Лекція 4.

Тема. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

4.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Серед багатьох методів розв'язку систем лінійних рівнянь одним з найбільш зручних є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод ґрунтується на елементарних перетвореннях систем рівнянь.

Означення. Елементарними перетвореннями над системою рівнянь є такі перетворення над її рівняннями:

1. Перестановка місцями будь-яких двох рівнянь системи;
2. Множення довільного рівняння системи на деякий сталий, відмінний від нуля множник;
3. Додавання до деякого рівняння системи іншого рівняння помноженого на довільне число.

Нехай маємо систему m рівнянь з n невідомими виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.19)$$

Очевидно, що серед коефіцієнтів a_{k1} $(k = \overline{1, m})$ є хоча б один відмінний від нуля. Якщо $a_{11} \neq 0$, то перше рівняння системи (4.19) залишимо без змін. Якщо ж $a_{11} = 0$, то першим в системі (4.19) запишемо те рівняння, яке має відмінний від нуля коефіцієнт при x_1. Виключимо тепер x_1 з усіх рівнянь системи (4.19), починаючи з другого. Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ і додамо до другого рівняння, потім помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і додамо до третього рівняння і т.д. В результаті отримаємо систему рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (4.20)$$

Зауваження 1. Якщо на будь-якому кроці перетворень системи рівнянь за допомогою методу Гауса ми отримаємо хоч одне рівняння виду: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_j$, де $b_j \neq 0$, то система рівнянь (4.19) є несумісною, так як жоден набір невідомих не може задовільнити таке рівняння.

Зауваження 2. Якщо на будь-якому кроці перетворень системи рівнянь за допомогою методу Гауса ми отримаємо отримаємо одне або більше рівнянь виду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$. То такі рівняння ми відкидаємо з системи. І тому отримана в результаті перетворень система може мати менше ніж m рівнянь.

Далі вважаємо, що в системі (4.20) коефіцієнт $a'_{22} \neq 0$ і аналогічно виконуємо перетворення, що виключають x_2 з усіх рівнянь системи (4.20), починаючи з третього. В результаті отримаємо систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a''_{m3}x_3 + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{cases} \qquad (4.21)$$

Зауваження 3. Може так статись, що в системі (4.20) коефіцієнти при x_2 в усіх рівняннях системи, починаючи з другого, рівні нулю. Тобто маємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m3}x_3 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (4.22)$$

Тоді вважаючи, що в системі (4.22) коефіцієнт $a'_{23} \neq 0$ і аналогічно виконуємо перетворення, що виключають x_3 з усіх рівнянь системи (4.20), починаючи з третього і т.д.

Продовжуючи цей процес, ми прийдемо до одного з двох випадків:

1. Після деякого кроку отримаємо систему, яка містить рівняння виду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n = b$, де $b \neq 0$. Тоді задана система (4.19) несумісна.
2. Система зводиться до виду:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1r}x_r + b_{1\,r+1}x_{r+1} \dots + b_{1n}x_n = c_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2r}x_r + b_{2\,r+1}x_{r+1} \dots + b_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{rr}x_r + b_{r\,r+1}x_{r+1} \dots + b_{rn}x_n = c_r \end{cases} \qquad (4.23)$$

При цьому можливі такі випадки:

а) $r = n$. Тоді система (4.23) має вигляд:

$$
\begin{cases}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1 \\
\qquad\quad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n = c_n
\end{cases}
\tag{4.24}
$$

З останнього рівняння системи знаходимо $x_n = \frac{c_n}{b_{nn}}$. Знайдене значення x_n підставляємо в передостаннє рівняння системи

$$b_{n-1,n-1}x_{n-1} + b_{n-1,n}x_n = c_{n-1}.$$

Знаходимо x_{n-1} і т.д. Остаточно з першого рівняння знаходимо x_1. Отже в даному випадку система має єдиний розв'язок.

б) $r < n$. Тоді з останнього рівняння системи (4.23) знаходимо $x_r = \frac{1}{b_{rr}}\left(c_r - b_{r\,r+1}x_{r+1} - b_{r\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{rn}x_n\right)$, з передостаннього - x_{r-1} і т.д. Остаточно з першого рівняння знаходимо x_1. В даному випадку основні невідомі x_1, x_2, …,x_r будуть виражатись через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n. Вільним невідомим можна надавати довільні значення, тому система рівнянь в даному випадку має безліч розв'язків.

Зауваження 4. Розв'язуючи систему лінійних рівнянь методом Гауса, зручніше здійснювати елементарні перетворення не над рівняннями системи, а над рядками розширеної матриці $\bar{A}$ відповідної системи рівнянь.

Покажемо це на прикладах.

Приклад 1.14. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь.

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5 \\
x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\
3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 5 \\
3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4
\end{cases}
$$

Виписуємо розширену матрицю системи і виконуємо над рядками цієї матриці елементарні перетворення

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & 11 & 5 & 5 \\
1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 8 & 4 & 5 \\
3 & 4 & 14 & 9 & 4
\end{array}\right) \to
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 11 & 5 & 5 \\
3 & 2 & 8 & 4 & 5 \\
3 & 4 & 14 & 9 & 4
\end{array}\right) \to
$$

Поміняли місцями перший та другий рядки розширеної матриці. Після цього під елементом a_{11}, а потім і під елементом a_{22} за допомогою елементарних перетворень робимо нулі.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & -1 & -7 & -2 & -4 \\
0 & 1 & -1 & 3 & -5
\end{array}\right) \to
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\
0 & 0 & -2 & 2 & -4
\end{array}\right) \to
$$

Після цього помножимо четвертий рядок останньої матриці на $-\frac{1}{2}$ і поміняємо місцями третій та четвертий рядки. На останньому кроці робимо нуль під елементом a_{33}.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7\end{array}\right)\rightarrow$$

Після цього помножимо четвертий рядок останньої матриці на $-\frac{1}{7}$.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\ (*)$$

З розширеної матриці $(*)$ повернемось до системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3\\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = -1\\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 2\\ \qquad\qquad\qquad x_4 = -1\end{cases}$$

Далі піднімаючись в системі рівнянь знизу вверх знаходимо розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 3 + 1 - 5 + 2 = 1\\ x_2 = -1 - x_3 - x_4 = -1 - 1 + 1 = -1\\ x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1\\ x_4 = -1\end{cases}$$

тобто розв'язок має вигляд $X = (1;\ -1;\ 1;\ -1)^T$.

Приклад 1.15. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3\\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2\\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 7\end{cases}$$

Маємо розширену матрицю системи.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4 & 1 & -1 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2\\ 5 & 7 & -4 & -6 & 7\end{array}\right)\rightarrow$$

Помножимо елементи другого рядка матриці на (-1) і додамо до відповідних елементів першого рядка.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 6 & -3 & -5 & 1\\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2\\ 5 & 7 & -4 & -6 & 7\end{array}\right)\rightarrow$$

Після цього під елементом a_{11} за допомогою елементарних перетворень робимо нулі. Для цього помножимо елементи першого рядка матриці на (-3) і додамо до відповідних елементів другого рядка. Далі помножимо елементи першого рядка матриці на (-5) і додамо до відповідних елементів третього рядка. В результаті отримаємо матрицю

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

Тепер помножимо елементи другого рядка матриці на (-1) і додамо до відповідних елементів третього рядка. Тоді отримаємо:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

З останнього рядка матриці випливає, що система несумісна, тобто дана система розв'язків не має.

Приклад 1.16. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи і поміняємо місцями її перший та другий рядки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Помножимо елементи першого рядка матриці на (-2) і додамо до відповідних елементів другого рядка. Після цього помножимо елементи першого рядка матриці на (-3) і додамо до відповідних елементів третього рядка. В результаті отримаємо матрицю:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \rightarrow$$

Помножимо елементи другого рядка матриці на (-1) і додамо до відповідних елементів третього рядка. В результаті отримаємо матрицю

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right).$$

На останньому кроці ми закреслили нульовий рядок (третій).

За базисні невідомі вибираємо x_1, x_2, так як визначник із коефіцієнтів при них відмінний від нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Далі існує два способи подальшого розв'язання.

Спосіб 1. Невідомі x_3 та x_4 переносимо в праві частини рівнянь :

$$\begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ \quad -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 17 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4 \\ \quad -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4 \end{cases}. \sim$$

Звідки

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \\ x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 \end{cases}.$$

Спосіб 2. За допомогою елементарних перетворень отримаємо в розширеній матриці в блоці базисних невідомих одиничну матрицю. Для цього спочатку помножимо другий рядок матриці на $\left(-\frac{1}{5}\right)$. Після цього помножимо другий рядок матриці на (-2) і додамо до першого рядка. В результаті отримаємо:

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{7}{5} & -\frac{17}{5} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{7}{5} & -\frac{17}{5} \end{array}\right)$$

Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{4}{5} \\ x_2 - x_3 + \frac{7}{5}x_4 = -\frac{17}{5} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases}$$

Надаючи вільним невідомим довільні значення $x_3 = c_1$ і $x_4 = c_2$, знаходимо нескінчену множину розв’язків заданої системи

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2 \\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2\,, \quad c_1, c_2 \epsilon R. \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad \text{Тоді}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2 \\ -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad c_1, c_2 \epsilon R \quad \text{або}$$

$$X = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ c_1;\ c_2\right)^T, \text{де } \ c_1, c_2 \epsilon R.$$

Зауваження 5. Формули Крамера і матричний метод мають місце лише для випадку $m = n$ (кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих) і при цьому визначник відповідної матриці коефіцієнтів повинен бути відмінним від нуля. А метод Гауса застосовується для будь-яких натуральних значень m та n (довільна кількість рівнянь і невідомих) і при цьому ніякі додаткові умови на матрицю коефіцієнтів системи не накладаються.

Тема. Вектори. Лінійні операції над векторами. Базис. Розклад по базису. Скалярний добуток векторів.

§1. Вектори. Лінійні операції над векторами.

1.1. Вектори.

Велика кількість фізичних величин визначається тільки своїм числовим значенням і їх називають скалярними величинами. Прикладами скалярних величин є довжина, площа, об'єм, температура, густина, маса та ін. Але є фізичні величини, які крім числового значення мають і напрям. Такі величини називають векторними. Прикладами таких величин є сила, швидкість, прискорення, момент сили, напруженість магнітного поля та ін.

Вектором називається довільна упорядкована пара точок A і B простору, що визначає напрямлений відрізок. Перша точка відрізку вважається початком вектора, а друга його кінцем. Вектор з початком A і кінцем B позначають символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Відстань між початком вектора та його кінцем називається довжиною або модулем вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і позначається $|\overrightarrow{AB}|$або $|\vec{a}|$).

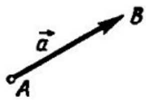

Рис. 1

Вектор $\overrightarrow{AA}$, початок і кінець якого збігаються, називається нульовим вектором і позначається $\vec{0}$. Модуль цього вектора дорівнює нулю, а напрям невизначений.

Вектор довжина якого дорівнює одиниці називається одиничним вектором. Одиничний вектор напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^0$.

Вектори, які лежать на одній прямій або паралельних прямих називають колінеарними. Якщо колінеарні вектори мають однаковий напрям, то їх називають співнапрямленими і позначають $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Якщо колінеарні вектори мають протилежні напрями, то їх називають протилежно напрямленими і позначають $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Нульовий вектор колінеарний з будь-яким вектором.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають рівними $\left(\vec{a} = \vec{b}\right)$, якщо вони колінеарні, співнапрямлені та мають рівні модулі.

В означенні рівності векторів не вказано нічого про їх конкретне розміщення в просторі, тому вектори можна переносити паралельно самим собі в просторі, не порушуючи при цьому умову рівності векторів. Тому в аналітичній геометрії всі вектори вважаються вільними.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають протилежними $\left(\vec{a} = -\vec{b}\right.$, або $\left.\vec{b} = -\vec{a}\right)$, якщо вони колінеарні, протилежно напрямлені та мають рівні модулі.

Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Зокрема три вектори є компланарними, якщо хоча б два з них є колінеарні.

1.2. Лінійні операції над векторами.

1) Додавання векторів. Сумою двох векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\overrightarrow{AB}$, а кінець – з кінцем вектора $\overrightarrow{BC}$ (Правило трикутника).

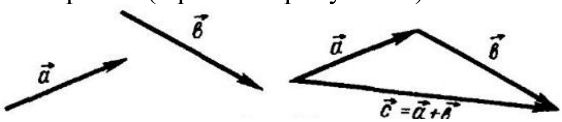

Рис. 2

Додавати два вектори можна і за правилом паралелограма. При цьому обидва вектори приводяться до спільного початку і на них будується паралелограм. Тоді діагональ $\overrightarrow{AC}$ паралелограма і є сумою заданих векторів.

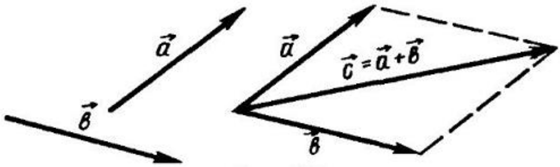

Рис. 3

Поняття суми векторів поширюється і на довільне скінчене число векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Спочатку з допомогою паралельного переносу вектори розташовуємо в ланцюг, тобто так, щоб початок наступного вектора був кінцем попереднього.

Тоді сумою векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається вектор, в якого початок збігається з початком вектора $\vec{a}_1$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{a}_n$. Це записують так: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$. Якщо при цьому $\vec{a} = \vec{0}$, то говорять, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ утворюють замкнену систему векторів.

Наприклад $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

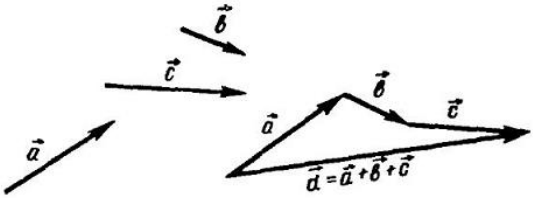

Рис. 4

2) Віднімання векторів. Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів називають такий вектор $\vec{c}$, який треба додати до вектора $\vec{b}$, щоб отримати вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

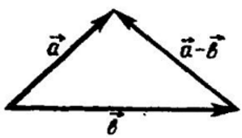

Рис. 5

Геометричне зміст різниці векторів: якщо вектор $\vec{a} + \vec{b}$ розміщений на одній діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що мають спільний початок, то $\vec{a}-\vec{b}$ лежить на іншій діагоналі цього ж паралелограма.

3) Множення вектора на число. Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число $\lambda \in R$, називається вектор $\lambda\vec{a}$ довжина якого дорівнює довжині вектора $\vec{a}$, помноженій на абсолютну величину числа λ, тобто $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний йому, коли $\lambda < 0$.

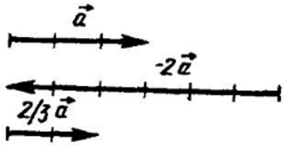

Рис. 6

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\lambda = 0$, то вектор $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, тобто є нульовим.

Використовуючи означення множення вектора на число, можна сформулювати такі твердження:

1) Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають колінеарними, якщо існує число λ таке, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Якщо $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

2) Якщо вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$, то його орт $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

Операція додавання векторів має такі властивості:

1) Комутативність суми векторів: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$.
2) Асоціативність суми векторів: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3) Комутативність добутку вектора на число: $\lambda\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\lambda$.
4) Асоціативність добутку вектора на число: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.
5) Дистрибутивність добутку вектора на суму чисел:
$$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \qquad (1.1.)$$
6) Дистрибутивність добутку числа на суму векторів: $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
7) $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$ або $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$, де $\vec{0}$- нульовий вектор.
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Властивості 1-8 справедливі для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ та довільних чисел λ і μ.

Для векторів справедливі також інші властивості, зокрема:

Модуль суми двох векторів не перевищує суми їх модулів, тобто $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$, або в більш загальній формі: $|\vec{a}_1+\vec{a}_2+\dots+\vec{a}_n| \le |\vec{a}_1|+|\vec{a}_2|+\dots+|\vec{a}_n|$. Модуль різниці двох векторів не менший від абсолютної величини різниці їх модулів, тобто: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \ge \left||\vec{a}|-\left|\vec{b}\right|\right|$.

1.3. Проекція вектора на вісь.

Віссю називають напрямлену пряму, додатній напрям якої позначають стрілкою. Очевидно, що напрям протилежний до заданого є від'ємним.

Відомо, що проекцією точки на вісь є основа перпендикуляра, опущеного з даної точки на цю вісь. На рис.6 проекцією точки B є точка B_1. Проекцією відрізка AB на вісь є відрізок A_1B_1, кінцями якого є проекції відповідних кінців відрізка AB на вісь.

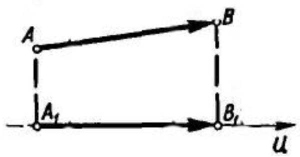

Рис. 7

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називають додатне число $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l однаково напрямлені, і від'ємне число $-\left|\overrightarrow{AB}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l протилежно напрямлені. Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l позначають так: $np_l\overrightarrow{AB}$. Якщо вектор нульовий, то його проекція на вісь дорівнює нулю.

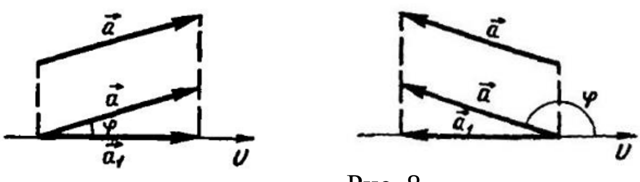

Рис. 8

Кутом φ між вектором $\vec{a}$ і віссю l називається менший з двох кутів, на який потрібно повернути вектор $\vec{a}$, щоб він збігався за напрямом з віссю l: $\varphi = (\vec{a},^\wedge l)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Властивості проекцій.

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором та віссю, тобто $np_l\vec{a} = |\vec{a}|cos\varphi$.

2. Проекція суми кількох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто $np_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b} + np_l\vec{c}$.

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число: $np_l(\lambda\vec{a}) = \lambda np_l\vec{a}$.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок. Кутом між ними називатимемо менший з двох кутів, на який потрібно повернути один вектор, щоб він збігався за напрямом з другим вектором. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначатимемо $(\vec{a},^\wedge \vec{b})$, $0 \le (\vec{a},^\wedge \vec{b}) \le \pi$. В деяких випадках ми будемо вказувати, від якого вектора і в якому напрямі кут відраховується.

1.4. Лінійні простори. n - вимірний векторний простір.

Множину довільної природи, для елементів якої можна ввести поняття додавання і множення елемента на число, з властивостями (1)-(8) називають лінійним простором, а її елементи – векторами. Лінійні простори позначатимемо L.

Приклади лінійних просторів:

1. Нехай L множина всіх многочленів степеня не вищого за n. Очевидно, що сума двох многочленів і результат множення многочлена на довільне дійсне число є також многочлен степеня не вищого за n. Як нульовий елемент множини L візьмемо многочлен, який тотожньо рівний нулю. Легко перевірити справедливість властивостей (1)-(8). Зробіть це самостійно.

2. Нехай L множина всіх матриць розмірності $n \times m$. Операції додавання матриць і множення матриць на число введено вище. Легко перевірити справедливість властивостей (1)-(8). Зробіть це самостійно.

3. Нехай n довільне натуральне число. Розглянемо множину R^n всіх наборів із n дійсних чисел. Кожний такий набір позначатимемо $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і називатимемо вектором. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$

називатимемо координатами вектора $\vec{a}$. Операції над елементами множини R^n визначимо таким чином: Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні відповідно $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, а λ - дійсне число, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \qquad (1.2.)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n) \qquad (1.3.)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \qquad (1.4.)$$

Визначені таким способом операції задовольняють властивостям (1)-(8). Перевірте це самостійно.

Два вектори рівні в R^n, якщо одночасно рівні всі їх відповідні координати.

Цей лінійний простір називають n-вимірним векторним простором і в подальшому він відіграватиме важливу роль.

1.5. Розклад вектора за базисом.

Вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ довільні дійсні числа називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Вважатимемо, що вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ якщо існують такі числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (коефіцієнти лінійної комбінації), що $\vec{a} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_2\vec{a}_2 + \dots + \mu_n\vec{a}_n$.

Множина векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не всі одночасно рівні нулю для яких виконується така умова:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = 0. \qquad (1.5.)$$

Якщо умова (1.5.) виконується тільки у випадку, коли всі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ одночасно рівні нулю, то множина векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно незалежною.

Іншими словами скінченна система векторів називається лінійно залежною, якщо існує вектор системи, який є лінійною комбінацією решти векторів системи. Якщо такого вектора не існує, то система називається лінійно незалежною.

Нескінченна система векторів у лінійному просторі називається лінійно незалежною, якщо довільна її скінченна множина векторів лінійно незалежна.

Використовуючи вище наведене можна дати інше означення компланарності трьох векторів.

Означення. Три вектори називаються компланарними, якщо вони утворюють лінійно залежну систему.

Твердження 1. У просторі R^2 система векторів, в якій кількість векторів більша ніж два, лінійно залежна. У просторі R^3 система векторів, в якій кількість векторів більша ніж три, лінійно залежна. Вище наведене твердження можна узагальнити.

Твердження 2. У просторі R^n система векторів, в якій кількість векторів більша ніж n, лінійно залежна.

Означення. Сім'я векторів у лінійному просторі називається базисом, якщо вона лінійно незалежна і кожний вектор простору лінійно виражається через вектори сім'ї.

Довільний ненульовий вектор утворює базис на прямій (у просторі R^1). Довільна упорядкована пара неколінеарних векторів утворює базис на площині (у просторі R^2). Довільна упорядкована трійка некомпланарних векторів утворює базис у просторі R^3.

Твердження 3. Будь-який вектор, паралельний деякій прямій, можна розкласти за базисом на цій прямій. Будь-який вектор, паралельний деякій площині, можна розкласти за базисом на цій площині. Будь-який вектор простору R^3 можна розкласти за базисом у просторі R^3.

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис у просторі R^3, то довільний вектор $\vec{d}$ цього простору можна розкласти за цим базисом, тобто $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, при цьому числа α, β і γ називають координатами вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

§2. Системи координат.

2.1. Декартова система координат.

Розглянемо в просторі R^3 деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ з спільним початком в точці O (рис.9).

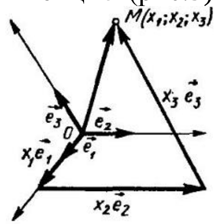

Рис. 9

Сукупність точки і базису називається декартовою системою координат в просторі R^3. Точка O називається початком координат, а осі які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються осями координат. Перша вісь (вісь абсцис) проходить в напрямі вектора $\vec{e}_1$, друга (вісь ординат) – в напрямі вектора $\vec{e}_2$ і третя (вісь аплікат) – в напрямі вектора $\vec{e}_3$.

Площини, які проходять через осі координат, називаються координатними площинами.

Довільній точці M простору R^3 можна співставити вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат O, а кінець – з точкою M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається радіус-вектором точки M відносно початку координат. Тоді існують такі дійсні числа x_1, x_2, x_3, що

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \qquad (2.1)$$

Координати x_1, x_2, x_3 радіуса-вектора точки M відносно початку координат називають декартовими координатами точки M в даній системі координат і записують таким чином: $M(x_1, x_2, x_3)$. При цьому координата x_1 називається абсцисою точки M, координата x_2-ординатою точки M і координата x_3 - аплікатою точки M.

Аналогічно визначаються декартові координати точки на площині (в просторі R^2) та на прямій (в просторі R^1).

Таким чином, якщо в просторі R^3 обрано декартову систему координат, то кожній точці цього простору відповідає єдина упорядкована трійка дійсних чисел – декартові координати цієї точки. Для довільної упорядкованої трійки чисел існує єдина точка простору R^3, декартові координати якої задаються цими числами. Це означає, що в довільній декартовій системі координат існує взаємно однозначна відповідність між точками простору і упорядкованими трійками чисел.

Декартова система координат на площині визначає взаємно однозначну відповідність між точками площини і упорядкованими парами чисел, а на прямій – між точками прямої і дійсними числами.

2.2. Прямокутна система координат.

Найчастіше застосовують на практиці окремий випадок декартової системи координат – прямокутна систему координат. Для її визначення введемо такі поняття.

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних (перпендикулярних) векторів називається ортонормованим базисом в просторі R^3. Позначають ортонормований базис через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad (\vec{i},\wedge \vec{j}) = (\vec{j},\wedge \vec{k}) = (\vec{k},\wedge \vec{i}) = \frac{\pi}{2}.$$

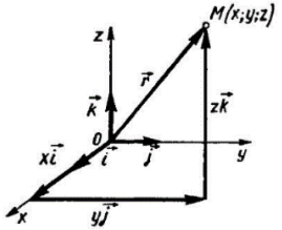

Рис. 10

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ з спільним початком називається правою якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки. Якщо ж вказаний поворот видно за годинниковою стрілкою, то трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається лівою.

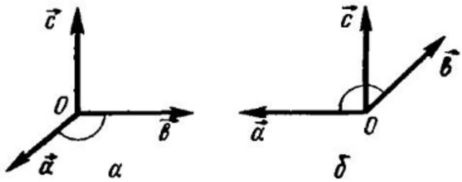

Рис. 11

Прямокутною системою координат називається декартова система координат, базис якої ортонормований. Прямокутна система координат називається правою (лівою), якщо її ортонормований базис утворює праву (ліву) трійку векторів. В подальшому будемо користуватись правою системою координат.

Прямокутну систему координат (рис. 12) позначають через $Oxyz$ (Ox - вісь абсцис, Oy - вісь ординат, Oz - вісь аплікат). Координатні площини позначають через Oxy, Oyz, Ozx. Вони ділять простір R^3 на вісім октантів. При зображенні прямокутної системи координат, як правило показують лише осі координат, а вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не вказують.

Нехай задана прямокутна система координат $Oxyz$ і довільна точка M (рис. 12). Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки відповідно з формулою (2.1) записують у вигляді:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \text{ або } \vec{r} = (x;\ y;\ z) \qquad (2.2)$$

Координати радіус-вектора точки M називаються координатами точки M. Точка M з координатами x, y, z позначається через $M(x;\ y;\ z)$.

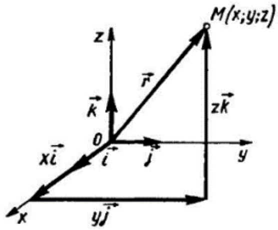

Рис. 12

Так як базисні вектори прямокутної системи координат ортогональні, то координати точки M визначаються проектуванням цієї точки на координатні осі та при цьому дорівнюють відповідним проекціям радіус-вектора точки M на осі координат, тобто

$$x = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{OM},\ y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{OM},\ z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{OM} \qquad (2.3)$$

Прямокутні координати точки на площині і на прямій визначаються аналогічним способом.

Прямокутна система координат Oxy на площині задається точкою O і двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ - базисом системи координат. Точка $M(x;\ y)$ на площині має тільки дві координати – абсцису і ординату.

Система координат на прямій задається точкою O і одиничним вектором $\vec{i}$. Точка $M(x)$ на прямій має тільки одну координату.