) $l = -3\frac{1}{3}$; $m = -1\frac{1}{5}$.
- 3.105.** 1) 6; 2) -19 ; 3) $-\frac{1}{7}$. **3.106.** 1) $\frac{1}{3}\pi$ і $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{1}{4}\pi$ і $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos \frac{2}{15}$ і
 $\pi - \arccos \frac{2}{15}$. **3.107.** $5x - 3y + 2z = 0$. **3.108.** $7x - y - 5z = 0$. **3.109.** $x + 2z - 4 = 0$.
- 3.110.** $4x - y - 2z - 9 = 0$. **3.111.** $(1; -2; 2)$. **3.114.** 1) $a \neq 7$; 2) $a = 7$, $b = 3$;
3) $a = 7$, $b \neq 3$. **3.115.** 1) $z - 3 = 0$; 2) $y + 2 = 0$; 3) $x + 5 = 0$. **3.116.** 1) $2y + z = 0$;
2) $3x + z = 0$; 3) $4x + 3y = 0$. **3.117.** 1) $y + 4z + 10 = 0$; 2) $x - z - 1 = 0$;
3) $5x + y - 13 = 0$. **3.118.** $(12; 0; 0)$, $(0; -8; 0)$, $(0; 0; -6)$. **3.119.** $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$.
- 3.120.** $a = -4$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$. **3.121.** 240 кв. од. **3.122.** 8 куб. од.

- 3.123.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$. **3.124.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3/2} = 1$. **3.125.** $2x - y - 3z - 15 = 0$.
- 3.126.** $x + y + z + 5 = 0$. **3.127.** $2x - 21y + 2z + 88 = 0$, $2x - 3y - 2z + 12 = 0$.
- 3.128.** $x + y + z - 9 = 0$, $x - y - z + 1 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$, $x + y - z - 5 = 0$.
- 3.129.** $2x - y - 3z - 15 = 0$. **3.130.** $2x - 3y + z - 6 = 0$. **3.131.** $x - 3y - 2z + 2 = 0$.
- 3.132.** 1) $\delta = -3$, $d = 3$; 2) $\delta = 1$, $d = 1$; 3) $\delta = 0$, $d = 0$; 4) $\delta = -2$, $d = 2$; 5) $\delta = -3$, $d = 3$. **3.133.** $d = 4$. **3.136.** 1) $d = 2$; 2) $d = 3,5$; 3) $d = 6,5$; 4) $d = 1$; 5) $d = 0,5$; 6) $d = \frac{6}{5}$. **3.137.** $(0; 7; 0)$ і $(0; -5; 0)$. **3.138.** $(0; 0; -2)$ і $(0; 0; -6\frac{4}{13})$.
- 3.139.** $2x - 2y - z - 18 = 0$, $2x - 2y - z + 12 = 0$. **3.140.** 1) $4x - y - 2z - 4 = 0$; 2) $3x + 2y - z + 1 = 0$; $20x - 12y + 4z + 13 = 0$. **3.141.** $5x - 7y - 3 = 0$, $z = 0$; $5x + 2z - 3 = 0$, $y = 0$; $7y - 2z + 3 = 0$, $x = 0$. **3.142.** $3x - y - 7z + 9 = 0$, $5y + 2z = 0$.
- 3.143.** $(0; -1; 0)$; $(1\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3})$; $(0; 2; -1)$. **3.145.** 1) -4 ; 2) 9 ; 3) 31 .
- 3.146.** 1) $2x + 15y + 7z + 7 = 0$; 2) $9y + 3z + 5 = 0$; 3) $3x + 3z - 2 = 0$; 4) $3x - 9y - 7 = 0$. **3.147.** 1) $23x - 2y + 21z - 33 = 0$; 2) $y + z - 18 = 0$; 3) $x + z - 3 = 0$; 4) $x - y + 15 = 0$. **3.148.** $5x + 5z - 8 = 0$.
- 3.149.** $\alpha(5x - 2y - z - 3) + \beta(x + 3y - 2z + 5) = 0$. **3.150.** $11x - 2y - 15z - 3 = 0$.
- 3.151.** $\alpha(5x - y - 2z - 3) + \beta(3x - 2y - 5z + 2) = 0$. **3.152.** $9x + 7y + 8z + 7 = 0$.
- 3.153.** 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$. **3.154.** 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$; 3) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}$.
- 3.155.** 1) $x = 2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = 4t - 3$; 2) $x = 2t + 1$, $y = 4t - 1$, $z = -3$; 3) $x = 3t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 5t - 3$. **3.156.** $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$; 2) $x = t + 3$, $y = -t - 1$, $z = t$; 3) $x = 0$, $y = t$, $z = -3t + 1$. **3.157.** $(9; -4; 0)$, $(3; 0; -2)$, $(0; 2; -3)$. **3.158.** $x = 5t + 4$, $y = -11t - 7$, $z = -2$. **3.159.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$.
- 3.160.** $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{7}$. **3.161.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$. **3.162.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$.
- 3.163.** 1) $x = t + 1$, $y = -7t$, $z = -19t - 2$; 2) $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 5t - 1$.
- 3.165.** 60° . **3.166.** 3. **3.168.** 1) $(2; -3; 6)$; 2) пряма паралельна площині; 3) пряма лежить на площині. **3.169.** 7. **3.170.** 1) 21; 2) 6; 3) 15. **3.171.** 25. **3.172.** $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **3.173.** $4x + 6y + 5z - 1 = 0$. **3.174.** $6x - 20y - 11z + 1 = 0$. **3.175.** $(1; -2; 2)$. **3.176.** $(1; -6; 3)$.

До глави IV

- 4.1.** $f(0)=-2$; $f(1)=-1$; $f(4)=0$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$; $f(\sqrt{3})=6\sqrt{3}-11$;
 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=1,4$; $\varphi(0)=2$; $\varphi(1)=1$; $\varphi(4)=0$; $\varphi(-4)=-4$; $\varphi(2)=0,5$; $f(-2)$ не існує;
 $\varphi(-2)$ не існує. **4.2.** $f(1)=2$; $f(a)=a^3+1$; $f(a-1)=a^3-3a^2+3a$;
 $f(a+1)=a^3+3a^2+3a+2$; $2f(2a)=16a^3+2$; $f(-1)=0$. **4.3.** $f(0)=\frac{1}{4}$; $f(2)=1$;
 $f(3)=2$; $f(-1)=\frac{1}{8}$; $f(2,5)=\sqrt{2}$; $f(-1,5)=\frac{1}{\sqrt{128}}$; $\varphi(0)=\frac{1}{4}$; $\varphi(2)=1$; $\varphi(-1)=\frac{1}{2}$;
 $\varphi(x)=2^{x-2}$ при $x \geq 0$ і $\varphi(x)=2^{-x-2}$ при $x < 0$; $\varphi(-1)+f(1)=1$. **4.4.** $\psi(0)=0$;
 $\psi(1)=\frac{1}{a}$; $\psi(-1)=-a$; $\psi\left(-\frac{1}{a}\right)=-a^{\frac{1-a}{a}}$; $\psi(a)=a^{1-a}$; $\psi(-a)=-a^{a+1}$.
- 4.5.** $\varphi(t^3)=t^6+1$; $[\varphi(t)]^3=t^6+3t^4+3t^2+1$. **4.11.** а) $x_1=0$, $x_2=2$; б) $x_1=-1$,
 $x_2=3$. **4.12.** $x_1=-2$, $x_2=5$, $x_3=-\frac{1}{2}$. **4.13.** Одним коренем завжди буде $x=a$.
- 4.14.** $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=3$. **4.15.** $y=(x+5)^3$. **4.16.** $y=|\sin x|$.
- 4.17.** $y=\sqrt[4]{(e^t+8)^3}$. **4.18.** $v=\sqrt[3]{1+(\ln \cos x)^2}$. **4.19.** $v=|\cos(5+x)|$.
- 4.20.** $v=\operatorname{tg}(1-x)^3$. **4.21.** 1) $y=u^5$, $u=\cos x$; 2) $y=\sqrt{u}$, $u=v^3$, $v=4+x$;
3) $y=\log_2 u$, $u=\operatorname{ctg} x$; 4) $y=u^4$, $u=\sin v$, $v=3x-7$; 5) $y=7^u$, $u=v^8$,
 $v=4x-5$; 6) $y=\cos u$, $u=v^3$, $v=\lg z$, $z=2x+7$. **4.22.** а) $-\frac{3}{8}$; б) 0; в) $\sin 12$;
г) $-\sin 2x \cos^2 2x$; д) $x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x$; е) 0; є) $\sin(2\sin 2x)$.

Відповіді

4.23. 1) $y = \pm\sqrt{x^2 - 5}$; 2) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; 3) $y = \sqrt[3]{a^3 - x^3}$; 4) $y = \frac{c}{x}$;

5) $y = \frac{\log_3 7}{x}$; 6) $y = \frac{100}{x} - 1$; 7) $y = \log_5\left(\frac{x^4 - 8}{x^3 + 7}\right) - 2x$; 8) $y = \text{Arc sin } \frac{1 + 2x}{1 - 3x^2}$;

9) $y = e^{1 + \cos x} - x$; 10) $y = 5x + \text{Arctg}(\ln(x^2 + 4))$. 4.24. $V = \pi x \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)$; $0 < x < 2R$.

4.25. $S = \frac{\pi x^2}{2R} \sqrt{4R^2 - x^2}$; $0 < x < 2R$. 4.26. 1) $x > 0$; 2) $x > 7$; 3) вся числова вісь;

4) $x \geq -\frac{3}{4}$; 5) $x \leq 0$; 6) вся числова вісь; 7) вся числова вісь крім точок $x = \pm\sqrt{2}$;

8) вся числова вісь крім точок $x = 0$, $x = -3$, $x = 3$; 9) вся числова вісь крім точок $x = 1$ і $x = 4$; 10) $-2 \leq x \leq 2$; 11) $0 < x < 6$; 12) $x \leq -9$ і $x \geq 1$; 13) $-8 \leq x \leq 1$; 14) вся числова вісь крім точок $x = -3$ і $x = 1$; 15) $-\infty < x < 1$ і $5 < x < +\infty$;

16) $-9 \leq x \leq 9$; 17) $-6 \leq x \leq -4$; 18) $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$; 19) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$;

20) $0 \leq x \leq \frac{1}{7}$; 21) $-4 \leq x \leq 4$; 22) $x > 0$; 23) не має змісту; 24) $x < 0$;

25) $1 \leq x \leq 4$; 26) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, де k - ціле число;

27) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, де k - ціле число; 28) $0 < x < 1$ і $1 < x < +\infty$;

29) $0 < x < 1$ і $1 < x \leq 5$; 30) $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$; 31) $-2 < x \leq 1$; 32) $1 \leq x < 37$;

33) $-3 \leq x < 1$ і $1 < x \leq 5$; 34) $4 < x \leq 29$. 4.27. 1) $1 < x \leq 2$; 2) $-\infty < x \leq -2$ і $2 \leq x < +\infty$; 3) $-3 < x < -2$ і $-2 < x < +\infty$; 4) $-\infty < x \leq 0$; 5) $-5 \leq x \leq -3$; 6) вся

числова вісь; 7) $0 \leq x \leq 1$; 8) $0 < x \leq \frac{2}{5}$; 9) $-5 \leq x < 1$ і $1 < x < 2$; 10) $\frac{4}{9} < x < 4$ і

$4 < x < +\infty$; 11) визначена тільки в точці $x = 3$; 12) $-2 < x < 0$, $2 < x < 3$ і

$3 < x < +\infty$; 13) $3 - 2\pi < x < 3 - \pi$ і $3 < x \leq 4$; 14) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, де k -

ціле число; 15) $4 < x < 5$ і $6 < x < +\infty$; 16) $-2 \leq x < 2$; 17) $-1 < x \leq 1$ і $2 \leq x < 3$;

18) вся числова вісь; 19) $3 \leq x \leq 8$; 20) $2 < x < 3$. 4.28. 1) Так; 2) Тотожні на

довільному інтервалі, що не містить точку $x = 0$; 3) Тотожні; 4) Тотожні на

інтервалі $[0; +\infty)$; 5) Тотожні на інтервалі $(0; +\infty)$. 4.29. 1) Наприклад,

$y = \log_5(16 - x^2)$; 2) Наприклад, $y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}$; 3) Наприклад,

- $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. **4.30.** $-\infty < x < +\infty$. **4.31.** 1) $y > 0$ при $x > -7$; $y < 0$ при $x < -7$; $y = 0$ при $x = -7$; 2) $y > 0$ при $x < -8$ і $x > 1$; $y < 0$ при $-8 < x < 1$; $y = 0$ при $x_1 = -8$ і $x_2 = 1$; 3) $y > 0$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$; функція нулів не має; 4) $y > 0$ при $x \neq 4$; $y = 0$ при $x = 4$. **4.32.** 1), 6), 8), 10), 11)– парні; 3), 5), 9), 12), 14), 16)– непарні; 2), 4), 7), 13), 15)– ні парні, ні непарні. **4.33.** 1) $y = (3x^2 + 1) - 5x$; 2) $y = (5 - 2x^2 + x^4) + (x - 7x^3)$; 3) $y = \cos \frac{x}{5} + (\operatorname{ctg} 5x + \sin 8x)$.
- 4.35.** 1) $y = \frac{8^x + 8^{-x}}{2} + \frac{8^x - 8^{-x}}{2}$; 2) $y = \frac{(1+x)^{50} + (1-x)^{50}}{2} + \frac{(1+x)^{50} - (1-x)^{50}}{2}$.
- 4.37.** Функція 1), 5), 6), 8). **4.38.** 1) В інтервалі $(-\infty; 0)$ зростає, в інтервалі $(0; +\infty)$ спадає; 2) В інтервалі $(-\infty; 0)$ зберігає стале значення – нуль, в інтервалі $(0; +\infty)$ зростає. **4.39.** 1) Найбільше = 4, найменше = 0; 2) Найбільше = 1, найменше = -1; 3) Найбільше = 3, найменше = 1; 4) Найбільшого значення немає, найменше = 1. **4.47.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; 2) $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx \pm 1,9$; 3) $x \approx 0,74$; 4) $x_1 \approx 0,9$, $x_2 \approx 2,85$, $x_3 \approx 5,8$. **4.48.** 1) $y = \frac{1}{3}x$; 2) $y = 5x$; 3) $y = \frac{x-2}{9}$; 4) $y = \pm\sqrt{x-4}$; 5) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{1-3x}{x}$; 7) $y = -2 \pm \sqrt{x+1}$; 8) $y = \pm\sqrt{x^5+2}$; 9) $y = \frac{3+\ln x}{2}$; 10) $y = 3^{x-5} - 4$; 11) $y = 7^{\frac{1}{x}}$; 12) $y = \log_3 \frac{2-5x}{1+x}$; 13) $y = \frac{1}{2} \arccos \frac{x}{5}$; 14) $y = \frac{1 + \arccos \frac{x-3}{5}}{1 - \arccos \frac{x-3}{5}}$; 15) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(x-5)$; 16) $y = \pm \cos \frac{x}{4}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). **4.49.** 1) 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{5}$; 2) 0, 4, 0, 8, 0; 3) $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{19}$, $\frac{9}{21}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{25\pi}{6}$, $\frac{29\pi}{6}$.
- 4.50.** 1) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $x_n = -1 + (-1)^n$; 3) $x_n = \frac{3n+1}{3n-2}$; 4) $x_n = \frac{2n-5}{n+2}$.
- 4.51.** 5. **4.52.** $\frac{7}{3}$. **4.53.** -2. **4.54.** 0. **4.55.** $-\frac{1}{2}$. **4.56.** $\frac{1}{3}$. **4.57.** 6. **4.58.** 0. **4.59.** 0. **4.60.** ∞ . **4.61.** 0. **4.62.** $\frac{65}{97}$. **4.63.** 0. **4.64.** 1. **4.65.** $\frac{1}{2}$. **4.66.** ∞ . **4.67.** 0. **4.68.** 2. **4.69.** 0. **4.70.** 2. **4.71.** 1. **4.72.** -1. **4.73.** 1. **4.74.** 0. **4.75.** 0. **4.76.** $\frac{6}{5}$. **4.77.** 1. **4.78.** $\frac{1}{2}$. **4.79.** Так, є. **4.80.** Не є. **4.81.** Не є. **4.82.** Так, є. **4.83.** -3. **4.84.** 5. **4.85.** $\frac{1}{6}$. **4.86.** ∞ . **4.87.** $-\infty$.

- 4.88.** 0. **4.89.** 0. **4.90.** 12. **4.91.** -18 . **4.92.** $-\frac{1}{4}$. **4.93.** $\frac{9}{4}$. **4.94.** $\frac{5}{2}$. **4.95.** $-\frac{1}{2}$.
4.96. ∞ . **4.97.** $\frac{m}{n}$. **4.98.** 0. **4.99.** ∞ . **4.100.** $\frac{1}{5}$. **4.101.** $\frac{2}{9}$. **4.102.** 0. **4.103.** $\frac{1}{9}$.
4.104. $-\frac{1}{2}$. **4.105.** 30. **4.107.** 1. **4.108.** 1. **4.109.** ∞ . **4.110.** 0. **4.111.** $\frac{1}{3}$. **4.112.** 0.
4.113. ∞ . **4.114.** $\frac{1}{2}$. **4.115.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **4.116.** 6. **4.117.** $\frac{1}{7}$. **4.118.** $2\sqrt{2}$. **4.119.** $-\frac{4}{9}$.
4.120. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.121.** $\frac{1}{2}$. **4.122.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, якщо $x > 0$; ∞ , якщо $x = 0$. **4.123.** $\frac{1}{12}$.
4.124. $\frac{4}{3}$. **4.125.** $\frac{m}{n}$. **4.126.** $\frac{1}{2}$. До чисельника додати і відняти одиницю. **4.127.** 0.
4.128. 0. **4.129.** $\frac{1}{3}$. **4.130.** $\pm \frac{7}{2}$. **4.131.** $-\frac{2}{3}$. **4.132.** 5. **4.133.** $\frac{a+b}{2}$, якщо $x \rightarrow +\infty$;
 ∞ , якщо $x \rightarrow -\infty$. **4.134.** 0. **4.135.** 7. **4.136.** k . **4.137.** $\frac{a}{b}$. **4.138.** $\frac{1}{a}$. **4.139.** $\frac{9}{4}$.
4.140. $\frac{1}{2}$. **4.141.** $\frac{1}{6}$. **4.142.** $\frac{1}{2}$. **4.143.** 6. **4.144.** $\frac{1}{9}$. **4.145.** $\frac{1}{7}$. **4.146.** 0, якщо $n > m$; 1,
якщо $n = m$; ∞ , якщо $n < m$. **4.147.** $\frac{5}{4}$. **4.148.** $\frac{2}{3}$. **4.149.** 2. **4.150.** 5. **4.151.** $\frac{1}{2}$.
4.152. $-\frac{3}{4}$. **4.153.** 1. **4.154.** $-\frac{1}{2}$. **4.155.** 0. **4.156.** $\frac{1}{2}$. **4.157.** $-\frac{2}{7}$. **4.158.** $-\frac{5}{3}$.
4.159. $\frac{49}{36}$. **4.160.** 2. **4.161.** $-\frac{\alpha}{\pi}$. **4.162.** $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}$. **4.164.** $\frac{1}{e}$. **4.165.** e^{-5} . **4.166.** e^{-5} .
4.167. e . **4.168.** e^{-2} . **4.169.** e^{10} . **4.170.** e^4 . **4.171.** e^{-6} . **4.172.** e^{12} . **4.173.** e^{-12} .
4.174. e^{-8} . **4.175.** e^6 . **4.176.** 1. **4.177.** -5 . **4.178.** -3 . **4.179.** 1. **4.180.** e^{-1} .
4.181. 1. **4.182.** e^8 . **4.183.** $\frac{5}{e}$. **4.184.** $\frac{5}{4}$. **4.185.** $a - b$. **4.186.** 1. **4.187.** $+1, -1$.
4.188. $-\infty, +\infty$. **4.189.** $+\infty, 0$. **4.190.** $0, +\infty$. **4.191.** $0, \pi$. **4.192.** $0, -1$. **4.193.** $1, -1$.
4.194. $2, -2$. **4.195.** $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$. **4.196.** $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$. **4.197.** Одного порядку. **4.198.** Ні.
4.199. 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 2; 4) 7; 5) 4; 6) 1; 7) 5; 8) $\frac{1}{3}$; 9) 2; 10) 1. **4.201.** 1) 1;
2) 2; 3) 1; 4) 1. **4.203.** 1) 0,97; 2) 5,03; 3) 1,15; 4) 0,88. **4.204.** 1) 3; 2) 2; 3) $\frac{1}{3}$;
4) $\frac{3}{5}$; 5) 5; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) 3. **4.205.** Так. **4.206.** $A = 5$. **4.207.** $a = \frac{1}{4}$.

4.208. $b = a\pi$. **4.209.** 3. **4.210.** $x = 0$ точка розриву I роду неусувного типу. **4.211.** Всі три функції мають розриви, коли x дорівнює цілому числу (додатньому або від'ємному) або нулю. **4.212.** $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ - точки розриву другого роду. **4.213.** $x = -\frac{3}{2}$ - точка розриву першого роду. **4.214.** $x = 0$ - точка усувного розриву; $f(0) = n$. **4.215.** $x = 0$ - точка усувного розриву; $f(0) = 0$. **4.216.** $x = 0$ - точка усувного розриву; $f(0) = 6$. **4.217.** $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ - точки розриву другого роду. **4.218.** $x = 0$ - точка розриву першого роду. **4.219.** $x = 3$ - точка розриву першого роду. **4.220.** $x = -4$ - точка розриву першого роду. **4.221.** $x_1 = 0$ - точка усувного розриву, $f(0) = 2$; $x_2 = 1$ і $x_3 = -1$ - точки розриву другого роду. **4.222.** $x_1 = -1$ - точка усувного розриву, $f(-1) = -1$; $x_2 = 0$ - точка усувного розриву, $f(0) = 0$; $x_3 = -2$ - точка розриву другого роду. **4.223.** $x = 0$ - точка розриву усувного типу, $f(0) = 1$.

До глави V

5.1. а) 7; б) 7. **5.2.** 75,88; 60,85; 49,03; 48,05. **5.3.** $V = 3t^2 + 10t - 3$.
5.4. $\omega = 8t^3 - 6t$. **5.5.** $53,9 \frac{\text{М}}{\text{сек}}$; $49,49 \frac{\text{М}}{\text{сек}}$; $49,25 \frac{\text{М}}{\text{сек}}$; $49,005 \frac{\text{М}}{\text{сек}}$;
 $V_5 = 49,0 \frac{\text{М}}{\text{сек}}$; $V_{10} = 98,0 \frac{\text{М}}{\text{сек}}$; $V = 9,8 t \frac{\text{М}}{\text{сек}}$. **5.6.** 1) $1,002 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}} =$
 $= 4198 \frac{\text{дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$; 2) $1,013 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$. **5.7.** $20 \cos 2t$. **5.8.** $V = -\frac{m_0 \ln 2}{T} =$
 $= -\frac{M \ln 2}{T} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}}$, $m_0 = m(t_0)$. **5.9.** 1) 56; 2) 19; 3) 7,625; 4) 1,261. **5.10.** а) 2,5;
 б) 2,2; в) 2,1; г) 2,01; д) 2,001. **5.11.** $f'(-3) = -6$; $f'(1) = 2$; $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 5$.
5.12. $f'(2) = 12$; $f'(0) = 0$; $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; $f'(-\sqrt{5}) = 15$. **5.13.** $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.
5.14. 1) $-\frac{2x}{(x^2 - 5)^2}$; 2) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 5) $-\frac{a}{\sin^2 ax}$; 6) $-\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$;
 7) ae^{ax} ; 8) $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 9) $-\sin x$; 10) $-\sin 2x$; 11) $\sin 2x$; 12) $\frac{2x}{x^2 + 2}$. **5.15.** 1.
5.16. 2. **5.17.** 1) 0; 2) 4; 3) -6; 4) $k_1 = 2$, $k_2 = 8$. **5.18.** (-2; -8); (2; 8).

- 5.19.** 1) $(0; 0)$; 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. **5.20.** $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \arctg \frac{3}{4}$. **5.21.** $\alpha_1 = \arctg \frac{1}{7}$, $\alpha_2 = \arctg \frac{1}{13}$. **5.22.** $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$. **5.23.** $\alpha = \arctg \frac{4}{3}$. **5.24.** $y = 12x - 16$; $x + 12y - 98 = 0$, піддотична рівна $\frac{2}{3}$, піднормаль рівна 96 (лін.од.).
- 5.25.** $y = 2x - 2$. **5.26.** $y = 4\sqrt{3}x + 1$. **5.27.** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **5.28.** 1) $10x + 3$; 2) $6x^2 + 8x - 8$; 3) $x^3 - x^2 + 3x - 0,5$; 4) $3ax^2 + 2bx + c$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$;
- 7) $\frac{0,1}{\sqrt[6]{y^5}} - 20y^3 - \frac{0,6}{y^4}$; 8) $\frac{1}{n} + \frac{n}{x^2} + \frac{2x}{m^2} + \frac{2m^2}{x^3}$; 9) $\frac{3}{2}m\sqrt{y} - \frac{7}{3}n\sqrt[6]{y} - \frac{1}{2}p\frac{1}{\sqrt{y^3}}$;
- 10) $-\frac{1}{5}t^{-\frac{5}{3}} + 14t^{-2,4} - \frac{5}{t\sqrt[5]{t}}$; 11) $2x - 7$; 12) $4,5x^3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; 13) $3z^2 + 2z - 1$;
- 14) $10(a - y)$; 15) $\frac{2ax}{a+b} + \frac{b}{a+b} - \frac{c}{(a+b)x^2}$; 16) $\frac{4a(av+b)^3}{c^4}$. **5.29.** $f(1) = 3$; $f'(1) = 4$; $f(4) = 16$; $f'(4) = 4,5$; $f(a^2) = 5a^2 - 2|a|$; $f'(a^2) = 5 - \frac{1}{|a|}$.
- 5.30.** $f(-1) = -5$; $f'(-1) = -8$; $f'(2) = \frac{19}{16}$; $f'\left(\frac{1}{a}\right) = 3a^4 + 10a^3 - a^2$. **5.31.** 13.
- 5.33.** 1) $4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$; 2) $7x^6 - 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 4x + 3$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$;
- 4) $\frac{1}{9}\left(\frac{60}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}} + \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}} - 48\sqrt[6]{27x^2}\right)$; 5) $\frac{1 + 12x + 9\sqrt[3]{x^2} + 10x\sqrt[3]{x} + 36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$;
- 6) $2x(3x^4 - 28x^2 + 49)$; 7) $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{6x} + 3x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$.
- 5.34.** $\frac{2}{(x+1)^2}$. **5.35.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. **5.36.** $\frac{4t^3 + 6t^2 + 1}{(t+1)^2}$. **5.37.** $\frac{z^4 + 2z^3 + 5z^2 - 2}{(z^2 + z + 1)^2}$.
- 5.38.** $\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$. **5.39.** $\frac{v^6(2v^5 - 21)}{(v^5 - 3)^2}$. **5.40.** $y = -\frac{4x}{3(x^2 - 1)^2} + 1 + 2x - 3x^2$.
- 5.41.** $\frac{2z^4(z^3 - 5)}{(z^3 - 2)^3}$. **5.42.** $\frac{8x^3}{(1-x^4)^2}$. **5.43.** $\frac{15x^4}{(1-x^5)^2}$. **5.44.** $\frac{2u-5}{a^2+5}$. **5.45.** $\frac{-8x^7}{\sqrt{e}}$.

- 5.46. $-\frac{3t^2 - 2t}{(t^3 - t^2 + 1)^2}$. 5.47. $-\frac{2t + 5}{(t^2 + 5t - 4)^2}$. 5.48. $\frac{6x^3(2c^2 - x^2)}{(c^2 - x^2)^2}$.
- 5.49. $\frac{1 + 2x + 3x^2 - 2x^3 - x^4}{(x^3 + 1)^2}$. 5.50. $\frac{10x(1 + 3x - 5x^3)}{(1 - x^2)^2 \cdot (1 - 2x^3)^2}$. 5.51. $y = \frac{2ax + b}{ad + bcd^2}$.
- 5.52. $f'(0) = 0$; $f'(1) = 6$. 5.53. $F'(0) = 11$; $F'(1) = 2$; $F'(2) = -1$. 5.54. $F'(0) = -\frac{1}{4}$;
 $F'(-1) = \frac{1}{2}$. 5.55. $s'(0) = \frac{3}{25}$; $s'(2) = \frac{17}{15}$. 5.56. $y'(1) = 16$; $y'(a) = 15a^2 + \frac{2}{a^3} - 1$.
- 5.57. $\rho'(2) = \frac{5}{9}$; $\rho'(0) = 1$. 5.58. $\varphi'(1) = -\frac{b+1}{4}$. 5.59. $z'(0) = 7$. 5.60. 1) $4x^3 - 3x^2(a + b + c + d) + 2x(ab + ac + ad + bc + db + cd) - (abc + abd + acd + bcd)$;
 2) $15x^2(x^3 - 5)^4$; 3) $-45(1 - 3x)^{14}$; 4) $200(1 + 4x)^{49}$; 5) $-14x(4 - x^2)^6$;
 6) $9x(9x - 14)(3x^3 - 7x^2 + 8)^8$; 7) $4(3x^2 + 2x - 1)(x^3 + x^2 - x)^3$;
 8) $8\left(10x - \frac{3}{x^2}\right)\left(5x^2 + \frac{3}{x} - 1\right)^7$; 9) $6\left(4t^3 + \frac{5}{t^6} + 2\right)\left(t^4 - \frac{1}{t^5} + 2t\right)^5$; 10) $-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^3}$;
 11) $\frac{5(x^2 + 2x - 1)(1 + x^2)^4}{(1 + x)^6}$; 12) $3(3x^2 - 14x + 5)(x^3 - 7x^2 + 5x - 2)^2$.
- 5.61. $\frac{(v+2)(v+4)}{(v+3)^2}$. 5.62. $\frac{(3-t)t^2}{(1-t)^3}$. 5.63. $\frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{2x})^2}$. 5.64. $-\frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}(1 + \sqrt[3]{2x})^2}$.
- 5.65. $-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$. 5.66. $-\frac{5\left(8 - 3x^{\frac{1}{3}}\right)^4}{x^{\frac{2}{3}}}$. 5.67. $\frac{mv^{m-1}}{(1-v)^{m+1}}$. 5.68. $-\frac{12x(3x-4)}{(x^3 - 2x^2 + 1)^5}$.
- 5.69. $-\frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$. 5.70. $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$. 5.71. $\frac{5x^4 - 20x^9}{2\sqrt{(1-x^5 + 2x^{10})^3}}$. 5.72. $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.
- 5.73. $\frac{x(x^2 + 2a^2)}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$. 5.74. $-\frac{z + \sqrt{a^2 + z^2}}{a^2\sqrt{a^2 + z^2}}$. 5.75. $-\frac{3}{5\sqrt[3]{(3x+1)^6}} + \frac{8x}{\sqrt[3]{(x^2 + 4)^7}}$.
- 5.76. $u'(1) = 945$. 5.77. $y'(2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5.78. $y'(0) = 0$. 5.79. $\cos x + \sin x$.
- 5.80. $\frac{1 - \cos x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}$. 5.81. $\frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$. 5.82. $-\varphi \sin \varphi$.

5.83. $(t \cos t - \sin t) \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t} \right)$. 5.84. $\frac{1}{\cos t - 1}$. 5.85. $\frac{\sin x + \cos x + x(\sin x - \cos x)}{1 + \sin 2x}$.

5.86. $\frac{(1 + \operatorname{tg} x)(\sin x + x \cos x) - x \sin x \sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$. 5.87. $\sin 2x$. 5.88. $-\operatorname{ctg}^6 x \cos e^2 x$.

5.89. $\cos^3 x$. 5.90. $-3 \sin 2x(2 - \cos x)$. 5.91. $\operatorname{tg}^4 x$. 5.92. $2x \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

5.93. $-\frac{16 \cos 2x}{\sin^3 2x}$. 5.94. $-9 \sin 9x$. 5.95. $\frac{a}{5} \cos \frac{x}{5}$. 5.96. $-14 \sin(7x - 3)$.

5.97. $-\frac{1}{4 \sin^2 \frac{x-3}{4}}$. 5.98. $-\frac{1}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}}$. 5.99. $\frac{2 \sin \frac{1}{x^2}}{x^3}$.

5.100. $\sin(\cos x) \cdot \sin x$. 5.101. $15 \sin^4 3x \cos 3x$. 5.102. $-\frac{1}{6 \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{x}{3} \sin^2 \frac{x}{3}}}$.

5.103. $-\frac{3x^2 \sin \sqrt{1+x^3}}{2\sqrt{1+x^3}}$. 5.104. $\frac{4x^3}{5 \cos^2 \sqrt[5]{1+x^4} \cdot \sqrt[5]{(1+x^4)^4}}$.

5.105. $-8(1 + \cos^2 x)^7 \cdot \sin 2x$. 5.106. $-\frac{\sin \left(2 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$.

5.107. $\frac{1 - x^2}{2x^2 \sin^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \sqrt{1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{1}{x} \right)}}$. 5.108. $-7 \cos 7x \cdot \sin(2 \sin 7x)$.

5.110. $\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 5.111. $\frac{\pi}{2(\arccos x)^2 \sqrt{1-x^2}}$. 5.112. $\frac{4 \arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.113. $\arccos x$. 5.114. $\frac{1}{(\arccos x)^2 \sqrt{1-x^2}}$. 5.115. $\cos x \arctg x -$

$-x \sin x \arctg x + \frac{x \cos x}{1+x^2}$. 5.116. $\frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$. 5.117. $\frac{\operatorname{arcctg} x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

5.118. 0 . 5.119. $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$. 5.120. $\frac{x \arccos x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

- 5.121. $\frac{5x^4}{\arctg x} + \frac{x^5}{(1+x^2)(\arctg x)^2}$. 5.122. $\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}$. 5.123. $-\frac{3}{\sqrt{4+6x-9x^2}}$.
- 5.124. $\frac{3x^2}{1+x^6}$. 5.125. $-\frac{3}{|x|\sqrt{x^2-9}}$. 5.126. $\frac{\cos x}{|\cos x|}$. 5.127. $-\frac{4\arctg^3 \frac{1}{x}}{1+x^2}$.
- 5.128. $-\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\arcsin x)^2}}$. 5.129. $\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.
- 5.130. $\frac{x+1}{5\sqrt[5]{(\arcsin \sqrt{x^2+2x})^4 \sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}$. 5.131. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos x - 1}$.
- 5.132. $-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$. 5.133. $-\frac{1}{2(1+x^2)}$. 5.134. $4x^3 \log_7 x + \frac{x^3}{\ln 7}$. 5.135. $\frac{3\ln^2 x}{x}$.
- 5.136. $\frac{\ln x + 1}{\ln 10}$. 5.137. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. 5.138. $\frac{1}{7x^7\sqrt{(\ln x)^6}}$. 5.139. $\frac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x} \ln 2$.
- 5.140. $\cos x \ln x - x \sin x \ln x + \cos x$. 5.141. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. 5.142. $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.
- 5.143. $\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$. 5.144. $\frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}$. 5.145. $x^{n-1}(n\ln x + 1)$.
- 5.146. $-\frac{2\ln x}{3x\sqrt[3]{(1-\ln^2 x)^2}}$. 5.147. $\frac{5}{1+5x}$. 5.148. $\frac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}$. 5.149. $-\operatorname{tg} x$.
- 5.150. $\frac{2x}{(x^2+4)\ln 7}$. 5.151. $-\frac{2}{\sin 2x}$. 5.152. $\frac{3}{\arcsin 3x\sqrt{1-9x^2}}$.
- 5.153. $5\ln^4 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$. 5.154. $-\frac{a}{(ax+b)(1+\ln^2(ax+b))}$. 5.155. $-n(1+\ln \cos x)^{n-1} \operatorname{tg} x$.
- 5.156. $\frac{1}{x \log_7 x \log_5 (\log_7 x) \ln 3 \ln 5 \ln 7}$. 5.157. $\frac{x}{\arctg \sqrt{1+x^2} (2+x^2) \sqrt{1+x^2}}$.
- 5.158. $-\frac{12x^2 \arccos^3 \left[\ln(a^3+x^3) \right]}{(a^3+x^3)\sqrt{1-\ln^2(a^3+x^3)}}$. 5.159. $-\frac{\operatorname{tg} \frac{x+3}{7}}{35\sqrt[5]{\ln^4 \cos \frac{x+3}{7}}}$. 5.160. $7^x \ln 7$.
- 5.161. $10^x \ln 10$. 5.162. $-\frac{\ln 5}{5^x}$. 5.163. $9^{-x}(1-x\ln 9)$. 5.164. $10^x(1+x\ln 10)$.

$$5.165. e^x(1+x). \quad 5.166. \frac{1-x}{e^x}. \quad 5.167. a^{-x}(1-x \ln a). \quad 5.168. \frac{3^x(\ln 3 - 1) + 5x^4 - x^5}{e^x}.$$

$$5.169. e^x(\sin x + \cos x). \quad 5.170. \frac{e^x}{\cos^2 x}(\cos x + \sin x). \quad 5.171. \frac{\cos x - \sin x}{e^x}.$$

$$5.172. \frac{(\ln x - 1) \ln 4}{\ln^2 x} 4^{\frac{x}{\ln x}}. \quad 5.173. 7x^6 + 2^x \ln 2. \quad 5.174. \frac{e^x}{2\sqrt{4+e^x}}. \quad 5.175. \frac{2e^{2x}}{5\sqrt[5]{(1-e^{2x})^4}}.$$

$$5.176. e^x(x^2 + 3). \quad 5.177. -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}. \quad 5.178. \frac{2 \cdot 10^x \ln 10}{(1-10^x)^2}. \quad 5.179. \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$5.180. e^x(\cos x + \sin x + 2x \cos x). \quad 5.181. -5e^{-5x}. \quad 5.182. 3 \cdot 10^{3x-7} \ln 10.$$

$$5.183. \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}. \quad 5.184. -7^x \ln 7 \cdot \sin(7^x). \quad 5.185. -2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2.$$

$$5.186. -5 \cos^4 x \sin x a^{\cos^5 x} \ln a. \quad 5.187. \frac{3e^{\arctg 3x}}{1+9x^2}. \quad 5.188. 5^{7^x} \cdot 7^x \cdot \ln 5 \cdot \ln 7.$$

$$5.189. \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}. \quad 5.190. \sin\left(e^{-(x^2+5x+1)}\right) e^{-(x^2+5x+1)}(2x+5).$$

$$5.191. -6 \cdot 10^{1+\cos^3 2x} \ln 10 \cdot \cos^2 2x \sin 2x. \quad 5.192. \frac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}.$$

$$5.193. \frac{5e^{5x}}{2\sqrt{1-e^{10x}} \sqrt[4]{\arcsin^3 e^{5x}} \cdot \sin\left(2\sqrt[4]{\arcsin e^{5x}}\right)}. \quad 5.194. -3ab^3 x^2 e^{-b^3 x^3}.$$

$$5.195. \frac{2}{a^2} x e^{-\frac{x^2}{a^2}} (a^2 - x^2). \quad 5.196. A e^{-k^2 x} [\omega \cos(\omega x + \alpha) - k^2 \sin(\omega x + \alpha)].$$

$$5.197. a^x x^a \left(\frac{a}{x} + \ln a\right). \quad 5.198. 5 \operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh} x. \quad 5.199. \operatorname{cth} x.$$

$$5.200. \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}. \quad 5.201. \frac{3x^2}{\operatorname{ch}^2(1+x^3)}. \quad 5.202. 0. \quad 5.203. 2 \operatorname{sh} 2x.$$

$$5.204. \operatorname{ch}(\operatorname{ch} x) \cdot \operatorname{sh} x. \quad 5.205. \frac{\operatorname{ch} x}{2\sqrt{\operatorname{sh} x}}. \quad 5.206. 3e^{\operatorname{sh}^3 x} \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x. \quad 5.207. -\frac{1}{x \operatorname{sh}^2(\ln x)}.$$

$$5.208. x \operatorname{sh} x. \quad 5.209. -\frac{8 \operatorname{cth} x}{7 \operatorname{sh}^2 x \sqrt[7]{(1+\operatorname{cth}^2 x)^3}}. \quad 5.210. \frac{1}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2}}.$$

$$5.211. \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}}. \quad 5.212. \frac{x(4+\sqrt{x}) \operatorname{sh} 2x + 2(2x^2\sqrt{x}-1) \operatorname{ch} 2x}{2x^2}.$$

- 5.213. $\frac{xe^{3x}}{\operatorname{sh}^2 x} [(3x+2)\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x]$. 5.214. $\operatorname{th}^3 x \left(1 + \frac{1}{2\operatorname{sh} x}\right)$. 5.215. $\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$.
- 5.216. $\frac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}$. 5.217. $\frac{10-2x-2x^2}{3x^2 \sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$.
- 5.218. $-\frac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}$. 5.219. $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.
- 5.220. $\frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. 5.221. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)} \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.
- 5.222. $\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}} \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} \frac{e^x}{1-e^x}\right)$. 5.223. $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$.
- 5.224. $x^{x^x} \cdot x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right)$. 5.225. $2x^{\ln x-1} \ln x$.
- 5.226. $(\operatorname{arctg} x)^x \left(\ln \operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)$. 5.227. $(\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln \sin x}{x} + \ln x \cdot \operatorname{ctg} x\right)$.
- 5.228. $(x^3+4)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln(x^3+4)}{\cos^2 x} + \frac{3x^2 \operatorname{tg} x}{x^3+4}\right)$. 5.229. $(\ln x)^x \left(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x\right)$. 5.230. $x^{e^{\cos x}} \times$
 $\times e^{\cos x} \left(\frac{1}{x} - \sin x \cdot \ln x\right)$. 5.231. $(\cos x)^{x^2} (2x \ln \cos x - x^2 \operatorname{tg} x)$. 5.232. $x^{\arcsin x} \times$
 $\times \left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right)$. 5.233. $x^{\frac{1}{x}-2} (1-\ln x)$. 5.234. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \left(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1}\right)$.
- 5.235. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (2+\ln x)$. 5.236. $-\frac{(1-\sqrt[5]{x})^4}{\sqrt[5]{x^4}}$. 5.237. $-\frac{a}{b\sin^2\left(\frac{x}{b}+c\right)}$.
- 5.238. $\frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$. 5.239. $\frac{2x-5}{\sqrt{1-(x^2-5x+6)^2}}$. 5.240. $\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)\ln 3}$.
- 5.241. $3\sin 2x(1-\sin x)$. 5.242. $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{7}}$. 5.243. $-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$.
- 5.244. $-\frac{1}{3}\sin \frac{x}{3} \cos 5x - 5\cos \frac{x}{3} \sin 5x$. 5.245. $e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$.

$$5.246. e^{x^3} \left(\frac{1}{x} + 3x^2 \ln x \right). \quad 5.247. \frac{7(x-1)}{2x\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^6. \quad 5.248. \frac{1}{1+x^2}. \quad 5.249. 2x^2 e^{2x+3}.$$

$$5.250. \frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}. \quad 5.251. \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}. \quad 5.252. -\frac{2(x\cos x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x}.$$

$$5.253. \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sin \frac{2x}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{3} \cos e^{c^2 \frac{x}{2}}. \quad 5.254. -\frac{4(31x^5 + 18)}{27x^5 \sqrt[9]{(4x^5 + 2)^8}}.$$

$$5.255. \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}. \quad 5.256. 3\cos 3x \ln x + \frac{\sin 3x}{x}. \quad 5.257. \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}.$$

$$5.258. \sin^5 5x \cos^3 5x. \quad 5.259. \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 5.260. -\frac{1}{2} \cos \frac{\arccos x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$5.261. -\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}. \quad 5.262. 4\sin^3 \left(\frac{1-\ln x}{x} \right) \cos \left(\frac{1-\ln x}{x} \right) \cdot \frac{\ln x - 2}{x^2}.$$

$$5.263. \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \ln 3}. \quad 5.264. \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}. \quad 5.265. \arcsin(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

$$5.266. \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \cos e^{c^2} \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right). \quad 5.267. -\frac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}. \quad 5.268. 10^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{x} \ln 10 \right).$$

$$5.269. -\frac{15}{\operatorname{tg}^2 5x \cdot \sin^2 5x}. \quad 5.270. -\frac{1}{(x^2 + 2x + 2) \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}}. \quad 5.271. -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$5.272. \frac{x+2}{2\sqrt{x+3} \sqrt[3]{(1+x\sqrt{x+3})^2}}. \quad 5.273. \frac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}. \quad 5.274. -\frac{\sin 2x}{2\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}.$$

$$5.275. 5x^4 \operatorname{arctg} x^5 + \frac{5x^9}{1+x^{10}}. \quad 5.276. \frac{\operatorname{ctg} x \ln \cos x + \operatorname{tg} x \ln \sin x}{\ln^2 \cos x}. \quad 5.277. \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$5.278. \frac{7}{(1-7x)^2} \left(\arccos 7x - \sqrt{\frac{1-7x}{1+7x}} \right). \quad 5.279. -\frac{5^{\ln x} \cdot \ln 5}{x \ln^2 x}. \quad 5.280. \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$5.281. e^{x \operatorname{ctg} x} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x} \right). \quad 5.282. -2\cos x (\sin x \cos x^2 + x \cos x \sin x^2).$$

$$5.283. \frac{2\sin x}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}. \quad 5.284. \frac{x^2}{x^4 - 1}. \quad 5.285. \frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)} \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}.$$

$$5.286. 10^{\frac{x}{\ln x}} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \cdot \ln 10. \quad 5.287. \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}. \quad 5.288. -\frac{\ln 6}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} 6^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

- 5.289. $-\cos 2x$. 5.290. $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. 5.291. $e^{1+\sin x}(1+x\cos x)$.
- 5.292. $\frac{6e^{-3x}}{(1+e^{-6x})(\operatorname{arctg} e^{-3x})^3}$. 5.293. $10e^x \sin 3x$. 5.294. $9x^2 \arcsin x$.
- 5.295. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(1-e^{\sqrt{x}})^3}}$. 5.296. $\frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$. 5.297. $\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.
- 5.298. $-\frac{\cos(x+\cos x)(1-\sin x)}{\sin^2(x+\cos x)}$. 5.299. $e^x \sin x \cos^3 x(1+\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x)$.
- 5.300. $\frac{36\sqrt[5]{x^4}}{35\sqrt[7]{(5+4\sqrt[5]{x^9})^6}}$. 5.301. $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$. 5.302. $\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$.
- 5.303. $\frac{40}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}$. 5.304. $\frac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$. 5.305. $\frac{1}{x}-\frac{x}{1-x^2}+\operatorname{ctg} x$.
- 5.306. $\frac{(1+2x^2)\sin x+x(1+x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$. 5.307. $\frac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}$.
- 5.308. $\frac{e^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x} \left[1+x+\frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}-\frac{5}{\ln x} \right]$. 5.311. $\sqrt{1-y^2} e^{-\arcsin y}$ і $\frac{\cos \ln x}{x}$.
- 5.312. $\frac{1}{3(s^2-1)}$. 5.314. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 5.315. $(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $(\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;
 $(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$. 5.316. $\frac{e^t}{1-t}$. 5.317. $-\frac{(1+x^4)^2}{8x^3}$; $-\frac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}$.
- 5.318. $\frac{1}{5y^4-4y}$. 5.319. $\frac{1}{3y^2+5}$. 5.320. $\frac{1}{2^s \ln 2} \sqrt{1-2^{2s}}$; $\frac{1}{\ln 2} \operatorname{ctg} t$.
- 5.321. $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$. 5.322. $\frac{3a^2 \cos 3x+y^2 \sin x}{2y \cos x}$. 5.323. $\frac{y}{y-x}$. 5.324. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$.
- 5.325. $\frac{ay-x^4}{y^4-ax}$. 5.326. $\frac{3a}{4(2y-y^3)}$. 5.327. $-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.
- 5.328. $\frac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$. 5.329. $5^{x-y} \frac{5^y-1}{1-5^x}$. 5.330. $-\frac{y \cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x \cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$.

- 5.331.** $\frac{1}{2(1+\ln y)}$. **5.332.** $\frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}$. **5.333.** $\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$.
- 5.334.** $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. **5.335.** $\frac{e^y}{1-y}$. **5.336.** $-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$. **5.337.** $-3\sqrt{\frac{y}{x}}$.
- 5.338.** $\frac{\sin y}{2\sin 2y - \sin y - x \cos y}$. **5.339.** $\frac{1+y^2}{y^2}$. **5.340.** $\frac{y \cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$.
- 5.341.** $y+4x+4=0$; $8y-2x+15=0$; піддотична рівна $\frac{1}{2}$; піднормаль рівна -8 .
- 5.343.** $(1; 0)$, $(-1; -4)$. **5.344.** $7x+y-3=0$, $x-7y+71=0$. **5.345.** $y-5=0$, $x+2=0$.
- 5.346.** $x-4y+4=0$, $4x+y-18=0$. **5.347.** $y-2x=0$, $2y+x=0$.
- 5.348.** $x-y-1=0$, $x+y-1=0$. **5.349.** $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$.
- 5.350.** $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. **5.351.** $x+y-2=0$.
- 5.352.** $27x-3y-79=0$. **5.353.** $2x-y-1=0$. **5.354.** В точці $M_1(0;0)$ кут рівний 0 (параболи дотикаються) і в точці $M_2(1;1)$ кут рівний $\arctg \frac{1}{7}$. **5.355.** $\arctg \frac{8}{15}$.
- 5.356.** $\arctg 2\sqrt{2}$. **5.357.** $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{2}$. **5.358.** а) $t_1=0$, $t_2=8$; б) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$;
- в) $t_1 = \frac{4}{3}(3+\sqrt{3})$, $t_2 = \frac{4}{3}(3-\sqrt{3})$. **5.359.** $a\omega e^{a\varphi}$. **5.360.** $4v$ і $2av$. **5.361.** $2\pi v$ і $2\pi v_0$. **5.362.** $4\pi r^2 v_0$ і $8\pi r v_0$. **5.363.** 1) $y=4x+x^2$; 2) $y^2=4x^2(1-x^2)$;
- 3) $y^3=(x-1)^2$; 4) $y = \frac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}$. **5.364.** $3t+4$. **5.365.** $\frac{1}{3t}$. **5.366.** $-\frac{2t}{t+1}$.
- 5.367.** -5^{6r+1} . **5.368.** $-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi$. **5.369.** $2\cos^2 t(\cos 2t - 2\sin 2t)$. **5.370.** 1 . **5.371.** $\frac{t}{2}$.
- 5.372.** $\frac{2}{3} \ln 2 \operatorname{ctg} 2t$. **5.373.** $-\frac{\sqrt{2-t^2}}{2\sqrt{4-t^2}}$. **5.374.** $\frac{b}{a} \operatorname{th} t$. **5.375.** 1 . **5.376.** -1 .
- 5.377.** $2+\sqrt{3}$. **5.378.** $-\frac{4}{3}$. **5.381.** $\Delta y=1,461$; $dy=1,4$. **5.382.** $\Delta y=0,1012$; $dy=0,1$;
- $\frac{dy}{\Delta y}=0,988$. **5.383.** -2 . **5.384.** $\Delta y=1,91$; $dy=1,9$; $|\Delta y - dy|=0,01$;
- $\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = 0,0052$. **5.385.** $(\Delta y)_1=1,261$; $(dy)_1=1,2$; $(\Delta y)_2=0,120601$; $(dy)_2=0,12$.
- 5.386.** $\Delta y=0,1$; $dy=0,1025$; $|\Delta y - dy|=0,0025$; $\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = 0,025$. **5.387.** 2 см.

- 5.388. 3 см. 5.389. 1) $\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\frac{dx}{5\sqrt[5]{x^4}}$; 3) $-\frac{dx}{x^3}$; 4) $-\frac{dx}{x^8}$; 5) $-\frac{dx}{4x\sqrt{x}}$;
- 6) $\frac{3\sqrt{x} dx}{2(a+b)}$; 7) $-\frac{p \ln q}{q^x} dx$; 8) $-\frac{(a+b)dx}{2x\sqrt{x}}$; 9) $-\frac{6x^2 dx}{(x^3-1)^2}$; 10) $-\frac{2tdt}{(t^2+1)^2}$;
- 11) $5(1+3x-2x^2)^4(3-4x)dx$; 12) $-\frac{4\text{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$; 13) $3^{\ln \text{tg} x} \frac{2 \ln 3}{\sin 2x} dx$;
- 14) $\frac{1}{7^{\cos x}} \ln 7 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; 15) $-\frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2}}$; 16) $-\frac{(x^2+1)\sin x + 2x \cos x}{(x^2+1)^2} dx$;
- 17) $\left(\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x} \sqrt{1-x^2}} + \frac{3(\arctg x)^2}{1+x^2} \right) dx$; 18) $\arctg x dx$; 19) $\ln x dx$;
- 20) $\arcsin x dx$. 5.390. $\frac{2xdx}{3y^2+5y^4}$. 5.391. $\frac{x(y^2-2x^2)dx}{y(2y^2-x^2)}$. 5.392. $\frac{3x^2 dx}{e^y-2y}$.
- 5.393. $-\frac{5x^4+y \sin(xy)}{x \sin(xy)} dx$. 5.394. $\frac{x+y}{x-y} dx$. 5.395. а) 0,805; б) 0,05; в) 0,2; г) 2,93.
- 5.396. 1,2. 5.397. 0,355. 5.398. 1) $dy = \frac{(2t^3+4t+7)(3t^2+2)dt}{3 \sqrt[3]{(t^3+2t+1)(t^3+2t+6)}}$;
- 2) $ds = -\frac{t}{2} \sin \frac{t^2-1}{2} dt$; 3) $dz = -ds$; 4) $ds = \frac{(15u^2+2)du}{2\sqrt{5u^3+2u-7}}$; 5) $dy = -\frac{2ds}{\cos 2s}$.
- 5.400. Неперервна та диференційовна. 5.401. При $x=k\pi$, де k - довільне ціле число. 5.402. $f'(0)=0$. 5.403. Неперервна, але недиференційовна. 5.404. Неперервна, але недиференційовна. 5.405. 2. 5.406. $-48x$. 5.407. 207306.
- 5.408. 360. 5.409. 2. 5.410. 6. 5.411. $6(5x^4+6x^2+1)$. 5.412. $-4\sin 2x$. 5.413. $\frac{4}{e}$.
- 5.414. $\frac{1}{2}$. 5.415. $\frac{-5!}{(x-1)^6}$. 5.416. $\frac{2(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^{n+1}}$. 5.417. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$.
- 5.418. $2e^{x^2}(3x+2x^3)$. 5.419. $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$. 5.420. $-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. 5.421. $\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$.
- 5.422. $-\frac{2}{3 \ln 5} \cdot \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. 5.423. $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 5.424. $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.
- 5.425. $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$. 5.426. $x^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x) \times$

$$\times \left(\frac{1}{4} \ln x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(2+\ln x)} \right). \quad \mathbf{5.427.} \quad (b \ln a)^n a^{bx}. \quad \mathbf{5.428.} \quad (-1)^n e^{-x}.$$

$$\mathbf{5.429.} \quad \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right). \quad \mathbf{5.430.} \quad (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}. \quad \mathbf{5.431.} \quad (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}, (n \geq 2).$$

$$\mathbf{5.432.} \quad 2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right). \quad \mathbf{5.433.} \quad (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}. \quad \mathbf{5.434.} \quad (-1)^n \times$$

$$\times \frac{n!}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]. \quad \mathbf{5.435.} \quad (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].$$

$$\mathbf{5.436.} \quad 4^{n-1} \cos \left(4x + n \frac{\pi}{2} \right). \quad \mathbf{5.442.} \quad -\frac{b^4}{a^2 y^3}. \quad \mathbf{5.443.} \quad e^{2y} \frac{2 - x e^y}{(1 - x e^y)^3}.$$

$$\mathbf{5.444.} \quad -\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3}. \quad \mathbf{5.445.} \quad -\frac{2(3y^4 + 8y^2 + 5)}{y^8}. \quad \mathbf{5.446.} \quad -\frac{y}{[1 - \cos(x+y)]^3}.$$

$$\mathbf{5.447.} \quad \frac{y[(1+y)^2 + (x-1)^2]}{x^2(1+y)^3}. \quad \mathbf{5.448.} \quad \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}. \quad \mathbf{5.450.} \quad -\frac{2a}{9b^2 t^4}. \quad \mathbf{5.451.} \quad 9t^3.$$

$$\mathbf{5.452.} \quad -\frac{1}{a \sin^3 t}. \quad \mathbf{5.453.} \quad -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}. \quad \mathbf{5.454.} \quad 0. \quad \mathbf{5.455.} \quad -\frac{2}{1-t^2}.$$

$$\mathbf{5.456.} \quad 2(1+t^2). \quad \mathbf{5.457.} \quad \frac{2+t^2}{a(\cos t - t \sin t)^3}. \quad \mathbf{5.458.} \quad \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}.$$

$$\mathbf{5.459.} \quad (209 - x - x^2) \cos x - 15(2x+1) \sin x. \quad \mathbf{5.460.} \quad (x^2 + 39x + 360)e^x.$$

$$\mathbf{5.461.} \quad 4\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) e^{-x}. \quad \mathbf{5.462.} \quad \frac{8! \log_2 e}{x^9}. \quad \mathbf{5.463.} \quad x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x.$$

$$\mathbf{5.464.} \quad e^x \sum_{k=0}^n C_n^k \sin \left(x + k \frac{\pi}{2} \right). \quad \mathbf{5.466.} \quad -ab^2 \sin(bx+c) dx^2. \quad \mathbf{5.467.} \quad -\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

$$\mathbf{5.468.} \quad 4(x+1)(5x^2 - 2x - 1) dx^2. \quad \mathbf{5.469.} \quad 5^{-x^2} \ln 25(2x^2 \ln 5 - 1) dx^2.$$

$$\mathbf{5.470.} \quad \frac{ab(a^2 - b^2) \sin 2x dx^2}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}. \quad \mathbf{5.471.} \quad \frac{(2-x^2) \sin x - 2x \cos x}{x^3} dx^2.$$

$$\mathbf{5.472.} \quad -\frac{\sqrt{1-x^2} x + \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx^2. \quad \mathbf{5.473.} \quad \frac{4 \ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2 \sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}} dx^2. \quad \mathbf{5.474.} \quad \frac{2dx^2}{(x+2)^3}.$$

$$\mathbf{5.475.} \quad \frac{6x(1+3y^2) dx^2}{(1-3y^2)^3}. \quad \mathbf{5.476.} \quad \frac{(x-y) dx^2}{(1-a \cos y)^3}. \quad \mathbf{5.477.} \quad \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} dx^2. \quad \mathbf{5.483.} \quad \text{Три}$$

корені, що належать відповідно інтервалам (1; 2), (2; 3) і (3; 4).

- 5.484.** $\sin 3b - \sin 3a = 3(b-a)\cos 3\xi$, де $a < \xi < b$. **5.485.** $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- 5.486.** $a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b) = (b-a)\ln \xi$, де $a < \xi < b$. **5.487.** $\arcsin 2b - \arcsin 2a = \frac{2(b-a)}{\sqrt{1-4\xi^2}}$, де $a < \xi < b$. **5.494.** $(-\infty; -1)$ зростає, $(-1; 3)$ спадає, $(3; +\infty)$ зростає. **5.495.** $(-\infty; -1)$ спадає, $(-1; 0)$ зростає, $(0; 1)$ спадає, $(1; +\infty)$ зростає.
- 5.496.** $(-\infty; -\frac{1}{2})$ зростає, $(-\frac{1}{2}; \frac{11}{18})$ спадає, $(\frac{11}{18}; +\infty)$ зростає.
- 5.497.** $(-\infty; -2)$ зростає, $(2; 3)$ спадає, $(3; +\infty)$ зростає. **5.498.** $(-\infty; -1)$ зростає, $(-1; 1)$ спадає, $(1; +\infty)$ зростає. **5.499.** $(-\infty; 0)$ спадає, $(0; \frac{1}{2})$ спадає, $(\frac{1}{2}; 1)$ зростає, $(1; +\infty)$ спадає. **5.500.** $(-\infty; 0)$ спадає, $(0; +\infty)$ зростає. **5.501.** $(-\infty; 0)$ спадає, $(0; 2)$ зростає, $(2; +\infty)$ спадає. **5.502.** $(0; 1)$ спадає, $(1; e)$ спадає, $(e; +\infty)$ зростає. **5.503.** $(0; \frac{1}{2})$ зростає, $(\frac{1}{2}; +\infty)$ спадає. **5.504.** $(0; \frac{\pi}{3})$ зростає, $(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3})$ спадає, $(\frac{5\pi}{3}; 2\pi)$ зростає. **5.505.** $(0; \frac{\pi}{6})$ зростає, $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$ спадає, $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6})$ зростає, $(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$ спадає, $(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$ зростає. **5.506.** Монотонно зростає.
- 5.507.** Монотонно зростає. **5.508.** $(0; \frac{3}{4}a)$ зростає, $(\frac{3}{4}a; a)$ спадає.
- 5.509.** $y_{\max} = 5$ при $x = 0$, $y_{\min} = 4$ при $x = 1$. **5.510.** $y_{\max} = 11$ при $x = -1$, $y_{\min} = -53$ при $x = 3$. **5.511.** $y_{\max} = 4$ при $x = 0$, $y_{\min} = \frac{8}{3}$ при $x = -2$.
- 5.512.** $y_{\max} = 2$ при $x = 0$, $y_{\min} = \sqrt[3]{4}$ при $x = 2$. **5.513.** $y_{\max} = \frac{1}{\ln 3}$ при $x = -3$.
- 5.514.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **5.515.** $y_{\max} = -2$ при $x = -2$, $y_{\min} = 2$ при $x = 2$.
- 5.516.** $y_{\min} = -1$ при $x = 0$. **5.517.** $y_{\max} = 1$ при $x = 0$. **5.518.** $y_{\max} = 1$ при $x = 4$.
- 5.519.** $y_{\max} = 1$ при $x = 1$. **5.520.** $y_{\min} = \frac{2-\pi}{4} \approx -0,28$ при $x = \frac{1}{2}$, $y_{\max} = \frac{\pi-2}{4} \approx +0,28$ при $x = -\frac{1}{2}$. **5.521.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **5.522.** $y_{\min} = 2$ при $x = \frac{2}{3}$. **5.523.** $y_{\max} = \frac{\sqrt{205}}{10}$ при $x = \frac{12}{5}$. **5.524.** Монотонно зростає.
- 5.525.** $y_{\max} = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ при $x = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = 0$ при $x = -1$ і при $x = 5$.

Відповіді

5.526. $y_{\max} = 2,5$ при $x = 1$, $y_{\min} = \frac{e(4-e)}{2} \approx 1,76$ при $x = e$.

5.527. $y_{\max} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2,45$ при $x = \frac{\pi}{3}$, $y_{\min} = \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \approx -2,45$ при $x = -\frac{\pi}{3}$.

5.528. $y_{\max} = 1$ при $x = \frac{\pi}{4}$. **5.529.** $y_{\min} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$ при $x = 1$. **5.530.** 3 і -24 .

5.531. 8 і 0. **5.532.** 2 і -12 . **5.533.** 2 і -10 . **5.534.** 10 і 6. **5.535.** $\frac{3}{5}$ і -1 . **5.536.** 1 і

$\frac{3}{5}$. **5.537.** $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$. **5.538.** 2 і $\sqrt[3]{2}$. **5.539.** $\sqrt[3]{9}$ і 0. **5.540.** $\frac{\pi}{4}$ і 0. **5.551.** 5 і 5.

5.552. 1. **5.553.** 4 і 4. **5.554.** 3,6 і 4 см. **5.555.** $\sqrt[3]{4V}$. **5.556.** Радіус основи рівний

висоті і дорівнює $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **5.557.** $H = 2R$. **5.558.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ дм. **5.559.** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 293^{\circ}56'$.

5.560. Бічна сторона рівна $\frac{3p}{4}$, основа рівна $\frac{p}{2}$. **5.561.** Бічна сторона рівна $\frac{3p}{5}$,

основа рівна $\frac{4p}{5}$. **5.562.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **5.563.** $\frac{4}{3}R$. **5.564.** $\frac{4R\sqrt{5}}{5}$ і $\frac{R\sqrt{5}}{5}$. **5.565.** $4R$.

5.566. Радіус основи конуса повинен бути в півтора рази більшим за радіус основи

циліндра. **5.567.** $\approx 49^{\circ}$. **5.568.** 60° . **5.569.** $R\sqrt{3}$. **5.570.** $\frac{4}{3}R$. **5.572.** 125 м.

5.573. $\frac{a\sqrt[3]{F_1}}{\sqrt[3]{F_1} + \sqrt[3]{F_2}}$ - відстань до першого джерела світла. **5.574.** Ширина перерізу

балки $\frac{d}{\sqrt{3}}$, висота- $d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **5.575.** $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$. **5.576.** $0,5h$. **5.555.** $\sqrt[3]{4V}$.

5.556. Радіус основи рівний висоті і дорівнює $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **5.557.** $H = 2R$.

5.558. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ дм. **5.559.** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 293^{\circ}56'$. **5.560.** Бічна сторона рівна $\frac{3p}{4}$, основа

рівна $\frac{p}{2}$. **5.561.** Бічна сторона рівна $\frac{3p}{5}$, основа рівна $\frac{4p}{5}$. **5.562.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

5.563. $\frac{4}{3}R$. **5.564.** $\frac{4R\sqrt{5}}{5}$ і $\frac{R\sqrt{5}}{5}$. **5.565.** $4R$. **5.566.** Радіус основи конуса повинен

бути в півтора рази більшим за радіус основи циліндра. **5.567.** $\approx 49^{\circ}$. **5.568.** 60° .

5.569. $R\sqrt{3}$. **5.570.** $\frac{4}{3}R$. **5.572.** 125 м. **5.573.** $\frac{a\sqrt[3]{F_1}}{\sqrt[3]{F_1} + \sqrt[3]{F_2}}$ - відстань до першого

джерела світла. **5.574.** Ширина перерізу балки $\frac{d}{\sqrt{3}}$, висота- $d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5.575. $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$. **5.576.** $0,5h$. **5.577.** Довжина балки $13\frac{1}{3}$ м, сторона

поперечного перерізу $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ м. **5.578.** $y_{\max} = 4$ при $x = 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 3$.

5.579. $y_{\max} = 16$ при $x = 2$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$ та $x = 4$. **5.580.** $y_{\max} = -6$ при

$x = -3$, $y_{\min} = 6$ при $x = 3$. **5.581.** $y_{\max} = \frac{5}{4}$ при $x = \frac{3}{4}$. **5.582.** $y_{\max} = 1$ при

$x = 1$, $y_{\min} = -1$ при $x = -1$. **5.583.** $y_{\min} = 1$ при $x = 0$. **5.584.** $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$ при

$x = 2$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **5.585.** $y_{\min} = e$ при $x = e$. **5.586.** $y_{\max} = \sqrt[e]{e}$ при $x = e$.

5.587. $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{6}$. **5.588.** Опукла в околі точки A , вгнута в околі точки B .

5.589. Опукла в околі точки A , вгнута в околі точки B . **5.590.** Опукла в околі

точки B , вгнута в околі точки A . **5.596.** Точка перегину $\left(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27}\right)$. Інтервали:

опуклості $-\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$, вгнутості $-\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. **5.597.** Точки перегину $(2; 12)$ та

$(4; 156)$. Інтервали: вгнутості $-\left(-\infty; 2\right)$, опуклості $-\left(2; 4\right)$, вгнутості $-\left(4; +\infty\right)$.

5.598. Точка перегину $(0; 1)$. Інтервали: опуклості $-\left(-\infty; 0\right)$, вгнутості $-\left(0; +\infty\right)$.

5.599. Точок перегину немає, графік вгнутий. **5.600.** Точок перегину немає, графік

вгнутий. **5.601.** Точка перегину $(2; 1)$. Інтервали: опуклості $-\left(-\infty; 2\right)$, вгнутості

$\left(2; +\infty\right)$. **5.602.** Точки перегину $(-3; 294)$ та $(2; 114)$. Інтервали: опуклості

$-\left(-\infty; -3\right)$, вгнутості $-\left(-3; 2\right)$, опуклості $-\left(2; +\infty\right)$. **5.603.** Точка перегину

$(1; 6)$. Інтервали: опуклості $-\left(-\infty; 1\right)$, вгнутості $-\left(1; +\infty\right)$. **5.604.** Точок перегину

немає. Графік вгнутий. **5.605.** Точки перегину $\left(-1; \sqrt[3]{2}\right)$ та $\left(1; \sqrt[3]{2}\right)$. Інтервали:

вгнутості $-\left(-\infty; -1\right)$, опуклості $-\left(-1; 1\right)$, вгнутості $-\left(1; +\infty\right)$. **5.606.** Точки

перегину $(-1; \ln 2)$ та $(1; \ln 2)$. Інтервали: опуклості $-\left(-\infty; -1\right)$, вгнутості $-\left(-1; 1\right)$,

опуклості $-\left(1; +\infty\right)$. **5.607.** Точка перегину $\left(\frac{1}{2}; e^{\arctg \frac{1}{2}}\right)$. Інтервали: вгнутості

$-\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, опуклості $-\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **5.608.** Точка перегину $(-1; 1 - e^{-2})$. Інтервали:

опуклості $-\left(-\infty; -1\right)$, вгнутості $-\left(-1; +\infty\right)$. **5.609.** Точка перегину

$\left(e^{\frac{5}{6}}; 9 - \frac{5}{6} e^{\frac{5}{2}} \right)$. Інтервали: опуклості $-\left(0; e^{\frac{5}{6}} \right)$, вгнутості $-\left(e^{\frac{5}{6}}; +\infty \right)$.

5.610. Точка перегину $(1; -7)$. Інтервали: опуклості $-(0; 1)$, вгнутості $-(1; +\infty)$.

5.613. $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$. **5.614.** При $a \in \left(-\infty; -\frac{e}{6} \right) \cup (0; +\infty)$. **5.616.** Точки перегину

$(1; 4)$ та $(1; -4)$. **5.617.** Точки перегину при $t = \frac{3\pi}{4} \pm k\pi$, $(k=0,1,2,\dots)$.

5.618. $\frac{\sin b - \sin a}{\ln \frac{b}{a}} = \xi \cos \xi$, де $a < \xi < b$. **5.619.** $e^b + e^a = 2e^\xi$, де $a < \xi < b$.

5.622. 0. **5.623.** 0. **5.624.** 1. **5.625.** $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. **5.626.** e^a . **5.627.** 1. **5.628.** $+\infty$. **5.629.** -2 .

5.630. 2. **5.631.** $\frac{4}{7}$. **5.632.** $\frac{1}{3}$. **5.633.** $\frac{a}{\sqrt{b}}$. **5.634.** $-\frac{1}{2}$. **5.635.** 2. **5.636.** $\frac{m}{n} a^{m-n}$.

5.637. $\frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln \frac{c}{d}}$. **5.638.** -2 . **5.639.** 2. **5.640.** $\ln \frac{a}{b}$. **5.641.** $\cos a$. **5.642.** 2. **5.643.** 1.

5.644. 1. **5.645.** 1. **5.646.** $\frac{1}{2}$. **5.647.** $\frac{1}{2}$. **5.648.** 1. **5.649.** 0. **5.650.** 0. **5.651.** 0. **5.652.** 2.

5.653. 0. **5.654.** $+\infty$. **5.655.** $\frac{1}{\pi}$. **5.656.** a . **5.657.** $\frac{1}{2}$. **5.658.** -1 . **5.659.** 0. **5.660.** 0.

5.661. $\frac{1}{12}$. **5.662.** -1 . **5.663.** 1. **5.664.** 1. **5.665.** 1. **5.666.** e . **5.667.** 1. **5.668.** 2.

5.669. $\frac{1}{e}$. **5.670.** 1. **5.671.** $\frac{1}{e}$. **5.672.** 1. **5.673.** e^{-6} . **5.674.** e^2 . **5.675.** e . **5.676.** $e^{\frac{1}{6}}$.

5.680. $y = \pm \frac{b}{a} x$. **5.681.** $x=0, y=0$. **5.682.** $y=0$. **5.683.** $x=-1, y = \frac{1}{2}x - 1$.

5.684. $x+y=0$. **5.685.** $y = \pm x$. **5.686.** $y = x + 2$. **5.687.** $x=0, y=0; x+y=0$.

5.688. $y+1=0; 2x+y+1=0$. **5.689.** $x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}$. **5.690.** $x=0, y=x$.

5.691. $x=0, y=x+3$. **5.692.** $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ (права); $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ (ліва).

5.693. $x=2, y=1$. **5.694.** $x=0, y=2x, x=-1$ (права). **5.695.** $y=0$.

5.696. Якщо $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \infty$, а $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = b$, то $y=b$ - асимптота; якщо $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \infty$,

a $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = a$, то $x = a$ - асимптота. **5.697.** $x = -1, y = 0$. **5.968.** $y = \frac{1}{2}x + e$.

5.699. $y = \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. **5.700.** $x + y + a = 0$. **5.701.** $x = 2$;

$2x + 8y + 1 = 0$; $6x - 40y + 9 = 0$.

5.702. Визначена скрізь. Непарна функція. $y_{\max} = \frac{1}{2}$ при $x = 1$, $y_{\min} = -\frac{1}{2}$ при

$x = -1$. Точки перегину: $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0; 0)$ та $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y = 0$.

5.703. Визначена скрізь, крім точок $x = \pm 1$. Парна функція. Максимумів немає. $y_{\min} = 1$ при $x = 0$. Точок перегину немає. Асимптоти $x = \pm 1, y = 0$.

5.704. Визначена скрізь, крім точок $x = \pm 1$. Непарна функція. Екстремумів немає. Точка перегину $(0; 0)$. Асимптоти $x = -1, x = 1, y = 0$.

5.705. Визначена скрізь, крім точок $x = 1, x = 2$ та $x = 3$. $y_{\max} \approx -2,60$ при $x \approx 2,58$, $y_{\min} \approx 2,60$ при $x \approx 1,42$. Точок перегину немає. Асимптоти $x = 1, x = 2, x = 3$ та $y = 0$.

5.706. Визначена скрізь, крім точок $x = \pm 1$. Парна функція. $y_{\max} = 0$ при $x = 0$. Мінімумів немає. Точок перегину немає. Асимптоти $x = \pm 1, y = 1$.

5.707. Визначена скрізь. Парна функція. Максимумів немає. $y_{\min} = -1$ при $x = 0$. Точки перегину $(1; 0)$, $(-1; 0)$ та $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{64}{125}\right)$. Асимптот немає.

5.708. Визначена скрізь, крім точки $x = 1$. Максимумів немає. $y_{\min} = \frac{27}{8}$ при $x = 3$.

Точка перегину $(0; 0)$. Асимптоти $x = 1, y = \frac{1}{2}x + 1$.

5.709. Визначена скрізь. Парна функція. $y_{\max} = 0$ при $x = 0$, $y_{\min} = -\frac{27}{8}$ при $x = \pm \frac{1}{2}$.

Точки перегину при $x = \pm 1, x \approx \pm 0,7$ та $x \approx \pm 0,26$. Асимптот немає. **5.710.** Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. Максимумів немає. $y_{\min} = 3$ при $x = \frac{1}{2}$. Точка перегину

$\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}; 0\right)$. Асимптота $x = 0$.

5.711. Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. Парна функція. Максимумів немає. $y_{\min} = 2$ при $x = \pm 1$. Точок перегину немає. Асимптота $x = 0$.

5.712. Визначена скрізь, крім точки $x=1$. Максимумів немає. $y_{\min} = -1$ при $x=0$.

Точка перегину $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$. Асимптоти $x=1, y=0$.

5.713. Визначена скрізь, крім точки $x=\pm\sqrt{3}$. Непарна функція. $y_{\max} = -4,5$ при $x=3, y_{\min} = 4,5$ при $x=-3$. Точка перегину $(0; 0)$. Асимптоти $x=\pm\sqrt{3}$ та $x+y=0$.

5.714. Визначена скрізь, крім точки $x=1$. Максимумів немає. $y_{\min} = \frac{27}{4}$ при $x=\frac{3}{2}$.

Точка перегину $(0; 0)$. Асимптота $x=1$.

5.715. Визначена скрізь, крім точки $x=1$. $y_{\max} = 0$ при $x=0, y_{\min} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ при $x=\sqrt[3]{4}$.

Точка перегину $\left(-\sqrt[3]{2}; -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. Асимптоти $x=1$ та $y=x$.

5.716. Визначена скрізь, крім точки $x=-1, y_{\max} = \frac{2}{27}$ при $x=5, y_{\min} = 0$ при

$x=1$. Точки перегину при $x=5\pm 2\sqrt{3}$. Асимптоти $x=-1$ та $y=0$.

5.717. Визначена скрізь. Парна функція. Максимумів немає. $y_{\min} = -1$ при $x=0$.

Точки перегину $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}\right)$. Асимптота $y=1$.

5.718. Визначена скрізь, крім точки $x=-1$. Екстремумів немає. Точки перегину

$(0; 0)$ та $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \frac{1}{3}\right)$. Асимптоти $x=-1$ та $y=1$.

5.719. Визначена скрізь, крім точки $x=\sqrt[3]{2}$. Максимумів немає. $y_{\min} = -\frac{1}{3}$ при

$x=-1$. Точка перегину $\left(-\sqrt[3]{4}; -\frac{\sqrt[3]{4}}{6}\right)$. Асимптоти $x=\sqrt[3]{2}$ та $y=0$.

5.720. Визначена скрізь, крім точок $x=\pm 1$. Непарна функція. Екстремумів немає.

Точка перегину $(0; 0)$. Асимптоти $x=\pm 1$ та $y=0$.

5.721. Визначена скрізь, крім точки $x=0, y_{\max} = \frac{7}{2}$ при $x=1, y_{\max} = -\frac{11}{6}$ при

$x=-3, y_{\min} = \frac{27}{8}$ при $x=2$. Точка перегину при $x=\frac{9}{7}$. Асимптоти $x=0$ та

$y=\frac{1}{2}x+1$.

5.722. Визначена скрізь. Максимумів немає. $y_{\min} = -1$ при $x=1$. Точки перегину

$(0; 0)$ та $(2; 0)$. Асимптот немає.

- 5.723.** Визначена скрізь. Парна функція. $y_{\max} = 2$ при $x = 0$. Мінімумів немає. Точки перегину $(\pm 1; \sqrt[3]{2})$. Асимптота $y = 0$.
- 5.724.** Визначена скрізь. Екстремумів немає. Точки перегину $(0; 1)$ та $(1; 0)$. Асимптота $y = -x$.
- 5.725.** Визначена скрізь. Парна функція. $y_{\max} = 2$ при $x = 0$, $y_{\min} = \sqrt[3]{4}$ при $x = \pm 1$. Точок перегину та асимптот немає.
- 5.726.** Визначена скрізь, крім точок $x = \pm 1$. Непарна функція. Екстремумів немає. Точка перегину $(0; 0)$. Асимптоти $x = \pm 1$ та $y = 0$.
- 5.727.** Визначена скрізь. Непарна функція. Екстремумів немає. Точки перегину $(0; 0)$ та $(\pm 1; \pm \sqrt[3]{2})$. Асимптот немає.
- 5.728.** Визначена скрізь. Непарна функція. Екстремумів немає. Точки перегину $(0; 0)$ та $(\pm 1; \pm \sqrt{2})$. Асимптота $y = 2x$.
- 5.729.** Визначена скрізь. Непарна функція. Екстремумів немає. Точка перегину $(0; 0)$. Асимптоти $y = -1$ (ліва) та $y = 1$ (права).
- 5.730.** Визначена скрізь. Непарна функція. Екстремумів немає. Точки перегину $(0; 0)$ та $(\pm 1; \pm \sqrt[3]{2})$. Асимптота $y = x$.
- 5.731.** Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. Екстремумів немає. Точки перегину $(-\sqrt[3]{2}; 0)$ та $(-1; 1)$. Асимптоти $x = 0$ та $y = 1$.
- 5.732.** Визначена скрізь, крім точки $x = \sqrt[3]{4}$. $y_{\max} = 0$ при $x = 0$, $y_{\min} = \sqrt[3]{16}$ при $x = 2$. Точка перегину $(-\sqrt[3]{4}; -\sqrt[3]{2})$. Асимптоти $x = \sqrt[3]{4}$ та $y = x$.
- 5.733.** Визначена скрізь. Парна функція. Максимумів немає. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. Точки перегину $(\pm \sqrt{2}; \frac{2}{\sqrt{3}})$. Асимптоти $y = x$ (права) та $y = -x$ (ліва).
- 5.734.** Визначена скрізь, крім точки $x = -\sqrt[3]{2}$. Максимумів немає. $y_{\min} = 1$ при $x = -\sqrt[3]{3}$. Точка перегину $(0; 0)$. Асимптота $x = -\sqrt[3]{2}$.
- 5.735.** Визначена скрізь, крім точки $x = -\sqrt[3]{2}$. $y_{\max} = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ при $x = -\sqrt[3]{6}$. Точки перегину $(0; 0)$ та $(\sqrt[3]{3}; \frac{3}{\sqrt[3]{25}})$. Асимптоти $x = -\sqrt[3]{2}$ та $y = x$.
- 5.736.** Визначена скрізь, крім точки $x = -1$. $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ при $x = 1$. Мінімумів немає. Точка перегину $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{0,16})$. Асимптоти $x = -1$ та $y = 0$.

5.737. Визначена скрізь, крім точок $x = \pm 1$. Парна функція. Максимумів немає. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\min} = 2$ при $x = \pm\sqrt{2}$. Точок перегину немає. Асимптоти $x = \pm 1$, $y = x$ (права) та $y = -x$ (ліва).

5.738. Визначена скрізь Парна функція. $y_{\max} = 2\sqrt{2}$ при $x = 0$, $y_{\min} = 0$ при $x = \pm\sqrt{2}$. Точки перегину $(\pm 1; 1)$. Асимптот немає.

5.739. Визначена скрізь. Парна функція. $y_{\max} = 1$ при $x = 0$, $y_{\min} = 0$ при $x = \pm 1$. Точок перегину та асимптот немає.

5.740. Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. Непарна функція. $y_{\max} = 0$ при $x = -\sqrt{3}$, $y_{\min} = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Точки перегину $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ та $\left(-\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Асимптоти $x = 0$, $y = 1$ (права) та $y = -1$ (ліва).

5.741. Визначена скрізь. $y_{\max} = \frac{1}{e}$ при $x = 1$. Мінімумів немає. Точка перегину $\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$. Асимптота $y = 0$ (права).

5.742. Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. Максимумів немає. $y_{\min} = e$ при $x = 1$. Асимптоти $x = 0$ та $y = 0$ (ліва).

5.743. Визначена скрізь. $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$ при $x = 2$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. Точки перегину при $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Асимптота $y = 0$ (права).

5.744. Визначена скрізь. $y_{\max} = e$ при $x = 1$. Мінімумів немає. Точки перегину $\left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}; e^{\frac{1}{2}}\right)$. Асимптота $y = 0$.

5.745. Визначена скрізь. Непарна функція. $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = 1$, $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = -1$. Точки перегину $(0; 0)$ та $\left(\pm\sqrt{3}; \pm\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$. Асимптота $y = 0$.

5.746. Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. $y_{\max} = \frac{1}{e}$ при $x = 1$. Мінімумів немає. Точки перегину $\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; (2 \mp \sqrt{2})e^{-(2 \mp \sqrt{2})}\right)$. Асимптоти $y = 0$ та $x = 0$ (права).

5.747. Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. Парна функція. $y_{\max} = \frac{1}{e}$ при $x = \pm 1$,

Відповіді

$y_{\min} = 0$ при $x = 0$. Точки перегину $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}; 3e^{-3}\right)$ та $\left(\pm \sqrt{2}; \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Асимптота $y = 0$.

5.748. Визначена скрізь. $y_{\max} = \frac{27}{e^3}$ при $x = 3$. Мінімумів немає. Точки перегину при $x = 0$ та $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Асимптота $y = 0$ (права).

5.749. Визначена скрізь. Парна функція. $y_{\max} = \frac{1}{e}$ при $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$.

Точки перегину при $x = \pm \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}$. Асимптота $y = 0$.

5.750. Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. Екстремумів немає. Точок перегину немає. Асимптоти $x = 0$, $y = -1$ (ліва) та $y = 0$ (права).

5.751. Визначена скрізь, крім точки $x = 0$. Екстремумів немає. Точка перегину $(1; e^2)$. Асимптоти $x = 0$ (права) та $y = 2x + 3$.

5.752. Визначена скрізь, крім точки $x = 3$. Максимумів немає. $y_{\min} = e$ при $x = 2$. Точок перегину немає. Асимптоти $x = 3$ та $y = 0$ (права).

5.753. Визначена при $x > 0$. $y_{\max} = \frac{1}{e}$ при $x = e$. Мінімумів немає. Точка перегину $\left(e\sqrt{e}; \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$. Асимптоти (праві) $x = 0$ та $y = 0$.

5.754. Визначена при $x > 0$, крім точки $x = 1$. $y_{\max} = -e$ при $x = \frac{1}{e}$. Мінімумів та точок перегину немає. Асимптоти $x = 1$, $x = 0$ (права) та $y = 0$ (права).

5.755. Визначена при $x > 0$. Максимумів немає. $y_{\min} = -\frac{1}{2e}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Точка перегину $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}; -\frac{3}{2e^3}\right)$. Асимптот немає.

5.756. Визначена при $x > -1$. Максимумів немає. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. Точок перегину немає. Асимптота $x = -1$ (права).

5.757. Визначена скрізь. Парна функція. Максимумів немає. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. Точки перегину $(\pm 1; \ln 2)$. Асимптот немає.

5.758. Визначена при $x > 0$. Екстремумів немає. Точка перегину $\left(e^{\frac{3}{2}}; e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Асимптоти (праві) $x = 0$ та $y = x$.

5.759. Визначена скрізь. Періодична з періодом 2π . $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$y_{\min} = -\sqrt{2}$ при $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Точки перегину $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi; 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Асимптот немає.

5.760. Визначена скрізь, крім точок $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Періодична з періодом 2π .

$y_{\max} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $y_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Точок

перегину немає. Асимптоти $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.761. Визначена скрізь. Непарна функція. Екстремумів немає. Стационарні точки $x = \pm k\pi$, $k = 1, 3, 5, \dots$. Точки перегину $(k\pi; k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. В точках перегину графік перетинає пряму $y = x$. Асимптот немає.

5.762. Визначена скрізь. Парна функція. Точки екстремума задовольняють рівняння $\operatorname{tg} x = -x$. Абсциси точок перегину задовольняють рівняння $x \operatorname{tg} x = 2$. Асимптот немає.

5.763. Визначена в інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Парна функція.

Періодична з періодом 2π . $y_{\max} = 0$ при $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Точок перегину немає.

Асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.764. Визначена скрізь. Непарна функція. $y_{\max} = \frac{\pi}{2} - 1$ при $x = -1$, $y_{\min} = 1 - \frac{\pi}{2}$

при $x = 1$. Точка перегину $(0; 0)$. Асимптоти $y = x \pm \pi$.

5.765. Визначена скрізь. Парна функція. Максимумів немає. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$.

Точок перегину немає. Асимптоти $y = -\frac{\pi x}{2} - 1$ (ліва) та $y = \frac{\pi x}{2} - 1$ (права).

5.766. $x(t)$ та $y(t)$ визначені при всіх $t \in \mathbb{R}$, а $y(x)$ - при всіх $x \in \mathbb{R}$. $(-3; 3)$ - максимум; $(5; -1)$ - мінімум; $(1; 1)$ - точка перегину. Асимптот немає. При $x \rightarrow \infty$ кут нахилу кривої до осі абсцис прямує до 45° .

5.767. $x(t)$ та $y(t)$ визначені при всіх $t \in \mathbb{R}$, а $y(x)$ - при всіх $x \in \mathbb{R}$.

$\left(-1 - 3\pi; -1 + \frac{3\pi}{2}\right)$ - максимум; $\left(1 - 3\pi; 1 - \frac{3\pi}{2}\right)$ - мінімум; $(-3\pi; 0)$ - точка

перегину. Асимптоти $y = x$ та $y = x + 6\pi$.

5.768. $x(t)$ та $y(t)$ визначені при всіх $t \in \mathbb{R}$, крім $t = -1$. Асимптота $x + y + 1 = 0$. $(0; 0)$ -точка самоперетину, дотичними в цій точці є осі координат. Точок перегину немає. В першому квадранті-замкнена петля.

5.769. $x(t)$ та $y(t)$ визначені при всіх $t \in \mathbb{R}$. Функція $y(x)$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{e}\right)$ не визначена, при $x \in \left(-\frac{1}{e}; 0\right)$ ця функція двозначна, при $x \in (0; +\infty)$ -однозначна.

Крива симетрична відносно прямої $x + y = 0$. Точка максимуму $\left(e; \frac{1}{e}\right)$. Є дві точки перегину. Асимптотами є координатні осі.

5.770. Замкнена крива, симетрична відносно осі абсцис, з точкою звороту $(a; 0)$.

5.771. Замкнена трипелюсткова роза. Функція визначена в інтервалах $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}\pi; \pi\right]$, $\left[\frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right]$. Екстремуми при $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{5}{6}\pi$ та $\varphi = \frac{3}{2}\pi$.

5.772. Функція визначена в інтервалах $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Графік функції симетричний відносно полюса. Прямі $x = a$ та $x = -a$ є асимптотами *).

5.773. Функція визначена в інтервалах $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$. Графік функції симетричний відносно полюса. Асимптоти $x = a$ та $x = -a$. В полюсі дотичною до кривої є пряма $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

5.774. Існує при всіх значеннях φ . При $\varphi = 0$ максимум рівний $2a$, при $\varphi = \pi$ мінімум рівний 0 . Крива замкнена, симетрична відносно полярної осі. Полюс- точка звороту.

5.775. Існує при $\varphi > 0$. Точка перегину $(\sqrt{2\pi}; 0,5)$. Полярна вісь є асимптотою. Крива спірально закручується навколо полюса, асимптотично наближаючись до нього.

5.776. Існує при $\varphi \geq 0$. Графік– спіраль, яка виходить з полюса і асимптотично наближається до кола $\rho = 1$.

5.777. Існує при $t \in [-1; 1]$, розміщена цілком праворуч осі ординат. Замкнена крива. Максимум при $t = 0$ ($\varphi = 1$ радіану, $\rho = 1$). Точок перегину немає. При $t = \pm 1$ дотикається до осі ординат.

5.778. Чотирипелюсткова роза. Початок координат- подвійна точка самодотику.

5.779. Крива цілком лежить в смузі $x \in \left[-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$. Симетрична відносно початку

координат. Асимптота $x = 0$. $(0; 0)$ - точка перегину з віссю абсцис в якості дотичної. Є ще дві точки перегину.

5.780. Симетрична відносно чотирьох осей $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ замкнена крива з чотирма точками звороту: $(a; 0)$, $(0; a)$, $(-a; 0)$ та $(0; -a)$. Початок координат-ізолювана точка.

5.781. Симетрична відносно осей координат та бісектрис координатних кутів крива.

Асимптоти $(x \pm y)^2 = \frac{1}{2}$. Початок координат- чотирикратна точка самоперетину; в ній вітки кривої дотикаються координатних осей. Крива має форму «млина».

*) В цій та наступних задачах асимптоти задані в декартовій системі координат, у якій віссю абсцис є полярна вісь, а віссю ординат-перпендикуляр до полярної осі, який проходить через полюс.

5.782. $-56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$. **5.783.** $8 - 5(x+1) + (x+1)^3$.

5.784. $-9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$. **5.785.** $-1 - 5(x-1) + 15(x-1)^2 + 90(x-1)^3 + 195(x-1)^4 + 249(x-1)^5 + 210(x-1)^6 + 120(x-1)^7 + 45(x-1)^8 + 10(x-1)^9 + (x-1)^{10}$.

5.786. $1 - 9x + 30x^2 - 45x^3 + 30x^4 - 9x^5 + x^6$. **5.787.** $P(-1) = 143$, $P'(0) = -60$,

$P''(1) = 26$. **5.788.** $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$, де $0 < \theta < 1$.

5.789. $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + \frac{\sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$, якщо n непарне;

$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$, якщо n парне, де

$0 < \theta < 1$. **5.790.** $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$,

якщо n непарне; $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^n}{n!} + \frac{\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$, якщо n

парне, де $0 < \theta < 1$. **5.791.** $x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $x > -1$, де

$0 < \theta < 1$. **5.792.** $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$, якщо n непарне;

$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_{n+1}(x)$, якщо n парне. Залишковий член записати в

загальному вигляді. **5.793.** $1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$
 $+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $x > -1$, де $0 < \theta < 1$. **5.794.** $x + \frac{x^2}{1!} +$

$+\frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!}$. **5.795.** $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$.

5.796. $\frac{1}{2} \left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \right)$. Попередньо записати

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. **5.797.** $\frac{5x}{2} - \frac{(5x)^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{(5x)^{2n+1}}{2^{2n+1} \cdot (2n+1)!}$.

5.798. $2 \ln 2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4^2 \cdot 2} + \frac{x^6}{4^3 \cdot 3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{4^n \cdot n}$. **5.799.** $2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{8} -$

$-\frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^4}{8^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^6}{8^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n}}{8^n} \right)$. **5.800.** $-1 - (x+1) -$

$-(x+1)^2 - \dots - (x+1)^n + (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{[-1 + \theta(x+1)]^{n+2}}$, де $0 < \theta < 1$. **5.801.** $2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} +$

$+\frac{(x-4)^3}{512} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!(x-4)^n}{n!(n-1)!2^{4n-2}} + \frac{(-1)^n(2n)!(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!\sqrt{[4 + \theta(x-4)]^{2n+1}}}$, де

$0 < \theta < 1$. **5.802.** $2 - (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{[1 + \theta(x-2)]^5}$, де $0 < \theta < 1$.

5.803. $x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1 + 2 \sin^3 \theta x}{\cos^4 \theta x}$, де $0 < \theta < 1$. **5.804.** $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} \frac{9\theta x + 6\theta^3 x^3}{(1 - \theta^2 x^2)^{\frac{7}{2}}}$, де

$0 < \theta < 1$. **5.805.** Функція спадає. $(0; 3)$ - точка перегину. **5.806.** Функція має мінімум рівний 1. **5.807.** Функція має мінімум рівний 2. **5.808.** Функція має максимум рівний -11 . **5.809.** Функція зростає. $(0; 0)$ - точка перегину.

5.810. $f(x) = 1 - 6(x-1) + (x-1)^2 + \dots$; $f(1,03) \approx 0,82$. **5.811.** $f(x) =$
 $= 321 + 1087(x-2) + 1648(x-2)^2 + \dots$; $f(2,02) \approx 343,4$; $f(1,97) \approx 289,9$.

5.812. $f(x) = 1 + 60(x-1) + 2570(x-1)^2 + \dots$; $f(1,005) \approx 1,364$. **5.813.** $f(x) = -6 +$

$+21(x-2)+50(x-2)^2+\dots$; $f(2,1)\approx-3,4$; $f(2,1)=-3,36399$; $\delta=0,036$;
 $\delta\approx 0,011=1,1\%$. **5.814.** 0,78; $\delta<0,01$. **5.815.** 0,985. **5.816.** 0,40; $\delta<0,01$.

5.817. $K_{|x=0}=2$, $K_{|x=1}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$. **5.818.** $K_A=3$; $K_B=\frac{1}{9}$. **5.819.** $K=36$.

5.820. $K=0,128$. **5.821.** $K=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **5.822.** $K=0$. **5.823.** $K=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

5.824. $K=\frac{8\sqrt{2}}{3a}$. **5.825.** $K=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **5.826.** $\frac{6|x|}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$. **5.827.** $\frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

5.828. $|\cos x|$. **5.829.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{a|xy|}}$. **5.830.** $\frac{1}{a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}$. **5.831.** $\frac{1}{6}$. **5.832.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

5.833. $\frac{2}{3a|\sin 2t_0|}$. **5.834.** $\frac{2}{\pi a}$. **5.835.** $\frac{3}{8a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$. **5.836.** $\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$.

5.837. $\frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$. **5.838.** $\frac{\varphi^2+K^2+K}{a\varphi^{K-1}(1+\varphi^2+K^2)^{\frac{3}{2}}}$. **5.839.** $\frac{3}{4a\sin\frac{\varphi}{2}}$. **5.840.** $\frac{3}{a}$.

5.841. $\frac{\left(9x^{\frac{4}{3}}+1\right)^{\frac{3}{2}}}{6x^{\frac{1}{3}}}$. **5.842.** $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$. **5.843.** $4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. **5.844.** $\frac{a^2}{3\rho}$.

5.845. $\left(0; \frac{a}{2}\right)x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$. **5.846.** $\left(0; \frac{1}{2}\right); x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

5.847. $\left(-1; e-\frac{1}{e}\right); (x+1)^2+\left(y-e+\frac{1}{e}\right)^2=e^2$. **5.848.** $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right); \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$.

5.849. $(\pi a; -2a); (x-\pi a)^2+(y+2a)^2=16a^2$. **5.850.** $\xi=\frac{x-9x^5}{2}$, $\eta=\frac{15x^4+1}{6x}$.

5.851. $\xi^{\frac{2}{3}}-\eta^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}}$. **5.852.** $(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

5.853. $\left(\frac{3\eta}{8}\right)^4+6a^2\left(\frac{3\eta}{8}\right)^2+3a^3\xi=0$. **5.854.** $\eta=a\operatorname{ch}\frac{\xi}{a}$. **5.855.** $\xi^2=\frac{4}{27}\eta^3$.

5.856. $\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right)$. **5.857.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **5.858.** $\left(-\frac{1}{2}\ln 2; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **5.859.** При $t=k\pi$,

$k\in Z$.

В.І. Беспальчук, Р.М. Головня, В.В. Івахненкова,
Р.Б. Кондратюк, С.П. Онуфрійчук, Н.В. Письменчук,
О.І. Прилипко

Збірник задач з математики

Частина 1

Елементи лінійної алгебри
Векторна алгебра
Вступ до математичного аналізу
Диференціальне числення функцій однієї змінної

Комп'ютерний набір та верстка
Макетування

Собко І.О.
Андрейчиков В.Л.

Підписано до друку 28.02.2001. Формат 60×84 1/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 10,88. Наклад 400 прим. Зам. 94.

Редакційно видавничий відділ
Житомирського інженерно-технологічного інституту
10005, м. Житомир, вул. Черняхівського, 103