Р.М. Головня, В.О. Коваль, О.В. Лущиков

Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів

Рекомендовано Вченою радою ЖДТУ як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, що навчаються за нематематичними напрямами підготовки

(*протокол № 10 від 30.05.2011 р.*)

Ж ДТУ

2011

УДК 519.2(075)
ББК 22.17 я 73
Г61

Г61 **Р.М. Головня, В.О. Коваль, О.В. Лущиков**

Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів: Навчальний посібник. – Житомир: ЖДТУ, 2011. – 140 с.

ISBN 978-966-683-300-9

Збірник охоплює основні розділи теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів. Він містить тридцять тем і складається з двох частин. У першій частині подані завдання за темами (по тридцять варіантів), у другій – необхідні теоретичні відомості та приклади розв'язування задач.

Посібник призначений, у першу чергу, для забезпечення самостійної роботи студентів заочної форми навчання над даним навчальним курсом. Він може використовуватись також як збірник задач під час проведення практичних занять зі студентами денної форми навчання та для виконання ними розрахунково-графічних робіт.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за нематематичними напрямами підготовки.

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук, професор *Б.М. Ляшенко,*
кандидат фіз.-мат. наук, доцент *С.І. Скуратівський,*
кандидат техн. наук, доцент *Л.Г. Шумко*

УДК 519.2

ISBN 978-966-683-300-9

ЗМІСТ

ВСТУП

Предметом теорії ймовірностей є математичний аналіз випадкових явищ, тобто явищ з невизначеними результатами. Наприклад, невизначені результати таких явищ, як підкидання монети, постріл з гармати у ціль, вибірковий контроль якості продукції, тривалість безвідмовної роботи приладу, визначення ціни акції під час торгів на фондовій біржі тощо.

Випадкові явища формалізуються в теорії ймовірностей у понятті *випадкового експерименту*. Це такий експеримент, який можна повторити скільки завгодно разів при заданих умовах, але його результати передбачити неможливо. Результати випадкового експерименту називають *випадковими подіями*. Розрізняють випадкові події *елементарні* (ті, які не розкладаються на простіші) та *складені*. Для елементарних подій використовують, як правило, позначення ω, ω_1, ω_2 тощо, для складених – A, B, A_1, A_2 тощо. Сукупність усіх елементарних подій в даному випадковому експерименті називають *простором елементарних подій*. Його позначають літерою Ω. Якщо виділено простір елементарних подій, то довільна складена подія A – це сукупність тих елементарних подій, які сприяють її появі.

Числовою характеристикою випадкової події є її *ймовірність*. Вона характеризує ступінь об'єктивної можливості появи випадкової події. Ймовірність випадкової події A позначають $P(A)$. Ймовірності повинні задовольняти умови:

1) $0 \le P(A) \le 1$,

2) $P(\Omega) = 1$,

3) ймовірність суми двох несумісних випадкових подій A та B дорівнює сумі їх ймовірностей: $P(A+B) = P(A) + P(B)$ *).

Ці умови задовольняють, зокрема, ймовірності, що обчислюються за *класичним визначенням*, та *геометричні ймовірності*.

У різних практичних задачах доводиться розглядати числові функції, задані на просторі елементарних подій Ω. Такі функції називають *випадковими величинами.* Їх позначають X, Y, X_1, X_2

---

*) *Сума* випадкових подій A та B – це подія $C = A + B$, яка полягає у тому, що відбувається хоча б одна з подій A, B. Події називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися разом.

тощо. Наприклад, число появ герба при двох підкиданнях монети, число бракованих виробів серед відібраних для вибіркового контролю, тривалість безвідмовної роботи приладу тощо.

Розрізняють випадкові величини *дискретні* (ті, що набувають скінченного або зліченного числа значень) та неперервні (ті, що можуть набути довільного значення з деякого проміжку).

Якщо випадкова величина X – дискретна, то її вичерпною характеристикою є *закон розподілу* $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$,…, де x_1, x_2, … – значення, яких набуває X.

Для неперервних випадкових величин доводиться використовувати складніше поняття *функції розподілу* $F(x) = P(X < x)$, $-\infty < x < +\infty$. Функція розподілу неперервної випадкової величини X може бути подана у вигляді $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, де функцію $f(t)$ називають *щільністю розподілу*. Очевидно, що $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ у точках неперервності функції $f(x)$.

На практиці при розгляді випадкових величин часто обмежуються простішими характеристиками, ніж закон розподілу чи щільність розподілу. Такі характеристики називають *числовими*. Найважливіші серед них – *математичне сподівання* (*середнє значення*) $M(X)$, *дисперсія* $D(X)$, *середнє квадратичне відхилення* $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Якщо ймовірнісна модель випадкового явища визначена, то далі вона досліджується методами теорії ймовірностей. На практиці ця модель часто невідома. **Предметом математичної статистики** є задачі визначення на основі статистичних (експериментальних) даних тієї моделі, яка найбільш повно (адекватно) описує випадкове явище. Наприклад, якщо ймовірність випадкової події A немає можливості визначити з певних теоретичних міркувань (наприклад, за допомогою класичного визначення), то тоді використовують статистичний метод, згідно з яким

$$P(A) \approx \frac{k_N(A)}{N},$$

де N – число випробувань (число незалежних повторень випадкового експерименту), $k_N(A)$ – число тих випробувань, при яких відбулася подія A.

В математичній статистиці можна виділити, перш за все, таку її складову як *описова статистика*, яка займається задачами представлення статистичних даних у зручних для подальшого аналізу формах. Тут ключовими є такі поняття як *вибірка, варіаційний ряд, статистичний розподіл вибірки, гістограма* тощо.

Друга складова математичної статистики тісно пов’язана з теорією ймовірностей і займається , зокрема, побудовою оцінок невідомих характеристик випадкових величин з вказівкою ступеня їх надійності. Тут ключовими є такі поняття як *точкове оцінювання, надійний інтервал, перевірка статистичних гіпотез, регресійний аналіз* тощо.

Теорія випадкових процесів – це розділ теорії ймовірностей, що досліджує випадкові явища, які розвиваються у часі. *Випадковий процес* є математичною моделлю такого явища.

Якщо маємо випадковий процес $X(t)$, $t \in (a, b)$ [*)] (змінна t інтерпретується як час), то зафіксувавши довільний момент часу $t = t_0$ дістанемо випадкову величину $X(t_0)$, яку називають *перерізом* випадкового процесу у момент часу t_0. При фіксованому $\omega = \omega_0$ невипадкову функцію $x(t) = X(t, \omega_0)$ називають *реалізацією (траєкторією)* випадкового процесу.

Однією з основних характеристик випадкового процесу є його *скінченновимірні функції розподілу*. *Одновимірна функція розподілу* має вигляд $F_t(x) = P\big(X(t) < x\big)$, $-\infty < x < +\infty$, тобто це функція розподілу перерізу випадкового процесу у момент часу t. Якщо при даному t випадкова величина $X(t)$ – неперервна, то її *одновимірна щільність розподілу* знаходиться за формулою $f_t(x) = \dfrac{dF_t(x)}{dx}$.

Для випадкових процесів вводяться аналогічні до випадкових величин поняття математичного сподівання, дисперсії і такі специфічні поняття як *кореляційна функція, диференційовність та інтегровність* випадкового процесу, *стаціонарність, спектральна щільність* тощо.

[*)] Насправді для випадкового процесу слід було б використовувати позначення $X(t, \omega)$, $t \in (a, b)$, $\omega \in \Omega$, але, як і при позначенні випадкових величин, аргумент ω опускають і пишуть $X(t)$ замість $X(t, \omega)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Теорія ймовірностей

Задача 1
Простір елементарних подій. Випадкові події та дії над ними

1.1. Дослід полягає в тому, що підкидають дві монети – бронзову і срібну. Результат, що спостерігається – поява герба (Г) чи цифри (Ц) на верхній стороні монети. Побудувати простір елементарних подій і його підмножини, які відповідають наступним подіям: A – герб випав на бронзовій монеті; B – цифра випала на бронзовій монеті; C – герб випав на срібній монеті; D – цифра випала на срібній монеті; E – випав принаймні один герб.

1.2. Монета підкидається до першої появи герба. Побудувати простір елементарних подій і підмножини, що відповідають наступним подіям: A – герб випав при третьому підкиданні; B – герб випав не раніше, ніж при третьому підкиданні; C – випало більше гербів, ніж цифр; D – цифра випала менше ніж три рази підряд.

1.3. Серед усіх родин з двома дітьми обрано одну. Описати простір елементарних подій і випадкові події: A – в родині є хлопчик і дівчинка; B – в родині не більше однієї дівчинки; C – в родині немає хлопчиків; D – в родині принаймні одна дитина – хлопчик.

1.4. Дослід полягає в тому, що підкидають дві монети. Побудувати простір елементарних подій і його підмножини, які відповідають наступним подіям: A – герб випав лише на одній монеті; B – цифра випала принаймні на одній монеті; C – герб не випав на жодній монеті; D – герб випав принаймні на одній монеті.

1.5. Монета підкидається тричі. Побудувати простір елементарних подій і його підмножини, що відповідають наступним подіям: A – герб випав рівно один раз; B – жодного разу не випала цифра; C – випало більше гербів, ніж цифр; D – герб випав не менше ніж два рази підряд.

1.6. Проводять три постріли у мішень. Розглядають події A_k – влучення при k-му пострілі, $k = 1, 2, 3$. Використовуючи дії над подіями A_k та $\overline{A}_k$, записати події: A – всі три влучення; B – всі три промахи; C – принаймні одне влучення; D – принаймні один промах; E – не менше двох влучень; F – не більше одного влучення; G – влучення в мішень не раніше третього пострілу.

1.7. З двох коробок, у кожній з яких містяться червоні і сині олівці, навмання береться по олівцю. Побудувати простір елементарних подій і його підмножини, які відповідають наступним подіям: A – взято два червоних олівці; B – взято два синіх олівці; C – принаймні один олівець синій; D – взято олівці одного кольору.

1.8. Гармата двічі стріляє по цілі. Нехай A_k – влучення в ціль при k-ому пострілі, $k=1,2$. Побудувати простір елементарних подій, використовуючи події A_k. Побудувати підмножини простору елементарних подій, які відповідають наступним подіям: A – рівно одне влучення; B – жодного влучення; C – принаймні одне влучення; D – принаймні один промах.

1.9. Зроблено три постріли з гармати по цілі. Нехай A_k – влучення в ціль при k-ому пострілі, $k=1,2,3$. Побудувати простір елементарних подій, використовуючи події A_k. Побудувати підмножини простору елементарних подій, які відповідають наступним подіям: A – рівно одне влучення; B – принаймні одне влучення; C – принаймні один промах; D – не менше двох влучень; E – влучення лише з третього пострілу.

1.10. На полиці стоїть п’ять горщиків, три з яких наповнені медом, а інші – порожні. Вінні-Пух навмання вибирає три горщики. Побудувати простір елементарних подій та його підмножини, які відповідають наступним подіям: A – вибрано рівно один горщик з медом; B – вибрано принаймні один горщик з медом; C – вибрано принаймні один горщик порожній; D – вибрано всі горщики з медом.

1.11. Фірма отримує сировину від трьох постачальників. Можливі збої в постачаннях. Розглядаються події A_i – своєчасне постачання сировини i-им постачальником $(i=1,2,3)$. Описати простір елементарних подій і події: A – отримано сировину від другого і третього постачальників; B – отримано сировину від другого або третього постачальників; C – отримано сировину лише від другого або третього постачальників.

1.12. Студент шукає потрібну йому книгу. Він може скористатися послугами трьох бібліотек. Описати простір елементарних подій і події: A – студент відвідав три бібліотеки; B – книги у бібліотеках немає; C – студент відвідав дві бібліотеки.

1.13. У полі спостереження мікроскопа знаходяться три клітини. За час спостереження кожна з них може як розділитися, так і не розділитися. Нехай подія A – розділилася перша клітина, B – розділилася друга клітина, C – третя клітина. Описати простір елементарних подій і події: M – сталися принаймні два поділи клітин; N – сталося менше двох поділів; K – стався принаймні один поділ.

1.14. Футболіст робить три удари у футбольні ворота. Описати простір елементарних подій і події: M – не менше двох влучень; N – менше двох влучень; K – тільки два влучення; L – принаймні два влучення.

1.15. Студент Телепенко, чекаючи викладача для перескладання заліку з теорії ймовірностей, помітив на стенді кафедри математики фото п'яти доцентів, серед яких троє чоловіків. Вибираючи три фотографії навмання, він домальовує зображеним на них бороди. Описати простір елементарних подій і події: A – на вибраних фото одна жінка; B – на вибраних фото принаймні один чоловік; C – на вибраних фото чоловіків більше ніж жінок; D – на вибраних фото жодної жінки.

1.16. Гральний кубик підкидають двічі. Результат, що спостерігається – сума чисел, які відповідають числу очок, що випали при першому та другому підкиданні.

Описати простір елементарних подій та події: A – сума очок, які з'явились, дорівнює 8; B – сума очок, які з'явились, менша 4; C – сума очок, які з'явились, кратна 6; D – сума очок, які з'явились, не менша 10.

Вказати пари сумісних подій.

1.17. Три вироби перевіряють на стандартність. Побудувати простір елементарних подій та його підмножини, які відповідають наступним подіям: A – всі вироби стандартні; B – принаймні один виріб нестандартний; C – стандартних виробів більше ніж нестандартних.

З'ясувати смисл подій: $A+B$, AB, $\overline{C}$, $A\overline{B}$.

1.18. В коробці лежить 10 деталей, з яких три браковані. З коробки навмання послідовно виймають по одній деталі до появи бракованої, після чого експеримент припиняють. Побудувати простір елементарних подій та його підмножини, які відповідають наступним подіям: A – бракована деталь з'явиться при третій спробі; B – доведеться провести вибір третьої деталі; C – бракована деталь з'явиться не пізніше ніж при третій спробі; D – бракована деталь з'явиться не раніше ніж при п'ятій спробі.

1.19. З чотирьох, відібраних з колоди карт, тузів навмання беруть дві карти. Побудувати простір елементарних подій та його підмножини, які відповідають наступним подіям: A – обидві карти чорної масті; B – карти різного кольору; C – одна з карт червової масті; D – серед карт немає бубнового туза.

1.20. Стріляють по плоскій прямокутній мішені: $-2 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$. Результат, що спостерігається – координати точки влучення в декартовій системі координат. Невлучення в зазначений прямокутник неможливе. Події: A – абсциса точки влучення не менше ординати; B – добуток координат точки від'ємний; C – сума абсолютних величин координат точки перевищує одиницю; D – сума квадратів координат не перевищує $\frac{1}{2}$.

Побудувати простір елементарних подій і підмножини, що відповідають зазначеним подіям. Вказати пари сумісних подій.

1.21. Гральний кубик підкидається двічі. Результат, що спостерігається – упорядкована пара чисел, що відповідають кількості очок, які випали при першому та другому підкиданні. Побудувати простір елементарних подій цього експерименту. Описати події *A, B, C, D*, де подія *A* – обидва рази випало число очок кратне трьом; подія *B* – жодного разу не випало число шість; *C* – обидва рази випало число очок більше трьох; *D* – обидва рази випало однакове число очок.

1.22. Назвіть протилежні події для наступних подій: A – випадання двох гербів при підкиданні двох монет; B – поява білої кульки (експеримент полягає у вийманні однієї кульки з коробки, в якій лежать білі, чорні й червоні кульки); C – три влучення в мішень трьома пострілами; D – не більше двох влучень у мішень п'ятьма пострілами; E – принаймні одне влучення в мішень п'ятьма пострілами.

1.23. На відрізку [1, 5] навмання вибираються дві точки x і y. Результат експерименту зображується точкою (x, y) на площині Oxy. Побудувати на цій площині простір елементарних подій експерименту і області, що відповідають подіям: *A* – відстань першої вибраної точки x від лівого кінця відрізка [1, 5] менше, ніж відстань другої вибраної точки y від правого кінця відрізка; B – відстань між точками менше половини довжини відрізка; $C = A + B$; $D = AB$.

1.24. У коробці містяться 3 латунні (Л), 3 сталеві (С) і 1 бронзова (Б) деталь. Беруть по черзі дві деталі. Визначити:

1) простір елементарних подій Ω;

2) множини, що відповідають подіям: B_1 – принаймні одна деталь сталева і серед деталей немає бронзових; B_2 – тільки одна деталь латунна;

3) множину елементарних подій A_3, яка утворює з подіями A_1 та A_2 повну групу, якщо $A_1 = \{\text{СС,ЛС}\}$, $A_2 = \{\text{БЛ,ЛС}\}$ – елементарні події, позначені згідно з матеріалом деталей.

1.25. Іван і Петро домовилися зустрітися між 1-ю і 2-ю годинами дня. Кожний приходить у призначене місце у випадковий момент даного проміжку часу і чекає іншого протягом чверті години, але не пізніше 2-ї години дня, після чого іде. Позначивши через x – момент приходу Івана, y – момент приходу Петра, побудувати на площині Oxy простір елементарних подій, а також області, що відповідають подіям: *A* – зустріч відбулася; *B* – Іван пішов, не дочекавшись Петра; *C* – Петро прийшов раніше Івана і дочекався його; *D* – зустріч відбулася до 1 години 30 хв.

1.26. Віка і Ліна домовилися про зустріч у визначеному місці між 10-ю і 11-ю годинами. Кожна приходить у випадковий момент зазначеного інтервалу часу і чекає появи іншої до закінчення години, але не більше 15 хвилин, після чого йде. Результат, що спостерігається – упорядкована пара чисел (x, y), де x – час приходу Віки, y – час приходу Ліни. Час обчислюється в хвилинах, починаючи з 10 годин. Події: *A* – Віка прийшла після 10 год. 45 хв; *B* – Віка прийшла раніше Ліни; *C* – Ліна прийшла до 10 год 45 хв; *D* – зустріч відбулася; *E* – зустріч не відбулася. Побудувати простір елементарних подій і його підмножини, що відповідають зазначеним подіям.

1.27. Вінні-Пух та П'ятачок домовились зустрітись біля домівки Кролика між 9-ю і 10-ю годинами ранку. Кожен з них приходить у випадковий момент вказаного проміжку часу і чекає появи іншого до закінчення години, але не більше 20 хвилин, після чого йде. Побудувати простір елементарних подій і його підмножини, що відповідають наступним подіям: *F* – Вінні-Пух чекав П'ятачка і не дочекався; *H* – зустріч відбулася після 9 год 30 хв; *I* – перший з друзів прийшов до 9 год 30 хв; *J* – П'ятачок спізнився на зустріч; *K* – зустріч відбулася, коли до закінчення години залишилося менше п'яти хвилин; *G* – П'ятачку не довелося чекати Вінні-Пуха.

1.28. На відрізку $[a, b]$ навмання ставиться точка $(a > 0)$. Нехай x – координата цієї точки. На відрізку $[a, x]$ вибирається точка y. Результат, що спостерігається – упорядкована пара чисел (x, y). Події: *A* – друга точка ближче до b ніж до a; *B* – відстань між точками x та

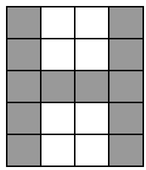
y менше половини довжини відрізка $\left[a,b\right]$; C – перша точка ближче до a, ніж до b; D – перша точка ближче до другої, ніж до b.

Побудувати простір елементарних подій і підмножини, що відповідають зазначеним подіям. Виявити пари несумісних подій.

1.29. З коробки, в якій є бронзові, мідні, латунні та сталеві деталі, беруть одну деталь. Побудувати простір елементарних подій і підмножини, що відповідають подіям: A – вибрана деталь не сталева; B – вибрана деталь бронзова або мідна.

Визначити подію $C=\left(A_1+\overline{A}_3\right)\left(\overline{A}_4+A_2\right)$, якщо події A_1, A_2, A_3, A_4 означають відповідно, що взята деталь бронзова, латунна, мідна, сталева.

1.30. На прямокутному 5 × 4-клітинковому полі подається фігура, що складається із зафарбованих клітинок. Нехай A_{ij} $\left(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4\right)$ – події, які полягають у тому, що клітинку з номерами i та j заштриховано. Використовуючи дії над подіями A_{ij}, записати події:



а) зображення має вигляд, наведений на рисунку;

б) у правому верхньому куті зафарбовано прямокутник розміром 3 × 2 клітинки, інші клітинки не зафарбовані;

в) зафарбовані клітинки розташовані у шаховому порядку починаючи з першої клітини першого рядка.

Задача 2
Класичне визначення ймовірності

2.1. Студент знає відповіді до 45 із 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет містить 2 питання. Яка ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього він має відповісти на обидва питання?

2.2. Дві групи по 10 спортсменів беруть участь у жеребкуванні для присвоєння номерів учасникам змагань (від 1 до 10 в кожній групі). Два брати входять в склад різних груп. Знайти ймовірність того, що обидва брати отримають: а) номер 3; б) однаковий номер.

2.3. Із колоди карт (36 штук) дістають навмання дві. Яка ймовірність того, що це десятка і туз?

2.4. Серед 100 лотерейних білетів є 2 виграшних. Яка ймовірність того, що серед трьох придбаних білетів рівно один виграшний?

2.5. В гості прийшли п'ять осіб. Йдучи по домівках, гості вибирають собі черевики навмання. Знайти ймовірність того, що гість, який виходить першим, візьме саме свої черевики.

2.6. Гральний кубик підкидається 5 разів. Яка ймовірність того, що шістка випаде рівно один раз?

2.7. Є п'ять карток розрізної азбуки з літерами А, Б, В, Г, Д. Навмання одна за одною вибираються три картки і розташовуються в порядку появи. Яка ймовірність того, що утвориться слово "ДВА"?

2.8. В коробці є десять куль з номерами 1, 2, ..., 10. Навмання дістають п'ять куль. Яка ймовірність того, що серед витягнутих куль знайдуться кулі з номерами 7 та 8?

2.9. В замку на спільній осі 4 диски. Кожен диск розділений на 10 секторів, на яких написані різні цифри. Замок відчиниться лише в тому випадку, якщо диски встановлено так, що цифри на них складуть певну комбінацію (код). Знайти ймовірність того, що при довільному встановленні дисків замок буде відчинено.

2.10. Набираючи номер телефону абонент забув останні дві цифри і, пам'ятаючи лише що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що абонент правильно набрав номер телефону.

2.11. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

2.12. У ліфт на першому поверсі зайшли три особи, кожна з яких може вийти на будь-якому поверсі з другого по дев'ятий. Яка ймовірність того, що усі пасажири вийдуть на різних поверхах?

2.13. Десять осіб шикуються в колону в довільному порядку. Яка ймовірність того, що дві певні особи стоятимуть поруч?

2.14. На картках лото написано числа від 1 до 10. Знайти ймовірність того, що на трьох вибраних навмання картках написані числа менші 6.

2.15. З літер розрізної азбуки складено слово "АНАНАС". Малюк розсипав картки і знову зібрав у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що у нього знову утвориться слово "АНАНАС".

2.16. Куб, всі грані якого пофарбовано, розрізано на тисячу однакових кубиків, які ретельно перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик буде мати дві пофарбовані грані.

2.17. Підкидають шість гральних кубиків. Яка ймовірність того, що на всіх кубиках випаде різне число очок?

2.18. В урні є 8 послідовно занумерованих куль. З урни навмання одну за одною витягують три кулі. Яка ймовірність того, що номери витягнутих куль будуть розміщені в порядку зростання?

2.19. Навмання записано двозначне число. Знайти ймовірність того, що його цифри розміщені в порядку зростання і відрізняються рівно на дві одиниці.

2.20. Колоду з 36 карт ретельно перетасовано. Яка ймовірність того, що перші чотири карти в колоді тузи?

2.21. За умовами лотереї "СУПЕР ЛОТО" учасник лотереї, який вгадає 3, 4, 5 або 6 номерів з відібраних при випадковому розіграші шести номерів з 49, одержує грошовий приз. Знайти ймовірність того, учасник лотереї вгадає: а) всі 6 номерів (джекпот); б) не менше ніж чотири номери.

2.22. Цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6 розставлено випадковим чином. Знайти ймовірність того, що 1 і 2 будуть стояти поруч, причому в порядку зростання.

2.23. З урни, в якій є 10 різних куль, дістають навмання з поверненням 5 куль. Знайти ймовірність того, що серед них немає однакових.

2.24. Десять осіб навмання вибирають собі місце за круглим столом. Знайти ймовірність того, що певні дві особи сидітимуть поруч.

2.25. До чотиристороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Для кожного автомобіля є однаково можливими всі чотири маневри: поїхати назад, прямо, наліво або направо. Знайти ймовірність того, що три автомобілі поїдуть по одній з вулиць.

2.26. Для зменшення загальної кількості ігор, 18 команд розбивають випадковим чином на дві групи по 9 команд. Знайти ймовірність того, що дві найсильніші команди потраплять до однієї групи.

2.27. В чотири вагони потягу заходять 9 пасажирів. Яка ймовірність того, що в перший вагон зайде 3 пасажири?

2.28. Колоду із 36 карт ретельно перетасовано. Яка ймовірність того, що перша і остання карта – тузи?

2.29. Десять осіб, серед яких є X та Y, стоять у черзі. Знайти ймовірність того, що між X та Y знаходяться рівно дві особи.

2.30. В партії 80 виробів, з яких чотири – браковані. Партія довільним чином розділена на дві рівні частини, які відправлені двом споживачам. Яка ймовірність того, що браковані вироби дістануться обом споживачам порівну?

Задача 3
Геометричні ймовірності

3.1. Після буревію на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами лінії електропередач стався розрив дроту. Яка ймовірність того, що розрив відбувся між 50-м і 55-м кілометрами лінії?

3.2. Телефонна лінія, що з'єднує пункти A і B, відстань між якими становить 7 км, обірвалася в невідомому місці. Яка ймовірність того, що місце обриву віддалене від кожного з пунктів більше ніж на 2,5 км.

3.3. Біатлоніст стріляє в мішень – круг радіуса 14 см. Біатлоніст влучає в мішень з ймовірністю 1. Влучення в будь-яку точку мішені однаково можливе. Знайти ймовірність влучення в круг радіуса 10 см, розташований всередині мішені.

3.4. У посудину місткістю 10 л, заповнену водою, потрапила одна хвороботворна бактерія. Яка ймовірність зачерпнути її при наборі з цієї посудини води склянкою об'ємом 200 см^3?

3.5. Лозину навмання розламують на дві частини. Знайти ймовірність того, що менший уламок має довжину, яка не перевищує третини довжини лозини.

3.6. Перпендикулярно фарватеру встановлений один ряд мін, відстань між якими дорівнює 100 метрів. Знайти ймовірність того, що судно шириною 30 м пройде лінію загородження без зіткнення з міною.

3.7. Промінь локатора переміщується в горизонтальній площині з постійною кутовою швидкістю. Яка ймовірність того, що ціль буде виявлена локатором у певному кутовому секторі величини 60°, якщо поява цілі у будь-якому напрямку однаково можлива?

3.8. Всередині трикутника ABC навмання вибирається точка X. Знайти ймовірність того, що X потрапить: а) в трикутник ABM, де AM – медіана трикутника ABC; б) в трикутник MNK, де M, N, K – середини сторін трикутника ABC.

3.9. На відрізку AB, довжиною 10 см, навмання поставлена точка M. З якою ймовірністю площа квадрата, побудованого на відрізку AM, буде більшою 16 см^2 і меншою 64 см^2.

3.10. Комп'ютер випадковим чином генерує число x з проміжку $[-\pi, \pi]$. Знайти ймовірність того, що $\sin x < \cos x$.

3.11. Знайти ймовірність того, що точка, навмання поставлена в крузі радіуса R, опиниться всередині вписаного в цей круг рівностороннього трикутника.

3.12. На відрізку довжини 1 навмання вибрано точку поділу. Визначити ймовірність того, що менший відрізок має довжину більшу, ніж 1/4.

3.13. У середину квадрата зі стороною 10 навмання помістили коло радіуса 1. Знайти ймовірність того, що це коло накриє центр квадрата.

3.14. Всередині квадрата з вершинами (0;0), (1;0), (1;1), (0;1) навмання вибирається точка $M(x;y)$. Знайти ймовірність того, що: а) $\max\{x,y\} \le a$; б) $xy \le a$, якщо $a \in (0,1]$.

3.15. Знайти $P\left(1+0,5x \le y \le x^2\right)$, якщо числа x, y навмання взято на відрізку $[2,4]$.

3.16. Знайти ймовірність того, що функція $z = 5x + 2y$ набуде значення менше чотирьох, якщо аргументи x та y вибираються навмання з проміжку $[0,1]$.

3.17. У квадраті навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що вона буде розміщена ближче до сторони квадрата, ніж до його діагоналі.

3.18. На відрізку $[-1,1]$ навмання вибираються дві точки. Нехай p та q – координати цих точок. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ різних знаків.

3.19. У правильному трикутнику зі стороною 5 см навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що: а) відстань від неї до найближчої вершини буде менше 1; б) вона потрапить у коло, вписане в цей трикутник.

3.20. На відрізку $[0,1]$ навмання вибирається два числа x та y. Знайти ймовірність того, що $\min\{x,y\} \le a$, якщо $a \in (0,1]$.

3.21. Знайти ймовірність того, що сума двох навмання взятих додатних чисел, кожне з який не більше 1, не перевищить одиниці, а їхній добуток буде не більшим 0,25.

3.22. Навмання взято два додатних числа x і y, кожне з який не перевищує двох. Знайти ймовірність того, що добуток xy буде не більше 13/4, а частка x/y не більше 7/4.

3.23. Знайти $P\left(x \ge y^2\right)$, якщо числа x, y навмання взято на відрізку $[1,3]$.

3.24. В одній з популярних в Америці ігор гравець кидає монету з досить великої відстані на поверхню столу, розграфленого на однодюймові квадрати. Якщо монета 3/4 дюйма в діаметрі потрапляє цілком всередину квадрата, то гравець одержує нагороду, у противному випадку він втрачає свою монету. Які шанси виграти за умови, що монета впала на стіл?

3.25. На площині проведені паралельні лінії, відстані між якими почергово дорівнюють 1,5 і 8 см. Знайти ймовірність того, що навмання кинуте на цю площину коло радіуса 2,5 см не буде перетинати жодної з ліній.

3.26. Шматок дроту довжиною 20 см був зігнутий у навмання вибраній точці. Після цього, перегнувши дріт ще в двох місцях (не ламаючи його), зробили прямокутну рамку. Знайти ймовірність того, що площа отриманої рамки не перевищує 21см^2.

3.27. Два промислових судна незалежно одне від одного в будь-який момент часу протягом доби можуть стати на розвантаження до причалу. Знайти ймовірність того, що на момент підходу кожного із суден причал буде вільним, якщо одному з них для розвантаження потрібно 5 годин, а іншому – 8 годин.

3.28. На лінії зв'язку довжиною 20 км відбулися два розриви. Знайти ймовірність того, що відстань між розривами менша 5 км.

3.29. Дві особи планують зустріч у певному місці так, що кожен приходить на місце зустрічі в будь-який момент часу між 17 та 18 годинами і чекає на іншу особу t хвилин. При якому значенні t зустріч відбудеться з ймовірністю: а) 0,91; б) 0,99?

3.30. Обчислюється визначник $D = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \end{vmatrix}$, де числа a та b навмання взято на відрізку $[0, 2]$. Знайти ймовірність того, що $D > 0$.

Задача 4
Теореми додавання та множення ймовірностей

4.1. У двох партіях відповідно 75 % та 80 % якісних виробів. Навмання беруть по одному виробу з кожної партії. Знайти ймовірність того, що серед них: а) обидва вироби якісні; б) хоча б один якісний; в) один якісний і один бракований.

4.2. При вмиканні запалення двигун починає працювати з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що для запуску двигуна запалення доведеться вмикати: а) тричі; б) не більше трьох разів.

4.3. Розрив електричного ланцюга може відбутися внаслідок виходу з ладу одного елемента k_1 або одночасного виходу з ладу двох елементів k_2 і k_3, які виходять з ладу незалежно один від одного з ймовірностями 0,1, 0,2, 0,3 відповідно. Знайти ймовірність розриву ланцюга.

4.4. В механізм входять три однакові деталі. Робота механізму порушиться, якщо при його збиранні будуть встановлені всі три деталі розміру більшого, ніж вказано на кресленні. У складальника 5 деталей з 12 мають більший розмір. Знайти ймовірність нормальної роботи зібраного з цих деталей механізму, якщо складальник бере деталі навмання.

4.5. Ймовірність виготовлення деталі першого ґатунку на першому верстаті рівна 0,7, на другому – 0,8. На першому верстаті виготовлено дві деталі, а на другому – три. Знайти ймовірність того, що всі деталі першого ґатунку.

4.6. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом однієї години перший верстат вимагатиме уваги робітника дорівнює 0,3, другий – 0,4 і третій – 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години хоча б один верстат вимагатиме уваги робітника.

4.7. Ймовірність виходу з ладу k-го блоку обчислювальної машини за час t дорівнює $k \cdot 10^{-2}$ $\left(k = 1, 2, 3, 4\right)$. Знайти ймовірність того, що за цей час жоден з блоків не вийде з ладу, якщо блоки працюють незалежно.

4.8. Ймовірності влучення в об’єкт для першої, другої та третьої гармат дорівнюють відповідно 0,9, 0,6 та 0,8. Гармати одночасно роблять по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з гармат влучить в об’єкт.

4.9. Серед деталей, які виробляє робітник, в середньому 4 % бракованих. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних п’яти деталей не буде жодної бракованої.

4.10. Деталь проходить три етапи обробки. Ймовірність того, що вона виявиться бракованою на першому етапі обробки, дорівнює 0,02, другому – 0,03, третьому – 0,02. Знайти ймовірність того, що деталь не буде бракованою після трьох етапів, припускаючи, що поява браку на окремих етапах – незалежні події.

4.11. В цеху 6 двигунів. Кожен двигун працює в даний момент з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що в даний момент працює 4 двигуни.

4.12. З колоди гральних карт (36 штук) навмання дістають чотири карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде принаймні один туз.

4.13. Спортсмен стріляє в мішень, яка віддаляється від нього, до першого влучення. Ймовірність влучення в мішень на початку стрільби дорівнює 0,8, а після кожного пострілу зменшується на 0,1. Знайти ймовірність того, що для влучення в ціль спортсмен зробить: а) три постріли; б) не більше двох пострілів.

4.14. Ймовірність того, що необхідний матеріал є на першій базі дорівнює 0,9, на другій – 0,8, на третій – 0,6. Знайти ймовірність того, що цей матеріал є рівно на двох базах.

4.15. Ймовірність одного влучення в ціль при пострілі з двох гармат дорівнює 0,46. Знайти ймовірність влучення в ціль другою гарматою, якщо для першої гармати ця ймовірність дорівнює 0,7.

4.16. Радист тричі викликає кореспондента. Ймовірність того, що буде прийнято перший виклик дорівнює 0,2, другий – 0,3, третій – 0,4. Події, які полягають в тому, що кореспондент почує виклик, незалежні. Знайти ймовірність того, що кореспондент почує виклик радиста.

4.17. Три верстати працюють незалежно. Ймовірність того, що перший верстат протягом однієї зміни вийде з ладу, дорівнює 0,1, другий – 0,2, третій – 0,3. Знайти ймовірність того, що протягом зміни хоча б один верстат не вийде з ладу.

4.18. Ймовірність того, що протягом однієї зміни виникне несправність верстату, дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що не виникне жодної несправності за чотири зміни.

4.19. Ймовірність того, що подія D відбудеться хоча б один раз у трьох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,784. Знайти ймовірність події D в одному випробуванні, якщо в кожному випробуванні ця ймовірність одна і та сама.

4.20. Для повідомлення про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,7, другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії: а) спрацюють обидва сигналізатори; б) спрацює хоча б один сигналізатор; в) спрацює рівно один сигналізатор; г) не спрацює жоден сигналізатор.

4.21. Фірму перевіряють незалежно один від одного три аудитори. Ймовірність того, що перший аудитор знайде недоліки становить 0,5; другий – 0,7; третій – 0,4. Знайти ймовірність того, що в результаті трьох перевірок на фірмі будуть виявлені недоліки.

4.22. Спортсмену надається чотири спроби для виконання кваліфікації. Ймовірність виконання кваліфікації при одній спробі становить 0,8. Знайти ймовірність того, що спортсмен: а) використає всі спроби; б) виконає кваліфікацію.

4.23. Є дві коробки, в першій з яких 2 білі та 3 чорні кулі, а в другій – 4 білі та 2 чорні. З кожної коробки виймається по одній кулі. Знайти ймовірність того, що вони одного кольору.

4.24. Партія зі 100 виробів проходить вибірковий контроль. Умова непридатності всієї партії – наявність хоча б одного бракованого виробу серед чотирьох, що навмання вибирають для контролю. Знайти ймовірність того, що ця партія буде забракована, якщо вона містить шість бракованих виробів.

4.25. Ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить в ціль, дорівнює 0,8. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб з ймовірністю не менше 0,99 бути впевненим у влученні в ціль хоча б один раз?

4.26. В першій коробці 2 білих, 3 червоних і 5 синіх куль, а в другій – 1 біла, 6 червоних і 3 синіх. З кожної коробки дістають навмання по одній кулі. Знайти ймовірність того, що серед цих куль одна синя.

4.27. В магазині продаються 10 телевізорів, три з яких мають дефекти. При купівлі телевізора відбувається його перевірка і у випадку виявлення дефекту телевізор замінюють іншим. Яка ймовірність того, що покупцю для придбання телевізора знадобиться не більше двох спроб?

4.28. На підприємстві брак складає 2 % від загальної кількості виробів. Серед небракованих виробів вироби першого ґатунку складають 95 %. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб виявиться першого ґатунку, якщо виріб взято: а) з числа небракованих; б) із загальної маси виготовленої продукції.

4.29. З усіх родин, які мають двох дітей, обрано одну. Вважаючи, що елементарні події рівноможливі, знайти ймовірність того, що обидві дитини – хлопчики, якщо відомо, що в сім’ї є хлопчик.

4.30. Студент прийшов на залік знаючи відповіді на 24 питання з 30. Яка ймовірність того, що студент складе залік, якщо після відмови відповісти на запитання викладач буде задавати ще одне питання?

Задача 5
Формула повної ймовірності

5.1. Із 1000 ламп 520 належать першій партії, 90 – другій, а решта третій. В першій партії 8 %, в другій – 5 %, в третій – 6 % бракованих ламп. Яка ймовірність того, що навмання вибрана лампа буде бракованою?

5.2. В даний район вироби постачаються трьома фірмами у співвідношенні 5:8:7. Серед продукції першої фірми стандартних виробів 90 %, другої – 80 %, третьої – 75 %. Покупцем придбано один виріб. Знайти ймовірність того, що придбаний виріб стандартний.

5.3. В двох коробках знаходиться по 20 деталей, з них стандартних: в першій – 14, в другій – 16. З першої коробки навмання вибрано одну деталь та перекладено в другу. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана після цього деталь з другої коробки буде стандартною.

5.4. В тирі є 7 гвинтівок, серед яких три з оптичним прицілом. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом для даного спортсмена дорівнює 0,96, без оптичного прицілу – 0,75. Знайти ймовірність влучення в ціль, якщо спортсмен зробить один постріл з навмання вибраної гвинтівки.

5.5. Кількість вантажних авто на даному підприємстві втричі перевищує кількість легкових. Дизельні двигуни мають 50 % вантажних авто та 30 % легкових. Яка ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль матиме дизельний двигун?

5.6. В двох коробках знаходяться мікросхеми: в першій – 8 мікросхем, з них одна дефектна; в другій – 11, з них дві дефектні. З першої коробки навмання вибрано одну мікросхему і перекладено в другу коробку. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана після цього з другої коробки мікросхема буде дефектною.

5.7. Є мікросхеми двох видів у кількості 18 та 10 штук відповідно. Ймовірність відмови мікросхеми першого виду – 0,03, другого виду – 0,02. Навмання взято одну мікросхему і вмонтовано в електронний вузол. Знайти ймовірність того, що вузол вийде з ладу внаслідок відмови мікросхеми.

5.8. Прилад, встановлений на літаку, може працювати в двох режимах: в умовах нормального польоту та в умовах перевантаження при злеті і посадці. Перший режим здійснюється у 80 % всього часу польоту, другий – у 20 %. Ймовірність того, що прилад вийде з ладу за час польоту в нормальному режимі рівна 0,2, в умовах перевантаження – 0,4. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу за час польоту.

5.9. Три автомати виготовляють деталі, які потрапляють на спільний конвеєр. Потужності автоматів відносяться як 2:4:4. Ймовірності того, що якість деталі відмінна для цих автоматів відповідно дорівнюють 0,7; 0,8 і 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь буде відмінної якості.

5.10. В тирі є п’ять рушниць, ймовірності влучення в мішень з яких при одному пострілі дорівнюють відповідно 0,5; 0,8; 0,7; 0,6; 0,9. Визначити ймовірність влучення в мішень при одному пострілі, якщо рушниця вибирається навмання.

5.11. В першій коробці знаходиться 8 білих та 3 чорних кульки, в другій – 4 білих та 6 чорних. З першої коробки в другу переклали навмання 2 кульки. Після чого з другої коробки виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що вона біла.

5.12. В артилерійській військовій частині 20 гармат, з них чотири непристріляні. Ймовірність влучення в ціль з пристріляної гармати рівна 0,8, з непристріляної – 0,3. Знайти ймовірність враження цілі, якщо буде зроблено один постріл з навмання вибраної гармати.

5.13. На заводі по виготовленню гвинтів перший верстат виробляє 25 %, другий – 35 %, третій – 40 % всіх виробів. В їх продукції брак складає відповідно 3 %, 2 % та 1 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний гвинт не є бракованим.

5.14. Радіолампа може належати до однієї з чотирьох партій з ймовірностями $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,3$, $p_4 = 0,1$. Ймовірності того, що лампа пропрацює заданий час, для цих партій дорівнюють відповідно 0,5, 0,7, 0,6, 0,8. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана лампа пропрацює заданий час.

5.15. Стріляють по 9 мішенях типу X, по шести – типу Y і по п'яти – типу Z. Ймовірність влучення при одному пострілі в мішень типу X рівна 0,6, типу Y – 0,5, типу Z – 0,8. Знайти ймовірність враження мішені при одному пострілі, якщо мішень вибирається навмання.

5.16. З першого автомата на конвеєр потрапляє 30 %, з другого – 25 %, з третього – 20 %, з четвертого – 25 % деталей. Серед деталей першого автомата 1 % бракованих, другого – 2 %, третього – 1 %, з четвертого – 5 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з конвеєра деталь виявиться бракованою.

5.17. В коробці знаходиться 25 деталей, виготовлених на першому заводі, 15 – на другому, 20 – на третьому. Серед деталей, виготовлених на першому заводі, 80 % відмінної якості, на другому – 70 %, на третьому – 90 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з коробки деталь виявиться відмінної якості.

5.18. Є дві партії виробів по 20 шт. кожна, при чому в кожній з них є по два бракованих вироби. Виріб, навмання вибраний з першої партії, перекладено в другу, після чого навмання вибрано виріб з другої партії. Знайти ймовірність того, що цей виріб виявиться бракованим.

5.19. На деякому підприємстві перша машина виробляє 15 %, друга – 45 %, третя – 40 % всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 8 %, 6 %, 3 %. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь небракована?

5.20. Деталі виготовляють на двох заводах. Об'єм продукції другого заводу в два рази більший, ніж першого. Серед деталей першого заводу 5 % бракованих, другого – 3 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь виявиться небракованою.

5.21. Працівник друкарні, при наборі тексту, користується двома комплектами літер: в першому – 80 %, в другому – 95 % шрифту відмінної якості. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана літера з навмання вибраного комплекту виявиться відмінної якості.

5.22. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох контролерів. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого контролера рівна 0,6, до другого – 0,4. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим контролером, дорівнює 0,92, другим – 0,99. Знайти ймовірність того, що стандартний виріб при перевірці буде визнано стандартним.

5.23. В продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 10 % телевізорів з прихованим дефектом, другого – 4 %, третього – 6 %. Знайти ймовірність придбання телевізора без дефектів, якщо магазин одержав 20 % телевізорів з першого заводу, 45 % – з другого, 35 % – з третього.

5.24. Ймовірності того, що під час роботи комп’ютера збій виникне в процесорі, в оперативній пам’яті, в інших вузлах відносяться як 2:3:5. Ймовірності виявлення збою в процесорі, в оперативній пам’яті та в інших вузлах відповідно дорівнюють 0,85, 0,95 та 0,8. Знайти ймовірність того, що збій, який виник в машині, буде виявлено.

5.25. В цеху працює 26 верстатів. З них 12 марки X, 8 марки Y і 6 марки Z. Верстати виготовляють відповідно 80 %, 70 % і 90 % деталей відмінної якості. Який відсоток деталей відмінної якості випускає цех в цілому, якщо продуктивність верстатів однакова?

5.26. Торгова фірма одержує телевізори від трьох виробників у співвідношенні 1:4:5. Досвід показує, що телевізори цих виробників не потребують ремонту на протязі гарантійного терміну відповідно в 98 %, 88 % та 92 % випадків. Знайти ймовірність того, що придбаний покупцем телевізор не потребуватиме ремонту на протязі гарантійного терміну.

5.27. В першій коробці знаходиться 3 білих та 7 чорних кульок, в другій – 4 білі та 6 чорних, в третій – 8 білих та 2 чорних. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана кулька з навмання вибраної коробки виявиться чорною.

5.28. В коробку з трьома однаковими деталями кинуто стандартну деталь, а потім навмання вибрано одну деталь. Знайти ймовірність того, що вона стандартна, якщо однаково ймовірні всі гіпотези про початкову кількість стандартних деталей в коробці.

5.29. В кошику знаходиться 10 тенісних м’ячів, 8 з яких нові. Для першої гри беруть навмання один м’яч, який після гри повертають в кошик. Для другої гри також навмання беруть м’яч. Знайти ймовірність того, що взятий для другої гри м’яч новий.

5.30. В першій коробці знаходиться 10 куль, з яких 8 білих; в другій – 20 куль, з яких 4 білі. З кожної коробки навмання дістають по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання вибирають одну кулю. Знайти ймовірність того, що це буде біла куля.

Задача 6
Формула Байєса

6.1. В даний район вироби постачаються трьома фірмами у співвідношенні 5:4:6. Серед продукції першої фірми стандартних виробів 80 %, другої – 90 %, третьої – 85 %. Покупцем придбано один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що він поставлений першою фірмою.

6.2. Серед 25 гранітних блоків 5 – червоного граніту, решта – сірого. Відомо, що 10 % блоків червоного та 15 % сірого мають внутрішні дефекти. Навмання вибраний для дослідження блок виявився дефектним. Яка ймовірність того, що він з сірого граніту?

6.3. В тирі є 5 гвинтівок, серед яких лише дві з оптичним прицілом. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі із гвинтівки з оптичним прицілом для даного спортсмена становить 0,95, без оптичного прицілу – 0,70. Спортсмен одним пострілом з навмання вибраної гвинтівки вразив ціль. Знайти ймовірність того, що він стріляв з гвинтівки без оптичного прицілу.

6.4. На деякому підприємстві перша машина виробляє 15 %, друга – 45 %, третя – 40 % всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 8 %, 6 %, 3 %. Навмання вибрана деталь виявилась дефектною. Яка ймовірність того, що вона виготовлена другою машиною?

6.5. В продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 6 % телевізорів з прихованим дефектом, другого – 5 %, третього – 4 %. Магазин одержав 20 % телевізорів з першого заводу, 45 % – з другого, решту – з третього. Придбаний телевізор виявився справним. Знайти ймовірність того, що його виготовлено на першому заводі.

6.6. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох контролерів. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого контролера становить 0,55, до другого – 0,45. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим контролером, дорівнює 0,9, другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що перевірка здійснювалась другим контролером.

6.7. З першого цеху на конвеєр потрапляє 40 %, з другого – 20 %, з третього – 10 %, з четвертого – 30 % деталей. Серед деталей першого цеху 2 % бракованих, другого – 3 %, третього – 4 %, з четвертого – 1 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана з конвеєра деталь, яка виявилась бракованою, виготовлена третім цехом.

6.8. В першій коробці знаходиться 7 білих та 5 чорних кульок, в другій – 1 біла та 6 чорних. З першої коробки в другу переклали навмання одну кульку. Після чого, з другої коробки навмання вийняли одну кульку, яка виявилась чорною. Знайти ймовірність того, що було перекладено білу кульку.

6.9. Працівник друкарні при наборі тексту, користується двома комплектами літер: в першому – 85 %, в другому – 90 % шрифту відмінної якості. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана літера, яка виявилась відмінної якості, належить до першого комплекту.

6.10. Кількість вантажних авто на даному підприємстві вдвічі перевищує кількість легкових. Дизельні двигуни мають 50 % вантажних авто та 10 % легкових. Яка ймовірність того, що навмання вибраний автомобіль, який виявився з дизельним двигуном, є вантажним?

6.11. Серед 16 одиниць продукції першого виду 15 % браку, а серед 30 одиниць другого виду 6 % браку. Навмання вибрана одиниця продукції виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона другого виду?

6.12. На деякому підприємстві перша машина виробляє 25 %, друга – 35 %, третя – 40 % всіх деталей. В їх продукції браку відповідно 6 %, 5 % та 4 %. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь, яка виявилась дефектною, виготовлена першою машиною?

6.13. Є 32 одиниці продукції двох видів. Серед 12 виробів першого виду один бракований, а серед 20 виробів другого виду три бракованих. Навмання вибраний виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він другого виду?

6.14. В двох коробках знаходиться по 20 деталей, з них стандартних: в першій – 18, в другій – 10. З першої коробки навмання вибрано одну деталь та перекладено в другу. Навмання вибрана після цього деталь з другої коробки виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що було перекладено нестандартну деталь.

6.15. В коробці знаходиться 16 деталей, виготовлених на першому заводі, 14 – на другому, 10 – на третьому Серед деталей, виготовлених на першому заводі, 90 % відмінної якості, на другому – 80 %, на третьому – 70 %. Навмання вибрана з коробки деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірність того, що її виготовлено на третьому заводі.

6.16. Стріляють по двох мішенях типу X, по шести – типу Y і по п'яти – типу Z. Ймовірність влучення при одному пострілі в мішень типу X рівна 0,6, типу Y – 0,5, типу Z – 0,4. При одному пострілі мішень було вражено. Знайти ймовірність того, що стріляли по мішені типу Y, якщо мішень вибирається навмання.

6.17. Прилад, встановлений на літаку, може працювати в двох режимах: в умовах нормального польоту та в умовах перевантаження при злеті і посадці. Перший режим здійснюється в 80 % всього часу польоту, другий – в 20 %. Ймовірність того, що прилад вийде з ладу за час польоту в нормальному режимі рівна 0,2, в умовах перевантаження – 0,4. Прилад вийшов з ладу за час польоту. Знайти ймовірність того, що це сталось в умовах перевантаження при злеті і посадці.

6.18. Однотипні деталі виготовляють на двох заводах. Об'єм продукції другого заводу в три рази більший, ніж першого. Серед деталей першого заводу 8 % бракованих, другого – 2 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана деталь, яка виявилась бракованою, виготовлена на першому заводі.

6.19. Ймовірності того, що під час роботи комп'ютера збій виникне в процесорі, в оперативній пам'яті, в інших вузлах відносяться як 3:4:3. Ймовірності виявлення збою в процесорі, в оперативній пам'яті та в інших вузлах відповідно дорівнюють 0,85, 0,95, 0,8. Знайти ймовірність того, що збій, який виявлено в машині, виник в процесорі.

6.20. На заводі по виготовленню гвинтів перший верстат виробляє 15 %, другий – 25 %, третій – 60 % всіх виробів. В їх продукції брак складає відповідно 2 %, 1 % та 3 %. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний гвинт, який виявився дефектним, виготовлено на третьому верстаті.

6.21. Відомо, що 90 % продукції заводу відповідає стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,98 та нестандартну – з ймовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, задовольняє стандарту.

6.22. В першій коробці знаходиться 5 білих та 8 чорних кульок, в другій – 2 білі та 7 чорних, в третій – 5 білих та 3 чорних. З навмання вибраної коробки вийнято кульку. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що кульку було вийнято з другої коробки.

6.23. Однотипні прилади виготовляються трьома заводами в кількісному співвідношенні 5:2:3, причому ймовірності браку для цих заводів становлять відповідно 0,04; 0,1; 0,05. Прилад, придбаний лабораторією, виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що даний прилад виготовлено другим заводом.

6.24. Маємо 10 однакових коробок, в семи з яких міститься по чотири чорних та три білих, а в трьох – по сім чорних та п'ять білих кульок. З навмання вибраної коробки вийнято кульку. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що кульку вийнято з коробки, в якій знаходиться чотири чорних та три білих кульки.

6.25. Серед 300 виробів 150 першого ґатунку, 100 – другого, 50 – третього. Ймовірність браку серед виробів першого ґатунку 0,02, другого – 0,03, третього – 0,05. Взятий навмання виріб, виявився небракованим. Знайти ймовірність того, що цей виріб першого ґатунку.

6.26. В артилерійській військовій частині 18 гармат, з них дві непристріляні. Ймовірність влучення в ціль з пристріляної гармати дорівнює 0,8, з непристріляної – 0,3. Зробили один постріл і в ціль не влучили. Знайти ймовірність того, що постріл було зроблено з непристріляної гармати.

6.27. Радіолампа може належати до однієї з трьох партій з ймовірностями $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,3$. Ймовірність того, що лампа пропрацює заданий час, для цих партій становить відповідно 0,5, 0,4, 0,8. Лампа пропрацювала заданий час. Знайти ймовірність того, що вона належить до першої партії.

6.28. В тирі є чотири рушниці, ймовірності влучення з яких в мішень при одному пострілі становлять відповідно 0,8, 0,9, 0,7, 0,5. При одному пострілі було влучено в мішень. Знайти ймовірність того, що постріл було зроблено з другої рушниці, якщо рушниця вибирається навмання.

6.29. В коробці лежить куля невідомого кольору – з однаковою ймовірністю біла або чорна. В коробку поклали білу кулю, після чого з коробки навмання дістали одну кулю. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що в коробці залишилась біла куля.

6.30. Два мисливці одночасно вистрілили по кабану. Ймовірності влучення для мисливців відповідно дорівнюють 0,8 і 0,4. Кабана вбито однією кулею. В якому співвідношенні мисливці повинні розділити здобич?

Задача 7
Схема Бернуллі

7.1. Контролер перевіряє партію з n виробів. Ймовірність того, що виріб відповідає стандарту, $p = 0,6$. Нехай m – кількість стандартних виробів. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n = 5$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$; б) $n = 216$, $k_1 = 120$, $k_2 = 140$.

7.2. У магазині для освітлення використовується n електричних ламп. Ймовірність вийти з ладу протягом року для кожної з них $p=0,2$. Нехай m – кількість ламп, які перегоріли протягом року. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n=6$, $k_1=2$, $k_2=4$; б) $n=600$, $k_1=100$, $k_2=130$.

7.3. Протягом години магазин відвідало n чоловік. Ймовірність здійснити покупку для кожного з них $p=0,2$. Нехай m – кількість відвідувачів, які зробили покупку. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n=8$, $k_1=1$, $k_2=3$; б) $n=100$, $k_1=15$, $k_2=32$.

7.4. Банк надав кредити n підприємствам. Ймовірність своєчасного повернення кредиту $p=0,8$. Нехай m – кількість підприємств, які повернули кредит вчасно. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n=5$, $k_1=2$, $k_2=4$; б) $n=100$, $k_1=75$, $k_2=90$.

7.5. Податкова інспекція перевіряє n підприємств. За статистикою ймовірність несплати податків підприємством оцінюється як $p=0,8$. Нехай m – кількість підприємств, які не сплатили податки. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n=5$, $k_1=1$, $k_2=3$; б) $n=216$, $k_1=160$, $k_2=180$.

7.6. Секретарка повинна надрукувати n сторінок тексту. Ймовірність того, що на сторінці вона допустить принаймні одну помилку, $p=0,2$. Нехай m – кількість сторінок з помилками. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n=7$, $k_1=1$, $k_2=4$; б) $n=100$, $k_1=16$, $k_2=30$.

7.7. В міському парку посаджено n молодих дерев. Ймовірність того, що дерево приживеться, $p=0,8$. Нехай m – кількість дерев, які прижилися. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n=7$, $k_1=4$, $k_2=6$; б) $n=400$, $k_1=300$, $k_2=330$.

7.8. Магазин продав n телевізорів. Ймовірність того, що телевізор вийде з ладу протягом гарантійного терміну, $p=0,2$. Нехай m – кількість телевізорів, які потребували гарантійного ремонту. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n=7$, $k_1=2$, $k_2=4$; б) $n=100$, $k_1=14$, $k_2=22$.

7.9. Гральний кубик підкинуто n разів. Нехай m – кількість випадань 5 очок. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n = 5$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$; б) $n = 100$, $k_1 = 10$, $k_2 = 20$.

7.10. У змаганнях з рибалки бере участь n чоловік. Ймовірність піймати принаймні одну рибину для кожного з них $p = 0,3$. Нехай m – кількість рибалок, які піймали рибу. Знайти ймовірність $P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right)$, якщо: а) $n = 6$, $k_1 = 3$, $k_2 = 5$; б) $n = 120$, $k_1 = 30$, $k_2 = 45$.

7.11. Ймовірність народження дівчинки дорівнює 0,48. Знайти ймовірність того, що серед 1000 немовлят: а) 480 дівчаток; б) від 250 до 540 дівчаток.

7.12. Ймовірність того, що клієнту банка знадобиться грошова позика, дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що з 10000 клієнтів банку за позикою звернеться в банк: а) 200 чоловік; б) від 180 до 220 чоловік.

7.13. Ймовірність того, що відвідувач бібліотеки вибере книгу українського автора, дорівнює 0,45. Знайти ймовірність того, що з 1000 відвідувачів бібліотеки книгу українського автора вибрали: а) 450 читачів; б) від 410 до 490 читачів.

7.14. За попередніми опитуваннями відомо, що 40 % опитаних готові проголосувати на виборах мера міста за діючого голову міста. Знайти ймовірність того, що з 10000 виборців за діючого мера віддадуть свої голоси: а) рівно 4000 чоловік; б) від 3000 до 5000 чоловік.

7.15. Ймовірність того, що виготовлена верстатом-автоматом деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність, що серед 600 деталей виявиться бракованих: а) рівно 60; б) від 50 до 70 деталей.

7.16. Ймовірність порушення герметичності контейнера з радіоактивними відходами 0,001. Знайти ймовірність того, що серед 10000 контейнерів з порушеннями герметичності виявиться: а) рівно 10; б) від 8 до 11 контейнерів.

7.17. Схожість насіння пшениці становить 85 %. Знайти ймовірність того, що серед 20000 висіяних зернин зійде: а) рівно 17000; б) від 15000 до 19000.

7.18. Магазин замовив 1000 бляшанок морської капусти. Ймовірність того, що під час перевезення бляшанка буде пошкоджена дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що магазин одержить пошкодженими: а) 2 бляшанки; б) більше 3 бляшанок.

7.19. Технологія друку книги, що видається накладом у 10000 екземплярів допускає дефект друку з ймовірністю 0,0002. Знайти ймовірність того, що книг з дефектом друку буде: а) принаймні дві; б) більше 3.

7.20. Пристрій складається з 1000 датчиків, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого датчика протягом доби дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом доби відмовить: а) принаймні один датчик; б) від 3 до 5 датчиків.

7.21. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що серед 1000 немовлят: а) 520 хлопчиків; б) від 150 до 530 хлопчиків.

7.22. Ймовірність того, що клієнту страхової компанії знадобиться страхова виплата, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що з 10000 застрахованих у страхову компанію за виплатою звернеться: а) 100 клієнтів; б) від 90 до 110 клієнтів.

7.23. Ймовірність того, що відвідувач, який зайшов у магазин, придбає певний товар, дорівнює 0,35. Знайти ймовірність того, що з 1000 відвідувачів магазину товар придбають: а) 350 відвідувачів; б) від 320 до 380 відвідувачів.

7.24. За попередніми опитуваннями відомо, що 40 % опитаних готові проголосувати на виборах мера міста за кандидата N. Знайти ймовірність того, що з 50000 жителів, що мають право голосувати, за кандидата N віддадуть свої голоси: а) рівно 20000 чоловік; б) від 15000 до 25000 чоловік.

7.25. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність, що серед 500 деталей виявиться бракованих: а) рівно 50; б) від 40 до 60 деталей.

7.26. Ймовірність порушення герметичності банки консервів 0,001. Знайти ймовірність того, що серед 20000 банок з порушеннями герметичності виявиться: а) рівно 20; б) від 15 до 25 банок.

7.27. За статистикою відомо, що з посіяного насіння деякої рослини сходить 80 %. Знайти ймовірність того, що серед 2000 висіяних насінин зійде: а) рівно 1600; б) від 1400 до 1800 насінин.

7.28. Магазин замовив 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка буде пошкоджена дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин одержить пошкодженими: а) рівно 3 пляшки; б) більше 2 пляшок.

7.29. Книга видається тиражем 10000 екземплярів. Технологія виготовлення допускає дефект переплетення з ймовірністю 0,0003.

Знайти ймовірність того, що книг з дефектом переплетення буде: а) принаймні одна; б) більше 2.

7.30. Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента протягом години дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом години відмовить: а) хоча б один елемент; б) від 4 до 6 елементів.

Задача 8
Закон розподілу дискретної випадкової величини

8.1–8.6. Кожна з n ламп з ймовірністю p є якісною. Лампа вгвинчується в прилад і вмикається струм. При цьому дефектна лампа одразу виходить з ладу, після чого замінюється іншою. Випадкова величина X – число випробуваних ламп. Знайти її закон розподілу.

Варіант	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**8.4.**	**8.5.**	**8.6.**
n	5	4	5	4	5	4
p	0,9	0,7	0,8	0,8	0,7	0,9

8.7–8.12. Випробовується пристрій, який складається з трьох незалежно працюючих приладів. Ймовірності відмови приладів p_1, p_2, p_3. Випадкова величина X – число приладів, які вийшли з ладу. Знайти її закон розподілу.

Варіант	**8.7.**	**8.8.**	**8.9.**	**8.10.**	**8.11.**	**8.12.**
p_1	0,5	0,6	0,7	0,3	0,4	0,3
p_2	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6
p_3	0,7	0,8	0,5	0,6	0,5	0,4

8.13–8.18. Два спортсмени незалежно роблять по одному пострілу, кожен в свою мішень. Ймовірність влучення в мішень для першого спортсмена – p_1, для другого – p_2. Розглядаються випадкові величини: X_1 – число влучень першого спортсмена, X_2 – число влучень другого спортсмена та їх сума $Z = X_1 + X_2$. Знайти закон розподілу випадкової величини Z.

Варіант	**8.13.**	**8.14.**	**8.15.**	**8.16.**	**8.17.**	**8.18.**
p_1	0,5	0,6	0,7	0,4	0,5	0,8
p_2	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6

8.19–8.24. В коробці k білих та n чорних кульок. Дві кульки навмання дістають з коробки. Випадкова величина X – число вийнятих білих кульок. Знайти її закон розподілу.

Варіант	**8.19.**	**8.20.**	**8.21.**	**8.22.**	**8.23.**	**8.24.**
k	3	4	5	3	4	5
n	5	6	8	6	7	7

8.25–8.27. Правильний гральний кубик підкидається n разів. Розглядається випадкова величина X – число підкидань, при яких випаде не менше п'яти очок. Знайти її закон розподілу.

Варіант	**8.25.**	**8.26.**	**8.27.**
n	3	4	5

8.28–8.30. Симетрична монета підкидається n разів. Випадкова величина X – число появ герба. Знайти її закон розподілу.

Варіант	**8.28.**	**8.29.**	**8.30.**
n	3	4	5

Задача 9
Числові характеристики дискретної випадкової величини

Відомий закон розподілу дискретної випадкової величини X. Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

9.1.

x_i	–2	1	3	5
p_i	0,2	0,28	0,42	0,1

9.2.

x_i	–5	2	3	4
p_i	0,4	0,29	0,11	0,2

9.3.

x_i	–3	–2	1	3
p_i	0,35	0,15	0,2	0,3

9.4.

x_i	–4	0	2	5
p_i	0,1	0,2	0,25	0,45

9.5.

x_i	–2	2	5	8

p_i	0,27	0,21	0,22	0,3

9.6.

x_i	–1	1	5	7
p_i	0,2	0,33	0,24	0,23

9.7.

x_i	–2	–1	3	5
p_i	0,22	0,3	0,21	0,27

9.8.

x_i	–5	2	3	4
p_i	0,2	0,28	0,42	0,1

9.9.

x_i	–3	–2	1	3
p_i	0,4	0,29	0,1	0,21

9.10.

x_i	–4	0	2	5
p_i	0,35	0,15	0,2	0,3

9.11.

x_i	–2	2	5	8
p_i	0,1	0,2	0,25	0,45

9.12.

x_i	–1	1	5	7
p_i	0,27	0,21	0,22	0,3

9.13.

x_i	–2	3	4	5
p_i	0,15	0,25	0,25	0,35

9.14.

x_i	–5	–2	3	4
p_i	0,1	0,23	0,22	0,45

9.15.

x_i	–4	1	2	5
p_i	0,13	0,21	0,22	0,44

9.16.

x_i	–2	2	4	6
p_i	0,14	0,26	0,25	0,35

9.17.

x_i	–3	–2	2	6
p_i	0,21	0,22	0,27	0,3

9.18.

x_i	–1	3	5	6
p_i	0,18	0,21	0,23	0,38

9.19.

x_i	–5	–1	3	5
p_i	0,21	0,22	0,25	0,32

9.20.

x_i	–2	–1	4	9
p_i	0,2	0,28	0,42	0,1

9.21.

x_i	–5	–2	–1	4
p_i	0,4	0,29	0,1	0,21

9.22.

x_i	–4	-1	0	5
p_i	0,35	0,15	0,2	0,3

9.23.

x_i	–1	2	4	7
p_i	0,1	0,2	0,25	0,45

9.24.

x_i	–5	–3	–2	1
p_i	0,2	0,31	0,22	0,27

9.25.

x_i	–2	2	5	6
p_i	0,25	0,22	0,23	0,3

9.26.

x_i	–4	2	4	6
p_i	0,22	0,2	0,23	0,35

9.27.

x_i	–3	–2	1	6
p_i	0,2	0,23	0,32	0,25

9.28.

x_i	–4	0	2	5
p_i	0,3	0,32	0,22	0,16

9.29.

x_i	–1	3	5	8
p_i	0,25	0,4	0,2	0,15

9.30.

x_i	–3	1	3	5
p_i	0,05	0,25	0,52	0,18

Задача 10
Неперервна випадкова величина

Випадкова величина X має функцію розподілу $F(x)$. Знайти: а) ймовірність того, що X набуде значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$; б) щільність розподілу; в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

10.1.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$
$\alpha=-1;\ \ \beta=2,5.$

10.2.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$
$\alpha=-1;\ \ \beta=1,5.$

10.3.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 2-\dfrac{4}{x}, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$
$\alpha=2;\ \ \beta=3.$

10.4.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{9(x^2-4)}{5x^2}, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$
$\alpha=0;\ \ \beta=2,5.$

10.5.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

10.6.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{(x+1)^2}{16}, & -1<x\le 3,\\ 1, & x>43\end{cases}$$

$\alpha = 0$; $\beta = 0,5$. $\alpha = 0$; $\beta = 1$.

10.7.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ (x-3)^3, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$
$\alpha = 3,5$; $\beta = 4$.

10.8.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2 + x}{2}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$
$\alpha = 0,2$; $\beta = 1$.

10.9.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ -\dfrac{2}{x} - 1, & -2 < x \le -1, \\ 1, & x > -1. \end{cases}$$
$\alpha = -2$; $\beta = 0$.

10.10.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1, & x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$
$\alpha = -2$; $\beta = 0,25$.

10.11.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{x}{2} - 1, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$
$\alpha = -2$; $\beta = 3$.

10.12.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 4, \\ \dfrac{(x-4)^2}{25}, & 4 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$
$\alpha = 5$; $\beta = 6$.

10.13.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sqrt{x^3}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$
$\alpha = 0$; $\beta = 0,5$.

10.14.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{(x+2)^2}{4}, & -2 < x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$
$\alpha = -1$; $\beta = 0$.

10.15.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right), & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$
$\alpha = 1,5$; $\beta = 2,5$.

10.16.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$
$\alpha = 1$; $\beta = 2$.

10.17. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sqrt[4]{x^3}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

$\alpha=0{,}5$; $\beta=2{,}5$.

10.18. $$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 2-\dfrac{2}{x}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=1{,}5$.

10.19. $$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sqrt[3]{x^2}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

$\alpha=-1$; $\beta=0{,}5$.

10.20. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{4}\left(x+1\right)^2, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=2$.

10.21. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \left(x-1\right)^2, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=1{,}5$.

10.22. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ 1-\sqrt[3]{x^4}, & -1<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-0{,}5$; $\beta=1$.

10.23. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{8}\sqrt{x^3}, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

$\alpha=2$; $\beta=3$.

10.24. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{1}{9}\left(x-2\right)^2, & 2<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

$\alpha=3$; $\beta=4$.

10.25. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{\left(x-1\right)^2}{9}, & 1<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

$\alpha=2$; $\beta=3{,}5$.

10.26. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \sqrt{x}-1, & 1<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=2$.

10.27. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sqrt[3]{x^4}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

10.28. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ \dfrac{\left(x-3\right)^2}{4}, & 3<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

$\alpha = 0,5$; $\beta = 2$.

$\alpha = 3$; $\beta = 4,5$.

10.29.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$\alpha = 1$; $\beta = 1,5$.

10.30.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{1}{7}\left(\sqrt{x^3} - 1\right), & 1 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = 1$; $\beta = 3$.

Задача 11
Розподіли: нормальний, рівномірний, показниковий, Пуассона

11.1. Автомат штампує деталі. Контрольований розмір деталі є випадковою величиною X, що має нормальний розподіл з параметрами $a = 50$, $\sigma = 0,02$. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини X. Знайти відсоток бракованих деталей, якщо деталь вважається придатною, коли її розмір міститься в межах від 49,96 до 50,04.

11.2. Жирність молока корів у Житомирській області (у %) можна розглядати як нормально розподілену випадкову величину з математичним сподіванням рівним 4 % і середнім квадратичним відхиленням 0,03 %. Обчислити ймовірність того, що в навмання взятій пробі жирність молока буде: а) більшою 4 %; б) меншою 4 %; в) від 3,95 % до 4,05 %. Знайти щільність розподілу даної випадкової величини.

11.3. Вага однієї плитки шоколаду є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 100 г і середнім квадратичним відхиленням 2 г. Знайти відсоток коробок, вага яких: а) більша 100 г; б) міститься у межах від 99 г до 101 г.

11.4. Зріст студентів першого курсу можна описати нормальним розподілом з математичним сподіванням 170 см і середнім квадратичним відхиленням 7 см. Визначити відсоток студентів першого курсу, що мають зріст: а) більше 170 см; б) менше 170 см; в) від 170 см до 180 см. Розв'язок пункту в) зобразити схематично на графіку щільності розподілу.

11.5. Зміна індексу цінних паперів на фондовій біржі може бути змодельована як нормально розподілена випадкова величина з параметрами $a = 1$ і $\sigma^2 = 0,01$. Знайти ймовірність того, що на наступних торгах індекс цінних паперів буде: а) більшим 1; б) меншим 1; в) від 0,98 до 1,02. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу ймовірностей даної випадкової величини.

11.6. Середній відсоток виконання плану підприємствами галузі складає 103 %, середнє квадратичне відхилення 2 %. Припускаючи, що виконання плану підприємствами має нормальний розподіл, визначити відсоток підприємств, що виконують план: а) більше 103 %; б) менше 103 %; в) від 99 % до 107 %. Розв'язок пункту в) схематично зобразити на графіку щільності розподілу.

11.7. Діаметр деталей, виготовлених цехом, є випадковою величиною, що має нормальний розподіл з математичним сподіванням $a = 5$ см і дисперсією $\sigma^2 = 0,0004$. У яких межах за правилом "трьох сигм” можна практично гарантувати діаметр деталей? Знайти відсоток деталей, діаметр яких міститься у межах від 4,96 до 5,04 см.

11.8. На автоматі виготовляють заклепки. Діаметр заклепок можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 3 мм і середнім квадратичним відхиленням 0,1. Які розміри діаметра заклепки можна гарантувати з ймовірністю: а) 0,95; б) 0,9973?

11.9. Контрольований розмір деталі є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $a = 150$ мм та $\sigma = 2$ мм. а) Знайти ймовірність браку, якщо допустимі розміри повинні бути 150 ± 3 мм. б) Яку точність контрольованого розміру можна гарантувати з ймовірністю 0,97? в) За які межі за правилом “трьох сигм” практично не вийде контрольований розмір деталі?

11.10. Вага окремої коробки цукерок є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 500 г і середнім квадратичним відхиленням 10 г. Знайти відсоток коробок, вага яких: а) більша 500 г; б) знаходиться в межах 500 ± 15 г.

11.11. Масу тіла курсантів військового інституту можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 60 кг і середнім квадратичним відхиленням 2 кг. Визначити відсоток курсантів, що мають масу: а) більшу 60 кг; б) меншу 70 кг; в) від 58 кг до 62 кг. Розв’язок пункту в) зобразити схематично на графіку щільності розподілу.

11.12. Вважаючи, що курс акцій компанії протягом одних біржових торгів – нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням 8 грн та середнім квадратичним відхилення 1 грн, знайти: а) ймовірність того, що курс акцій міститься в межах від 4 до 9 грн; б) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення X від середнього курсу виявиться меншою 2 грн.

11.13. Середній відсоток споживання енергоресурсів підприємствами галузі складає 105 % від запланованого, середнє квадратичне відхилення 2 %. Припускаючи, що споживання енергоресурсів підприємствами має нормальний розподіл, визначити відсоток підприємств, що споживають енергоресурси відносно плану: а) більше 103 %; б) менше 105 %; в) від 100 % до 110 %. Розв’язок пункту в) схематично зобразити на графіку щільності розподілу.

11.14. Діаметр вала є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $a = 200$ мм та $\sigma = 3$ мм. а) Знайти відсоток деталей, діаметр яких лежить в межах від 196 до 204 мм. б) Яку точність діаметра деталі можна гарантувати з ймовірністю 0,97? в) За які межі за правилом “трьох сигм” практично не вийде діаметр деталі?

11.15. Випадкова величина X – час безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, причому відомо, що середній час безвідмовної роботи елемента дорівнює 1,5 доби. Знайти числові характеристики випадкової величини X та наступні ймовірності: а) $P(X < 1)$; б) $P(1{,}4 < X < 1{,}6)$.

11.16. Хвилинна стрілка годинника переміщується стрибком наприкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент годинник покаже час, що відрізняється від справжнього не більше ніж на 15 секунд.

11.17. Випадкова величина X – число викликів, що надходять на пульт диспетчера станції швидкої допомоги протягом години, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = 10$ (повідомлень за годину). Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій: а) $P(X = 0)$; б) $P(X > 6)$.

11.18. На торгівельну базу у середньому приїздить 5 вантажних авто за добу. Випадкова величина X – число вантажних авто, що прибули на базу протягом доби, має розподіл Пуассона. Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій: а) $P(X \geq 2)$; б) $P(X \leq 6)$.

11.19. Випадкова величина X – час безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл, причому відомо, що середній час безвідмовної роботи елемента дорівнює 15 діб. Знайти числові характеристики випадкової величини X та наступні ймовірності: а) $P(X < 10)$; б) $P(14 < X < 16)$.

11.20. Координата точки, що навмання вибирається на відрізку $[1, 5]$, є рівномірно розподіленою випадковою величиною X. Записати функцію розподілу та щільність розподілу, побудувати їх графіки. Обчислити числові характеристики випадкової величини X та ймовірність $P(X \in (3, 4))$.

11.21. Випадкова величина X – число повідомлень, що надходять на пульт диспетчера протягом години, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = 5$ (повідомлень за годину). Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій: а) $P(X = 0)$; б) $P(X > 3)$.

11.22. У порт приходить у середньому 2,5 судна за добу. Випадкова величина X – число суден, що зайшли в порт протягом доби, має розподіл Пуассона. Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій: а) $P(X \geq 1)$; б) $P(X \leq 3)$.

11.23. Інтервали часу між приходами в порт суден розподілені за показниковим законом з параметром $\lambda = 5$. Знайти числові характеристики випадкової величини X – часу між приходами двох суден. Обчислити: а) $P(X \in (1,\ 2))$; б) $P(X \in (4,\ 6))$.

11.24. Випадкова величина X – час між двома повідомленнями, що надходять на торгову площадку, має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,5$. Знайти числові характеристики випадкової величини X та наступні ймовірності: а) $P(X < 0,2)$; б) $P(0,3 < X < 0,7)$.

11.25. Середнє число викликів, що надходять на пульт диспетчера таксі протягом хвилини, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде чотири виклики; в) надійде менше трьох викликів.

11.26. Випадкова величина X – час обслуговування клієнтів у майстерні має показниковий розподіл з функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-3x}$ (відлік часу проводиться в годинах). Знайти числові характеристики випадкової величини X та наступні ймовірності: а) $P(X < 0,5)$; б) $P(0,2 < X < 0,4)$.

11.27. Автобуси деякого маршруту рухаються з інтервалом 10 хв. Випадкова величина X – час, протягом якого пасажиру доведеться чекати автобус, має рівномірний розподіл. Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірність того, що пасажир буде чекати автобус більше 3 хвилин.

11.28. Випадкова величина X – має рівномірний розподіл на відрізку $[2,\ 6]$. Записати функцію розподілу та щільність розподілу. Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірність $P(X \in (3,\ 4))$.

11.29. Шкала лабораторної ваги має ціну поділки 1 грам. При зважуванні вага заокруглюється в найближчий бік. Яка ймовірність того, що випадкова величина X – абсолютна помилка визначення маси: а) буде міститись між $\sigma(X)$ і $2\sigma(X)$? б) буде меншою 0,2 грама?

11.30. Тривалість роботи приладу вважають нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $a = 1000$ год і

$\sigma = 30$ год. Знайти ймовірність того, що тривалість роботи приладу складе: а) більше 1000 год; б) менше 1000 год; в) від 940 до 1060 год. Знайти щільність розподілу даної випадкової величини і зобразити розв'язок пункту в) на графіку щільності розподілу.

Задача 12
Дискретний випадковий вектор

За даним законом розподілу двовимірного дискретного випадкового вектора (X, Y) знайти:

1) закони розподілу компонент X та Y;

2) математичні сподівання, дисперсії і коефіцієнт кореляції компонент;

3) умовні закони розподілу величини X при $Y = a$ і величини Y при $X = b$;

4) умовні математичні сподівання величини X при $Y = a$ і величини Y при $X = b$.

12.1. $a = 3$, $b = 4$.

X	Y			
	–2	3	8	13
1	0,02	0,04	0,03	0,01
4	0,06	0,2	0,1	0,03
7	0,06	0,13	0,11	0,04
10	0,03	0,06	0,06	0,02

12.2. $a = 6$, $b = 2$.

X	Y			
	3	4	5	6
–1	0,03	0,07	0,05	0,01
2	0,07	0,13	0,1	0,03
5	0,06	0,23	0,09	0,03
8	0,02	0,04	0,03	0,01

12.3. $a = -2$, $b = 6$.

X	Y			
	-2	1	4	7
3	0,02	0,05	0,05	0,02
4	0,04	0,11	0,19	0,05
5	0,05	0,11	0,12	0,05

6	0,02	0,05	0,05	0,21

12.4. $a = 7$, $b = -3$.

X	Y			
	–2	1	4	7
–5	0,03	0,06	0,06	0,02
–3	0,05	0,12	0,12	0,05
–1	0,05	0,11	0,19	0,04
1	0,01	0,04	0,04	0,01

12.5. $a = -2$, $b = 5$.

X	Y			
	–5	–2	1	4
2	0,03	0,07	0,06	0,02
5	0,07	0,2	0,11	0,04
8	0,06	0,11	0,1	0,03
11	0,02	0,04	0,03	0,01

12.6. $a = 5$, $b = 2$.

X	Y			
	2	5	8	11
2	0,02	0,06	0,05	0,02
5	0,06	0,12	0,11	0,05
8	0,05	0,2	0,11	0,04
11	0,02	0,04	0,04	0,01

12.7. $a = 9$, $b = 5$.

X	Y			
	3	5	7	9
2	0,02	0,04	0,04	0,01
3	0,06	0,12	0,17	0,03
4	0,07	0,13	0,11	0,04
5	0,03	0,06	0,05	0,02

12.8. $a = 4$, $b = -1$.

X	Y			
	–5	–2	1	4
–3	0,01	0,04	0,04	0,02
–1	0,04	0,1	0,11	0,05
1	0,05	0,12	0,19	0,06
3	0,02	0,06	0,06	0,03

12.9. $a = 10$, $b = 5$.

X	Y			
	–2	2	6	10
2	0,02	0,05	0,05	0,02
3	0,05	0,18	0,12	0,05
4	0,05	0,11	0,11	0,05
5	0,02	0,05	0,05	0,02

12.10. $a = 9$, $b = 5$.

X	Y			
	3	5	7	9
3	0,03	0,07	0,06	0,02
5	0,07	0,13	0,11	0,04
7	0,06	0,18	0,1	0,03
9	0,02	0,04	0,03	0,01

12.11. $a = 5$, $b = 4$.

X	Y			
	3	5	7	9
1	0,01	0,04	0,04	0,02
4	0,04	0,1	0,2	0,05
7	0,05	0,12	0,12	0,05
10	0,02	0,06	0,06	0,02

12.12. $a = 3$, $b = 4$.

X	Y			
	3	4	5	6
3	0,02	0,05	0,04	0,01
5	0,05	0,12	0,11	0,04
7	0,06	0,12	0,2	0,04
9	0,02	0,05	0,05	0,02

12.13. $a = 2$, $b = -1$.

X	Y			
	–2	2	6	10
–1	0,01	0,03	0,03	0,01
1	0,04	0,18	0,1	0,04
3	0,05	0,13	0,13	0,05
5	0,03	0,07	0,07	0,03

12.14. $a = 9$, $b = 3$.

X	Y			
	–6	–1	4	9
3	0,01	0,04	0,04	0,01
5	0,05	0,11	0,1	0,04
7	0,05	0,21	0,12	0,05
9	0,03	0,06	0,06	0,02

12.15. $a = -1$, $b = 7$.

X	Y			
	–6	–1	4	9
3	0,02	0,04	0,04	0,01
5	0,05	0,11	0,2	0,04
7	0,06	0,12	0,11	0,05
9	0,02	0,06	0,05	0,02

12.16. $a = 7$, $b = 2$.

X	Y			
	–2	1	4	7
–6	0,01	0,04	0,04	0,02
–2	0,04	0,1	0,11	0,05
2	0,04	0,12	0,2	0,06
6	0,02	0,06	0,06	0,03

12.17. $a = -3$, $b = 5$.

X	Y			
	–3	–1	1	3
2	0,02	0,05	0,04	0,01
3	0,05	0,2	0,11	0,04
4	0,06	0,12	0,11	0,04
5	0,02	0,06	0,05	0,02

12.18. $a = 2$, $b = 6$.

X	Y			
	–1	2	5	8
3	0,02	0,05	0,04	0,02
6	0,05	0,11	0,11	0,04
9	0,05	0,21	0,11	0,05
12	0,02	0,05	0,05	0,02

12.19. $a=-1$, $b=3$.

X	Y			
	–1	3	7	11
3	0,02	0,04	0,04	0,01
6	0,05	0,11	0,2	0,04
9	0,06	0,12	0,11	0,05
12	0,02	0,06	0,05	0,02

12.20. $a=9$, $b=10$.

X	Y			
	3	5	7	9
1	0,01	0,03	0,04	0,02
4	0,04	0,1	0,11	0,05
7	0,05	0,12	0,19	0,06
10	0,02	0,06	0,07	0,03

12.21. $a=-2$, $b=2$.

X	Y			
	–2	3	8	13
2	0,02	0,04	0,04	0,01
5	0,06	0,2	0,09	0,03
8	0,07	0,13	0,11	0,04
11	0,03	0,06	0,05	0,02

12.22. $a=5$, $b=3$.

X	Y			
	2	5	8	11
3	0,02	0,06	0,06	0,02
4	0,05	0,12	0,12	0,05
5	0,04	0,19	0,11	0,05
6	0,01	0,04	0,04	0,02

12.23. $a=1$, $b=4$.

X	Y			
	-3	-1	1	3
1	0,03	0,06	0,05	0,02
4	0,06	0,13	0,19	0,04
7	0,06	0,11	0,1	0,04
10	0,02	0,04	0,04	0,01

12.24. $a = -1$, $b = -5$.

X	Y			
	–3	–1	1	3
–5	0,03	0,06	0,06	0,02
–2	0,06	0,13	0,12	0,04
1	0,05	0,11	0,17	0,04
4	0,02	0,04	0,04	0,01

12.25. $a = -1$, $b = 3$.

X	Y			
	–5	–3	–1	1
–3	0,02	0,05	0,04	0,01
–1	0,06	0,19	0,1	0,04
1	0,06	0,13	0,11	0,04
3	0,03	0,06	0,05	0,01

12.26. $a = -2$, $b = 3$.

X	Y			
	–2	1	4	7
–1	0,02	0,06	0,06	0,02
1	0,05	0,12	0,12	0,05
3	0,04	0,19	0,11	0,05
5	0,01	0,04	0,04	0,02

12.27. $a = 9$, $b = 6$.

X	Y			
	3	5	7	9
–2	0,02	0,05	0,06	0,03
2	0,04	0,11	0,19	0,06
6	0,04	0,1	0,12	0,06
10	0,01	0,04	0,05	0,02

12.28. $a = 3$, $b = 8$.

X	Y			
	–1	3	7	11
2	0,02	0,05	0,05	0,02
5	0,05	0,11	0,11	0,05
8	0,05	0,11	0,19	0,05
11	0,02	0,05	0,05	0,02

12.29. $a = -2$, $b = 5$.

X	Y			
	–5	–2	1	4
–1	0,01	0,03	0,03	0,01
1	0,03	0,21	0,1	0,05
3	0,04	0,12	0,13	0,06
5	0,02	0,06	0,07	0,03

12.30. $a = -1$, $b = -5$.

X	Y			
	–6	–1	4	9
–5	0,02	0,04	0,04	0,01
–2	0,05	0,11	0,1	0,04
1	0,06	0,19	0,12	0,05
4	0,03	0,06	0,06	0,02

Математична статистика

Задача 1
Вибірка

Задано вибірку. Потрібно:

1) побудувати варіаційний ряд;
2) побудувати статистичний розподіл вибірки;
3) побудувати полігон відносних частот;
4) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

1.1. 2, 6, 5, 6, 7, 6, 5, 6, 9, 2, 7, 6, 5, 6, 5, 7, 6, 2, 6, 5, 9, 7, 6, 5, 6.
1.2. 1, 5, 3, 5, 6, 5, 8, 5, 1, 5, 3, 5, 6, 5, 3, 5, 5, 6, 3, 5.
1.3. 5, 3, 5, 5, 4, 5, 5, 7, 5, 9, 5, 4, 5, 7, 5, 9, 5, 4, 5, 7, 5, 7, 5, 5, 5.
1.4. 5, 1, 2, 5, 8, 2, 5, 10, 1, 5, 2, 5, 8, 2, 5, 2, 5, 8, 2, 5.
1.5. 5, 4, 2, 3, 4, 5, 4, 8, 4, 2, 3, 4, 5, 8, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 5, 4.
1.6. 7, 5, 7, 6, 7, 9, 7, 10, 7, 6, 7, 7, 9, 7, 10, 6, 7, 9, 7, 10, 6, 7, 9, 6, 7.
1.7. 1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 8, 1, 2, 4, 7, 2, 4, 7, 2, 4, 4.
1.8. 3, 5, 6, 8, 10, 3, 5, 6, 8, 10, 5, 6, 8, 10, 5, 6, 8, 6, 8, 6.
1.9. 3, 1, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 2, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3.
1.10. 5, 2, 5, 4, 5, 7, 5, 8, 5, 4, 5, 7, 5, 8, 4, 5, 7, 5, 7, 5.
1.11. 7, 4, 6, 7, 8, 7, 10, 6, 7, 7, 8, 7, 10, 7, 6, 7, 8, 10, 7, 8, 7, 10, 7, 8, 7.
1.12. 4, 1, 4, 3, 4, 6, 4, 8, 1, 4, 3, 4, 6, 4, 3, 4, 6, 4, 6, 4.
1.13. 2, 5, 4, 5, 6, 7, 2, 4, 5, 6, 2, 4, 5, 6, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 5.
1.14. 3, 4, 5, 8, 5, 10, 4, 5, 8, 10, 5, 4, 5, 8, 4, 5, 8, 5, 8, 5.
1.15. 6, 4, 5, 6, 10, 6, 11, 4, 6, 5, 6, 10, 11, 5, 6, 10, 11, 6, 10, 6.
1.16. 1, 5, 2, 5, 6, 5, 8, 5, 1, 5, 2, 5, 6, 5, 1, 5, 2, 5, 6, 2, 5, 6, 5, 2, 5.
1.17. 2, 4, 5, 6, 5, 9, 5, 2, 5, 4, 5, 6, 5, 9, 2, 4, 5, 6, 9, 5, 6, 9, 5, 6, 5.
1.18. 4, 2, 3, 4, 5, 4, 7, 4, 2, 3, 4, 5, 7, 3, 4, 4, 5, 7, 3, 4.
1.19. 3, 5, 6, 8, 6, 9, 6, 5, 6, 8, 9, 6, 5, 6, 8, 9, 6, 8, 9, 6, 8, 9, 6, 8, 6.
1.20. 2, 5, 3, 5, 7, 5, 8, 3, 5, 7, 5, 8, 3, 5, 7, 3, 5, 7, 5, 7.
1.21. 3, 5, 6, 8, 9, 3, 5, 6, 8, 9, 5, 6, 8, 9, 5, 6, 8, 9, 3, 6, 8, 6, 8, 6, 3.
1.22. 4, 1, 2, 4, 5, 4, 6, 1, 4, 2, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 2, 4, 5, 2, 4, 2, 4, 4.
1.23. 1, 4, 5, 7, 10, 1, 4, 5, 7, 4, 5, 7, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 5, 5.
1.24. 1, 2, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 5, 6, 4, 2, 4, 5, 6, 4, 2, 4, 5, 2, 4, 5, 4, 5, 4.
1.25. 1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 3, 5, 6, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3.
1.26. 4, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 6, 4, 2, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4.
1.27. 2, 4, 5, 7, 5, 8, 2, 5, 4, 5, 7, 8, 2, 5, 4, 5, 7, 5, 2, 4, 5, 7, 5, 4, 5.
1.28. 2, 5, 3, 5, 6, 7, 5, 2, 3, 5, 6, 5, 7, 2, 3, 5, 6, 3, 5, 5.
1.29. 1, 2, 3, 5, 3, 6, 1, 3, 2, 3, 5, 3, 6, 3, 1, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 5, 2, 3, 3.
1.30. 1, 2, 3, 5, 2, 6, 1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 3, 2, 5, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 2.

Задача 2
Інтервальний варіаційний ряд та гістограма

Дано інтервальний варіаційний ряд (в першому рядку вказано часткові інтервали $a_{i-1} - a_i$, в другому – відповідні їм частоти n_i).

Побудувати гістограму відносних частот.

2.1.

a_{i-1}- a_i	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
n_i	10	16	32	24	12	6

2.2.

a_{i-1}- a_i	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
n_i	6	15	27	33	12	7

2.3.

a_{i-1}- a_i	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
n_i	8	25	30	20	10	7

2.4.

a_{i-1}- a_i	3-7	7-11	11-15	15-19	19-23	23-27
n_i	9	13	25	32	13	8

2.5.

a_{i-1}- a_i	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
n_i	7	12	26	32	16	7

2.6.

a_{i-1}- a_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	5	12	25	30	18	10

2.7.

a_{i-1}- a_i	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27	27-32
n_i	9	24	30	19	10	8

2.8.

a_{i-1}- a_i	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15
n_i	15	32	25	12	10	6

2.9.

a_{i-1}- a_i	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25
n_i	8	10	14	8	6	4

2.10.

a_{i-1}- a_i	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24
n_i	6	10	12	32	25	15

2.11.

a_{i-1}- a_i	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25	25-29
n_i	8	20	30	25	12	5

2.12.

a_{i-1} - a_i	3-8	8-13	13-18	18-23	23-28	28-33
n_i	6	13	25	29	22	5

2.13.

a_{i-1} - a_i	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
n_i	5	22	29	25	13	6

2.14.

a_{i-1} - a_i	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
n_i	8	14	18	28	22	10

2.15.

a_{i-1} - a_i	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26	26-31
n_i	10	22	28	18	14	8

2.16.

a_{i-1} - a_i	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
n_i	9	14	24	30	16	7

2.17.

a_{i-1} - a_i	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36
n_i	7	16	30	24	14	9

2.18.

a_{i-1} - a_i	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28
n_i	6	10	14	11	5	4

2.19.

a_{i-1} - a_i	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
n_i	8	12	20	30	19	11

2.20.

a_{i-1} - a_i	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30
n_i	12	14	28	20	15	11

2.21.

a_{i-1} - a_i	1-7	7-13	13-19	19-25	25-31	31-37
n_i	8	10	15	6	7	4

2.22.

a_{i-1} - a_i	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27	27-32
n_i	7	10	16	8	5	4

2.23.

a_{i-1} - a_i	4-9	9-14	14-19	19-24	24-29	29-34
n_i	18	30	22	14	10	6

2.24.

a_{i-1} - a_i	5-8	8-11	11-14	14-17	17-20	20-23
n_i	9	24	34	18	9	6

2.25.

a_{i-1} - a_i	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
n_i	5	10	15	8	7	5

2.26.

a_{i-1} - a_i	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19	19-22
n_i	7	10	16	32	25	10

2.27.

a_{i-1} - a_i	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
n_i	10	25	32	16	10	7

2.28.

a_{i-1} - a_i	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
n_i	12	20	35	15	13	5

2.29.

a_{i-1} - a_i	2-5	5-8	8-11	11-14	14-17	17-20
n_i	5	6	12	16	6	5

2.30.

a_{i-1} - a_i	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
n_i	5	13	15	35	20	12

Задача 3
Числові характеристики вибірки

1) За статистичним розподілом вибірки (див. задачу 1) знайти вибіркове середнє $\overline{x}$, вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$, виправлену вибіркову дисперсію s^2 і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$.

2) За заданим інтервальним варіаційним рядом (див. задачу 2) знайти вибіркове середнє $\overline{x}$ та вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$.

Задача 4
Надійний інтервал для математичного сподівання при відомій дисперсії

Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності X, якщо відомі середнє квадратичне відхилення σ, вибіркове середнє $\overline{x}$ і об'єм вибірки n.

№	σ	$\overline{x}$	n	γ
4.1.	3	10,2	36	0,95
4.2.	4	11,4	64	0,99
4.3.	4,5	15,6	100	0,99
4.4.	5	13,2	64	0,95
4.5.	5,5	11	144	0,999
4.6.	2	18,2	36	0,95

№	σ	$\overline{x}$	n	γ
4.7.	3,5	12,4	64	0,99
4.8.	3	11,6	81	0,999
4.9.	4,5	19,4	100	0,95
4.10.	6	18,6	81	0,95
4.11.	5	17,7	100	0,99
4.12.	3	24,6	81	0,95
4.13.	2,5	14,4	100	0,999
4.14.	4	20,3	64	0,99
4.15.	4	15,8	64	0,95
4.16.	3	16,5	100	0,999
4.17.	5	19,2	49	0,95
4.18.	2	12,2	64	0,999
4.19.	4	18,7	100	0,99
4.20.	3,5	11,9	49	0,95
4.21.	5	20,8	100	0,999
4.22.	4	13,6	144	0,99
4.23.	3	14,8	81	0,95
4.24.	2	10,4	64	0,999
4.25.	4,5	15,2	81	0,95
4.26.	4	15,6	49	0,99
4.27.	3	22,4	64	0,95
4.28.	5	26,8	81	0,999
4.29.	2,4	37,5	100	0,999
4.30.	3,2	21,9	49	0,95

Задача 5
Надійний інтервал для математичного сподівання при невідомій дисперсії

Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності X, якщо відомі вибіркове середнє $\overline{x}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення s і об'єм вибірки n.

№	s	$\overline{x}$	n	γ
5.1.	3	10,2	9	0,95
5.2.	4	11,4	16	0,99
5.3.	4,5	15,6	25	0,99
5.4.	5	13,2	9	0,95
5.5.	5,5	11	16	0,999

№	σ	$\overline{x}$	n	γ
5.6.	2	18,2	25	0,95
5.7.	3,5	12,4	9	0,99
5.8.	3	11,6	16	0,999
5.9.	4,5	19,4	25	0,95
5.10.	6	18,6	9	0,95
5.11.	5	17,7	16	0,99
5.12.	3	24,6	25	0,95
5.13.	2,5	14,4	9	0,999
5.14.	4	20,3	16	0,99
5.15.	4	15,8	25	0,95
5.16.	3	16,5	9	0,999
5.17.	5	19,2	16	0,95
5.18.	2	12,2	25	0,999
5.19.	4	18,7	9	0,99
5.20.	3,5	11,9	16	0,95
5.21.	5	20,8	25	0,999
5.22.	4	13,6	9	0,99
5.23.	3	14,8	16	0,95
5.24.	2	10,4	25	0,999
5.25.	4,5	15,2	9	0,95
5.26.	4	15,6	16	0,99
5.27.	3	22,4	25	0,95
5.28.	5	26,8	9	0,999
5.29.	2,4	37,5	16	0,999
5.30.	3,2	21,9	25	0,95

Задача 6
Надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення

Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої генеральної сукупності X, якщо відомі вибіркове середнє квадратичне відхилення s і об’єм вибірки n.

№	s	n	γ
6.1.	0,5	20	0,999
6.2.	1,5	10	0,99
6.3.	4,5	6	0,95
6.4.	0,8	30	0,999
6.5.	2,4	9	0,99
6.6.	2,3	12	0,95

№	s	n	γ
6.7.	0,7	25	0,999
6.8.	0,6	18	0,99
6.9.	1,3	15	0,95
6.10.	0,9	35	0,999
6.11.	1,8	20	0,99
6.12.	0,7	16	0,95

№	s	n	γ
6.13.	1,0	40	0,999
6.14.	2,1	25	0,99
6.15.	1,5	18	0,95
6.16.	1,1	45	0,999
6.17.	0,8	30	0,99
6.18.	0,6	20	0,95
6.19.	0,6	50	0,999
6.20.	1,0	35	0,99
6.21.	1,1	25	0,95

№	s	n	γ
6.22.	2,5	16	0,999
6.23.	1,4	40	0,99
6.24.	0,9	30	0,95
6.25.	1,8	15	0,999
6.26.	2,8	8	0,99
6.27.	1,5	11	0,95
6.28.	2,0	14	0,999
6.29.	1,9	45	0,99
6.30.	0,5	35	0,95

Задача 7
Лінійна регресія

Знайти вибіркове рівняння прямої регресії $y = ax + b$ за даними п'яти спостережень $(x_i; y_i)$ над величинами X та Y. Зробити малюнок, на якому вказати експериментальні дані та побудувати пряму регресії.

7.1.	(1; 4,9)	(2; 5,9)	(3; 4,4)	(4; 3,4)	(5; 2,9)
7.2.	(2; 3,5)	(4; 5,8)	(6; 7,1)	(8; 6,1)	(10; 7,5)
7.3.	(1; 0,9)	(3; 2,9)	(4; 2,5)	(6; 5,1)	(7; 4)
7.4.	(1; 4,7)	(2; 5,7)	(3; 4,2)	(4; 2,2)	(5; 2,7)
7.5.	(0; 3,5)	(2; 3,8)	(4; 1,8)	(6; 1,5)	(7; 0,4)
7.6.	(1; 1,5)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 6,4)	(6; 6,8)
7.7.	(1; 4,5)	(2; 5,5)	(3; 3,9)	(4; 2,1)	(5; 2,5)
7.8.	(2; 5,3)	(3; 6,3)	(4; 4,9)	(5; 2,9)	(6; 3,3)
7.9.	(0; 1,2)	(1; 2,1)	(2; 1,5)	(3; 2,9)	(4; 2,5)
7.10.	(1; 4,2)	(2; 5,2)	(3; 3,7)	(4; 1,7)	(5; 2,2)
7.11.	(2; 4,9)	(3; 5,7)	(4; 4,3)	(5; 2,4)	(6; 2,9)
7.12.	(0; 3,7)	(1; 4,2)	(2; 2,7)	(3; 3,3)	(4; 1,5)
7.13.	(2; 1,5)	(3; 2,8)	(4; 2,4)	(6; 4,8)	(7; 3,8)
7.14.	(1; 2,9)	(2; 3,9)	(3; 2,3)	(4; 0,8)	(5; 1,3)
7.15.	(1; 4,1)	(2; 4,9)	(3; 3,6)	(4; 1,9)	(5; 2,1)
7.16.	(0; 4,3)	(1; 2,5)	(3; 3,1)	(5; 2,1)	(7; 0,3)
7.17.	(1; 2,5)	(3; 4,8)	(5; 5,9)	(7; 4,9)	(9;6,5)
7.18.	(1; 3,9)	(2; 4,8)	(3; 3,4)	(4; 1,4)	(5; 1,9)
7.19.	(0; 3,5)	(2; 6,1)	(4; 6,9)	(6; 6,5)	(8; 7,5)
7.20.	(1; 2,3)	(2; 2,5)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 5,5)
7.21.	(1; 3,7)	(2; 4,7)	(3; 3,2)	(4; 1,4)	(5; 1,7)
7.22.	(2; 5,5)	(3; 6,5)	(4; 5,1)	(5; 3,2)	(6; 3,6)

7.23.	(2; 4,5)	(4; 7,1)	(6; 8,1)	(8; 7,5)	(10;8,5)
7.24.	(1; 3,5)	(2; 4,5)	(3; 2,9)	(4; 1,5)	(5; 1,8)
7.25.	(1; 3,3)	(2; 4,3)	(3; 2,8)	(4; 1,1)	(5; 1,4)
7.26.	(1; 2,5)	(3; 1,8)	(5; 3,1)	(7; 4,9)	(9; 6,1)
7.27.	(2; 2,5)	(4; 2,8)	(6; 5,1)	(7; 3,9)	(8; 5,3)
7.28.	(1; 0,9)	(2; 3,3)	(3; 4,5)	(4; 4,1)	(5; 6,2)
7.29.	(1; 3,1)	(2; 2,6)	(3; 3,4)	(4; 2,5)	(5; 0,9)
7.30.	(0; 0,8)	(2; 2,5)	(4; 2,6)	(6; 4,8)	(8; 3,9)

Задача 8
Вибірковий коефіцієнт кореляції

За даними задачі 7 знайти вибірковий коефіцієнт кореляції.

Задача 9
Перевірка статистичних гіпотез за критерієм Пірсона

Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X зі статистичними даними, які подані у вигляді інтервального варіаційного ряду (в першому рядку вказано часткові інтервали $a_{i-1} - a_i$, в другому – відповідні їм частоти n_i).

9.1. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	2-12	12-22	22-32	32-42	42-52	52-62	62-72
n_i	7	8	15	36	15	11	8

9.2. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	1,5-3,5	3,5-5,5	5,5-7,5	7,5-9,5	9,5-11,5	11,5-13,5	13,5-15,5
n_i	5	12	17	35	15	10	6

9.3. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
n_i	6	12	16	40	13	8	5

9.4. $\alpha = 0,01$;

a_{i-1}- a_i	3,0-3,6	3,6-4,2	4,2-4,8	4,8-5,4	5,4-6,0	6,0-6,6	6,6-7,2
n_i	6	10	35	50	27	16	6

9.5. $\alpha = 0,025$;

a_{i-1} - a_i	0-2,2	2,2-4,4	4,4-6,6	6,6-8,8	8,8-11,0	11,0-13,2	13,2-15,4
n_i	14	18	32	70	20	36	10

9.6. $\alpha = 0,01$;

a_{i-1} - a_i	–4 - 0	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
n_i	8	16	40	72	36	18	10

9.7. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1} - a_i	2-7	7-12	12-17	17-22	22-27	27-32	32-37
n_i	10	20	27	34	26	21	12

9.8. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1} - a_i	–10- –5	–5-0	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	14	18	32	70	36	20	10

9.9. $\alpha = 0,025$;

a_{i-1} - a_i	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
n_i	12	14	36	15	10	7	6

9.10. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1} - a_i	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
n_i	10	27	55	70	20	13	5

9.11. $\alpha = 0,025$;

a_{i-1} - a_i	1,8-2,8	2,8-3,8	3,8-4,8	4,8-5,8	5,8-6,8	6,8-7,8	7,8-8,8
n_i	5	15	23	27	19	6	5

9.12. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1} - a_i	10-13	13-16	16-19	19-22	22-25	25-28	28-31
n_i	12	23	30	29	29	16	11

9.13. $\alpha = 0,01$;

a_{i-1} - a_i	1,2-5,2	5,2-9,2	9,2-13,2	13,2-17,2	17,2-21,2	21,2-25,2	25,2-29,2
n_i	8	28	32	66	36	20	10

9.14. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1} - a_i	1,5-4,5	4,5-7,5	7,5-10,5	10,5-13,5	13,5-16,5	16,5-19,5	19,5-22,5
n_i	5	12	34	50	28	14	7

9.15. $\alpha = 0,025$;

a_{i-1}- a_i	10,5-12,5	12,5-14,5	14,5-16,5	16,5-18,5	18,5-20,5	20,5-22,5	22,5-24,5
n_i	15	25	32	50	12	10	6

9.16. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	10-16	16-22	22-28	28-34	34-40	40-46	46-52
n_i	9	24	34	48	20	9	6

9.17. $\alpha = 0,01$;

a_{i-1}- a_i	2,0-3,5	3,5-5,0	5,0-6,5	6,5-8,0	8,0-9,5	9,5-11,0	11,0-12,5
n_i	5	16	21	42	32	8	6

9.18. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23
n_i	6	8	15	32	18	14	7

9.19. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	0,5-5,5	5,5-10,5	10,5-15,5	15,5-20,5	20,5-25,5	25,5-30,5	30,5-35,5
n_i	13	20	30	60	35	30	12

9.20. $\alpha = 0,025$;

a_{i-1}- a_i	12-15	15-18	16-21	21-24	24-27	27-30	30-33
n_i	10	13	20	65	55	24	13

9.21. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	2,6-6,6	6,6-10,6	10,6-14,6	14,6-18,6	18,6-22,6	22,6-26,6	26,6-30,6
n_i	6	10	17	45	35	22	15

9.22. $\alpha = 0,01$;

a_{i-1}- a_i	2-8	8-14	14-20	20-26	26-32	32-38	38-44
n_i	12	18	22	38	24	20	16

9.23. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	3,5-7,5	7,5-11,5	11,5-15,5	15,5-19,5	19,5-23,5	23,5-27,5	27,5-31,5
n_i	5	10	23	45	36	22	9

9.24. $\alpha = 0,025$;

a_{i-1}- a_i	8-18	18-28	28-38	38-48	48-58	58-68	68-78
n_i	15	20	26	40	26	16	7

9.25. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	–6-0	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36
n_i	20	29	48	70	81	40	12

9.26. $\alpha = 0,025$;

a_{i-1}- a_i	–4-6	6-16	16-26	26-36	36-46	46-56	56-66
n_i	7	14	46	88	64	53	28

9.27. $\alpha = 0,01$;

a_{i-1}- a_i	–3-1	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25
n_i	7	12	25	52	30	18	6

9.28. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	0,5-2,5	2,5-4,5	4,5-6,5	6,5-8,5	8,5-10,5	10,5-12,5	12,5-14,5
n_i	12	24	38	64	34	18	10

9.29. $\alpha = 0,05$;

a_{i-1}- a_i	–1,5-3,5	3,5-8,5	8,5-13,5	13,5-18,5	18,5-23,5	23,5-28,5	28,5-33,5
n_i	10	22	38	70	40	14	6

9.30. $\alpha = 0,025$;

a_{i-1}- a_i	–1,6-2,4	2,4-6,4	6,4-10,4	10,4-14,4	14,4-18,4	18,4-22,4	22,4-26,4
n_i	6	10	26	48	32	18	10

Випадкові процеси

Задача 1
Реалізації і перерізи випадкових процесів

1.1 – 1.30. Дано випадковий процес $X(t)$, розподіл випадкової величини U відомий. Записати три довільні реалізації цього процесу і його перерізи при $t = t_1$ і при $t = t_2$.

1.1. $X(t) = t^2 + Ut$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[-5, 5]$; $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

1.2. $X(t) = Ut^2 + 1$, випадкова величина U має нормальний розподіл; $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

1.3. $X(t) = \sin 2t + Ut$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[0, 4]$; $t_1 = \pi$, $t_2 = 2\pi$.

1.4. $X(t) = \sin 2t + U\cos t$, випадкова величина U має нормальний розподіл; $t_1 = \pi$, $t_2 = 2\pi$.

1.5. $X(t) = 1 + U\cos 2t$, випадкова величина U має показниковий розподіл; $t_1 = \pi$, $t_2 = 2\pi$.

1.6. $X(t) = U\cos t - \sin 3t$, випадкова величина U має біноміальний розподіл з параметром $n = 8$; $t_1 = \pi$, $t_2 = 2\pi$.

1.7. $X(t) = Ut^2 + 3t$, випадкова величина U має розподіл Пуассона; $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

1.8. $X(t) = Ut^3 - 4$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[-8, 0]$; $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

1.9. $X(t) = Ut^2 + 2t - 1$, випадкова величина U має нормальний розподіл; $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

1.10. $X(t) = Ut - \sin 2t$, випадкова величина U має біноміальний розподіл з параметром $n = 6$; $t_1 = 2\pi$, $t_2 = 4\pi$.

1.11. $X(t) = Ue^{-t} + e^{-2t}$, випадкова величина U має показниковий розподіл; $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

1.12. $X(t)=U\sin 2t+t$, випадкова величина U має розподіл Пуассона; $t_1=2\pi$, $t_2=5\pi$.

1.13. $X(t)=\sin 2t+U\cos t$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[-4,4]$; $t_1=2\pi$, $t_2=3\pi$.

1.14. $X(t)=Ut^2+2\sin t$, випадкова величина U має нормальний розподіл; $t_1=\pi$, $t_2=4\pi$.

1.15. $X(t)=t^2+Ut+4$, випадкова величина U має біноміальний розподіл з параметром $n=5$; $t_1=2$, $t_2=5$.

1.16. $X(t)=1+Ut$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[-1,4]$; $t_1=2$, $t_2=3$.

1.17. $X(t)=t+Ut^2$, випадкова величина U має показниковий розподіл; $t_1=3$, $t_2=4$.

1.18. $X(t)=6t^2+U$, випадкова величина U має нормальний розподіл; $t_1=2$, $t_2=3$.

1.19. $X(t)=Ut^2-2t$, випадкова величина U має розподіл Пуассона; $t_1=2$, $t_2=5$.

1.20. $X(t)=2e^{2t}+Ue^{-2t}$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[-3,3]$; $t_1=1$, $t_2=3$.

1.21. $X(t)=Ue^{-2t}+t$, випадкова величина U має біноміальний розподіл з параметром $n=7$; $t_1=2$, $t_2=4$.

1.22. $X(t)=\cos^2 3t+Ut$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[-8,-2]$; $t_1=2\pi$, $t_2=5\pi$.

1.23. $X(t)=U-\cos t$, випадкова величина U має нормальний розподіл; $t_1=\pi$, $t_2=4\pi$.

1.24. $X(t)=U\cos^2 t+\sin^2 t$, випадкова величина U має показниковий розподіл; $t_1=\pi$, $t_2=2\pi$.

1.25. $X(t)=Ue^{-t}\cos t+2$, випадкова величина U має біноміальний розподіл з параметром б $n=5$; $t_1=\pi$, $t_2=2\pi$.

1.26. $X(t)=U\cos 3t+1$, випадкова величина U має нормальний розподіл; $t_1=\pi$, $t_2=2\pi$.

1.27. $X(t)=U\cos 3t+2t$, випадкова величина U має розподіл Пуассона; $t_1=2\pi$, $t_2=3\pi$.

1.28. $X(t)=e^{-t}+Ute^{-2t}$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[0,6]$; $t_1=2$, $t_2=3$.

1.29. $X(t)=t^2+Ut+1$, випадкова величина U має нормальний розподіл; $t_1=3$, $t_2=4$.

1.30. $X(t)=t^2+Ut\cos 2t$, випадкова величина U має показниковий розподіл; $t_1=\pi$, $t_2=4\pi$.

Задача 2
Розподіли випадкових процесів

2.1 – 2.15. Дано випадковий процес $X(t)$. U та V – незалежні нормально розподілені випадкові величини з відомими числовими характеристиками. Знайти одновимірну щільність та одновимірну функцію розподілу процесу $X(t)$. Обчислити ймовірність того, що при $t=t_0$ процес $X(t)$ набуде значення: а) меншого за x_1, б) більшого за x_2.

2.1. $X(t)=U\sin t+V\cos t$, $m_U=0$, $\sigma_U=3$, $m_V=2$, $\sigma_V=3$; $t_0=\pi$, $x_1=-1$, $x_2=2$.

2.2. $X(t)=U+Vt^2$, $m_U=1$, $\sigma_U=2$, $m_V=2$, $\sigma_V=1$; $t_0=1$, $x_1=2$, $x_2=4$.

2.3. $X(t)=U\sin t+V$, $m_U=2$, $\sigma_U=1$, $m_V=-1$, $\sigma_V=1$; $t_0=\pi$, $x_1=0$, $x_2=1$.

2.4. $X(t)=Ut+V\cos 2t$, $m_U=0$, $\sigma_U=1$, $m_V=-1$, $\sigma_V=2$; $t_0=0$, $x_1=2$, $x_2=1$.

2.5. $X(t)=U\cos 2t+V\sin 2t$, $m_U=1$, $\sigma_U=2$, $m_V=-1$, $\sigma_V=2$; $t_0=\pi$, $x_1=2$, $x_2=3$.

2.6. $X(t)=Ut+Vt^3$, $m_U=0$, $\sigma_U=1$, $m_V=-2$, $\sigma_V=2$; $t_0=1$, $x_1=0$, $x_2=-1$.

2.7. $X(t)=U\sin t+V\cos t$, $m_U=0$, $\sigma_U=3$, $m_V=2$, $\sigma_V=3$; $t_0=\pi$, $x_1=-2$, $x_2=3$.

2.8. $X(t)=2+U\sin 2t+Vt$, $m_U=1$, $\sigma_U=2$, $m_V=0$, $\sigma_V=2$; $t_0=\pi$, $x_1=5$, $x_2=-3$.

2.9. $X(t)=U\sin 3t+V-3$, $m_U=2$, $\sigma_U=1$, $m_V=1$, $\sigma_V=2$; $t_0=\pi$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

2.10. $X(t)=U\sin t+V\cos t$, $m_U=0$, $\sigma_U=3$, $m_V=2$, $\sigma_V=3$; $t_0=2\pi$, $x_1=4$, $x_2=6$.

2.11. $X(t)=U\sin t+V\sin 2t$, $m_U=2$, $\sigma_U=1$, $m_V=-1$, $\sigma_V=1$; $t_0=2\pi$, $x_1=-1$, $x_2=3$.

2.12. $X(t)=Ut+V(2-t)$, $m_U=4$, $\sigma_U=2$, $m_V=4$, $\sigma_V=2$; $t_0=1$, $x_1=6$, $x_2=3$.

2.13. $X(t)=Ut^2+Vt-4$, $m_U=0$, $\sigma_U=2$, $m_V=2$, $\sigma_V=2$; $t_0=1$, $x_1=0$, $x_2=2$.

2.14. $X(t)=3+Ut+V\cos 2t$, $m_U=0$, $\sigma_U=1$, $m_V=1$, $\sigma_V=2$; $t_0=\pi$, $x_1=2$, $x_2=3$.

2.15. $X(t)=t^2+Ut+Vt^2$, $m_U=2$, $\sigma_U=1$, $m_V=-1$, $\sigma_V=1$; $t_0=1$, $x_1=-2$, $x_2=3$.

2.16 – 2.30. Дано випадковий процес $X(t)$. Функція розподілу величини U відома. Знайти одновимірну щільність і одновимірну функцію розподілу процесу $X(t)$. Обчислити ймовірність того, що при $t=t_0$ значення $X(t)$ буде належати проміжку (a,b).

2.16. $X(t)=Ue^{-t}+1$, функція розподілу $F_U(u)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} u+\frac{1}{2}$; $t_0=2$, $a=0$, $b=2$.

2.17. $X(t)=U(t^2+1)-2t$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[0,1]$; $t_0=2$, $a=0$, $b=2$.

2.18. $X(t)=U(t+1)+1$, $t\ge 0$, випадкова величина U має показниковий розподіл з параметром $\lambda=1$; $t_0=2$, $a=0$, $b=4$.

2.19. $X(t)=U(\cos t+2)-2t$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[0,1]$; $t_0=2$, $a=1$, $b=-1$.

2.20. $X(t)=Ue^{-t}+t$, випадкова величина U має показниковий розподіл з параметром $\lambda=1$; $t_0=2$, $a=1$, $b=3$.

2.21. $X(t)=U(t^2+4)-t^2$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[-1,0]$; $t_0=1$, $a=3$, $b=5$.

2.22. $X(t)=Ue^{t}+2$, випадкова величина U має показниковий розподіл з параметром $\lambda=2$; $t_0=1$, $a=1$, $b=3$.

2.23. $X(t)=U(\sin 2t+2)-\cos 2t$, випадкова величина U розподілена рівномірно на відрізку $[0,4]$; $t_0=\pi$, $a=1$, $b=2$.

2.24. $X(t)=U(2+t)+t$, $t\ge 0$; $t_0=1$, $a=-4$, $b=-3$; функція розподілу

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u\le -1,\\ (u+1)^2, & -1<u\le 0,\\ 1, & u>0.\end{cases}$$

2.25. $X(t)=U(3-\cos 2t)+t$; $t_0=\pi$, $a=3$, $b=4$; функція розподілу

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ u^2, & 0<u\le 1,\\ 1, & u>1.\end{cases}$$

2.26. $X(t)=U(t+1)-3t$, $t\ge 0$; $t_0=2$, $a=0$, $b=4$; функція розподілу

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ \dfrac{u^2}{9}, & 0<u\le 3,\\ 1, & u>3.\end{cases}$$

2.27. $X(t)=U(2+\cos 2t)-4$; $t_0=\pi$, $a=-3$, $b=-2$; функція розподілу

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ u^2, & 0<u\le 1,\\ 1, & u>1.\end{cases}$$

2.28. $X(t)=U(4-2\sin t)+2$; $t_0=\pi$, $a=0$, $b=5$; функція розподілу

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ \dfrac{u^2}{4}, & 0<u\le 2,\\ 1, & u>2.\end{cases}$$

2.29. $X(t)=U(e^{2t}+1)-2$; $t_0=1$, $a=0$, $b=3$; функція розподілу

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ \dfrac{u^2}{9}, & 0<u\le 3,\\ 1, & u>3.\end{cases}$$

2.30. $X(t)=U(t^2+3)-t$; $t_0=1$, $a=1$, $b=5$; функція розподілу

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u\le 1,\\ \dfrac{u^2-1}{3}, & 1<u\le 2,\\ 1, & u>2.\end{cases}$$

Задача 3
Характеристики випадкових процесів

3.1 – 3.15. Дано випадковий процес $X(t)$. Числові характеристики випадкових величин U та V відомі. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію випадкового процесу $X(t)$.

3.1. $X(t)=U+Vt\cos t$, $m_U=2$, $m_V=-6$, $D_U=2$, $D_V=3$, $K_{UV}=-1$.

3.2. $X(t)=3+Ut+V\sin 2t$, $m_U=1$, $m_V=2$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=1$, $K_{UV}=-1$.

3.3. $X(t)=Ue^{-2t}+Ve^{-2t}$, $m_U=3$, $m_V=3$, $D_U=2$, $D_V=2$, $K_{UV}=1$.

3.4. $X(t)=U\sin 2t+V\cos 2t$, $m_U=1$, $m_V=2$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=1$, $K_{UV}=2$.

3.5. $X(t)=2+Ut^2+V\cos t$, $m_U=-2$, $m_V=0$, $D_U=3$, $D_V=3$, $K_{UV}=0$.

3.6. $X(t)=Ut+Ve^{-2t}-2$, $m_U=2$, $m_V=-4$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=1$, $K_{UV}=-1$.

3.7. $X(t)=Ute^{-2t}+e^{-t}+V$, $m_U=0$, $m_V=-1$, $D_U=1$, $D_V=2$, $K_{UV}=0$.

3.8. $X(t)=Ut\sin t+t+V$, $m_U=2$, $m_V=-4$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=3$, $K_{UV}=2$.

3.9. $X(t)=Ut+V\cos 2t+t^2$, $m_U=2$, $m_V=0$, $D_U=2$, $D_V=3$, $K_{UV}=-1$.

3.10. $X(t)=Ut^2+V\cos 2t$, $m_U=0$, $m_V=-6$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=1$, $K_{UV}=0$.

3.11. $X(t)=U+Vt\cos 3t$, $m_U=2$, $m_V=1$, $D_U=3$, $D_V=1$, $K_{UV}=1$.

3.12. $X(t)=1+U+V\sin 2t$, $m_U=2$, $m_V=0$, $\sigma_U=1$, $\sigma_V=3$, $K_{UV}=2$.

3.13. $X(t)=Ut^2+Vt+3$, $m_U=4$, $m_V=-2$, $D_U=4$, $D_V=2$, $K_{UV}=-2$.

3.14. $X(t)=Ue^{-3t}+Ve^{t}$, $m_U=2$, $m_V=-2$, $\sigma_U=3$, $\sigma_V=3$, $K_{UV}=-2$.

3.15. $X(t)=2+Ut+Vt^2$, $m_U=0$, $m_V=0$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=1$, $K_{UV}=-1$.

3.16 – 3.30. Знайти взаємні кореляційні функції $K_{XY}(t_1,t_2)$ і $K_{YX}(t_1,t_2)$ випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$, якщо відомі числові характеристики випадкових величин U та V.

3.16. $X(t)=U\cos 2t+V\sin 2t$, $Y(t)=U\cos t+V\sin t$, $D_U=2$, $D_V=2$, $K_{UV}=0$.

3.17. $X(t)=Ut+Vt^2$, $Y(t)=Vt+Ut^2$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=1$, $K_{UV}=-1$.

3.18. $X(t)=U\cos t+V\sin t$, $Y(t)=U\sin t-V\cos t$, $D_U=3$, $D_V=3$, $K_{UV}=0$.

3.19. $X(t)=U+Vt^2$, $Y(t)=Ut+V$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=3$, $K_{UV}=4$.

3.20. $X(t)=2+Ut+Vt^2$, $Y(t)=V+Ut$, $D_U=2$, $D_V=1$, $K_{UV}=1$.

3.21. $X(t)=1+Ut+Vt^2$, $Y(t)=Ut^2-V$, $\sigma_U=3$, $\sigma_V=2$, $K_{UV}=0$.

3.22. $X(t)=Ut+V$, $Y(t)=V\cos t+U\sin t$, $D_U=3$, $D_V=3$, $K_{UV}=0$.

3.23. $X(t)=U+V\sin 2t$, $Y(t)=U+V\cos 2t$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=2$, $K_{UV}=-2$.

3.24. $X(t)=U\cos t+V$, $Y(t)=U+V\sin t$, $D_U=4$, $D_V=4$, $K_{UV}=0$.

3.25. $X(t)=U+Vt$, $Y(t)=Ut+V$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=4$, $K_{UV}=-2$.

3.26. $X(t)=U\cos t+V\sin 2t$, $Y(t)=U\sin 2t+V\cos t$, $D_U=2$, $D_V=2$, $K_{UV}=1$.

3.27. $X(t)=U+Ve^{t}$, $Y(t)=U+Ve^{-t}$, $\sigma_U=3$, $\sigma_V=3$, $K_{UV}=-2$.

3.28. $X(t)=U\sin 2t+V$, $Y(t)=U\sin 4t-V$, $D_U=1$, $D_V=2$, $K_{UV}=0$.

3.29. $X(t)=U\sin 3t+V\cos 3t$, $Y(t)=U\sin 3t-V\cos 3t$, $\sigma_U=2$, $\sigma_V=2$, $K_{UV}=2$.

3.30. $X(t)=U\sin t+Vt$, $Y(t)=U\sin t-Vt$, $D_U=4$, $D_V=1$, $K_{UV}=1$.

Задача 4
Властивості характеристик випадкових процесів

4.1 – 4.30. Дано математичне сподівання $m_X(t)$ та кореляційну функцію $K_X(t_1,t_2)$ випадкового процесу $X(t)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію випадкового процесу $Y(t)$.

4.1. $m_X(t)=t^2$, $K_X(t_1,t_2)=1+\cos t_1\cos t_2$, $Y(t)=e^{-t}X(t)+3t^2e^{-t}$.

4.2. $m_X(t)=\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=4+2\cos(t_1-t_2)$, $Y(t)=tX(t)-2t\cos t$.

4.3. $m_X(t)=1+\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=3\cos(t_1-t_2)$, $Y(t)=tX(t)+2t\sin t$.

4.4. $m_X(t)=\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=2\cos(t_1-t_2)$, $Y(t)=\sin t\,X(t)-\cos^2 t$.

4.5. $m_X(t)=2\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=2t_1^2t_2^2+4t_1t_2$, $Y(t)=tX(t)-2t\cos t$.

4.6. $m_X(t)=2t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1^2t_2^2+4t_1t_2+4$, $Y(t)=tX(t)-2t+1$.

4.7. $m_X(t)=3\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=2\cos 3(t_1-t_2)$, $Y(t)=tX(t)+2t\sin t$.

4.8. $m_X(t)=4e^{-2t}$, $K_X(t_1,t_2)=4\cos 2t_1\cos 2t_2$, $Y(t)=tX(t)-3te^{-2t}$.

4.9. $m_X(t)=e^{-2t}\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=3e^{-2(t_1-t_2)^2}$, $Y(t)=e^tX(t)-e^{-t}\cos t$.

4.10. $m_X(t)=t^2e^{-2t}$, $K_X(t_1,t_2)=3\cos 2(t_1-t_2)$, $Y(t)=e^{2t}X(t)+4t^2$.

4.11. $m_X(t)=\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=2\cos(t_1-t_2)$, $Y(t)=t\,X(t)-2t\sin t$.

4.12. $m_X(t)=t^2e^{-2t}$, $K_X(t_1,t_2)=1+e^{-2t_1-2t_2}$, $Y(t)=e^tX(t)-3t^2e^{-t}$.

4.13. $m_X(t)=t^2+t$, $K_X(t_1,t_2)=6+4\sin 2t_1\sin 2t_2$, $Y(t)=tX(t)-t^3$.

4.14. $m_X(t)=t\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=\cos 2t_1\cos 2t_2$, $Y(t)=tX(t)-t^2\sin t$.

4.15. $m_X(t)=t^2+1$, $K_X(t_1,t_2)=1+3\cos 2t_1\cos 2t_2$, $Y(t)=tX(t)-t^3$.

4.16. $m_X(t)=e^t\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=4e^{-(t_1-t_2)^2}$, $Y(t)=e^{-2t}X(t)+e^{-t}\cos t$.

4.17. $m_X(t)=e^{-t}\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=\cos 2(t_1-t_2)$, $Y(t)=e^tX(t)+\sin t$.

4.18. $m_X(t)=2\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=2\cos(t_1-t_2)$, $Y(t)=tX(t)+2t\sin t$.

4.19. $m_X(t)=2t^2e^{-2t}$, $K_X(t_1,t_2)=2e^{-(t_1-t_2)^2}$, $Y(t)=e^{2t}X(t)-t^2$.

4.20. $m_X(t)=3\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=4\cos(t_1-t_2)$, $Y(t)=t^2X(t)+t\cos t$.

4.21. $m_X(t)=(t+2)e^{-2t}$, $K_X(t_1,t_2)=3e^{-2t_1-2t_2}$, $Y(t)=e^tX(t)+3te^{-t}$.

4.22. $m_X(t)=2\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=2\cos(t_1-t_2)$, $Y(t)=tX(t)-2t\sin t$.

4.23. $m_X(t)=2t^2$, $K_X(t_1,t_2)=1+2\sin 2t_1\sin 2t_2$, $Y(t)=tX(t)-t^3$.

4.24. $m_X(t)=2t\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=\cos 2(t_1-t_2)$, $Y(t)=tX(t)-t^2\cos t$.

4.25. $m_X(t)=3\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=4\cos(t_1-t_2)$, $Y(t)=tX(t)+t\cos t$.

4.26. $m_X(t)=t-2$, $K_X(t_1,t_2)=e^{-3t_1-3t_2}$, $Y(t)=te^{2t}X(t)-t^2e^{2t}$.

4.27. $m_X(t)=e^{-t}\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=4e^{-(t_1-t_2)^2}$, $Y(t)=e^{2t}X(t)-e^t\sin 2t$.

4.28. $m_X(t)=\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=\cos t_1\cos t_2$, $Y(t)=\cos t\,X(t)-\sin^2 2t$.

4.29. $m_X(t)=t^2+2$, $K_X(t_1,t_2)=2+\cos 2t_1\cos 2t_2$, $Y(t)=tX(t)-2t$.

4.30. $m_X(t)=2\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=4e^{-4(t_1-t_2)^2}$, $Y(t)=\cos 2t\,X(t)-2$.

Задача 5
Характеристики похідної від випадкового процесу

5.1 – 5.15. Дано кореляційну функцію випадкового процесу $X(t)$. Знайти взаємні кореляційні функції $K_{XY}(t_1,t_2)$ та $K_{YX}(t_1,t_2)$ процесу $X(t)$ та його похідної $Y(t)=X'(t)$.

5.1. $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+\cos 3t_1\cos 3t_2$.

5.2. $K_X(t_1,t_2)=2+t_1t_2\cos 3t_1\cos 3t_2$.

5.3. $K_X(t_1,t_2)=3t_1t_2\sin 2t_1\sin 2t_2$.

5.4. $K_X(t_1,t_2)=4t_1t_2+e^{3t_1+3t_2}$.

5.5. $K_X(t_1,t_2)=3+4t_1t_2\cos t_1\cos t_2$.

5.6. $K_X(t_1,t_2)=1+t_1t_2e^{-t_1-t_2}$.

5.7. $K_X(t_1,t_2)=2+t_1t_2\sin 3t_1\sin 3t_2$.

5.8. $K_X(t_1,t_2)=2e^{t_1+t_2}+3e^{-t_1-t_2}$.

5.9. $K_X(t_1,t_2)=\cos 2t_1\cos 2t_2+4\sin 2t_1\sin 2t_2$.

5.10. $K_X(t_1,t_2)=2t_1^2t_2^2+3e^{-2t_1-2t_2}$.

5.11. $K_X(t_1,t_2)=4+2t_1t_2e^{-2t_1-2t_2}$.

5.12. $K_X(t_1,t_2)=2\cos 3t_1\cos 3t_2+3\sin 2t_1\sin 2t_2$.

5.13. $K_X(t_1,t_2)=1+2t_1t_2\cos 4t_1\cos 4t_2$.

5.14. $K_X(t_1,t_2)=3\sin 3t_1\sin 3t_2+\cos t_1\cos t_2$.

5.15. $K_X(t_1,t_2)=t_1^2t_2^2+t_1t_2e^{3t_1+3t_2}$.

5.16 – 5.30. Дано математичне сподівання $m_X(t)$ та кореляційну функцію $K_X(t_1,t_2)$ випадкового процесу $X(t)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію похідної $Y(t)=X'(t)$.

5.16. $m_X(t)=1+\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=2\sin 2t_1\sin 2t_2+3\cos 2t_1\cos 2t_2$.

5.17. $m_X(t)=\sin t-2t$, $K_X(t_1,t_2)=1+4\cos(2t_1-2t_2)$.

5.18. $m_X(t)=2t^2-4t+2$, $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+3\cos 3t_1\cos 3t_2$.

5.19. $m_X(t)=3t\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=2e^{-2t_1-2t_2}+3t_1t_2$.

5.20. $m_X(t)=3t+4\sin 3t$, $K_X(t_1,t_2)=2\cos 3t_1\cos 3t_2+4$.

5.21. $m_X(t)=3\cos 3t+2\sin 3t$, $K_X(t_1,t_2)=2\cos 3(t_1-t_2)$.

5.22. $m_X(t)=3\sin t+2\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2\left(e^{-2t_1-2t_2}+1\right)$.

5.23. $m_X(t)=t^2\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2\sin t_1\sin t_2$.

5.24. $m_X(t)=4\cos t\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+4\cos 2t_1\cos 2t_2$.

5.25. $m_X(t)=2t^2\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2\left(1+\cos t_1\cos t_2\right)$.

5.26. $m_X(t)=2\sin 2t\cos t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2\left(1+\sin 3t_1\sin 3t_2\right)$.

5.27. $m_X(t)=3\sin 2t+6\cos 2t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2\cos 2(t_1-t_2)$.

5.28. $m_X(t)=2t^2-4\cos 2t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2e^{2(t_1+t_2)}+2t_1^2t_2^2$.

5.29. $m_X(t)=3t^2\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2+2\sin 3t_1\sin 3t_2$.

5.30. $m_X(t)=t^2-4\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+3\cos 2t_1\cos 2t_2$.

Задача 6
Характеристики інтеграла від випадкового процесу

6.1 – 6.15. Дано кореляційну функцію випадкового процесу $X(t)$. Знайти взаємні кореляційні функції $K_{XY}(t_1,t_2)$ та $K_{YX}(t_1,t_2)$ процесу $X(t)$ та його інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$.

6.1. $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+8\cos 2t_1\cos 2t_2$.

6.2. $K_X(t_1,t_2)=4t_1t_2+e^{-2(t_1+t_2)}$.

6.3. $K_X(t_1,t_2)=2\cos 3(t_1-t_2)$.

6.4. $K_X(t_1,t_2)=2\sin 2t_1\sin 2t_2+6\cos 2t_1\cos 2t_2$.

6.5. $K_X(t_1,t_2)=4+\sin t_1\sin t_2$.

6.6. $K_X(t_1,t_2)=1+4e^{-2t_1-2t_2}$.

6.7. $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+\cos 2(t_1-t_2)$.

6.8. $K_X(t_1,t_2)=6+4t_1t_2e^{-t_1-t_2}$.

6.9. $K_X(t_1,t_2)=2\sin t_1\sin t_2+6\cos 3t_1\cos 3t_2$.

6.10. $K_X(t_1,t_2)=2+4\cos t_1\cos t_2$.

6.11. $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2e^{-2(t_1+t_2)}$.

6.12. $K_X(t_1,t_2)=2+12\cos(3t_1-3t_2)$.

6.13. $K_X(t_1,t_2)=2+t_1t_2e^{-3t_1-3t_2}$.

6.14. $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2\sin 3t_1\sin 3t_2$.

6.15. $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2\cos 2t_1\cos 2t_2$

6.16 – 6.30. Відомі характеристики випадкового процесу $X(t)$ – математичне сподівання $m_X(t)$ та кореляційна функція $K_X(t_1,t_2)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

6.16. $m_X(t)=3t^2+1$, $K_X(t_1,t_2)=\cos 2t_1\cos 2t_2$.

6.17. $m_X(t)=4\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=\sin 3t_1\sin 3t_2$.

6.18. $m_X(t)=2\cos 4t$, $K_X(t_1,t_2)=4\cos(t_1-t_2)$.

6.19. $m_X(t)=3t^2-4t+2$, $K_X(t_1,t_2)=\cos t_1\cos t_2+2\sin t_1\sin t_2$.

6.20. $m_X(t)=2t-6t^2$, $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+4e^{2t_1+2t_2}$.

6.21. $m_X(t)=2t-6\sin 3t$, $K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2+4\cos 2(t_2-t_1)$.

6.22. $m_X(t)=6t^2$, $K_X(t_1,t_2)=1+\cos t_1\cos t_2$.

6.23. $m_X(t)=3\sin t$, $K_X(t_1,t_2)=6t_1t_2+2\sin 2t_1\sin 2t_2$.

6.24. $m_X(t)=3\cos 3t$, $K_X(t_1,t_2)=8\cos 4t_1\cos 4t_2$.

6.25. $m_X(t)=4t+3$, $K_X(t_1,t_2)=1+2t_1t_2e^{-t_1-t_2}$.

6.26. $m_X(t)=3t^2-2t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2\cos t_1\cos t_2$.

6.27. $m_X(t)=3-4t$, $K_X(t_1,t_2)=t_1t_2\left(4+e^{-t_1-t_2}\right)$.

6.28. $m_X(t)=2\sin 2t+4\cos 2t$, $K_X(t_1,t_2)=12t_1t_2\cos 2t_1\cos 2t_2$.

6.29. $m_X(t)=4t-6t^2$, $K_X(t_1,t_2)=8t_1t_2\sin t_1\sin t_2$.

6.30. $m_X(t)=6t^2+4t$, $K_X(t_1,t_2)=4t_1t_2e^{2t_1+2t_2}$.

Задача 7
Стаціонарні випадкові процеси

7.1 – 7.10. Дано кореляційну функцію $k(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$. Знайти спектральну щільність $S(\omega)$ цього процесу.

7.1. $k(\tau) = 6e^{-3|\tau|}\left(1+2|\tau|\right)$.

7.2. $k(\tau) = 8e^{-2|\tau|}\left(1+|\tau|\right)$.

7.3. $k(\tau) = e^{-4|\tau|}\left(1+3|\tau|\right)$.

7.4. $k(\tau) = 2e^{-3|\tau|}\left(1-|\tau|\right)$.

7.5. $k(\tau) = 4e^{-4|\tau|}\left(1-2|\tau|\right)$.

7.6. $k(\tau) = \begin{cases} 6-2|\tau|, & |\tau| \le 3, \\ 0, & |\tau| > 3. \end{cases}$

7.7. $k(\tau) = \begin{cases} 12-3|\tau|, & |\tau| \le 4, \\ 0, & |\tau| > 4. \end{cases}$

7.8. $k(\tau) = \begin{cases} 6-2|\tau|, & |\tau| \le 3, \\ 0, & |\tau| > 3. \end{cases}$

7.9. $k(\tau) = \begin{cases} 10-2|\tau|, & |\tau| \le 5, \\ 0, & |\tau| > 5. \end{cases}$

7.10. $k(\tau) = \begin{cases} 2\left(1-\dfrac{|\tau|}{3}\right), & |\tau| \le 3, \\ 0, & |\tau| > 3. \end{cases}$

7.11 – 7.20. Відома спектральна щільність $S(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$. Знайти кореляційну функцію цього процесу.

7.11. $S(\omega) = \begin{cases} 4, & |\omega| \in [1,3], \\ 0, & |\omega| \notin [1,3]. \end{cases}$

7.12. $S(\omega)=\begin{cases}6, & |\omega|\in[1,3],\\ 0, & |\omega|\notin[1,3].\end{cases}$

7.13. $S(\omega)=\begin{cases}2, & |\omega|\in[2,4],\\ 0, & |\omega|\notin[2,4].\end{cases}$

7.14. $S(\omega)=\begin{cases}4, & |\omega|\le 2,\\ 2, & 2<|\omega|\le 4,\\ 0, & |\omega|>2.\end{cases}$

7.15. $S(\omega)=\begin{cases}6, & |\omega|\le 1,\\ 2, & 1<|\omega|\le 3,\\ 0, & |\omega|>3.\end{cases}$

7.16. $S(\omega)=\begin{cases}4, & |\omega|\le 2,\\ 1, & 2<|\omega|\le 3,\\ 0, & |\omega|>3.\end{cases}$

7.17. $S(\omega)=\begin{cases}4-|\omega|, & \omega\in[-4,4],\\ 0, & \omega\notin[-4,4].\end{cases}$

7.18. $S(\omega)=\begin{cases}6-3|\omega|, & \omega\in[-2,2],\\ 0, & \omega\notin[-2,2].\end{cases}$

7.19. $S(\omega)=\begin{cases}6-2|\omega|, & \omega\in[-3,3],\\ 0, & \omega\notin[-3,3].\end{cases}$

7.20. $S(\omega)=\begin{cases}5\left(1-\dfrac{|\omega|}{3}\right), & \omega\in[-3,3],\\ 0, & \omega\notin[-3,3].\end{cases}$

7.21 – 7.30. Знайти дисперсію стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, якщо відома його спектральна щільність $S(\omega)$.

7.21. $S(\omega)=\dfrac{8}{(\omega-1)^2+4}+\dfrac{8}{(\omega+1)^2+4}$.

7.22. $S(\omega)=\dfrac{9}{(\omega-3)^2+4}+\dfrac{9}{(\omega+3)^2+4}$.

7.23. $S(\omega)=\dfrac{6}{\omega^2-4\omega+13}+\dfrac{6}{\omega^2+4\omega+13}$.

7.24. $S(\omega)=\dfrac{6}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}$.

7.25. $S(\omega)=\dfrac{6\omega^2}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}$.

7.26. $S(\omega)=\dfrac{3\omega^2+22}{(\omega^2+4)(\omega^2+9)}$.

7.27. $S(\omega)=\dfrac{2\omega^2+5}{(\omega^2+4)(\omega^2+16)}$.

7.28. $S(\omega)=\dfrac{4\omega^2+9}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$.

7.29. $S(\omega)=\dfrac{2\omega^2+12}{(\omega^2+4)^2}$.

7.30. $S(\omega)=\dfrac{4\omega^2}{(\omega^2+8)^2}$.

Задача 8
Проходження стаціонарних випадкових процесів через стаціонарні лінійні динамічні системи

8.1 – 8.15. Робота лінійної динамічної системи описується заданим диференціальним рівнянням. На її вхід подається стаціонарний випадковий сигнал $X(t)$ з математичним сподіванням m_X та кореляційною функцією $k_X(\tau)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію і кореляційну функцію вихідного сигналу в стаціонарному режимі роботи.

8.1. $Y'+2Y=3X$, $m_X=2$, $k_X(\tau)=2e^{-3|\tau|}$.

8.2. $Y'+3Y=2X'$, $m_X=3$, $k_X(\tau)=3e^{-|\tau|}$.

8.3. $Y'+4Y=X$, $m_X=1$, $k_X(\tau)=3e^{-2|\tau|}$.

8.4. $Y'+Y=X'+3X$, $m_X=2$, $k_X(\tau)=3e^{-2|\tau|}$.

8.5. $Y' + 3Y = X' + 2X$, $m_X = 2$, $k_X(\tau) = 6e^{-|\tau|}$.

8.6. $Y' + 2Y = 2X' + 3X$, $m_X = 4$, $k_X(\tau) = 3e^{-|\tau|}$.

8.7. $Y' + 2Y = X'$, $m_X = 4$, $k_X(\tau) = 3e^{-|\tau|}$.

8.8. $Y' + 2Y = 4X$, $m_X = -3$, $k_X(\tau) = 2e^{-2|\tau|}$.

8.9. $Y' + Y = 2X$, $m_X = 6$, $k_X(\tau) = 2e^{-2|\tau|}$.

8.10. $Y' + 3Y = 4X'$, $m_X = 4$, $k_X(\tau) = 4e^{-3|\tau|}$.

8.11. $Y'' + 4Y' + 3Y = 2X'$, $m_X = 1$, $k_X(\tau) = 3e^{-2|\tau|}$.

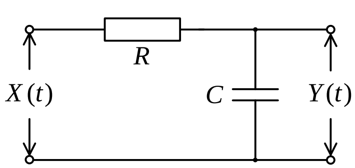
8.12. $Y'' + 4Y' + 4Y = 2X$, $m_X = -4$, $k_X(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$.

8.13. $Y'' + 3Y' + 2Y = 3X' + 4X$, $m_X = 2$, $k_X(\tau) = 9e^{-|\tau|}$.

8.14. $Y'' + 2Y' + Y = 2X' + 4X$, $m_X = 1$, $k_X(\tau) = 2e^{-|\tau|}$.

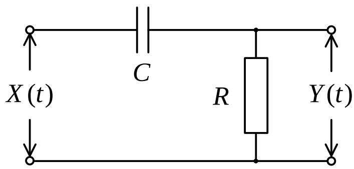
8.15. $Y'' + 5Y' + 6Y = X' + 4X$, $m_X = 3$, $k_X(\tau) = 3e^{-2|\tau|}$.

8.16 – 8.30. На вхід електричного кола, зображеного на рисунку, подається стаціонарний випадковий сигнал $X(t)$ з відомими характеристиками. Знайти математичне сподівання, дисперсію і кореляційну функцію вихідного сигналу в стаціонарному режимі роботи. Рівняння, яке описує роботу кола, вказано на рисунку.



$RCY' + Y = X$

Рис. 1



$RCY' + Y = RCX'$

Рис. 2

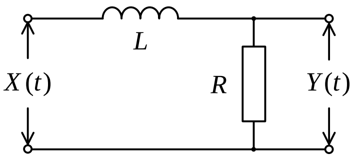
8.16. Рис. 1; $R = 5$, $C = 0{,}05$; $X(t)$ – стаціонарний білий шум, $m_X = 2$, інтенсивність $D = 6$.

8.17. Рис. 1; $R = 50$, $C = 0{,}01$; $m_X = 2$, $k_X(\tau) = 3e^{-|\tau|}$.

8.18. Рис. 1; $R = 2$, $C = 0{,}25$; $m_X = 4$, $k_X(\tau) = 3e^{-2|\tau|}$.

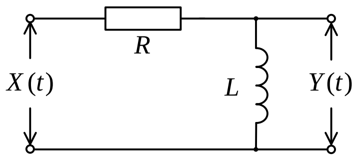
8.19. Рис. 2; $R = 10$, $C = 0,05$; $m_X = 2$, $k_X(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$.

8.20. Рис. 2; $R = 5$, $C = 0,1$; $m_X = 3$, $k_X(\tau) = 2e^{-3|\tau|}$.



$$LY' + RY = RX$$

Рис. 3



$$LY' + RY = LX'$$

Рис. 4

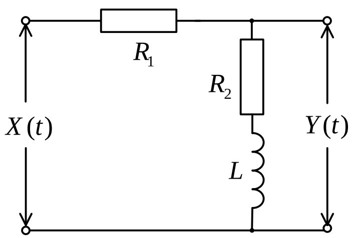
8.21. Рис. 3; $R = 12$, $L = 6$; $m_X = 3$, $k_X(\tau) = 2e^{-2|\tau|}$.

8.22. Рис. 3; $R = 8$, $L = 4$; $m_X = 1$, $k_X(\tau) = 3e^{-3|\tau|}$.

8.23. Рис. 3; $R = 6$, $L = 2$; $X(t)$ – стаціонарний білий шум, $m_X = 4$, інтенсивність $D = 3$.

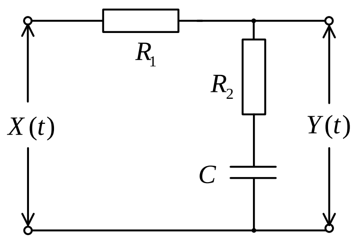
8.24. Рис. 4; $R = 3$, $L = 1$; $m_X = 5$, $k_X(\tau) = 2e^{-2|\tau|}$.

8.25. Рис. 4; $R = 4$, $L = 2$; $m_X = 6$, $k_X(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$.



$$LY' + (R_1 + R_2)Y = LX' + R_2 X$$

Рис. 5



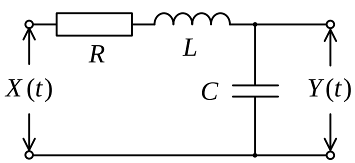
$$(R_1 + R_2)CY' + Y = R_2 C X' + X$$

Рис. 6

8.26. Рис. 5; $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $L = 2$; $m_X = 6$, $k_X(\tau) = 3e^{-2|\tau|}$.

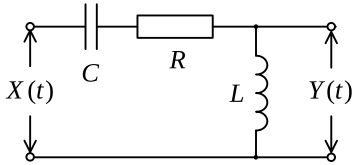
8.27. Рис. 5; $R_1 = 2$, $R_2 = 2$, $L = 1$; $m_X = 8$, $k_X(\tau) = 8e^{-4|\tau|}$.

8.28. Рис. 6; $R_1 = 4$, $R_2 = 1$, $C = 0,2$; $m_X = 5$, $k_X(\tau) = 3e^{-2|\tau|}$.



$$LCY'' + RCY' + Y = X$$

Рис. 7



$$LCY'' + RCY' + Y = LC\,X''$$

Рис. 8

8.29. Рис. 7; $R=6$, $L=2$, $C=0,25$, $X(t)$ – стаціонарний білий шум, $m_X=4$, інтенсивність $D=6$.

8.30. Рис. 8; $R=6$, $L=2$, $C=0,25$, $m_X=7$, $k_X(\tau)=9e^{-|\tau|}$.

Задача 9
Процес Пуассона

Потік заявок, що надходять на деякий пункт обслуговування споживачів, є найпростішим з інтенсивністю λ – середнє число заявок, що надходять на пункт за одиницю часу. Знайти ймовірність того, що за час t: а) надійде k_1 заявок; б) не надійде жодної заявки; в) надійде хоча б одна заявка; г) надійде не більше k_2 заявок.

№ варіанта	λ (заявок/хв.)	t (хв.)	k_1	k_2
9.1.	0,2	10	5	3
9.2.	3	1	4	2
9.3.	0,5	4	6	4
9.4.	0,15	20	5	3
9.5.	2	1	3	4
9.6.	0,5	6	4	3
9.7.	0,25	2	6	4
9.8.	0,1	20	3	3
9.9.	0,6	5	5	2
9.10.	0,5	1	4	4
9.11.	0,25	8	6	3
9.12.	0,3	10	3	4
9.13.	0,01	50	5	2
9.14.	2/3	3	6	2
9.15.	0,03	50	4	3

№ варіанта	λ (заявок/хв.)	t (хв.)	k_1	k_2
9.16.	0,75	4	3	4
9.17.	0,4	5	5	2
9.18.	1	3	6	3
9.19.	0,02	25	4	4
9.20.	1	2	3	2
9.21.	0,05	30	5	3
9.22.	1	4	2	4
9.23.	1,5	2	3	3
9.24.	0,025	20	4	4
9.25.	0,05	40	5	3
9.26.	0,025	60	6	2
9.27.	0,5	8	2	3
9.28.	0,125	16	3	4
9.29.	0,25	12	4	2
9.30.	0,2	5	2	3

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Теорія ймовірностей

Простір елементарних подій. Випадкові події та дії над ними

Приклад 1. Студент складає іспит з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика", результат якого оцінюється за чотирибальною шкалою. А тому простір елементарних подій можна подати у вигляді множини $\Omega = \{2,3,4,5\}$. Визначити, яким з наступних висловлень (тверджень) можна поставити у відповідність підмножини простору елементарних подій Ω:

а) іспит не провалено;

б) студент X воліє здавати іспити на відмінно;

в) викладач оцінив знання студента як не блискучі;

г) батьки студента X можуть ним пишатись;

д) викладач часто ставить двійки.

Розв'язання. У випадку (а) студент одержав оцінку більше двійки. Це подія, яку можна описати множиною $A = \{3,4,5\} \subset \Omega$.

У випадку (б) висловлення стосується бажань студента і не може бути описане підмножиною простору Ω.

У випадку (в) оцінка викладачем знань студента повинна виражатись відповідним балом, отже, висловленню (в) відповідає подія $B = \{2,3,4\} \subset \Omega$.

У випадку (г) не відомо, чи існує зв'язок між ставленням батьків до студента з результатом іспиту. Тому записати відповідну множину у межах простору Ω не можна. З висловленням (д) маємо аналогічну ситуацію.

Приклад 2. У завідувача одного з відділів мерії підлеглими є його брат, кум і сват. Він вибирає з цих підлеглих двох, щоб відправити у відрядження. Описати простір елементарних подій, якщо слід направити: а) обох до Москви, б) одного до Анкари, а іншого до Ялти. Записати випадкову подію A – у відрядження поїде брат.

Розв'язання. Введемо позначення: $б = "брат"$, $к = "кум"$, $c = "сват"$.

а) $\Omega = \{[б,к],[б,c],[к,c]\}$.

Тут у квадратних дужках порядок літер значення не має – лише вказується, хто їде у відрядження.

Отже, в цьому випадку простір складається з трьох елементарних подій.

Випадкова подія $A = \{[б,к],[б,с]\}$.

б) $\Omega = \{(б,к),(к,б),(б,с),(с,б),(к,с),(с,к)\}$.

Тут у круглих дужках порядок літер суттєвий: літера на першому місці – це відрядженні до Анкари, а на другому – до Ялти.

Отже, в цьому випадку простір складається з шести елементарних подій.

Випадкова подія $A = \{(б,к),(к,б),(б,с),(с,б)\}$.

Приклад 3. У коробці лежать три кулі з номерами $1, 2, 3$. З коробки послідовно дістають дві кулі. Описати простір елементарних подій. Описати випадкові події: *A* – номери куль з'являться в порядку зростання; *B* – сума номерів витягнутих куль дорівнює чотирьом.

Розв'язання. Простір елементарних подій складається із впорядкованих наборів двох чисел – номерів куль:

$$\Omega = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Випадкова подія $A = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$; випадкова подія $B = \{(1,3),(3,1)\}$.

Приклад 4. У ящику знаходяться три якісні і дві браковані деталі. Взято одночасно дві деталі (невпорядкований набір). Описати простір елементарних подій. Описати випадкові події: *A* – серед узятих деталей дві якісні; *B* – одна деталь якісна і одна бракована.

Розв'язання Позначимо якісні деталі як $я_1$, $я_2$, $я_3$, а браковані – $б_1$, $б_2$. Тоді простір елементарних подій матиме вигляд

$$\Omega = \{[я_1,я_2],[я_1,я_3],[я_2,я_3],[я_1,б_1],[я_1,б_2],$$
$$[я_2,б_1],[я_2,б_2],[я_3,б_1],[я_3,б_2],[б_1,б_2]\}$$

(у квадратних дужках порядок літер значення не має).

Випадкова подія $A = \{[я_1,я_2],[я_1,я_3],[я_2,я_3]\}$; випадкова подія $B = \{[я_1,б_1], [я_1,б_2], [я_2,б_1], [я_2,б_2], [я_3,б_1], [я_3,б_2]\}$.

Приклад 5. У коробці лежать дві білі та одна чорна куля. З коробки послідовно дістають дві кулі (впорядкований набір). Описати простір елементарних подій. Описати випадкові події: A – другою з'явиться біла куля; B – перша куля чорна, а друга – біла.

Розв'язання Позначимо білі кулі як $б_1$ та $б_2$, а чорну – $ч$. Тоді простір елементарних подій матиме вигляд

$$\Omega = \left\{ б_1б_2,\, б_2б_1,\, б_1ч,\, б_2ч,\, чб_1,\, чб_2 \right\}.$$

Випадкова подія $A = \left\{ б_1б_2,\, б_2б_1,\, чб_1, чб_2 \right\}$; випадкова подія $B = \left\{ чб_1, чб_2 \right\}$.

Приклад 6. Серед усіх родин з трьома дітьми навмання обирають одну. Описати простір елементарних подій і випадкові події: A – в родині дві дівчинки; B – в родині не більше однієї дівчинки; C – в родині немає хлопчиків; D – в родині принаймні одна дитина – хлопчик; E – в родині дівчаток більше ніж хлопчиків; F – перша дитина в родині – хлопчик.

Розв'язання. Простір елементарних подій даного експерименту:

$$\Omega = \left\{ ххх, ххд, хдх, дхх, ддх, дхд, хдд, ддд \right\},$$

де елементарні події позначені згідно ста́ті дітей у порядку їх народження.

Випадкові події, вказані в умові задачі, є наступними підмножинами простору Ω:

$A = \left\{ ддх, дхд, хдд \right\}$;

$B = \left\{ ххх, ххд, хдх, дхх \right\}$;

$C = \left\{ ддд \right\}$;

$D = \left\{ ххх, ххд, хдх, дхх, ддх, дхд, хдд \right\}$;

$E = \left\{ ддх, дхд, хдд, ддд \right\}$;

$F = \left\{ ххх, ххд, хдх, хдд \right\}$.

Приклад 7. По каналу зв'язку послідовно передають три знаки. Описати простір елементарних подій та випадкові події: A – прийнято лише перший знак; B – прийнято принаймні один знак; C – прийнято два і тільки два знаки; D – прийнято менше двох знаків; E – прийнято один знак.

Вказати пари несумісних подій.

Розв’язання. Використаємо цифри 0, 1 для позначення подій: 0 – знак спотворено, 1 – знак прийнято. Тоді простір елементарних подій запишеться у вигляді:

$$\Omega = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}.$$

A – прийнято лише перший знак: $A = \{100\}$;

B – прийнято принаймні один знак: $B = \{100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$;

C – прийнято два і тільки два знаки: $C = \{110, 101, 011\}$;

D – прийнято менше двох знаків: $D = \{000, 100, 010, 001\}$;

E – прийнято один знак: $E = \{100, 010, 001\}$.

Аналізуючи склад відповідних множин, можна зробити висновок, що:

події A та C – несумісні;
події C та D – несумісні;
події C та E – несумісні.

Приклад 8. При русі автомобіля його ліві і праві колеса час від часу наїжджають на перешкоди (виступи і западини дорожнього полотна). Нехай A – подія, полягає в наїзді на перешкоду лівим колесом; B – правим колесом (для певності розглядатимемо лише передні колеса авто). У чому полягають наступні події:

а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) $A+B$; г) $\overline{A+B}$; д) $\overline{AB}$?

Розв’язання. а) Символом $\overline{A}$ позначають протилежну до A подію, яка виконується тоді і тільки тоді, коли не виконується подія A. У нашому випадку подія $\overline{A}$ полягає в тому, що автомобіль не наїде на перешкоду лівим колесом (при цьому нічого не відомо про наїзд на перешкоду правим колесом).

б) Аналогічно попередньому подія $\overline{B}$ полягає в тому, що автомобіль не наїде на перешкоду правим колесом (при цьому нічого не відомо про наїзд на перешкоду лівим колесом).

в) Під сумою подій A та B розуміють таку подію $A+B$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається хоча б одна з подій A та B. У нашому випадку подія $A+B$ полягає в тому, що авто наїде на перешкоду принаймні одним колесом (тобто, або лише лівим, або лише правим, або двома одночасно).

г) Подія $\overline{A+B}$ є протилежною до розглянутої події $A+B$ і полягає в тому, що авто не наїде на перешкоду жодним колесом.

д) Подія $\overline{AB}$ є протилежною до події AB. Тому з'ясуємо спочатку зміст події AB. Під добутком подій A та B розуміють таку подію AB, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A та B. У нашому випадку подія AB полягає в тому, що авто наїде на перешкоду обома колесами одночасно. Звідки стає зрозуміло, що протилежна подія $\overline{AB}$ полягає в тому, що авто не наїде на перешкоду обома колесами одночасно. Тобто, або не наїде жодним колесом, або наїде лише одним (або тільки правим, або тільки лівим).

Приклад 9. Два стрільці стріляють по мішені по черзі до першого влучення, маючи по два патрони. Виграє стрілець, що влучив у мішень першим. Записати простір елементарних подій і виразити через елементарні наступні події: *A* – виграв перший, *B* – виграв другий.

Розв'язання. Введемо позначення наступних подій: A_i – перший влучив при i-ій спробі; B_i – другий влучив при i-ій спробі $(i=1,2)$. Тоді простір елементарних подій даного експерименту матиме вигляд

$$\Omega=\left\{A_1,\ \overline{A}_1B_1,\ \overline{A}_1\overline{B}_1A_2,\ \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2,\ \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\right\}.$$

Події A та B виражаються допомогою дій (операцій) над елементарними подіями наступним чином:

$A=A_1+\overline{A}_1\overline{B}_1A_2$ (тобто, подія *A* відбувається тоді, коли перший стрілець влучить з першого пострілу або перший не влучить, другий не влучить, перший влучить);

$B=\overline{A}_1B_1+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2$ (тобто, подія *B* відбувається тоді, коли перший стрілець не влучить з першого пострілу, другий влучить або перший не влучить, другий не влучить, перший не влучить, другий влучить).

Інакше кажучи, випадковій події *A* сприяють перша та третя елементарні події, а події *B* – друга та четверта.

Зауважимо, що події A та B можна описати також відповідними підмножинами простору елементарних подій Ω у вигляді $A=\left\{A_1,\ \overline{A}_1\overline{B}_1A_2\right\}$; $B=\left\{\overline{A}_1B_1,\ \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2\right\}$.

Приклад 10. В умовах попереднього прикладу відповісти на питання: чи утворюють події *A* та *B* повну групу подій? Якщо ні, то якою подією їх слід доповнити до повної групи подій?

Розв'язання. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу подій, якщо вони попарно несумісні і їх сума є достовірною подією, тобто,

$$A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j \quad \text{і} \quad A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega.$$

У нашому випадку події A та B несумісні, але не утворюють повну групу подій, оскільки їх сума

$$A+B=A_1+\overline{A}_1\overline{B}_1A_2+\overline{A}_1B_1+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2$$

не є достовірною подією (тобто відповідна множина не співпадає з простором елементарних подій Ω).

Якщо позначити $C=\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2$, то події A, B, C утворюватимуть повну групу, оскільки:

1) $AC=\varnothing$ і $BC=\varnothing$;

2) $A+B+C=\Omega$.

Приклад 11. Компанія-організатор сімейної лотереї цікавиться тим, як розподіляється вік подружніх пар, що беруть участь у розіграшах. Описати простір елементарних подій даного експерименту та події:

A – чоловікові більше 36 років;

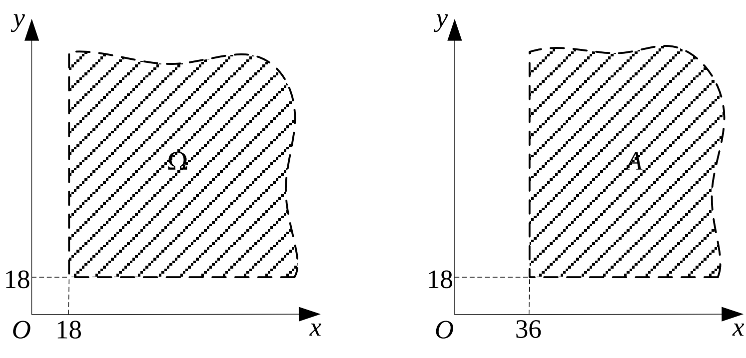
B – чоловік старший за дружину;

C – дружині більше 36 років;

AB; $A\overline{B}$; AC; $A+C$; $A+B$; $A-BC$; $A-AB$.

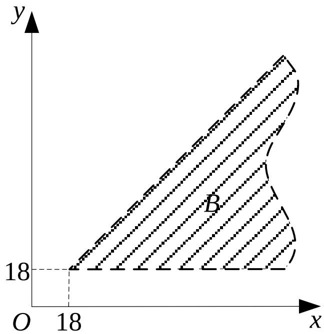
Пояснити співвідношення $BC\subset A$.

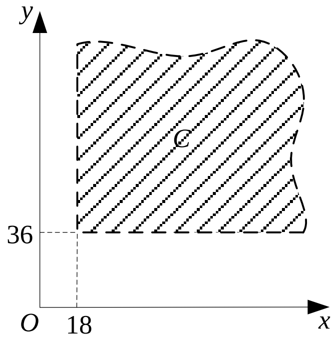
Розв'язання. Нехай x – вік чоловіка, y – вік дружини. За українськими законами грати в лотерею, як і укладати шлюби, можна тільки після досягнення 18-ти років. Тоді за простір елементарних подій приймемо частину першого квадранта, обмежену прямими $x=18$, $y=18$.



Подію A представлено точками, що лежать праворуч від прямої $x=36$; $(y>18)$. Подія B визначає множину всіх точок, для яких

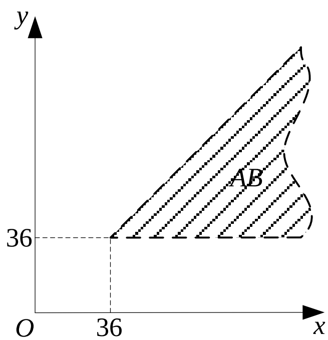
$x > y$, $y > 18$. Подія C характеризується частиною простору елементарних подій, розташованого над прямою $y = 36$.

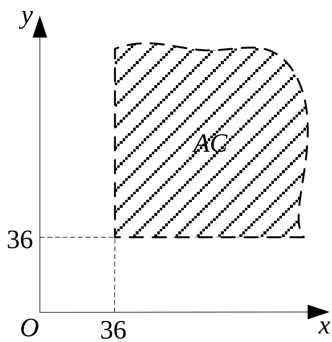




Подія AB означає, що чоловікові більше 36 років і він старший за свою дружину.

Подія $A\bar{B}$ означає, що чоловікові більше 36 років, а дружина не молодша за свого чоловіка.



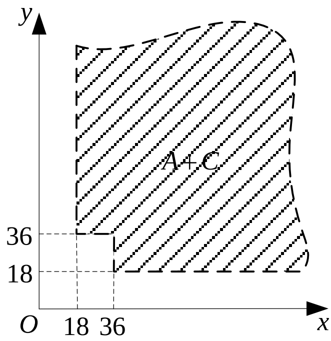


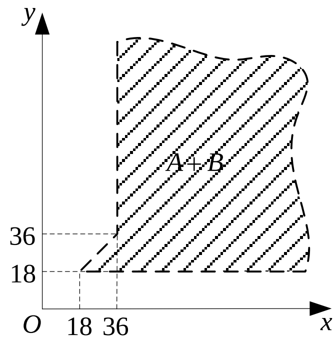
Подія AC означає, що і чоловікові і дружині більше 36 років.

Подія $A+C$ означає, що принаймні одному з подружньої пари більше 36 років.

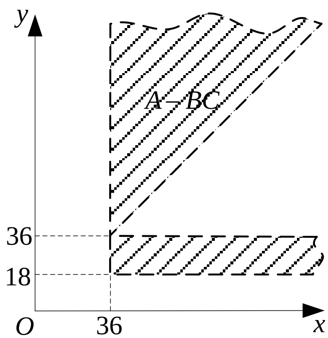
Подія $A+B$ означає, що або чоловікові більше 36 років, або він, принаймні, старший за свою дружину.

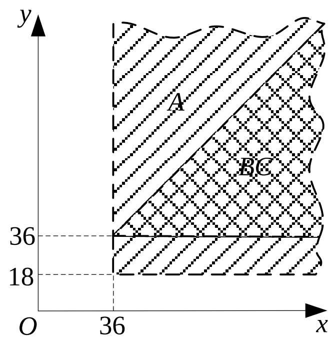
Подія $A-BC$ означає, що чоловікові більше 36 років і виключається ситуація коли чоловік старший за дружину і дружині більше 36 років (тобто, чоловікові більше 36 років, а дружина або молодша 36 років, або старша за чоловіка).





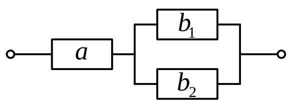
Подія $A-AB$ означає, що відбулася подія A, але не відбулася подія AB. Використовуючи рівність $A-AB=A\overline{B}$, бачимо, що подія B не відбулася. Тобто чоловік старший 36 років, а дружина старша за чоловіка.



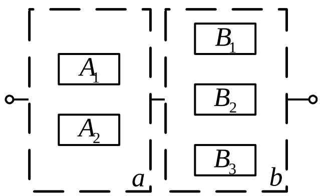


Співвідношення $BC\subset A$ означає, що якщо чоловік старший за дружину і дружині більше 36 років, то і чоловікові також більше 36 років.

Приклад 12. На рисунку зображено електричну схему. Позначимо події: A – працює блок a; B_i – працює блок b_i, $i=1,2$; C – схема працює. Виразити події C та $\overline{C}$ через A та B_i.



Розв'язання. Очевидно для роботи даної ділянки електричної схеми обов'язково мають працювати блок a і принаймні один з блоків b_i, тобто $C = A\left(B_1 + B_2\right)$. Для розриву ланцюга достатньо, щоб не працював блок a або ж одночасно вийшли з ладу блоки b_1 та b_2, тобто $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}_1\bar{B}_2$.



Приклад 13. Лінія (див. рисунок) працює тоді і тільки тоді, коли справні один елемент у блоці a і два елементи в блоці b. Виразити подію C – лінія справна – через події A_i – i-ий елемент у блоці a справний $\left(i = 1,2\right)$ та B_j – j-ий елемент у блоці b справний $\left(j = 1,2,3\right)$.

Розв'язання. Введемо допоміжні події: A – працює один елемент у блоці a; B – працює рівно два елементи у блоці b. Тоді $A = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$; $B = B_1B_2\bar{B}_3 + B_1\bar{B}_2B_3 + \bar{B}_1B_2B_3$. Оскільки $C = AB$, то $C = \left(A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2\right)\left(B_1B_2\bar{B}_3 + B_1\bar{B}_2B_3 + \bar{B}_1B_2B_3\right)$.

Класичне визначення ймовірності

Приклад 14. В партії з 25 деталей є чотири браковані. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання для перевірки п'яти деталей буде дві браковані.

Розв'язання. Розглянемо випадкову подію A – серед п'яти взятих навмання деталей дві браковані. За класичним визначенням ймовірності $P\left(A\right) = \dfrac{m}{n}$, де n – число усіх рівноможливих елементарних подій в даному випадковому експерименті, m – число елементарних подій, які сприяють події A. Загальне число елементарних подій дорівнює числу способів, за допомогою яких можна вибрати п'ять деталей із 25, тобто $n = C_{25}^5$ (див. формулу числа сполучень C_k^l у додатку 1). Дві браковані деталі можна вибрати з чотирьох бракованих C_4^2 способами, а інші три не браковані – C_{21}^3 способами. Тоді $m = C_4^2 \cdot C_{21}^3$. Отже

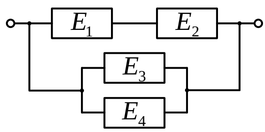
$$P(A)=\frac{C_4^2\cdot C_{21}^3}{C_{25}^5}=\frac{\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\dfrac{21!}{3!\cdot 18!}}{\dfrac{25!}{5!\cdot 20!}}\approx 0{,}15\,.$$

Приклад 15. Книги деякого чотиритомного видання розставляють навмання на полиці. Знайти ймовірність того, що всі чотири томи стоятимуть в порядку зростання їх номерів.

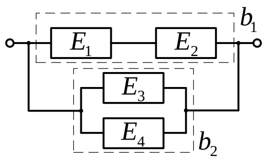
Розв'язання. Загальне число елементарних подій дорівнює числу перестановок із чотирьох елементів, тобто $n=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$. Події A сприяє лише одна елементарна подія (1,2,3,4), тобто $m=1$. Отже

$$P(A)=\frac{1}{24}\approx 0{,}042\,.$$

Приклад 16. Електричний ланцюг складається з чотирьох елементів E_1, E_2, E_3, E_4, ймовірності безвідмовної роботи яких протягом року відповідно дорівнюють 0,8, 0,6, 0,7 та 0,9. Виходи з ладу елементів ланцюга – події незалежні. Знайти ймовірність розриву ланцюга протягом року.



Розв'язання. Подію A – розрив ланцюга протягом року – представимо як $A=B_1B_2$, де події B_1 та B_2 означають вихід з ладу блоків b_1 та b_2 відповідно (див. рисунок у розв'язанні). Тоді за теоремою про множення ймовірностей $P(A)=P(B_1)P(B_2)$.



Виразимо події B_1 та B_2 через події A_i – i-ий елемент протягом року не вийде з ладу $(i=1,2,3,4)$, ймовірності яких задані в умові задачі: $B_1=\overline{A_1A_2}$, $B_2=\overline{A}_3\overline{A}_4$.

З умови задачі:

$$P(A_1)=0{,}8\,,\ P(A_2)=0{,}6\,,\ P(A_3)=0{,}7\,,\ P(A_4)=0{,}9\,.$$

Тоді

$$P(B_1)=1-P(A_1A_2)=1-P(A_1)P(A_2)=1-0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}52\,.$$

$$P(B_2)=P(\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)=(1-0{,}7)(1-0{,}9)=0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}03\,.$$

Звідки остаточно

$$P(A) = P(B_1)P(B_2) = 0,52 \cdot 0,03 = 0,156\ .$$

Геометричні ймовірності

Приклад 17. На відрізку одиничної довжини навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до кожного з кінців відрізка буде більшою $\frac{1}{5}$.

Розв'язання. Якщо випадковий експеримент зводиться до вибору навмання точки з деякої області Ω на прямій, площині або у просторі з мірою $m(\Omega)$, а випадкова подія A – це частина Ω, то ймовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}. \qquad (1)$$

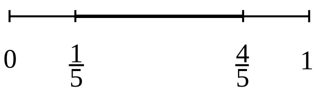
На прямій множини A та Ω – інтервали, а їх міра – довжина l. Формула (1) матиме вигляд

$$P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}. \qquad (2)$$

На площині множини A та Ω – плоскі області, а їх міра – площа S. Формула (1) набуває вигляду

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}. \qquad (3)$$

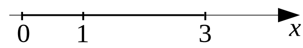
В даній задачі простір Ω утворюють точки відрізка $[0,1]$. Подія A – відстань від точки до кожного з кінців відрізка більша $\frac{1}{5}$. Цій події відповідають точки інтервалу $A=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$. Оскільки $l(\Omega)=1$, $l(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$, то за формулою (2)



$$P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}=\frac{3}{5}.$$

Приклад 18. Потяги метро йдуть в певному напрямі з інтервалом три хвилини. Чому дорівнює ймовірність того, що пасажиру доведеться чекати приходу потяга більше двох хвилини?

Розв'язання. Позначимо момент приходу пасажира через x. Час очікування пасажиром потягу може набувати довільних значень від 0 до 3 (хв). Тому Ω – це відрізок $[0,3]$ координатної прямої Ox. Моменти появи пасажира в інтервалі між моментами приходу потягів (на рисунку точки 0 та 3) будемо вважати однаково можливими. Елементарними подіями, що сприяють події A – час очікування більше двох хвилин, є моменти появи пасажира, що належать півінтервалу $A=[0,1)$.

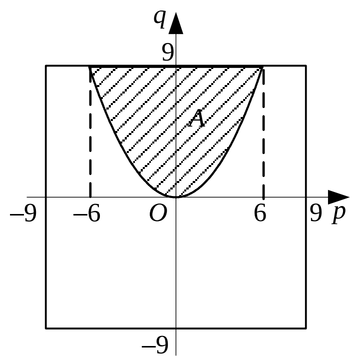


Шукана ймовірність знаходиться за формулою (2) як відношення довжин двох інтервалів:

$$P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 19. З відрізку $[-9,9]$ навмання вибирають два числа p та q. Які корені квадратного тричлена x^2+px+q більш ймовірні: дійсні чи комплексні?

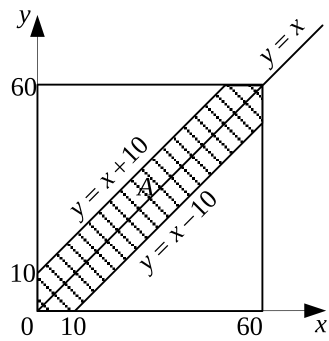
Розв'язання. Пару (p,q) розглянемо як координати точки площини. Оскільки $|p|\le 9$ і $|q|\le 9$, то Ω – квадрат зі стороною 18 (див. рисунок). Корені тричлена будуть комплексними тоді і тільки тоді, коли $p^2-4q<0$. Отже, події A – "корені комплексні" відповідає заштрихована область A. Площу цієї області обчислимо за допомогою визначеного інтеграла



$$S(A)=\int_{-6}^{6}\left(9-\frac{1}{4}p^2\right)dp=\left(9p-\frac{1}{12}p^3\right)\Bigg|_{-6}^{6}=72.$$

Звідки, за формулою (3) знаходимо ймовірність комплексних коренів $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{72}{18^2}=\dfrac{2}{9}$. Ймовірність дійсних коренів $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$. Отже, більш ймовірно, що корені будуть дійсними.

Приклад 20. Два чоловіки обідають в їдальні, яка працює з 12 до 13 години. Кожен з них приходить у довільний момент часу і обідає впродовж 10 хвилин або до закриття їдальні. Яка ймовірність їх зустрічі?



Розв'язання. Позначимо момент приходу в їдальню першого чоловіка через x, а другого – через y. Для того, щоб зустріч відбулася, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $|x-y| \le 10$. Зобразимо x і y як координати точки на площині, за одиницю масштабу виберемо хвилину. Тоді простір Ω – це квадрат зі стороною 60, а подія A – "зустріч відбулася" – заштрихована фігура. Шукана ймовірність дорівнює відношенню площі заштрихованої фігури до площі усього квадрата:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

Теореми додавання та множення ймовірностей

Приклад 21. В коробці 10 деталей, з яких 8 стандартних. З коробки навмання дістають три деталі. Знайти ймовірність того, що всі три деталі стандартні.

Розв'язання. Подію A (всі три деталі стандартні) представимо як $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, де події A_1, A_2, A_3 означають, що відповідно перша, друга і третя взяті деталі стандартні. За теоремою про множення ймовірностей

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \approx 0,467.$$

Приклад 22. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що за зміну не буде випущено жодної бракованої деталі, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що за три зміни не буде випущено жодної бракованої деталі.

Розв'язання. Подію A (за три зміни не випущено жодної бракованої деталі) представимо, як $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, де події A_1, A_2, A_3 означають, що відповідно за першу, другу і третю зміну не випущено жодної бракованої деталі. Події A_1, A_2, A_3 – незалежні. Тому за теоремою множення ймовірностей

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0,9\cdot 0,9\cdot 0,9\approx 0,729\ .$$

Приклад 23. Студенту після закінчення сесії потрібно перескласти два іспити. Ймовірність перескласти перший з них (з вищої математики) становить 0,5, другий (з іноземної мови) – 0,9. Знайти ймовірність того, що студент: а) не перескладе жодного іспиту; б) перескладе лише один іспит; в) перескладе принаймні один іспит.

Розв'язання. Нехай подія A_i – студент перескладе i-ий іспит $\left(i=1,2\right)$. Тоді з умови задачі $P\left(A_1\right)=0,5$; $P\left(A_2\right)=0,9$. Звідки ймовірності протилежних подій $P\left(\overline{A}_1\right)=1-P\left(A_1\right)=1-0,5=0,5$; $P\left(\overline{A}_2\right)=1-P\left(A_2\right)=1-0,9=0,1$.

а) Нехай подія B – студент не перескладе жодного іспиту. Подамо цю подію у вигляді $B=\overline{A}_1\overline{A}_2$. За теоремою множення ймовірностей, враховуючи незалежність подій $\overline{A}_1$ та $\overline{A}_2$, матимемо

$$P\left(B\right)=P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)=0,5\cdot 0,1=0,05\ .$$

б) Нехай подія C – студент перескладе лише один іспит. Подамо її у вигляді $C=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$. Скористаємося теоремою додавання ймовірностей для випадку несумісних подій $B_1=A_1\overline{A}_2$ та $B_2=\overline{A}_1A_2$:

$$P\left(B_1+B_2\right)=P\left(B_1\right)+P\left(B_2\right).$$

У нашому випадку матимемо

$$P\left(C\right)=P\left(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2\right)=P\left(A_1\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1A_2\right)=$$

$$=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1\right)P\left(A_2\right)=0,5\cdot 0,1+0,5\cdot 0,9=0,5\ .$$

Після теореми додавання ми скористалися теоремою множення ймовірностей для незалежних подій.

в) Нехай подія D – студент перескладе принаймні один іспит. Тоді D протилежна до події B, тобто $D=\overline{B}$.

Тому

$$P\left(D\right)=P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)=1-0,05=0,95\ .$$

Приклад 24. Ймовірність того, що буде йти дощ 0,6, а того, що йтиме град 0,2.

Знайти ймовірність поганої погоди, якщо ймовірність дощу з градом становить 0,15.

Розв'язання. Нехай подія A – буде йти дощ, B – буде йти град. Тоді подію, ймовірність якої ми шукаємо, можна записати у вигляді $A+B$.

З умови задачі $P(A)=0,6$, $P(B)=0,2$, $P(AB)=0,15$.

Скористаємося теоремою додавання ймовірностей для випадку сумісних подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Отримаємо

$$P(A+B)=0,6+0,2-0,15=0,65.$$

Формула повної ймовірності

Приклад 25. На заводі перший цех виробляє 10 %, другий – 70 %, третій – 20 % всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 9 %, 8 %, 7 %. Знайти ймовірність того, що випадково вибрана деталь дефектна.

Розв'язання. Нехай подія A – деталь дефектна. Висунемо гіпотези: H_1 – деталь виготовлена першим цехом; H_2 – деталь виготовлена другим цехом; H_3 – деталь виготовлена третім цехом. За умовою задачі, відповідні ймовірності $P(H_1)=0,1$, $P(H_2)=0,7$, $P(H_3)=0,2$; $P(A|H_1)=0,09$, $P(A|H_2)=0,08$, $P(A|H_3)=0,07$.

Застосовуючи формулу повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i),$$

отримаємо

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A|H_i)=0,09\cdot 0,1+0,08\cdot 0,7+0,07\cdot 0,2=0,079.$$

Формула Байєса

Приклад 26. На заводі перший цех виробляє 10 %, другий – 70 %, третій – 20 % всіх деталей. В їх продукції браку, відповідно 9 %, 8 %, 7 %. Випадково вибрана деталь виявилась дефектною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена другим цехом.

Розв'язання. Нехай подія A – деталь дефектна. Висунемо гіпотези: H_i – деталь виготовлена i-им цехом ($i=1, 2, 3$). За умовою задачі, відповідні ймовірності $P(H_1)=0,1$, $P(H_2)=0,7$, $P(H_3)=0,2$; $P(A\,|\,H_1)=0,09$, $P(A\,|\,H_2)=0,08$, $P(A\,|\,H_3)=0,07$.

Застосовуючи формулу Байєса

$$P(H_k\mid A)=\frac{P(H_k)\,P(A\,|\,H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\,P(A\,|\,H_i)},\qquad k=1,2,\ldots,n,$$

отримаємо

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(H_2)\,P(A\,|\,H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)\,P(A\,|\,H_i)}=\frac{0,08\cdot 0,7}{0,09\cdot 0,1+0,08\cdot 0,7+0,07\cdot 0,2}=$$

$$=\frac{0,056}{0,079}=0,709.$$

Схема Бернуллі

Приклад 27. Монета підкидається п'ять разів. Знайти ймовірність того, що: а) тричі випаде "герб"; б) "герб" випаде не менше трьох разів.

Розв'язання. Ймовірність випадання "герба" при одному підкиданні монети $p=\frac{1}{2}$, звідки $q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. За формулою Бернуллі $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ маємо:

а) $P_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\frac{C_5^3}{2^5}=\frac{5}{16}$;

б) $P_5(3\le m\le 5)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$, оскільки

$$P_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32};\quad P_5(4)=C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{C_5^4}{2^5}=\frac{5}{32};$$

$$P_5(5)=C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{32}.$$

Приклад 28. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно 80 разів у 400 випробуваннях, якщо ймовірність її настання в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Розв'язання. За умовою $n=400$, $m=80$, $p=0,2$, отже $q=1-p=1-0,2=0,8$.

Оскільки n велике, скористаємося локальною теоремою Муавра-Лапласа у вигляді формули

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ для невід'ємних значень аргументу наведена у додатку 2 (для від'ємних значень x користуються тією ж таблицею, оскільки функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x)=\varphi(x)$).

Одержимо $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0{,}2}{8}=0$, звідки за таблицею значень функції $\varphi(x)$ (додаток 2) знаходимо $\varphi(0)=0{,}3989$.

Отже, $P_{400}(80)=\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\cdot\varphi(x)=\frac{1}{8}\varphi(0)=\frac{1}{8}\cdot 0{,}3989=0{,}04986$.

Приклад 29. Ймовірність того, що деталь не буде перевірено, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей неперевірених буде від 70 до 100 деталей.

Розв'язання. Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа у вигляді формули

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

де $x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Тут $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функція Лапласа, таблиця значень якої наведена в додатку 3.

За умовою $n=400$, $p=0{,}2$, $m_1=70$, $m_2=100$. Знайдемо $q=$ $=1-p=1-0{,}2=0{,}8$ та обчислимо

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-1{,}25;\ x_1=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=2{,}5.$$

Використовуючи непарність функції Лапласа $(\Phi(-x)=-\Phi(x))$ одержимо

$$P_{400}(70\le m\le 100)=\Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25).$$

За таблицею (додаток 3) знаходимо

$$\Phi(2,5)=0,4938,\quad \Phi(1,25)=0,3944.$$

Тому

$$P_{400}(70\le m\le 100)=0,4938+0,3944=0,8882.$$

Приклад 30. Магазин замовив 1000 новорічних пакунків цукерок. Ймовірність того, що під час перевезення пакунок буде пошкоджено дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що магазин одержить пошкодженими: а) рівно 3 пакунки; б) більше 3 пакунків.

Розв'язання. а) Оскільки число $n=1000$ велике, а ймовірність $p=0,002$ близька до нуля, скористаємося теоремою Пуассона:

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad \lambda=np.$$

Знайдемо $\lambda=np=1000\cdot 0,002=2$. Звідки

$$P_{1000}(3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0,18.$$

б) Скористаємось очевидною рівністю

$$P_{1000}(4\le m\le 1000)=1-P_{1000}(0\le m\le 3)=$$
$$=1-P_{1000}(0)-P_{1000}(1)-P_{1000}(2)-P_{1000}(3).$$

За теоремою Пуассона знайдемо

$$P_{1000}(0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=0,135;\quad P_{1000}(1)=\frac{2^1}{1!}e^{-2}=0,271;$$
$$P_{1000}(2)=\frac{2^2}{2!}e^{-2}=0,271;\quad P_{1000}(3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0,18.$$

Звідки

$$P_{1000}(4\le m\le 1000)=1-0,135-0,271-0,271-0,18=0,143.$$

Зауважимо, що інтегральна теорема Муавра-Лапласа дає у цьому випадку менш точний результат, оскільки ймовірність p *близька до нуля.*

Закон розподілу дискретної випадкової величини

Приклад 31. Проводиться три незалежних випробування, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0,4. Розглядається випадкова величина X – число появ події A в трьох випробуваннях. Знайти закон розподілу випадкової величини X.

Розв'язання. Випадкова величина X може набувати значень: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Знайдемо відповідні їм ймовірності. Для цього скористаємося формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \text{ де } C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}, \; m=0, 1, \ldots, n.$$

Отримаємо:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^3 = 0,216; \; P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 = 0,432;$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^1 = 0,288; \; P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0 = 0,064.$$

Закон розподілу випадкової величини має вигляд

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Числові характеристики дискретної випадкової величини

Приклад 32. Відомий закон розподілу випадкової величини X.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Обчислимо числові характеристики випадкової величини:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - \left[M(X)\right]^2 =$$

$$= 0^2 \cdot 0,216 + 1^2 \cdot 0,432 + 2^2 \cdot 0,288 + 3^2 \cdot 0,064 - (1,2)^2 = 0,72;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,72} = 0,849.$$

Неперервна випадкова величина

Приклад 33. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу $(0,1)$, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Розв'язання. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу $(0,1)$:

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{9} - 0 = \frac{1}{9} \approx 0{,}11 .$$

Оскільки щільність розподілу $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{2}{9}x, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^3 \frac{2}{9}x^2 dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{2\cdot 27}{27} = 2 .$$

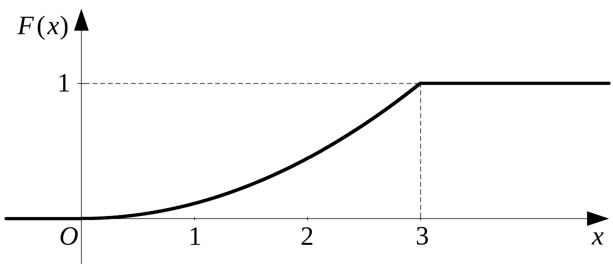
Визначимо дисперсію випадкової величини X:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left[M(X)\right]^2 = \int_0^3 x^2 \frac{2}{9}xdx - 2^2 = \frac{2}{9}\int_0^3 x^3 dx - 4 = \frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 - 4 =$$

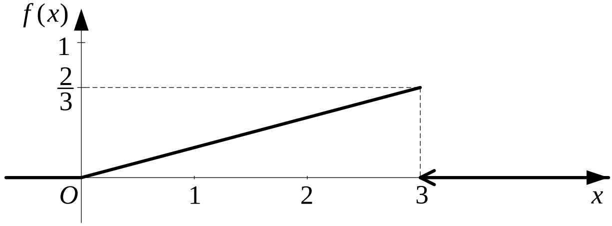
$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{3^4}{4} - 4 = 0{,}5.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$.

Будуємо графік функції розподілу:



Будуємо графік щільності розподілу:



Розподіли: нормальний, рівномірний, показниковий, Пуассона

Приклад 34. Прилад для вимірювання деякої величини працює без систематичних похибок (це означає, що математичне сподівання випадкової величини – похибки вимірювання – дорівнює нулю).

Відомо, що похибка вимірювання має нормальний розподіл. Нехай її середнє квадратичне відхилення (ще кажуть, стандартне відхилення) дорівнює $\sigma = 10$ од. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде проведено з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною: а) 10 од.; б) 20 од.; в) 30 од.

Розв'язання. Ймовірність того, що значення нормально розподіленої випадкової величини X відхилиться від її математичного сподівання m (за абсолютною величиною) менше ніж на ε, знаходиться за формулою

$$P\left(\left|X - m\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \qquad (4)$$

де $\sigma = \sqrt{D(X)}$; $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

За формулою (4) маємо:

а) $P\left(\left|X\right| \le 10\right) = P\left(\left|X\right| < 10\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{10}\right) = 2\Phi\left(1\right) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$,

оскільки $\Phi(1) = 0,3413$ (див. додаток 3);

б) $P\left(\left|X\right| \le 20\right) = 2\Phi\left(\frac{20}{10}\right) = 2\Phi\left(2\right) = 0,9544 \quad \left(\Phi\left(2\right) = 0,4772\right)$;

в) $P\left(\left|X\right| \le 30\right) = 2\Phi\left(\frac{30}{10}\right) = 2\Phi\left(3\right) = 0,9974 \quad \left(\Phi\left(3\right) = 0,4987\right)$.

При розв'язуванні задачі ми скористались тим, що неперервна випадкова величина X має властивість $P(X = x_0) = 0$, де x_0 – довільне число, а тому $P\left(\alpha \le X \le \beta\right) = P\left(\alpha < X < \beta\right)$.

Приклад 35. Деталь виготовляється на верстаті. Довжина X цієї деталі є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням 20 см і середнім квадратичним відхиленням 0,2 см.

Потрібно: а) знайти відсоток деталей, відхилення довжини яких у той чи інший бік від її середнього значення не перевищить 0,3 см; б) знайти відсоток деталей, довжина яких міститься в межах від 20 см до 20,5 см; в) знайти, яку точність довжини деталі можна гарантувати з ймовірністю 0,95; г) відповісти на питання: в яких межах за правилом "трьох сигм" практично буде знаходитись довжина деталі?

Розв'язання. а) Скористаємося формулою (4). В нашому випадку $m=20,\ \ \sigma=0,2,\ \varepsilon=0,3$. Тому

$$P\left(\left|X-20\right|<0,3\right)=2\Phi\left(\frac{0,3}{0,2}\right)=2\Phi\left(1,5\right)=0,8664,$$

оскільки за таблицею $\Phi\left(1,5\right)=0,4332$. Отже, приблизно 87 % всіх деталей, виготовлених на верстаті, будуть мати довжину між 19,7 см і 20,3 см. Інші 13 % деталей матимуть більші відхилення довжини від середнього значення.

б) Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X набуде значення з інтервалу $\left(\alpha,\beta\right)$, знаходиться за формулою

$$P\left(\alpha<X<\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

В нашому випадку $\alpha=20$, $\beta=20,5$, $m=20,\ \ \sigma=0,2$. Тому

$$P\left(20<X<20,5\right)=\Phi\left(\frac{20,5-20}{0,2}\right)-\Phi\left(\frac{20-20}{0,2}\right)=$$
$$=\Phi(2,5)-\Phi(0)=0,4938-0=0,4938.$$

Отже, близько 50 % всіх деталей, виготовлених на верстаті, будуть мати довжину між 20 см і 20,5 см.

в) Розв'яжемо рівняння $P\left(\left|X-20\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,2}\right)=0,95$ або $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,2}\right)=0,475$ відносно ε. За таблицею додатку 3 знаходимо таке значення аргументу $\frac{\varepsilon}{0,2}$, для якого функція $\Phi\left(x\right)$ приймає значення

0,475: маємо $\frac{\varepsilon}{0,2}=1,96$ або $\varepsilon=0,392$. Отже, з ймовірністю 0,95 можна гарантувати, що відхилення довжини деталі від номіналу не перевищують 0,392 см.

г) Правило "трьох сигм" виражається формулою:

$$P\left(m-3\sigma<X<m+3\sigma\right)=0,9973.$$

У нашому випадку $m=20,\ \ \sigma=0,2$. Тому

$$3\sigma=3\cdot 0,2=0,6;$$

$$m-3\sigma=20-0,6=19,4; \qquad m+3\sigma=20+0,6=20,6.$$

Звідси випливає, що подія $\{19,4<X<20,6\}$ є практично вірогідною (можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(19,4,\ \ 20,6)$ з ймовірністю $0,9973$).

Приклад 36. Середній час безвідмовної роботи пристрою 15 год. Знайти ймовірність того, що пристрій пропрацює не менше 20 год, якщо тривалість безвідмовної роботи пристрою має показниковий розподіл.

Розв'язання. Нехай X – час безвідмовної роботи пристрою. За умовою випадкова величина X має показниковий розподіл. Це означає, що її функція розподілу

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\geq 0,\\ 0, & \text{якщо } x<0,\end{cases}$$

де параметр $\lambda>0$.

Для знаходження λ, скористаємося тим, що $M(X)=\frac{1}{\lambda}$. Оскільки за умовою $M(X)=15$, то $\lambda=\frac{1}{15}$.

Знайдемо шукану ймовірність:

$$P(X\geq 20)=1-P(X<20)=1-F(20)=1-\left(1-e^{-\frac{20}{15}}\right)=e^{-\frac{20}{15}}\approx 0,264.$$

Приклад 37. На автоматичну телефонну станцію надходить потік викликів, інтенсивність якого $\lambda=0,8$ (викликів/хв). Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання. Випадкова величина X – (число викликів за 2 хвилини) має розподіл Пуассона з параметром $\lambda t = 0,8 \cdot 2 = 1,6$.

Як відомо, ймовірність $P_t(m)$ того, що за час t відбудеться рівно m подій, знаходиться за формулою Пуассона

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} .$$

Тому маємо:

а) $P_0(2) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} = e^{-1,6} \approx 0,202$; б) $P_1(2) = \frac{(1,6)^1}{1!} e^{-1,6} \approx 0,323$;

в) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - P_0(2) \approx 0,798$.

Приклад 38. Ціна поділки шкали амперметра становить 0,1 А. Покази стрілки заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при визначенні сили струму буде зроблена похибка, що перевищує 0,02 А.

Розв'язання. Положення стрілки можна розглядати як випадкову величину, рівномірно розподілену на відрізку $[a, b]$, де a, b – дві сусідні поділки шкали.

Щільність рівномірного розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

У нашому випадку можемо взяти відрізок $[a, b] = [0,\ 0,1]$ і, отже, $b - a = 0,1$. Тому $f(x) = \frac{1}{0,1} = 10$, $x \hat{\text{I}}\ [0;\ 0,1]$. Очевидно, що помилка перевищуватиме 0,02, якщо відбудеться випадкова подія $\{0,02 < X < 0,08\}$.

За формулою $P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$ матимемо

$$P(0,02 < X < 0,08) = \int\limits_{0,02}^{0,08} 10\, dx = 10x\Big|_{0,02}^{0,08} = 10(0,08 - 0,02) = 0,6 .$$

Дискретний випадковий вектор

Приклад 39. За даним законом розподілу двовимірного дискретного випадкового вектора (X, Y) знайти:

а) закони розподілу компонент X та Y (безумовні);

б) математичні сподівання, дисперсії і коефіцієнт кореляції компонент;

в) умовні закони розподілу величини X при $Y = 2$ і величини Y при $X = 1$;

г) умовні математичні сподівання величини X при $Y = 2$ і величини Y при $X = 1$.

X	Y			
	0	2	7	10
1	0,01	0,04	0,03	0,02
4	0,03	0,2	0,1	0,06
7	0,04	0,13	0,11	0,06
8	0,02	0,06	0,06	0,03

Розв'язання. а) Додаючи ймовірності "по рядках", запишемо закон розподілу випадкової величини X:

X	1	4	7	8
p_i	0,1	0,39	0,34	0,17

Додаючи ймовірності "по стовпчиках", запишемо закон розподілу випадкової величини Y:

Y	0	2	7	10
p_j	0,1	0,43	0,3	0,17

б) Обчислимо числові характеристики випадкової величини X:

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,39 + 7 \cdot 0,34 + 8 \cdot 0,17 = 5,4\ ;$$

$$D(X) = D_x = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - \left[M(X)\right]^2 =$$

$$= 1^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,39 + 7^2 \cdot 0,34 + 8^2 \cdot 0,17 - (5,4)^2 = 4,72.$$

Аналогічно для випадкової величини Y маємо:

$$M(Y) = m_y = \sum_{j=1}^{4} y_j p_j = 0 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,43 + 7 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,17 = 4,66\ ;$$

$$D(Y)=D_y=\sum_{j=1}^{4} y_j{}^2 p_j-\left[M(Y)\right]^2=$$

$$=0^2\cdot 0{,}1+2^2\cdot 0{,}43+7^2\cdot 0{,}3+10^2\cdot 0{,}17-(4{,}66)^2=11{,}70.$$

Коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y знаходиться за формулою

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}},$$

де K_{xy} – коваріація випадкових величин X та Y.

Обчислимо коваріацію:

$$K_{xy}=\sum_i\sum_j\left(x_i-m_x\right)\left(y_j-m_y\right)p_{ij}=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij}-m_x m_y=$$

$$=1\cdot\left(0\cdot 0{,}01+2\cdot 0{,}04+7\cdot 0{,}03+10\cdot 0{,}02\right)+$$

$$+4\cdot\left(0\cdot 0{,}03+2\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}1+10\cdot 0{,}06\right)+$$

$$+7\cdot\left(0\cdot 0{,}04+2\cdot 0{,}13+7\cdot 0{,}11+10\cdot 0{,}06\right)+$$

$$+8\cdot\left(0\cdot 0{,}02+2\cdot 0{,}06+7\cdot 0{,}06+10\cdot 0{,}03\right)-5{,}4\cdot 4{,}66=$$

$$=25{,}42-5{,}4\cdot 4{,}66=0{,}256.$$

Отже, коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y:

$$r_{xy}=\frac{0{,}256}{\sqrt{4{,}72\cdot 11{,}7}}=0{,}03.$$

в) Знайдемо умовні ймовірності можливих значень випадкової величини X за умови, що складова Y набула значення $Y=y_2=2$:

$$p\left(x_1\left|y_2\right.\right)=\frac{p\left(x_1,y_2\right)}{p\left(y_2\right)}=\frac{0{,}04}{0{,}43}=\frac{4}{43},\quad p\left(x_2\left|y_2\right.\right)=\frac{p\left(x_2,y_2\right)}{p\left(y_2\right)}=\frac{0{,}2}{0{,}43}=\frac{20}{43},$$

$$p\left(x_3\left|y_2\right.\right)=\frac{p\left(x_3,y_2\right)}{p\left(y_2\right)}=\frac{0{,}13}{0{,}43}=\frac{13}{43},\quad p\left(x_4\left|y_2\right.\right)=\frac{p\left(x_4,y_2\right)}{p\left(y_2\right)}=\frac{0{,}06}{0{,}43}=\frac{6}{43}.$$

Запишемо шуканий умовний закон розподілу X:

X	1	4	7	8
$p\left(X\left\|y_2\right.\right)$	$\frac{4}{43}$	$\frac{20}{43}$	$\frac{13}{43}$	$\frac{6}{43}$

Аналогічно знаходимо умовний закон розподілу Y при $X=x_1=1$:

Y	0	2	7	10
$p\left(Y\left\|x_1\right.\right)$	0,1	0,4	0,3	0,2

г) Знайдемо умовні математичні сподівання випадкової величини X при $Y=2$ і випадкової величини Y при $X=1$:

$$M[X \mid y_2]=\sum_i x_i p\left(x_i \middle| y_2\right)=1\cdot\frac{4}{43}+4\cdot\frac{20}{43}+7\cdot\frac{13}{43}+8\cdot\frac{6}{43}=5{,}19\,,$$

$$M[Y \mid x_1]=\sum_j y_j p\left(y_j \middle| x_1\right)=0\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}2=4{,}9\,.$$

Математична статистика

Приклад 1. Задано вибірку: 1, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 3, 5, 1, 3, 4, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3. Потрібно:

1) побудувати варіаційний ряд;
2) побудувати статистичний розподіл вибірки;
3) побудувати полігон відносних частот;
4) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Побудуємо варіаційний ряд

1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5.

2) Порахуємо частоти з якими варіанти x_i входять у вибірку та запишемо статистичний розподіл вибірки:

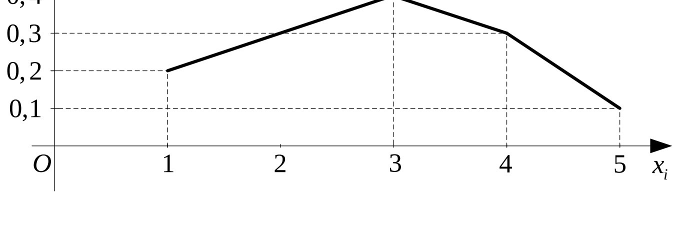
x_i	1	3	4	5
n_i	4	8	6	2

3) Знайдемо відносні частоти. Оскільки об'єм вибірки $n = 4+8+6+2 = 20$, то $w_1 = \frac{4}{20} = 0,2$; $w_2 = \frac{8}{20} = 0,4$; $w_3 = \frac{6}{20} = 0,3$; $w_4 = \frac{2}{20} = 0,1$.

Отже розподіл відносних частот має вигляд:

x_i	1	3	4	5
w_i	0,2	0,4	0,3	0,1

На площині $(x; w)$ зобразимо точки з координатами (1;0,2), (3;0,4), (4;0,3), (5;0,1) та з'єднаємо їх відрізками. Отримаємо шуканий полігон відносних частот.



4) Емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ знаходимо за формулою:

$F^*(x)=\dfrac{n_x}{n}$; $x\in(-\infty,+\infty)$, де n – об'єм вибірки ; n_x – число варіант, які менші x. В даній задачі $n=20$.

При $x\le 1$ $n_x=0$, оскільки найменша варіанта $x_1=1$. Тому $F^*(x)=0$, при $x\le 1$.

При $1<x\le 3$ лише варіанта $x_1=1<x$, причому $n_x=4$. Тому $F^*(x)=\dfrac{4}{20}=0,2$, при $1<x\le 3$.

При $3<x\le 4$ варіанти $x_1=1$ та $x_2=3$ менші x, причому $n_x=4+8=12$. Тому $F^*(x)=\dfrac{12}{20}=0,6$ при $3<x\le 4$.

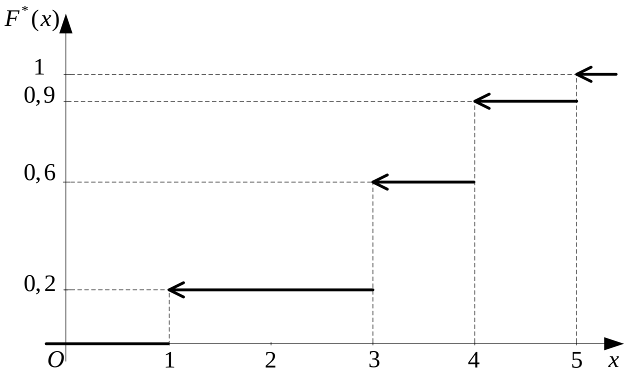
При $4<x\le 5$ варіанти $x_1=1$, $x_2=3$ та $x_3=4$ менші x, причому $n_x=4+8+6=18$. Тому $F^*(x)=\dfrac{18}{20}=0,9$ при $4<x\le 5$.

При $x>5$ $n_x=20$ і отже $F^*(x)=1$.

Таким чином емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0,2, & 1<x\le 3\\ 0,6, & 3<x\le 4\\ 0,9, & 4<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}.$$

Будуємо графік цієї функції.



Приклад 2. Дано інтервальний варіаційний ряд

a_{i-1} - a_i	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
n_i	7	10	20	8	5

Побудувати гістограму відносних частот.

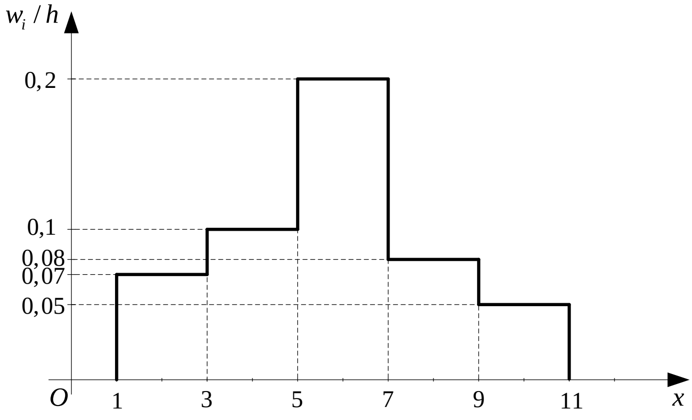
Розв'язання. Об'єм вибірки $n = 7 + 10 + 20 + 8 + 5 = 50$, довжина часткового інтервалу h =2.

Знаходимо щільності відносних частот w_i за формулою $\dfrac{w_i}{h} = \dfrac{n_i}{n \cdot h}$:

$$\frac{w_1}{h} = \frac{7}{50 \cdot 2} = 0{,}07; \quad \frac{w_2}{h} = \frac{10}{50 \cdot 2} = 0{,}1; \quad \frac{w_3}{h} = \frac{20}{50 \cdot 2} = 0{,}2;$$

$$\frac{w_4}{h} = \frac{8}{50 \cdot 2} = 0{,}08; \quad \frac{w_5}{h} = \frac{5}{50 \cdot 2} = 0{,}05.$$

Відкладемо на осі абсцис часткові інтервали $a_{i-1} - a_i$ і проведемо над цими інтервалами відрізки, які паралельні осі абсцис і знаходяться від неї на відстанях рівних відповідно w_i / h. Отримаємо шукану гістограму відносних частот.



Приклад 3.

1) Задано статистичний розподіл вибірки

x_i	1	2	5	6
n_i	2	3	4	1

Знайти вибіркове середнє $\bar{x}$, вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$, виправлену вибіркову дисперсію s^2 і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$.

2) Задано інтервальний варіаційний ряд

a_{i-1} - a_i	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12
n_i	42	73	154	205	26

Знайти вибіркове середнє $\overline{x}$ та вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$.

Розв'язання. 1) Об'єм вибірки $n = 2+3+4+1 = 10$.

Вибіркове середнє $\overline{x}$ знаходимо за формулою

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i .$$

Отримаємо: $\overline{x} = \frac{1}{10}\left(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 1\right) = 3{,}4$.

Вибіркову дисперсію знаходимо за формулою

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \left(\overline{x}\right)^2 .$$

Отримаємо: $\sigma_в^2 = \frac{1}{10}\left(1^2\cdot 2 + 2^2\cdot 3 + 5^2\cdot 4 + 6^2\cdot 1\right) - \left(3,4\right)^2 = 3,44$.

Знаходимо s^2 та $\sigma_в$: $s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_в^2 = \frac{10}{9}\cdot 3,44 \approx 3,82$,

$$\sigma_в = \sqrt{\sigma_в^2} = \sqrt{3,44} \approx 1,85 .$$

2) Знаходимо середини часткових інтервалів: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 9$, $x_5 = 11$. Аналогічно попередньому отримаємо:

$$\overline{x} = \frac{1}{500}\left(3\cdot 42 + 5\cdot 73 + 7\cdot 154 + 9\cdot 205 + 11\cdot 26\right) = 7,4\,;$$

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{500}\left(3^2\cdot 42 + 5^2\cdot 73 + 7^2\cdot 154 + 9^2\cdot 205 + 11^2\cdot 26\right) - \left(7,4\right)^2 = 4,24 .$$

Приклад 4. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0,99$ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності *X*, якщо $\sigma = 2$, $\overline{x} = 15,35$ і $n = 16$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд

$$\overline{x} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (5)$$

де t_γ – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, при якому $\Phi(t_\gamma)=\frac{\gamma}{2}$.

Знаходимо t_γ зі співвідношення $\Phi\left(t_\gamma\right)=\frac{0,99}{2}=0,495$: за таблицею значень функції Лапласа (додаток 3) маємо $t_\gamma=2,58$.

Підставляючи $\sigma=2$, $\overline{x}=15,35$, $n=16$, $t_\gamma=2,58$ в (5), отримаємо надійний інтервал: $14,06<a<16,64$.

Приклад 5. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma=0,99$ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності *X*, якщо $\overline{x}=15,35$, $s=2$ і $n=16$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд

$$\overline{x}-t\frac{s}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t\frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad (6)$$

де $t=t\left(\gamma,n\right)$ знаходиться за таблицею додатку 4.

У нашому випадку за таблицею додатку 4 маємо $t=t\left(0,99,16\right)=2,95$.

Підставляючи $s=2$, $\overline{x}=15,35$, $n=16$, $t_\gamma=2,95$ в (6), отримаємо надійний інтервал: $13,88<a<16,83$.

Приклад 6. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma=0,95$ невідомого середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої генеральної сукупності *X*, якщо $s=0,7$ і $n=20$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд:

$$\begin{aligned} &s(1-q)<\sigma<s(1+q), \text{ якщо } q<1; \\ &0<\sigma<s(1+q), \qquad \text{ якщо } q\geq 1, \end{aligned} \qquad (7)$$

де $q=q(\gamma,n)$ знаходиться за таблицею додатку 5 за заданими γ і n.

При $\gamma=0,95$ і $n=20$ за таблицею знаходимо $q=0,37$.

Підставляючи $q=0,37$, $s=0,7$, $n=20$ в (7), отримаємо надійний інтервал: $0,441<\sigma<0,959$.

Приклад 7. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії $y=ax+b$ за даними шести спостережень $(x_i;\,y_i)$: (1,5;1,3), (2;2), (3;2,1), (3,5;2,7), (4,5;2,6), (5;3,3). Зробити рисунок, на якому вказати експериментальні дані та побудувати пряму регресії.

Розв'язання. Невідомі параметри регресії a і b знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \tag{8}$$

З умови задачі знаходимо: $n=6$,

$$\sum_{i=1}^{6}x_i=1,5+2+3+3,5+4,5+5=19,5,$$

$$\sum_{i=1}^{6}y_i=1,3+2+2,1+2,7+2,6+3,3=14,$$

$$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=1,5^2+2^2+3^2+3,5^2+4,5^2+5^2=72,75,$$

$$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=1,5\cdot1,3+2\cdot2+3\cdot2,1+3,5\cdot2,7+4,5\cdot2,6+5\cdot3,3=49,9.$$

Підставляючи в (8), одержимо систему рівнянь

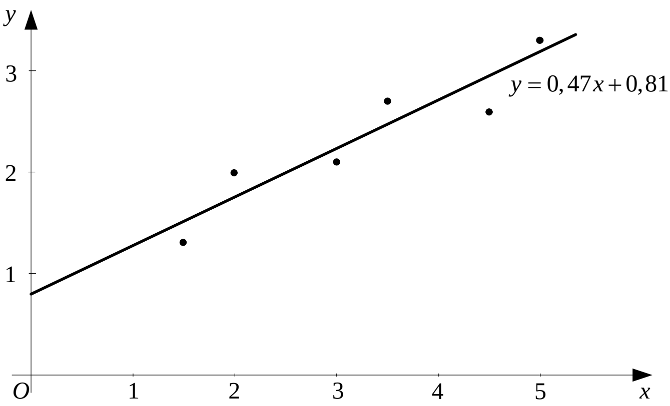
$$\begin{cases} 72,75a+19,5b=49,9; \\ 19,5a+6b=14. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо $a\approx0,47$ і $b\approx0,81$.

Запишемо шукане рівняння прямої регресії:

$$y=0,47x+0,81.$$

Зробимо рисунок, на якому вкажемо експериментальні дані та побудуємо пряму регресії.



Приклад 8. За даними прикладу 7 знайти вибірковий коефіцієнт кореляції.

Розв'язання. Вибірковий коефіцієнт кореляції обчислюється за формулою

$$r_в = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (9)$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ – вибіркові середні (n – об'єм вибірки); $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2}$, $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\overline{y})^2}$ – вибіркові середні квадратичні відхилення; $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Використовуючи результати попереднього прикладу

$$n = 6, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = 19,5, \quad \sum_{i=1}^{6} y_i = 14, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 72,75, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 49,9,$$

знаходимо:

$$\overline{x} = \frac{1}{6}\cdot 19,5 = 3,25, \quad \overline{y} = \frac{1}{6}\cdot 14 = 2,33;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{6}\cdot 72,75 - (3,25)^2} = 1,25,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{6}\left(1,3^2+2^2+2,1^2+2,7^2+2,6^2+3,3^2\right)-\left(2,33\right)^2} = 0,64\,;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{6}\times 49,9 = 8,32\,.$$

За формулою (9) знаходимо $r_в$:

$$r_в = \frac{8,32 - 3,25\times 2,33}{1,25\times 0,64} = 0,93\,.$$

Приклад 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X зі статистичними даними, які подані у вигляді інтервального варіаційного ряду (в першому рядку вказано часткові інтервали a_{i-1} - a_i , в другому – відповідні частоти n_i).

$\alpha = 0,05$

a_{i-1} - a_i	–20-(–10)	–10-0	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
n_i	20	47	80	89	40	16	8

Розв’язання. Знайдемо середини часткових інтервалів $x_i = \dfrac{a_{i-1}+a_i}{2}$ та складемо таблицю

x_i	–15	–5	5	15	25	35	45
n_i	20	47	80	89	40	16	8

Обчислимо вибіркове середнє $\bar{x}$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$ (див. приклад 3 на стор. 108–109):
об’єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 20+47+80+89+40+16+8 = 300\,;$$

вибіркове середнє

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i =$$

$$= \frac{1}{300}\left(\left(-15\right)\cdot 20+\left(-5\right)\cdot 47+5\cdot 80+15\cdot 89+25\cdot 40+35\cdot 16+45\cdot 8\right) = 10,40\,;$$

вибіркова дисперсія

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \left(\overline{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{300}\left((-15)^2 \cdot 20 + (-5)^2 \cdot 47 + 5^2 \cdot 80 + 15^2 \cdot 89 + 25^2 \cdot 40 + 35^2 \cdot 16 + 45^2 \cdot 8\right) -$$

$$-\left(10,40\right)^2 = 186,87;$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_в = \sqrt{\sigma_в^2} = \sqrt{186,87} = 13,67\,.$$

Перейдемо від інтервалів $\left(a_{i-1},\, a_i\right)$ до інтервалів $\left(z_{i-1},\, z_i\right)$ за формулами: $z_{i-1} = \left(a_{i-1} - \overline{x}\right)/\sigma_в$; $z_i = \left(a_i - \overline{x}\right)/\sigma_в$, причому найменше значення z_0 покладемо рівним $-\infty$, а найбільше значення z_k покладемо рівним $+\infty$.

Обчислимо теоретичні ймовірності p_i потрапляння випадкової величини X в інтервали $\left(a_{i-1},\, a_i\right)$ за формулою $p_i = \Phi\left(z_i\right) - \Phi\left(z_{i-1}\right)$, де $\Phi\left(x\right)$ – функція Лапласа, та теоретичні частоти $n_i' = np_i$ (тут $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 300$ – об'єм вибірки). Для цього заповнимо розрахункову таблицю $\left(\Phi(-\infty) = -0,5;\ \Phi(+\infty) = 0,5\right)$:

i	$\left(z_{i-1}; z_i\right)$	$\Phi\left(z_{i-1}\right)$	$\Phi\left(z_i\right)$	p_i	$n_i' = 300\,p_i$
1	$\left(-\infty; -1,49\right)$	–0,5000	–0,4319	0,0681	20,43
2	$\left(-1,49; -0,76\right)$	–0,4319	–0,2764	0,1555	46,65
3	$\left(-0,76; -0,03\right)$	–0,2764	–0,0120	0,2644	79,32
4	$\left(-0,03; 0,70\right)$	–0,0120	0,2580	0,2700	81,00
5	$\left(0,70; 1,43\right)$	0,2580	0,4236	0,1656	49,68
6	$\left(1,43; 2,16\right)$	0,4236	0,4846	0,0610	18,30
7	$\left(2,16; +\infty\right)$	0,4846	0,5000	0,0154	4,62
				$\sum p_i = 1$	$\sum n_i' = 300$

Обчислимо вибіркове значення критерію $\chi_в^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$. Для цього заповнимо наступну розрахункову таблицю:

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	20	20,43	–0,43	0,1849	0,0091
2	47	46,65	0,35	0,1225	0,0026
3	80	79,32	0,68	0,4624	0,0058
4	89	81,00	8,00	64,0000	0,7901
5	40	49,68	–9,68	93,7024	1,8861
6	16	18,30	–2,30	5,2900	0,2891
7	8	4,62	3,38	11,4244	2,4728
			$\sum(n_i - n_i') = 0$		$\chi_в^2 = 5,46$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток 6) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ та числі ступенів свободи $r = k - 3 = 7 - 3 = 4$ знаходимо критичну точку $\chi_{кр}^2 = \chi_{кр}^2(0,05;\,4) = 9,5$.

Оскільки $\chi_в^2 < \chi_{кр}^2$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу. Отже, статистичні дані узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Випадкові процеси

Реалізації і перерізи випадкових процесів

Приклад 1. Дано випадковий процес $X(t)=\cos\pi t+U\sin\pi t$, де U – випадкова величина з рівномірним розподілом на відрізку $[-2,2]$. Записати три довільні реалізації цього процесу і знайти його перерізи в моменти часу $t=\frac{1}{4}$ і $t=1$.

Розв'язання. Випадкова величина U може набути будь-якого значення з відрізка $[-2,2]$, наприклад $u_1=-1$, $u_2=0$, $u_3=1$. Відповідними реалізаціями процесу будуть:

$$x_1(t)=\cos\pi t-\sin\pi t,\ x_2(t)=\cos\pi t,\ x_3(t)=\cos\pi t+\sin\pi t.$$

При $t=\frac{1}{4}$ отримаємо переріз – випадкову величину

$$X\left(\frac{1}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+U\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+U\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+U).$$

Аналогічно при $t=1$:

$$X(1)=\cos\pi+U\sin\pi=-1-U0=-1,$$

тобто у момент часу $t=1$ переріз – невипадкова (стала) величина.

Розподіли випадкових процесів

Приклад 2. Випадковий процес задано формулою $X(t)=Ut+Vt^2$, де U та V – незалежні нормально розподілені випадкові величини з числовими характеристиками $m_U=3$, $\sigma_U=2$, $m_V=0$, $\sigma_V=1$. Знайти одновимірну щільність та одновимірну функцію розподілу процесу $X(t)$. Обчислити ймовірність того, що при $t=2$ процес $X(t)$ набуде значення: а) менше ніж 7; б) більше ніж 4.

Розв'язання. Випадкові величини Ut і Vt^2 мають нормальний розподіл з параметрами:

$$M(Ut)=tM(U)=3t,\ D(Ut)=t^2D(U)=2^2t^2=4t^2;$$

$$M\left(Vt^2\right)=t^2M(V)=0,\ D\left(Vt^2\right)=\left(t^2\right)^2D(V)=t^4.$$

Сума $Ut+Vt^2$ незалежних нормально розподілених випадкових величин також має нормальний розподіл з математичним сподіванням

$$m = M\left(Ut\right) + M\left(Vt^2\right) = 3t + 0 = 3t$$

і дисперсією

$$\sigma^2 = D\left(Ut\right) + D\left(Vt^2\right) = 4t^2 + t^4 .$$

Тому одновимірна щільність розподілу процесу $X\left(t\right)$ має вигляд

$$f_t\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(4t^2+t^4\right)}} e^{-\frac{(x-3t)^2}{2\left(4t^2+t^4\right)}} .$$

Запишемо одновимірну функцію розподілу процесу $X\left(t\right)$, виражаючи її через функцію Лапласа $\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$:

$$F_t\left(x\right) = P\left(X\left(t\right) < x\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-3t}{\sqrt{4t^2+t^4}}\right).$$

Знаючи функцію розподілу, обчислимо $P\left(X\left(2\right) < 7\right)$ та $P\left(X\left(2\right) > 4\right)$, використовуючи додаток 3:

$$P\left(X\left(2\right) < 7\right) = F_2\left(7\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{7-3\cdot 2}{\sqrt{4\cdot 2^2+2^4}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right) \approx$$

$$\approx 0,5 + \Phi\left(0,18\right) \approx 0,5 + 0,071 = 0,571.$$

$$P\left(X\left(2\right) > 4\right) = 1 - P\left(X\left(2\right) \le 4\right) = 1 - F_2\left(4\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{4\cdot 2^2+2^4}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{-2}{\sqrt{32}}\right) \approx 0,5 + \Phi\left(0,35\right) \approx 0,5 + 0,137 = 0,637 .$$

Приклад 3. Випадковий процес задано формулою $X\left(t\right) = U\left(t+1\right) + 2 \quad \left(t \ge 0\right)$, де U – випадкова величина, яка має функцію розподілу

$$F_U\left(u\right) = \begin{cases} 0, & u \le 0, \\ \frac{u^2}{4}, & 0 < u \le 2, \\ 1, & u > 2. \end{cases}$$

Знайти одновимірну щільність і одновимірну функцію розподілу процесу $X(t)$. Обчислити ймовірність того що при $t=3$ значення $X(t)$ буде належати інтервалу $(5,15)$.

Розв'язання. Знайдемо одновимірну функцію розподілу:

$$F_t(x)=P\big(X(t)<x\big)=P\big(U(t+1)+2<x\big)=P\big(U(t+1)<x-2\big)=$$

$$=P\left(U<\frac{x-2}{t+1}\right)=F_U\left(\frac{x-2}{t+1}\right)=\begin{cases}0, & \dfrac{x-2}{t+1}\le 0,\\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x-2}{t+1}\right)^2, & 0<\dfrac{x-2}{t+1}\le 2,\\ 1, & \dfrac{x-2}{t+1}>2.\end{cases}$$

Одновимірну щільність розподілу знайдемо за формулою $f_t(x)=\dfrac{dF_t(x)}{dx}$:

$$f_t(x)=\begin{cases}0, & \dfrac{x-2}{t+1}\le 0,\\ \dfrac{x-2}{2(t+1)^2}, & 0<\dfrac{x-2}{t+1}\le 2,\\ 0, & \dfrac{x-2}{t+1}>2.\end{cases}$$

Ймовірність $P\big(5<X(3)<15\big)$ обчислимо за допомогою знайденої функції розподілу:

$$P\big(5<X(3)<15\big)=P\big(X(3)<15\big)-P\big(X(3)<5\big)=F_3(15)-F_3(5).$$

Обчислимо $F_3(15)$ та $F_3(5)$. При $x=15$, $t=3$

$$\frac{x-2}{t+1}=\frac{15-2}{3+1}=\frac{13}{4}=3,25>2\text{, тому } F_3(15)=1.$$

Якщо $x=5$, $t=3$, то

$$\frac{x-2}{t+1}=\frac{5-2}{3+1}=\frac{3}{4}=0,75\text{, тому } F_3(5)=\frac{1}{4}\cdot 0,75^2\approx 0,141.$$

Отже, $P\big(5<X(3)<15\big)\approx 1-0,141=0,859.$

Характеристики випадкових процесів

Приклад 4. Дано випадковий процес $X(t)=3+Ut+V\sin t$, де U та V – випадкові величини з відомими числовими характеристиками: $m_U=2$, $m_V=-6$, $D_U=2$, $D_V=3$, $K_{UV}=-1$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію цього випадкового процесу.

Розв'язання. Використаємо властивості випадкових величин, врахувавши, що t і $\sin t$ – невипадкові функції.

$$m_x(t)=M(3+Ut+V\sin t)=3+M(U)t+M(V)\sin t=3+2t-6\sin t.$$

Далі знаходимо кореляційну функцію $K_X(t_1,t_2)=M\left(X_0(t_1)X_0(t_2)\right)$. Відповідний центрований процес має вигляд

$$X_0(t)=X(t)-m_X(t)=3+Ut+V\sin t-\left(3+M(U)t+M(V)\sin t\right)=$$

$$=(U-m_U)t+(V-m_V)\sin t=U_0t+V_0\sin t.$$

Тоді

$$K_X(t_1,t_2)=M\left((U_0t_1+V_0\sin t_1)(U_0t_2+V_0\sin t_2)\right)=$$

$$=M\left((U_0)^2t_1t_2+U_0V_0t_1\sin t_2+V_0U_0t_2\sin t_1+(V_0)^2\sin t_1\sin t_2\right)=$$

$$=M\left((U_0)^2\right)t_1t_2+M(U_0V_0)(t_1\sin t_2+t_2\sin t_1)+M\left((V_0)^2\right)\sin t_1\sin t_2.$$

Враховуючи, що

$$M\left((U_0)^2\right)=D_U=2,\ M\left((V_0)^2\right)=D_V=3,\ M(U_0V_0)=K_{UV}=-1,$$

отримаємо

$$K_X(t_1,t_2)=2t_1t_2-(t_1\sin t_2+t_2\sin t_1)+3\sin t_1\sin t_2.$$

Дисперсію знайдемо за кореляційною функцією $D_X(t)=K_X(t,t)$:

$$D_X(t)=2t^2-2t\sin t+3\sin^2 t.$$

Приклад 5 Знайти взаємні кореляційні функції $K_{XY}(t_1,t_2)$ та $K_{YX}(t_1,t_2)$ випадкових процесів $X(t)=U\cos 2t+V\sin 2t$ та $Y(t)=U\cos t+V\sin t$, якщо $D_U=3$, $D_V=3$, $K_{UV}=2$.

Розв'язання. Нехай m_U, m_V – математичні сподівання величин U та V. Тоді

$$m_X(t)=m_U\cos 2t+m_V\sin 2t,\ m_Y(t)=m_U\cos t+m_V\sin t,$$

$$X_0(t) = X(t) - m_X(t) = U\cos 2t + V\sin 2t - (m_U \cos 2t + m_V \sin 2t) =$$
$$= (U - m_U)\cos 2t + (V - m_V)\sin 2t = U_0 \cos 2t + V_0 \sin 2t .$$
Аналогічно
$$Y_0(t) = U_0 \cos t + V_0 \sin t .$$
Використаємо означення взаємної кореляційної функції:
$$K_{XY}(t_1, t_2) = M\left(X_0(t_1) Y_0(t_2)\right) =$$
$$= M\left((U_0 \cos 2t_1 + V_0 \sin 2t_1)(U_0 \cos t_2 + V_0 \sin t_2)\right) =$$
$$= M\Big((U_0)^2 \cos 2t_1 \cos t_2 + U_0 V_0 \cos 2t_1 \sin t_2 +$$
$$+ V_0 U_0 \sin 2t_1 \cos t_2 + (V_0)^2 \sin 2t_1 \sin t_2\Big) =$$
$$= D_U \cos 2t_1 \cos t_2 + K_{UV} \cos 2t_1 \sin t_2 + K_{UV} \sin 2t_1 \cos t_2 + D_U \sin 2t_1 \sin t_2 =$$
$$= 3(\cos 2t_1 \cos t_2 + \sin 2t_1 \sin t_2) + 2(\cos 2t_1 \sin t_2 + \sin 2t_1 \cos t_2) .$$
Застосувавши відомі тригонометричні формули, отримаємо
$$K_{XY}(t_1, t_2) = 3\cos(2t_1 - t_2) + 2\sin(2t_1 + t_2).$$
Функцію $K_{YX}(t_1, t_2)$ знайдемо за допомогою властивості $K_{YX}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_2, t_1)$:
$$K_{YX}(t_1, t_2) = 3\cos(2t_2 - t_1) + 2\sin(2t_2 + t_1) .$$

Властивості характеристик випадкових процесів

Приклад 6. Дано математичне сподівання $m_X(t) = 6\cos 2t + \sin 2t$ та кореляційну функцію $K_X(t_1, t_2) = 1 + t_1^2 t_2^2$ випадкового процесу $X(t)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію випадкового процесу $Y(t) = \sin 2t\, X(t) + \cos^2 2t$.

Розв’язання. Якщо $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ – невипадкові функції, то характеристики процесу $Y(t) = \varphi(t) X(t) + \psi(t)$ виражаються через характеристики процесу $X(t)$ наступним чином:
$$m_Y(t) = \varphi(t) m_X(t) + \psi(t), \quad K_Y(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2) K_X(t_1, t_2) .$$
Використовуючи ці властивості, отримаємо
$$m_Y(t) = \sin 2t(6\cos 2t + \sin 2t) + \cos^2 2t =$$
$$= 6\sin 2t \cos 2t + \sin^2 2t + \cos^2 2t = 3\sin 4t + 1,$$

$$K_Y\left(t_1,t_2\right)=\sin 2t_1 \sin 2t_1 \left(1+t_1^2 t_2^2\right).$$

Дисперсію процесу $Y\left(t\right)$ знаходимо за формулою $D_Y\left(t\right)=K_Y\left(t,t\right)$:

$$D_Y\left(t\right)=\sin^2 2t\left(1+t^4\right).$$

Характеристики похідної випадкового процесу

Приклад 7. Дано кореляційну функцію випадкового процесу $X\left(t\right)$: $K_X\left(t_1,t_2\right)=t_1^2 t_2^2+4e^{-2t_1-2t_2}$. Знайти взаємні кореляційні функції $K_{X'X}\left(t_1,t_2\right)$ та $K_{XX'}\left(t_1,t_2\right)$ процесу $X\left(t\right)$ та його похідної $Y\left(t\right)=X'\left(t\right)$.

Розв'язання. Відомо, що

$$K_{X'X}\left(t_1,t_2\right)=\frac{\partial K_X\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_1},\quad K_{XX'}\left(t_1,t_2\right)=\frac{\partial K_X\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_2}.$$

Знаходимо

$$K_{X'X}\left(t_1,t_2\right)=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(t_1^2 t_2^2+4e^{-2t_1-2t_2}\right)=2t_1 t_2^2-8e^{-2t_1-2t_2}.$$

Взаємну кореляційну функцію $K_{XX'}\left(t_1,t_2\right)$ можна знайти також за властивістю $K_{YX}\left(t_1,t_2\right)=K_{XY}\left(t_2,t_1\right)$:

$$K_{X'X}\left(t_1,t_2\right)=K_{XX'}\left(t_2,t_1\right)=2t_1^2 t_2-8e^{-2t_1-2t_2}.$$

Приклад 8. Дано математичне сподівання $m_X\left(t\right)=2t^2+3\cos 2t$ та кореляційну функцію $K_X\left(t_1,t_2\right)=1+t_1 t_2 \sin 2t_1 \sin 2t_2$ випадкового процесу $X\left(t\right)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію похідної $Y\left(t\right)=X'\left(t\right)$.

Розв'язання. Характеристики похідної $X'\left(t\right)$ випадкового процесу $X\left(t\right)$ знаходяться за формулами

$$m_{X'}\left(t\right)=\left(m_X\left(t\right)\right)',\quad K_{X'}\left(t_1,t_2\right)=\frac{\partial^2 K_X\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Отже,

$$m_{X'}\left(t\right)=\left(2t^2+3\cos 2t\right)'=4t-6\sin 2t,$$

$$K_{X'}\left(t_1,t_2\right)=\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(1+t_1 t_2 \sin 2t_1 \sin 2t_2\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_2}t_1t_2\sin 2t_1\sin 2t_2\right)=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(t_1\sin 2t_1\frac{\partial}{\partial t_2}t_2\sin 2t_2\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(t_1\sin 2t_1\left(\sin 2t_2+2t_2\cos 2t_2\right)\right)=\left(\sin 2t_2+2t_2\cos 2t_2\right)\frac{\partial}{\partial t_1}t_1\sin 2t_1=$$

$$=\left(\sin 2t_1+2t_1\cos 2t_1\right)\left(\sin 2t_2+2t_2\cos 2t_2\right).$$

Дисперсію знаходимо за відомою кореляційною функцією:

$$D_{X'}(t)=K_{X'}(t,t)=\left(\sin 2t+2t\cos 2t\right)^2.$$

Характеристики інтеграла від випадкового процесу

Приклад 9. Дано кореляційну функцію випадкового процесу $X(t)$: $K_X(t_1,t_2)=1+4t_1t_2e^{-2t_1-2t_2}$. Знайти взаємні кореляційні функції $K_{XY}(t_1,t_2)$ та $K_{YX}(t_1,t_2)$ процесу $X(t)$ та його інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Розв'язання. Взаємні кореляційні функції процесу $X(t)$ та його інтеграла знаходяться за формулами

$$K_{XY}(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_2}K_X(t_1,s_2)\,ds_2,\quad K_{YX}(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_1}K_X(s_1,t_2)\,ds_1.$$

Знаходимо

$$K_{XY}(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_2}\left(1+4t_1s_2e^{-2t_1-2s_2}\right)ds_2=s_2\Big|_0^{t_2}+4t_1e^{-2t_1}\int\limits_0^{t_2}s_2e^{-2s_2}\,ds_2.$$

Застосуємо інтегрування частинами

$$\int\limits_0^{t_2}s_2e^{-2s_2}\,ds_2=\left|u=s_2,\ dv=e^{-2s_2}ds_2,\ du=ds_2,\ v=\frac{e^{-2s_2}}{-2}\right|=$$

$$=\left(s_2\frac{e^{-2s_2}}{-2}\right)\Bigg|_0^{t_2}-\int\limits_0^{t_2}\frac{e^{-2s_2}}{-2}ds_2=-t_2\frac{e^{-2t_2}}{2}-\frac{e^{-2s_2}}{4}\Bigg|_0^{t_2}=-t_2\frac{e^{-2t_2}}{2}-\frac{e^{-2t_2}-1}{4}.$$

$$K_{XY}(t_1,t_2)=t_2+4t_1e^{-2t_1}\left(-t_2\frac{e^{-2t_2}}{2}-\frac{e^{-2t_2}-1}{4}\right)=$$

$$=t_2-2t_1t_2e^{-2t_1-2t_2}-t_1e^{-2t_1-2t_2}+t_1e^{-2t_1}.$$

Взаємну кореляційну функцію $K_{YX}(t_1,t_2)$ знайдемо, використовуючи властивість $K_{YX}(t_1,t_2)=K_{XY}(t_2,t_1)$:

$$K_{YX}(t_1,t_2)=t_1-2t_1t_2e^{-2t_1-2t_2}-t_2e^{-2t_1-2t_2}+t_2e^{-2t_2}.$$

Приклад 10. Відомі характеристики випадкового процесу $X(t)$: $m_X(t)=6t+4\sin 2t$, $K_X(t_1,t_2)=4t_1t_2+12e^{-2t_1-2t_2}$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$.

Розв'язання. Характеристики інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds$ знаходяться наступним чином:

$$m_Y(t)=\int\limits_0^t m_X(s)\,ds,\quad K_Y(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_1}\left(\int\limits_0^{t_2}K_X(s_1,s_2)\,ds_2\right)ds_1.$$

Тому

$$m_Y(t)=\int\limits_0^t(6s+4\sin 2s)\,ds=\left(3s^2-2\cos 2s\right)\Big|_0^t=$$
$$=3t^2-2\cos 2t-(0-2\cos 0)=3t^2-2\cos 2t+2.$$

Знайдемо внутрішній інтеграл у формулі для $K_Y(t_1,t_2)$:

$$\int\limits_0^{t_2}K_X(s_1,s_2)\,ds_2=\int\limits_0^{t_2}\left(4s_1s_2+12e^{-2s_1-2s_2}\right)ds_2=4s_1\int\limits_0^{t_2}s_2\,ds_2+$$
$$+12e^{-2s_1}\int\limits_0^{t_2}e^{-2s_2}\,ds_2=4s_1\left.\frac{s_2^2}{2}\right|_{s_2=0}^{s_2=t_2}+12e^{-2s_1}\left.\frac{e^{-2s_2}}{-2}\right|_{s_2=0}^{s_2=t_2}=$$
$$=2s_1t_2^2-6e^{-2s_1}\left(e^{-2t_2}-1\right)=2s_1t_2^2-6e^{-2s_1}\left(e^{-2t_2}-1\right).$$

Далі шукаємо $K_Y(t_1,t_2)$:

$$K_Y(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_1}\left(2s_1t_2^2-6e^{-2s_1}\left(e^{-2t_2}-1\right)\right)ds_1=2t_2^2\int\limits_0^{t_1}s_1\,ds_1-6\left(e^{-2t_2}-1\right)\int\limits_0^{t_1}e^{-2s_1}\,ds_1=$$
$$=2t_2^2\left.\frac{s_1^2}{2}\right|_{s_1=0}^{s_1=t_1}-6\left(e^{-2t_1}-1\right)\left.\frac{e^{-2s_1}}{-2}\right|_{s_1=0}^{s_1=t_1}=t_1^2t_2^2+3\left(e^{-2t_1}-1\right)\left(e^{-2t_2}-1\right).$$

Знаючи кореляційну функцію, знаходимо дисперсію:

$$D_Y(t)=K_Y(t,t)=t^4+3\left(e^{-2t}-1\right)^2.$$

Стаціонарні випадкові процеси

Приклад 11. Дано випадковий процес $X(t)=5+U\sin 3t+V\sin 3t$, де U та V – незалежні випадкові величини з математичними сподіваннями $m_U=m_V=0$ і дисперсіями $D_U=D_V=2$. Перевірити, чи є цей процес стаціонарним в широкому смислі.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання і кореляційну функцію цього процесу.

$$M\left(X(t)\right)=M\left(5+U\sin 3t+V\sin 3t\right)=$$

$$=5+M(U)\sin 3t+M(V)\cos 3t=5.$$

Центрований процес

$$X_0(t)=X(t)-m_X(t)=U\sin 3t+V\cos 3t.$$

За означенням кореляційної функції

$$K_X(t_1,t_2)=M\left(X_0(t_1)X_0(t_2)\right)=$$

$$=M\left(\left(U_0\sin 3t_1+V_0\cos 3t_1\right)\left(U_0\sin 3t_2+V_0\cos 3t_2\right)\right)=$$

$$=M\left(\left(U_0\right)^2\sin 3t_1\sin 3t_2+U_0V_0\sin 3t_1\cos 3t_2+\right.$$

$$\left.+V_0U_0\cos 3t_1\sin 3t_2+\left(V_0\right)^2\cos 3t_1\cos 3t_2\right)=$$

$$=D_U\sin 3t_1\sin 3t_2+K_{UV}\left(\sin 3t_1\cos 3t_2+\cos 3t_1\sin 3t_2\right)+D_V\cos 3t_1\cos 3t_2.$$

За умовою U та V незалежні, тому $K_{UV}=0$ і

$$K_X(t_1,t_2)=2\left(\sin 3t_1\sin 3t_2+\cos 3t_1\cos 3t_2\right)=2\cos\left(3t_1-3t_2\right),$$

або

$$k_X(\tau)=2\cos 3\tau,\ \text{де}\ \tau=t_2-t_1.$$

Таким чином, математичне сподівання випадкового процесу є сталою величиною, а кореляційна функція залежить лише від різниці аргументів. Згідно з означенням, даний випадковий процес є стаціонарним в широкому смислі.

Приклад 12. Дано кореляційну функцію $k(\tau)=4e^{-3|\tau|}\left(1-2|\tau|\right)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$. Знайти спектральну щільність $S(\omega)$ цього процесу.

Розв'язання. Спектральну щільність знаходимо за формулами

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau\,,\ S(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}k(\tau)\cos\omega\tau d\tau\,,$$

$$S(\omega)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_{0}^{+\infty}k(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\,,$$

де Re означає дійсну частину комплекснозначної функції. В даній задачі доцільно використати останню з наведених формул.

$$S(\omega)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_{0}^{+\infty}4e^{-3|\tau|}\left(1-2|\tau|\right)e^{-i\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{4}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-3\tau}\left(1-2\tau\right)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{4}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(1-2\tau\right)e^{(-3-i\omega)\tau}d\tau=$$

$$=\left|\ u=1-2\tau,\ dv=e^{(-3-i\omega)\tau}d\tau,\ du=-2d\tau,\ v=\frac{e^{(-3-i\omega)\tau}}{-3-i\omega}\ \right|=$$

$$=\frac{4}{\pi}\mathrm{Re}\left(\left(1-2\tau\right)\frac{e^{(-3-i\omega)\tau}}{-3-i\omega}\Bigg|_{0}^{+\infty}-\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{(-3-i\omega)\tau}}{-3-i\omega}\left(-2\right)d\tau\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{-3-i\omega}\lim_{\tau\to+\infty}\frac{1-2\tau}{e^{(3+i\omega)\tau}}-\frac{1}{-3-i\omega}+2\frac{e^{(-3-i\omega)\tau}}{\left(-3-i\omega\right)^{2}}\Bigg|_{0}^{+\infty}\right).$$

Оскільки ω – дійсне число, то

$$\left|e^{(-3-i\omega)\tau}\right|=\left|e^{-3\tau}\left(\cos\omega\tau-i\sin\omega\tau\right)\right|=e^{-3\tau}\to0\text{ , а }\left|e^{(3+i\omega)\tau}\right|=e^{3\tau}\to+\infty$$

при $\tau\to+\infty$. За допомогою правила Лопіталя знаходимо

$$\lim_{\tau\to+\infty}\left|\frac{1-2\tau}{e^{(3+i\omega)\tau}}\right|=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{2\tau-1}{e^{3\tau}}=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\left(2\tau-1\right)'}{\left(e^{3\tau}\right)'}=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{2}{3e^{3\tau}}=0\,,$$

звідки слідує, що

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{1-2\tau}{e^{(3+i\omega)\tau}}=0\,.$$

Тому

$$S(\omega)=\frac{4}{\pi}\mathrm{Re}\left(0+\frac{1}{3+i\omega}+2\left(\lim_{\tau\to+\infty}\frac{e^{(-3-i\omega)\tau}}{\left(-3-i\omega\right)^{2}}-\frac{1}{\left(-3-i\omega\right)^{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{3+i\omega}-\frac{2}{(3+i\omega)^2}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{3-i\omega}{(3+i\omega)(3-i\omega)}-\frac{2(3-i\omega)^2}{\left((3+i\omega)(3-i\omega)\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{3-i\omega}{9+\omega^2}-\frac{2\left(9-6i\omega-\omega^2\right)}{\left(9+\omega^2\right)^2}\right)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{3}{9+\omega^2}-\frac{2\left(9-\omega^2\right)}{\left(9+\omega^2\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{3\left(9+\omega^2\right)-2\left(9-\omega^2\right)}{\left(9+\omega^2\right)^2}=\frac{4}{\pi}\frac{9+5\omega^2}{\left(9+\omega^2\right)^2}=\frac{20\omega^2+36}{\pi\left(\omega^2+9\right)^2}.$$

Приклад 13. Дано спектральну щільність

$$S(\omega)=\begin{cases}3\left(1-\dfrac{|\omega|}{2}\right), & \omega\in[-2,2],\\ 0, & \omega\notin[-2,2].\end{cases}$$

стаціонарного випадкового процесу $X(t)$. Знайти кореляційну функцію $k(\tau)$ цього процесу.

Розв'язання. Кореляційну функцію можна знайти за формулами

$$k(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega,\ k(\tau)=2\int_{0}^{+\infty}S(\omega)\cos\omega\tau d\omega,$$

$$k(\tau)=2\operatorname{Re}\int_{0}^{+\infty}S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega.$$

Застосуємо другу з наведених формул.

$$k(\tau)=2\int_{0}^{+\infty}S(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega=6\int_{0}^{2}\left(1-\frac{\omega}{2}\right)\cos\omega\tau\,d\omega=$$

$$=\left|\ u=1-\frac{\omega}{2},\ dv=\cos\omega\tau d\omega,\ du=\left(-\frac{1}{2}\right)d\omega,\ v=\frac{\sin\omega\tau}{\tau}\ \right|=$$

$$=6\left(\left(1-\frac{\omega}{2}\right)\frac{\sin\omega\tau}{\tau}\Bigg|_{\omega=0}^{\omega=2}-\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sin\omega\tau}{\tau}d\omega\right)=$$

$$=6\left(0-0+\frac{-\cos\omega\tau}{2\tau^2}\Bigg|_{\omega=0}^{\omega=2}\right)=6\left(\frac{-\cos2\tau}{2\tau^2}-\frac{-1}{2\tau^2}\right)=3\frac{1-\cos2\tau}{\tau^2},$$

або

$$k(\tau)=\frac{6\sin^2\tau}{\tau^2}.$$

Приклад 14. Знайти дисперсію стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, якщо відома його спектральна щільність $S(\omega)=\dfrac{3\omega^2+9}{\left(\omega^2+9\right)^2}$.

Розв'язання. Як відомо, $D=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)d\omega$.

$$D=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\omega^2+9}{\left(\omega^2+9\right)^2}d\omega=3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+3}{\left(\omega^2+9\right)^2}d\omega=3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\omega^2+9\right)-6}{\left(\omega^2+9\right)^2}d\omega=$$

$$=3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+9}-18\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{\left(\omega^2+9\right)^2}.$$

Обчислимо отримані інтеграли окремо.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+9}=\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{3}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

До другого доданка застосуємо відому з математичного аналізу формулу для інтеграла $I_n=\int\dfrac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ $\quad(n\geq 2)$:

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{1}{2n-2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{\left(\omega^2+9\right)^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+9}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{12}-0\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{\pi}{12}-0\right)=\frac{\pi}{54}.$$

Таким чином,

$$D=3\cdot\frac{\pi}{3}-18\cdot\frac{\pi}{54}=\frac{2\pi}{3}.$$

Проходження стаціонарних випадкових процесів через стаціонарні лінійні динамічні системи

Приклад 15. На вхід електричного кола, зображеного на рис. 6 (стор. 76), подається стаціонарний випадковий сигнал $X(t)$ з математичним сподіванням $m_X = 5$ і кореляційною функцією $k_X(\tau) = 4e^{-3|\tau|}$. Знайти математичне сподівання, дисперсію і кореляційну функцію вихідного сигналу $Y(t)$ в стаціонарному режимі. Робота кола описується диференціальним рівнянням

$$(R_1 + R_2)CY' + Y = R_2 C X' + X ,$$

а значення параметрів $R_1 = 3$, $R_2 = 2$, $C = 0{,}1$.

Розв'язання. За таблицею додатку 7 знаходимо спектральну щільність вхідного сигналу:

$$S_X(\omega) = \frac{4 \cdot 3}{\pi(\omega^2 + 3^2)} = \frac{12}{\pi(\omega^2 + 9)} .$$

Диференціальне рівняння при заданих значеннях параметрів

$$0{,}5Y' + Y = 0{,}2\, X' + X .$$

Для знаходження передатної функції запишемо це рівняння в операторному вигляді, формально замінивши диференціювання множенням на p:

$$0{,}5pY + Y = 0{,}2p\, X + X , \quad (0{,}5p + 1)Y = (0{,}2p + 1)X .$$

З отриманої рівності виразимо відношення Y до X:

$$\frac{Y}{X} = \frac{0{,}2p + 1}{0{,}5p + 1}, \; H(p) = \frac{0{,}2p + 1}{0{,}5p + 1} \text{ або } H(p) = \frac{0{,}4p + 2}{p + 2} .$$

Математичне сподівання вихідного сигналу обчислюється за формулою $m_Y = H(0)m_X$:

$$m_Y = \frac{0{,}4 \cdot 0 + 2}{0 + 2} \cdot 5 = 5 .$$

Спектральна щільність вихідного сигналу пов'язана зі спектральною щільністю вхідного сигналу рівністю

$$S_Y(\omega) = |H(i\omega)|^2 \, S_X(\omega) .$$

Спочатку знаходимо $\left|H\left(i\omega\right)\right|^2$:

$$\left|H\left(i\omega\right)\right|^2 = H\left(i\omega\right)\overline{H\left(i\omega\right)} = \frac{2+0,4i\omega}{2+i\omega}\cdot\frac{2-0,4i\omega}{2-i\omega} = \frac{4+0,16\omega^2}{4+\omega^2}.$$

Далі шукаємо $S_Y(\omega)$:

$$S_Y(\omega) = \frac{4+0,16\omega^2}{4+\omega^2}\cdot\frac{12}{\pi\left(\omega^2+9\right)} = \frac{1,92\omega^2+48}{\pi\left(\omega^2+4\right)\left(\omega^2+9\right)}.$$

Кореляційну функцію $k_Y(\tau)$ знайдемо, знову застосувавши формули з додатку 7. Для цього потрібно розкласти $S_Y(\omega)$ на елементарні дроби. У вираз для $S_Y(\omega)$ входить лише ω^2, тому доцільно позначити $z=\omega^2$.

$$\frac{1,92z+48}{(z+4)(z+9)} = \frac{A}{z+4}+\frac{B}{z+9},\quad 1,92z+48 = A(z+9)+B(z+4),$$

$$\begin{cases} A+B=1,92, \\ 9A+4B=48. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо $A=8,064$, $B=-6,144$.

Отже,

$$S_Y(\omega) = \frac{8,064}{\pi\left(\omega^2+4\right)} - \frac{6,144}{\pi\left(\omega^2+9\right)}.$$

$$k_Y\left(\tau\right) = \frac{8,064}{2}e^{-2|\tau|} - \frac{6,144}{3}e^{-3|\tau|} = 4,032e^{-2|\tau|} - 2,048e^{-3|\tau|}.$$

Дисперсію знаходимо за формулою $D_Y = k_Y(0)$:

$$D_Y = 4,032e^0 - 2,048e^0 = 1,984.$$

Процес Пуассона

Приклад 16. Потік заявок, що надходять на деякий пункт обслуговування споживачів, є найпростішим з інтенсивністю $\lambda = 0,1$ (заявок за хвилину). Знайти ймовірність того, що за 10 хв. надійде: а) три заявки; б) не надійде жодної заявки; в) надійде хоча б одна заявка; г) надійде не більше чотирьох заявок.

Розв'язання. Математичною моделлю найпростішого потоку подій є випадковий процес Пуассона $X\left(t\right)$ – це число подій, що відбуваються за час t. Одновимірний розподіл процесу $X(t)$, $t \ge 0$, має вигляд

$$P\big(X(t)=k\big)=P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,\ldots \qquad (10)$$

$P_t(k)$ – це ймовірність того, що за час t відбудеться k подій найпростішого потоку.

а) Оскільки $\lambda t = 0,1\cdot 10 = 1$, $k=3$, то за формулою (10) знаходимо

$$P_{10}(3)=\frac{1^3}{3!}e^{-1}=\frac{1}{6e}\approx 0,061 \ (e^{-1}\approx 0,368 \text{ за таблицею додатку 8}).$$

б) Відсутність жодної заявки за час t означає, що у формулі (10) $k=0$:

$$P_t(0)=e^{-\lambda t}.$$

В даному прикладі маємо

$$P_{10}(0)=e^{-1}\approx 0,368.$$

в) Подія, що полягає у надходженні хоча б однієї заявки за час t, є протилежною до події, розглянутої у попередньому пункті. Тому її ймовірність $P_t(k\ge 1)$ знаходимо за формулою

$$P_t(k\ge 1)=1-e^{-\lambda t}.$$

В даному прикладі маємо

$$P_{10}(k\ge 1)=1-e^{-1}\approx 0,632.$$

г) Ймовірність надходження за час t не більше k_2 заявок знаходиться за формулою

$$P_t(k\le k_2)=P_t(0)+P_t(1)+\ldots+P_t(k_2).$$

В даному прикладі маємо

$$P_{10}(k\le 4)=P_{10}(0)+P_{10}(1)+P_{10}(2)+P_{10}(3)+P_{10}(4)=$$

$$=e^{-1}+\frac{1}{1!}e^{-1}+\frac{1}{2!}e^{-1}+\frac{1}{3!}e^{-1}+\frac{1}{4!}e^{-1}=e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)\approx 0,996.$$

ДОДАТКИ

Додаток 1. Основні поняття та формули комбінаторики

Основні правила комбінаторики:

Правило суми. Нехай потрібно виконати одну з m яких-небудь дій, що взаємно виключають одна одну. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію – n_2 способами і так до m-ї дії, яку можна виконати n_m способами, то виконати одну з цих m дій можна $\left(n_1 + n_2 + \ldots + n_m\right)$ способами.

Правило добутку. Нехай потрібно виконати одну за одною m яких-небудь дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після цього другу дію – n_2 способами і так до m-ї дії, яку можна виконати n_m способами, то всі m дій будуть виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ способами.

Факторіалом натурального числа n називають число

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

За означенням $0! = 1$.

Розглянемо деяку множину M, яка складається з n різних елементів. Нехай $1 \le k \le n$. Множину, яка складається з k елементів, називають *впорядкованою*, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність число від 1 до k, причому різним елементам множини відповідають різні числа.

Розміщеннями з n елементів по k називають упорядковані підмножини множини M, що складаються з k різних елементів і відрізняються одна від одної складом елементів або порядком їх розташування.

Число розміщень з n елементів по k дорівнює

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Перестановками з n елементів називають розміщення з n елементів по n, тобто впорядковані підмножини множини M, які складаються з усіх елементів даної множини і відрізняються одна від одної лише порядком їх розташування.

Число перестановок з n елементів дорівнює

$$P_n = n!.$$

Сполученнями з n елементів по k називають підмножини множини M, що складаються з k різних елементів і відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Число сполучень з n елементів по k дорівнює

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

Розміщеннями з повтореннями з n елементів по k називають впорядковані підмножини множини M, що складаються з k елементів, серед яких можуть бути однакові, і відрізняються одна від одної складом елементів чи порядком їх розташування.

Число розміщень з повтореннями дорівнює

$$\tilde{A}_n^k = n^k \ .$$

Сполученнями з повтореннями з n елементів по k називають підмножини множини M, які складаються з k елементів, серед яких можуть бути однакові, і відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Число сполучень з повтореннями з n елементів по k дорівнює

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \ .$$

Якщо у множині M, яка складається з елементів, є лише m різних елементів, то *перестановкам з повторенням* з n елементів називають впорядковані підмножини множини M, у які перший елемент множини M входить n_1 разів, другий елемент – n_2 разів і так до m-го елемента, який входить n_m разів $(n_1 + n_2 + ... + n_m = n)$.

Число перестановок з повтореннями з n елементів, в які перший елемент множини M входить n_1 разів, другий елемент – n_2 разів і так до m-го елемента, який входить n_m разів $(n_1 + n_2 + ... + n_m = n)$, дорівнює

$$\tilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_m) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! ... n_m!} \ .$$

Додаток 2. Таблиця значень функції $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0045
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034

Додаток 3. Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3888	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2704	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4969
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2995	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,49865
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,49931
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,49966
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,499841
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,499928
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,499968
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,499997
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,499997
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830	>5	0,5
0,51	0,1950	1,03	0,3485	1,55	0,4394	2,14	0,4838		

Додаток 4.

Таблиця значень функції $t = t(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,25	4,78
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92
20	2,093	2,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,009	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,991	2,640	3,418
90	1,987	2,633	3,403

Додаток 5.

Таблиця значень функції $q = q(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29

Додаток 6.

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи r	Рівень значущості α		
	0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8
2	9,2	7,4	6,0
3	11,3	9,4	7,8
4	13,3	11,1	9,5
5	15,1	12,8	11,1
6	16,8	14,4	12,6
7	18,5	16,0	14,1
8	20,1	17,5	15,5
9	21,7	19,0	16,9
10	23,2	20,5	18,3
11	24,7	21,9	19,7
12	26,2	23,3	21,0
13	27,7	24,7	22,4
14	29,1	26,1	23,7
15	30,6	27,5	25,0
16	32,0	28,8	26,3
17	33,4	30,2	27,6
18	34,8	31,5	28,9
19	36,2	32,9	30,1
20	37,6	34,2	31,4
21	38,9	35,5	32,7
22	40,3	36,8	33,9
23	41,6	38,1	35,2
24	43,0	39,4	36,4
25	44,3	40,6	37,7

Додаток 7.
Спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу

Кореляційна функція $k(\tau)$ та спектральна щільність $S(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу пов'язані формулами

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}k(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\,,\; k(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{i\omega\tau}d\tau\,.$$

	$k(\tau)$	$S(\omega)$
1	$D\delta(t)$	$\frac{D}{2\pi}$
2	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$\frac{D}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$
3	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(1+\alpha\lvert\tau\rvert\right)$	$\frac{D}{\pi}\cdot\frac{2\alpha^3}{\left(\omega^2+\alpha^2\right)^2}$
4	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(1+\alpha\lvert\tau\rvert+\frac{\alpha^2\tau^2}{3}\right)$	$\frac{D}{\pi}\cdot\frac{8\alpha^5}{3\left(\omega^2+\alpha^2\right)^3}$

Додаток 8.

Значення функції $p_k(\lambda) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

k	λ						
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582	0,98790	0,12166
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070
6					0,00001	0,00004	0,00008
7							0,00001

k	λ						
	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,44933	0,40657	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,35946	0,36591	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,14379	0,16466	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,03834	0,04940	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,00767	0,01112	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00123	0,00200	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00016	0,00030	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00002	0,00004	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8			0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9				0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10				0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11				0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12					0,00006	0,00064	0,00343
13					0,00001	0,00020	0,00132
14						0,00006	0,00047
15						0,00002	0,00016
16							0,00005
17							0,00001

Навчальне видання

ГОЛОВНЯ Руслан Миколайович
КОВАЛЬ Валерій Олександрович
ЛУЩИКОВ Олександр Володимирович

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ТА ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Редактор *Р.М. Головня*
Комп'ютерний набір та верстка *В.Р. Дранківська*
Макетування *В.В Кондратенко*

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єкта видавничої справи
Серія ЖТ № 08 від 26.03.2004 р.

Підписано до друку 10.06.2011 р. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Папір офс. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 8,14.
Наклад 600 прим. Зам. 21

Редакційно-видавничий відділ
Житомирського державного технологічного університету
вул. Черняховського, 103, м. Житомир, 10005