Лекція 2.

Тема. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера та матричним методом.

§ 4.Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

4.1. Основні означення.

Система співвідношень виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

де a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$ - довільні дійсні числа, називається системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$. Числа a_{ij} називаються коефіцієнтами системи, а числа b_i- вільними членами системи.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1) називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, тобто

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0.$$

Якщо ж хоч один вільний член системи відмінний від нуля, то вона називається неоднорідною.

Деяка множина чисел називається впорядкованою, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано порядковий номер кожного числа даної множини.

Упорядкований набір n чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ називається розв'язком системи (.1), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1) називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь завжди є сумісною, тому що тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ *завжди перетворює її в тотожність.*

Якщо система (4.1) не має жодного розв'язку, вона називається несумісною.

Сумісна система лінійних алгебраїчних рівнянь називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок.

Сумісна система лінійних алгебраїчних рівнянь називається невизначеною, якщо вона має більше ніж один розв'язок.

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються еквівалентними, якщо множини їх розв'язків однакові.

Коли матриця вільних членів не нульова, то система називається неоднорідною.

Матрицею коефіцієнтів системи (4.1) називається матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

Розширеною матрицею системи (4.1) називається матриця

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (4.3)$$

Матриця $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ є матрицею вільних членів системи (4.1), а матриця $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ є її матрицею невідомих.

В матричному вигляді систему (4.1) можна записати так

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

або $$AX=B \qquad (4.5)$$

Якщо в системі (4.1) $m=n$, то говорять, що кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих системи. В цьому випадку система (4.1) запишеться в такому виді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (4.6)$$

Відповідні матриці системи (4.6) запишуться таким чином:

Матриця коефіцієнтів $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (4.7)

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ і $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$- матриці відповідно вільних членів і невідомих системи (4.6).

Тоді систему (4.6) можна записати за допомогою матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (4.8)$$

або $$AX = B \qquad (4.9)$$

4.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Правило Крамера застосовується для розв'язування систем лінійних рівнянь (4.6), в яких кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих і визначник матриці коефіцієнтів системи (4.7) відмінний від нуля.

Правило Крамера. Нехай задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (4.6). Визначник матриці коефіцієнтів системи (4.7) $\Delta = det\,A \neq 0$. Тоді система (4.6) має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots,\ \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (4.10)$$

де визначник Δ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ отримується із визначника Δ заміною в ньому i -го стовпця стовпцем вільних членів, тобто

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.11)$$

Доведення. Доведемо, наприклад, першу з формул (4.10). Для цього перше рівняння системи (4.6) на A_{11} , друге на A_{21} ,..., n -е на A_{n1} і одержані рівняння додамо. Тоді

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + A_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) +$$
$$+ \cdots A_{n1}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}$$

Після групування доданків маємо

$$x_1(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1}) +$$
$$+x_2(A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \dots + A_{n1}a_{n2}) + \cdots$$
$$+x_n(A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \dots + A_{n1}a_{nn}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}$$

Сума в перший дужці – розклад визначника матриці (4.7) за елементами першого стовпця. Всі інші суми в дужках – суми добутків алгебраїчних доповнень елементів першого стовпця на елементи інших стовпців. Згідно теореми 1.2 всі ці суми дорівнюють нулю. Сума $b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$*– розклад визначника*

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами першого стовпця. Таким чином $x_1 \cdot \Delta = \Delta_1$*, звідки* $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогічно (в загальному випадку) щоб знайти x_i *для довільного* i*, множимо перше рівняння системи (4.6) на* A_{1i}*, друге на* A_{2i}*, ... ,* n *-е – на* A_{ni}*, одержані рівності складаємо і отримаємо формули Крамера (4.10).* ■

Зауваження. *Якщо система (4.6) однорідна, то всі визначники (4.11)* $\Delta_i = 0$*, оскільки в кожному з них* i *-й стовпець складається з нулів. Тому така система, при умові* $\Delta \neq 0$ *має єдиний нульовий розв'язок.*

Найпростіші випадки застосування правила Крамера.

1) Система двох рівнянь з двома невідомими.

Нехай маємо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (4.12)$$

Тоді $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. (4.13)

Можливі такі випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (4.14)$$

2) $\Delta = 0$ і $\Delta_1 \neq 0$ або $\Delta_2 \neq 0$, тоді система (4.12) є несумісною, тобто не має розв'язків.

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, тоді система (4.12) зводиться до одного рівняння і є невизначеною, тобто має безліч розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases}.$$

В нашому випадку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = 67$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = -2$. Тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{67}{11} = 6\frac{1}{11}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{2}{11}$.

2) Система трьох рівнянь з трьома невідомими.

Нехай маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (4.15)$$

Тоді $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.16)$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (4.17)$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ за формулами Крамера.

В нашому випадку $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\Delta = det\, A = 5$ $\Rightarrow$ отже система має єдиний розв'язок який знаходимо за формулами Крамера.

Так як,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$

То $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$.

Розв'язком системи є матриця-стовпець $X = (4; 2; 1)^T$.

4.3. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних рівнянь (4.6), в якій кількість рівнянь дорівнює кількість невідомих і її матричний запис (4.9), тобто рівняння $AX = B$. Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то існує обернена до неї матриця A^{-1}. Помножимо обидві частини рівняння (4.9) на матрицю A^{-1} зліва і отримаємо рівняння:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Так як $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B \tag{4.18}$$

Це і є матричний розв'язок системи лінійних рівнянь (4.6).

Отже, для розв'язання системи рівнянь (4.6), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи і помножити її справа на матрицю вільних членів системи.

Матричний розв'язок системи застосовується тільки тоді, коли матриця системи невироджена.

Приклад 3. Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}.$$

Запишемо матрицю коефіцієнтів A заданої системи $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, тоді $det\,A = 12 \neq 0$ та існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо її. Для цього спочатку обчислимо відповідні алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8;\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4;\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7;\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Тоді маємо

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

так як $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$, то остаточно маємо

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 40 - 5 - 11 \\ -20 + 7 - 11 \\ -20 + 1 + 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком системи є матриця-стовпець $X = (2; -2; 3)^T$.

4.4. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Серед багатьох методів розв’язку систем лінійних рівнянь одним з найбільш зручних є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод ґрунтується на елементарних перетвореннях систем рівнянь.

Означення. Елементарними перетвореннями над системою рівнянь є такі перетворення над її рівняннями:

1. Перестановка місцями будь-яких двох рівнянь системи;
2. Множення довільного рівняння системи на деякий сталий, відмінний від нуля множник;
3. Додавання до деякого рівняння системи іншого рівняння помноженого на довільне число.