

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/1

## ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою  
Державного університету  
«Житомирська політехніка»

протокол від \_\_ \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.  
№\_\_

### МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»  
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»  
освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки»  
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і  
робототехніки  
кафедра фізики та вищої математики

Рекомендовано на засіданні кафедри  
фізики та вищої математики 29 квітня  
2021 р., протокол № 4

Розробники: старший викладач БОНДАРЧУК Василь,  
старший викладач ГОЛОВНЯ Руслан,  
старший викладач ДАВИДЧУК Сергій,  
професор СЕМЕНЕЦЬ Сергій.

Житомир  
2021

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/2

### Рекомендації студенту по роботі над курсом вищої математики

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з таких елементів: вивчення теоретичного матеріалу за підручниками; розв'язування задач і вправ; виконання контрольних робіт.

Теоретичний матеріал, що викладається студентам-заочникам на лекціях під час екзаменаційно-настановчих сесій, носить переважно оглядовий характер. Їх мета – звернути увагу студента на загальну схему побудови відповідного розділу курсу, підкреслити найважливіші місця, вказати головні практичні застосування. Ґрунтовне вивчення теоретичного матеріалу можливе лише під час самостійної роботи над підручниками та посібниками. У бібліотеці Державного університету «Житомирська політехніка» є значна кількість навчальної літератури з вищої математики. У першу чергу можна рекомендувати:

– для студентів інженерних напрямів підготовки:

1. Вища математика: У 2-х кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: АСК, 2001.

3. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: У 2-х ч. – К.: Техніка, 2003.

– для студентів економічних напрямів підготовки:

1. Грисенко М.В. Математика для економістів. – К.: Либідь, 2007.

2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів. – К.: НАУ, 1997.

Важливим елементом роботи над курсом вищої математики є розв'язання значної кількості задач і вправ. Це необхідно як для успішного і глибокого засвоєння теоретичного матеріалу, так і для вироблення певних технічних навичок, оволодіння відповідними прийомами і методами. Тут будуть корисними перш за все навчальні посібники:

1. Практикум з вищої математики / За ред. В.О. Ковалю. – Житомир: ЖДТУ, 2008.

2. Каплан Н.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: ХГУ, 1971.

При вивченні дисципліни здобувачі вищої освіти мають набути загальні та професійні компетентності.

1. Загальні компетентності:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/3

– здатність до розуміння предметної області та професійної діяльності;

– здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

## 2. Фахові компетентності:

– здатність до аналізу, синтезу і оптимізації інформаційних систем та технологій з використанням математичних моделей і методів;

– здатність проводити обчислювальні експерименти, порівнювати результати експериментальних даних і отриманих рішень.

## 3. Програмні результати навчання:

– знання лінійної та векторної алгебри, диференційного та інтегрального числення, теорії функцій багатьох змінних, теорії рядів, диференційних рівнянь для функцій однієї та багатьох змінних, операційного числення, теорії ймовірностей та математичної статистики в обсязі, необхідному для розробки та використання інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації.

Виконання студентом-заочником контрольних робіт є заключним елементом самостійної роботи. Нижче подані контрольні завдання за розділами курсу вищої математики.

Заключним етапом вивчення курсу є складання заліків та іспитів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк. ___/4

### Лінійна алгебра

**Завдання 1.** Дано матриці  $A$  та  $B$ . Знайти  $AB^T$ .

$$1.1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.2. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.5. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.7. A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.8. A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.9. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.11. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/5

$$1.12. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.13. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.14. A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.15. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.16. A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.17. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.18. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.19. A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$1.20. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.21. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.22. A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.23. A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк. — / 6

$$1.24. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.25. A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.26. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.27. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.28. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.29. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.30. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Завдання 2.** Обчислити визначник третього порядку наступними способами:

а) за правилом трикутника;

б) розкладанням за елементами будь-якого рядка чи стовпця

$$2.1. \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -7 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} \quad 2.2. \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 2.3. \begin{vmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2.4. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 2.5. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad 2.6. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/7

$$2.7. \begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2.8. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.9. \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2.10. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.11. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2.12. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.13. \begin{vmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.14. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$2.15. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2.16. \begin{vmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2.17. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2.18. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2.19. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.20. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2.21. \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \\ -4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$2.22. \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$2.23. \begin{vmatrix} 9 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.24. \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$2.25. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2.26. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2.27. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.28. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2.29. \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2.30. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 8 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/8

**Завдання 3.** Розв'язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

$$3.1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -5. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = -1, \\ 4x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = 10. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + x_2 = 11. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$3.12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = -3. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8, \\ x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 3, \\ -3x_1 + 5x_2 = 11. \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/9

$$3.21. \begin{cases} 2x_1 - 9x_2 = -3, \\ 4x_1 + 3x_2 = 15. \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 = 12. \end{cases}$$

$$3.23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 = -10. \end{cases}$$

$$3.24. \begin{cases} x_1 - 4x_2 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 = 4. \end{cases}$$

$$3.25. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -4, \\ 4x_1 + 3x_2 = 14. \end{cases}$$

$$3.26. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -4, \\ x_1 - 2x_2 = -7. \end{cases}$$

$$3.27. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 = -7. \end{cases}$$

$$3.28. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -22, \\ 2x_1 + x_2 = -6. \end{cases}$$

$$3.29. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 = -7. \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} 5x_1 - x_2 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 = 16. \end{cases}$$

**Завдання 4.** Розв'язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

$$4.1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

$$4.4. \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4.6. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 2 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 10

$$4.9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$4.11. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$$

$$4.13. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$4.15. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$4.17. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

$$4.19. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -11 \end{cases}$$

$$4.21. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

$$4.23. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

$$4.25. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$4.12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$4.14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$$

$$4.16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

$$4.18. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$$

$$4.20. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$$

$$4.22. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4.24. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$$

$$4.26. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 11

$$4.27. \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$$

$$4.29. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

$$4.28. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

$$4.30. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

**Завдання 5.** Показати, що вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  утворюють базис і знайти координати вектора  $\vec{d}$  у цьому базисі.

5.1.  $\vec{a} = (3; 4; -3)$ ,  $\vec{b} = (-5; 4; 2)$ ,  $\vec{c} = (2; 3; 0)$ ,  $\vec{d} = (-11; 28; -1)$

5.2.  $\vec{a} = (2; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; 5)$ ,  $\vec{c} = (-1; 2; 1)$ ,  $\vec{d} = (5; 5; 6)$

5.3.  $\vec{a} = (1; 3; -3)$ ,  $\vec{b} = (-4; 4; 0)$ ,  $\vec{c} = (3; 5; 1)$ ,  $\vec{d} = (-12; 21; -2)$

5.4.  $\vec{a} = (1; 1; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; -4; 3)$ ,  $\vec{c} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{d} = (-15; 17; -10)$

5.5.  $\vec{a} = (2; 2; 0)$ ,  $\vec{b} = (-2; 5; -1)$ ,  $\vec{c} = (3; 1; 5)$ ,  $\vec{d} = (9; 34; 20)$

5.6.  $\vec{a} = (3; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (5; -4; 1)$ ,  $\vec{c} = (-1; 4; -4)$ ,  $\vec{d} = (-7; 3; 12)$

5.7.  $\vec{a} = (0; -4; 1)$ ,  $\vec{b} = (-2; -3; 5)$ ,  $\vec{c} = (5; 4; -1)$ ,  $\vec{d} = (1; 5; -14)$

5.8.  $\vec{a} = (-1; -5; 1)$ ,  $\vec{b} = (-1; 4; -2)$ ,  $\vec{c} = (5; 2; 0)$ ,  $\vec{d} = (-3; 21; -9)$

5.9.  $\vec{a} = (-2; -3; 3)$ ,  $\vec{b} = (-3; -5; 4)$ ,  $\vec{c} = (4; 4; 0)$ ,  $\vec{d} = (19; 31; -26)$

5.10.  $\vec{a} = (2; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-3; 3; -4)$ ,  $\vec{c} = (2; 1; 1)$ ,  $\vec{d} = (-5; 11; -10)$

5.11.  $\vec{a} = (-1; -1; 0)$ ,  $\vec{b} = (3; -2; 4)$ ,  $\vec{c} = (-2; 4; -1)$ ,  $\vec{d} = (-3; 1; -7)$

5.12.  $\vec{a} = (-2; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (-4; 1; 3)$ ,  $\vec{c} = (1; 2; 1)$ ,  $\vec{d} = (1; 3; 2)$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 12

$$5.13. \vec{a} = (-3; -4; 1), \vec{b} = (0; 4; -3), \vec{c} = (4; 5; 1), \vec{d} = (13; 33; -14)$$

$$5.14. \vec{a} = (-3; -2; 1), \vec{b} = (2; 0; -5), \vec{c} = (2; 3; 1), \vec{d} = (11; 9; -2)$$

$$5.15. \vec{a} = (-4; -2; 1), \vec{b} = (-4; -3; 3), \vec{c} = (3; 3; 0), \vec{d} = (28; 17; -13)$$

$$5.16. \vec{a} = (-5; -3; 0), \vec{b} = (1; 2; -4), \vec{c} = (3; 3; 1), \vec{d} = (24; 22; -7)$$

$$5.17. \vec{a} = (-4; -1; 0), \vec{b} = (5; -1; 2), \vec{c} = (3; 1; -3), \vec{d} = (12; 2; 7)$$

$$5.18. \vec{a} = (0; 2; 1), \vec{b} = (3; -1; 4), \vec{c} = (4; -4; -1), \vec{d} = (-7; 5; -3)$$

$$5.19. \vec{a} = (-1; -3; 3), \vec{b} = (1; -4; -1), \vec{c} = (1; -4; 0), \vec{d} = (-3; 19; 1)$$

$$5.20. \vec{a} = (-2; 5; -1), \vec{b} = (3; -3; 2), \vec{c} = (2; -2; 0), \vec{d} = (-5; -1; -4)$$

$$5.21. \vec{a} = (-3; -4; 4), \vec{b} = (0; -4; -3), \vec{c} = (2; 2; -1), \vec{d} = (7; 26; 1)$$

$$5.22. \vec{a} = (5; -3; 0), \vec{b} = (-3; 2; -3), \vec{c} = (-1; 2; 5), \vec{d} = (-5; 2; -11)$$

$$5.23. \vec{a} = (-4; 4; 2), \vec{b} = (4; -1; 3), \vec{c} = (3; -2; 0), \vec{d} = (12; -15; -11)$$

$$5.24. \vec{a} = (-5; -5; 4), \vec{b} = (-1; -2; 1), \vec{c} = (3; 3; 0), \vec{d} = (27; 29; -22)$$

$$5.25. \vec{a} = (0; -3; 5), \vec{b} = (-3; 2; -3), \vec{c} = (5; 2; -1), \vec{d} = (-11; 2; -5)$$

$$5.26. \vec{a} = (-2; 2; 1), \vec{b} = (4; 3; -1), \vec{c} = (3; -3; 0), \vec{d} = (16; 5; -5)$$

$$5.27. \vec{a} = (-3; -4; 1), \vec{b} = (-2; 0; -4), \vec{c} = (4; 1; -3), \vec{d} = (-3; 9; 6)$$

$$5.28. \vec{a} = (-4; 3; 0), \vec{b} = (5; 1; 1), \vec{c} = (4; -3; 1), \vec{d} = (25; -14; 2)$$

$$5.29. \vec{a} = (0; 4; 3), \vec{b} = (2; -5; 5), \vec{c} = (1; -1; 2), \vec{d} = (-8; 23; -21)$$

$$5.30. \vec{a} = (4; 1; -3), \vec{b} = (-1; 1; 4), \vec{c} = (-2; 0; -1), \vec{d} = (17; 5; -7)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 13

### Комплексні числа та дії над ними

**Завдання 6.** Задано два комплексних числа  $z_1$  та  $z_2$ . Виконати дії:

1)  $z_1 + z_2$ ; 2)  $z_1 - \bar{z}_2$ ; 3)  $z_1 \cdot z_2$ ; 4)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; 5)  $z_1^3$ .

**6.1.**  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = 3 + i$ .

**6.2.**  $z_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = 1 - 2i$ .

**6.3.**  $z_1 = 4 - 3i$ ,  $z_2 = 2 + i$ .

**6.4.**  $z_1 = -1 + 3i$ ,  $z_2 = 4 - i$ .

**6.5.**  $z_1 = 3 + 2i$ ,  $z_2 = 1 - 3i$ .

**6.6.**  $z_1 = 4 - 3i$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ .

**6.7.**  $z_1 = -2 - 3i$ ,  $z_2 = 1 + 3i$ .

**6.8.**  $z_1 = 4 + i$ ,  $z_2 = 3 + 2i$ .

**6.9.**  $z_1 = -2 - 3i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ .

**6.10.**  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = -3 - i$ .

**6.11.**  $z_1 = 4 + 5i$ ,  $z_2 = 3 - i$ .

**6.12.**  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = -1 - i$ .

**6.13.**  $z_1 = 5 + 4i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$ .

**6.14.**  $z_1 = -3 + 5i$ ,  $z_2 = 4 + i$ .

**6.15.**  $z_1 = -4 + i$ ,  $z_2 = -3 - i$ .

**6.16.**  $z_1 = 4 - 5i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$ .

**6.17.**  $z_1 = 3 + 5i$ ,  $z_2 = 5 - 2i$ .

**6.18.**  $z_1 = 4 - 3i$ ,  $z_2 = 2 + 7i$ .

**6.19.**  $z_1 = -2 + 3i$ ,  $z_2 = -2 - 3i$ .

**6.20.**  $z_1 = 5 + 3i$ ,  $z_2 = -4 - 3i$ .

**6.21.**  $z_1 = -2 - 3i$ ,  $z_2 = 2 + 5i$ .

**6.22.**  $z_1 = 5 - 3i$ ,  $z_2 = -1 + 3i$ .

**6.23.**  $z_1 = 4 + 3i$ ,  $z_2 = -3 + 2i$ .

**6.24.**  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = -1 + 2i$ .

**6.25.**  $z_1 = -14 + i$ ,  $z_2 = -3 + 2i$ .

**6.26.**  $z_1 = -4 + 5i$ ,  $z_2 = -3 + i$ .

**6.27.**  $z_1 = 2 + 5i$ ,  $z_2 = 3 - i$ .

**6.28.**  $z_1 = -5 + 4i$ ,  $z_2 = 4 - 3i$ .

**6.29.**  $z_1 = 3 + 5i$ ,  $z_2 = 4 + 3i$ .

**6.30.**  $z_1 = 4 + 5i$ ,  $z_2 = -3 - 7i$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 14

**Завдання 7.** Записати комплексне число  $z$  :

1) в алгебраїчній формі; 2) в тригонометричній формі;

3) в показниковій формі. Знайти  $z^5$  та  $\sqrt{z}$ .

$$7.1. z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$7.2. z = \frac{2}{1 + i}$$

$$7.3. z = \frac{-2}{\sqrt{3} - i}$$

$$7.4. z = \frac{8}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

$$7.5. z = \frac{2\sqrt{2}}{-1 + i}$$

$$7.6. z = \frac{4}{\sqrt{3} + i}$$

$$7.7. z = \frac{-3}{1 + \sqrt{3}i}$$

$$7.8. z = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

$$7.9. z = \frac{1}{-1 - i}$$

$$7.10. z = -\frac{2}{-1 + \sqrt{3}i}$$

$$7.11. z = \frac{-8}{1 + i}$$

$$7.12. z = \frac{4}{-1 + \sqrt{3}i}$$

$$7.13. z = \frac{6}{-\sqrt{3} + i}$$

$$7.14. z = \frac{2}{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

$$7.15. z = \frac{2}{-1 - \sqrt{3}i}$$

$$7.16. z = \frac{4}{1 + \sqrt{3}i}$$

$$7.17. z = \frac{3}{1 - i}$$

$$7.18. z = \frac{3}{\sqrt{3} + i}$$

$$7.19. z = \frac{6}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

$$7.20. z = \frac{4}{-1 + \sqrt{3}i}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 15

$$7.21. z = \frac{2}{-\sqrt{3} + i}$$

$$7.22. z = \frac{6}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$7.23. z = \frac{8}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

$$7.24. z = \frac{8}{2 + 2i}$$

$$7.25. z = -\frac{5}{-1 - \sqrt{3}i}$$

$$7.26. z = \frac{-9}{3 + 3i}$$

$$7.27. z = \frac{10}{1 + \sqrt{3}i}$$

$$7.28. z = \frac{12}{\sqrt{3} + i}$$

$$7.29. z = \frac{8}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

$$7.30. z = \frac{4}{-1 - \sqrt{3}i}$$

**Завдання 8.** Виконати дії

8.1. а)  $(1 + 3i)(2 - 4i) + (-1 + 3i)^2$

б)  $\frac{2 + 3i}{3 - 4i} + \frac{-1 + 2i}{2 + i}$

в)  $(-1 + i\sqrt{3})^5$

г)  $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$

8.2. а)  $(2 - 5i)(2 + i) + (3 + 2i)^2$

б)  $\frac{3 + i}{1 - 3i} + \frac{-5 + 6i}{4 + 2i}$

в)  $(-2 + 2i)^4$

г)  $\sqrt[3]{16 - 16i}$

8.3. а)  $(2 + i)(3 - 2i) + (2 - 3i)^2$

б)  $\frac{-2 + i}{3 + 4i} + \frac{3 + 2i}{2 - i}$

в)  $(-1 - i\sqrt{3})^5$

г)  $\sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$

8.4. а)  $(12 - 3i)(1 + i) + (4 - i)^2$

б)  $\frac{4 - 3i}{1 + i} + \frac{-5 + 2i}{4 + 2i}$

в)  $(2 - 2i)^4$

г)  $\sqrt[3]{16 + 16i}$

8.5. а)  $(1 + 3i)(2 - 4i) + (-1 + 3i)^2$

б)  $\frac{2 + 3i}{3 - 4i} + \frac{-1 + 2i}{2 + i}$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 16

$v) (-1 + i\sqrt{3})^5$	$z) \sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$
<b>8.6. a)</b> $(2 - 5i)(2 + i) + (3 + 2i)^2$	$\bar{b}) \frac{3 + i}{1 - 3i} + \frac{-5 + 6i}{4 + 2i}$
$v) (-2 + 2i)^4$	$z) \sqrt[3]{16 - 16i}$
<b>8.7. a)</b> $(2 + i)(3 - 2i) + (2 - 3i)^2$	$\bar{b}) \frac{-2 + i}{3 + 4i} + \frac{3 + 2i}{2 - i}$
$v) (-1 - i\sqrt{3})^5$	$z) \sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$
<b>8.8. a)</b> $(12 - 3i)(1 + i) + (4 - i)^2$	$\bar{b}) \frac{4 - 3i}{1 + i} + \frac{-5 + 2i}{4 + 2i}$
$v) (2 - 2i)^4$	$z) \sqrt[3]{16 + 16i}$
<b>8.9. a)</b> $(1 + 3i)(2 - 4i) + (-1 + 3i)^2$	$\bar{b}) \frac{2 + 3i}{3 - 4i} + \frac{-1 + 2i}{2 + i}$
$v) (-1 + i\sqrt{3})^5$	$z) \sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$
<b>8.10. a)</b> $(2 - 5i)(2 + i) + (3 + 2i)^2$	$\bar{b}) \frac{3 + i}{1 - 3i} + \frac{-5 + 6i}{4 + 2i}$
$v) (-2 + 2i)^4$	$z) \sqrt[3]{16 - 16i}$
<b>8.11. a)</b> $(2 + i)(3 - 2i) + (2 - 3i)^2$	$\bar{b}) \frac{-2 + i}{3 + 4i} + \frac{3 + 2i}{2 - i}$
$v) (-1 - i\sqrt{3})^5$	$z) \sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$
<b>8.12. a)</b> $(12 - 3i)(1 + i) + (4 - i)^2$	$\bar{b}) \frac{4 - 3i}{1 + i} + \frac{-5 + 2i}{4 + 2i}$
$v) (2 - 2i)^4$	$z) \sqrt[3]{16 + 16i}$
<b>8.13. a)</b> $(1 + 3i)(2 - 4i) + (-1 + 3i)^2$	$\bar{b}) \frac{2 + 3i}{3 - 4i} + \frac{-1 + 2i}{2 + i}$
$v) (-1 + i\sqrt{3})^5$	$z) \sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$
<b>8.14. a)</b> $(2 - 5i)(2 + i) + (3 + 2i)^2$	$\bar{b}) \frac{3 + i}{1 - 3i} + \frac{-5 + 6i}{4 + 2i}$
$v) (-2 + 2i)^4$	$z) \sqrt[3]{16 - 16i}$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 17

- 8.15. а)  $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$  б)  $\frac{-2+i}{3+4i} + \frac{3+2i}{2-i}$   
в)  $(-1-i\sqrt{3})^5$  г)  $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$
- 8.16. а)  $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$  б)  $\frac{4-3i}{1+i} + \frac{-5+2i}{4+2i}$   
в)  $(2-2i)^4$  г)  $\sqrt[3]{16+16i}$
- 8.17. а)  $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$  б)  $\frac{2+3i}{3-4i} + \frac{-1+2i}{2+i}$   
в)  $(-1+i\sqrt{3})^5$  г)  $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$
- 8.18. а)  $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$  б)  $\frac{3+i}{1-3i} + \frac{-5+6i}{4+2i}$   
в)  $(-2+2i)^4$  г)  $\sqrt[3]{16-16i}$
- 8.19. а)  $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$  б)  $\frac{-2+i}{3+4i} + \frac{3+2i}{2-i}$   
в)  $(-1-i\sqrt{3})^5$  г)  $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$
- 8.20. а)  $(12-3i)(1+i)+(4-i)^2$  б)  $\frac{4-3i}{1+i} + \frac{-5+2i}{4+2i}$   
в)  $(2-2i)^4$  г)  $\sqrt[3]{16+16i}$
- 8.21. а)  $(1+3i)(2-4i)+(-1+3i)^2$  б)  $\frac{2+3i}{3-4i} + \frac{-1+2i}{2+i}$   
в)  $(-1+i\sqrt{3})^5$  г)  $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$
- 8.22. а)  $(2-5i)(2+i)+(3+2i)^2$  б)  $\frac{3+i}{1-3i} + \frac{-5+6i}{4+2i}$   
в)  $(-2+2i)^4$  г)  $\sqrt[3]{16-16i}$
- 8.23. а)  $(2+i)(3-2i)+(2-3i)^2$  б)  $\frac{-2+i}{3+4i} + \frac{3+2i}{2-i}$   
в)  $(-1-i\sqrt{3})^5$  г)  $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 18

$$8.24. a) (12 - 3i)(1 + i) + (4 - i)^2$$

$$в) (2 - 2i)^4$$

$$8.25. a) (1 + 3i)(2 - 4i) + (-1 + 3i)^2$$

$$в) (-1 + i\sqrt{3})^5$$

$$8.26. a) (2 - 5i)(2 + i) + (3 + 2i)^2$$

$$в) (-2 + 2i)^4$$

$$8.27. a) (2 + i)(3 - 2i) + (2 - 3i)^2$$

$$в) (-1 - i\sqrt{3})^5$$

$$8.28. a) (12 - 3i)(1 + i) + (4 - i)^2$$

$$в) (2 - 2i)^4$$

$$8.29. a) (1 + 3i)(2 - 4i) + (-1 + 3i)^2$$

$$в) (-1 + i\sqrt{3})^5$$

$$8.30. a) (2 - 5i)(2 + i) + (3 + 2i)^2$$

$$в) (-2 + 2i)^4$$

$$б) \frac{4 - 3i}{1 + i} + \frac{-5 + 2i}{4 + 2i}$$

$$г) \sqrt[3]{16 + 16i}$$

$$б) \frac{2 + 3i}{3 - 4i} + \frac{-1 + 2i}{2 + i}$$

$$г) \sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$$

$$б) \frac{3 + i}{1 - 3i} + \frac{-5 + 6i}{4 + 2i}$$

$$г) \sqrt[3]{16 - 16i}$$

$$б) \frac{-2 + i}{3 + 4i} + \frac{3 + 2i}{2 - i}$$

$$г) \sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$$

$$б) \frac{4 - 3i}{1 + i} + \frac{-5 + 2i}{4 + 2i}$$

$$г) \sqrt[3]{16 + 16i}$$

$$б) \frac{2 + 3i}{3 - 4i} + \frac{-1 + 2i}{2 + i}$$

$$г) \sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$$

$$б) \frac{3 + i}{1 - 3i} + \frac{-5 + 6i}{4 + 2i}$$

$$г) \sqrt[3]{16 - 16i}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 19

### Векторна алгебра

**Завдання 9.** Дано вектори  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ . Знайти: 1)  $\vec{a} + \vec{b}$ ; 2)  $\vec{a} - \vec{b}$ ;

3)  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ; 4) скалярний добуток векторів  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; 5) векторний добуток

$\vec{a} \times \vec{b}$ ; 6)  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$ ; 7)  $(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 3\vec{b})$ .

**9.1.**  $\vec{a} = (3; -2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-5; 4; 2)$ .

**9.2.**  $\vec{a} = (-4; -1; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; -4; 1)$ .

**9.3.**  $\vec{a} = (-3; 2; 4)$ ,  $\vec{b} = (1; -3; 5)$ .

**9.4.**  $\vec{a} = (2; -1; 4)$ ,  $\vec{b} = (3; -1; 5)$ .

**9.5.**  $\vec{a} = (-6; 2; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; -4)$ .

**9.6.**  $\vec{a} = (2; 3; -2)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; -4)$ .

**9.7.**  $\vec{a} = (3; -5; 2)$ ,  $\vec{b} = (-2; 3; 1)$ .

**9.8.**  $\vec{a} = (-4; 2; -3)$ ,  $\vec{b} = (1; -4; 1)$ .

**9.9.**  $\vec{a} = (4; -3; 5)$ ,  $\vec{b} = (2; -5; 1)$ .

**9.10.**  $\vec{a} = (1; -4; 5)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; 6)$ .

**9.11.**  $\vec{a} = (-1; 2; -3)$ ,  $\vec{b} = (-2; 4; -3)$ .

**9.12.**  $\vec{a} = (2; -4; 5)$ ,  $\vec{b} = (1; -2; 2)$ .

**9.13.**  $\vec{a} = (3; -2; 3)$ ,  $\vec{b} = (-1; 5; -2)$ .

**9.14.**  $\vec{a} = (4; -1; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; -3; 3)$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 20

9.15.  $\vec{a}=(1;-2;3)$ ,  $\vec{b}=(1;1;3)$ .

9.16.  $\vec{a}=(-5;-2;-1)$ ,  $\vec{b}=(4;-4;-2)$ .

9.17.  $\vec{a}=(2;-5;-1)$ ,  $\vec{b}=(-3;5;1)$ .

9.18.  $\vec{a}=(3;-2;5)$ ,  $\vec{b}=(-7;3;-5)$ .

9.19.  $\vec{a}=(2;-1;-4)$ ,  $\vec{b}=(-3;-1;-5)$ .

9.20.  $\vec{a}=(-1;2;-3)$ ,  $\vec{b}=(5;-6;4)$ .

9.21.  $\vec{a}=(2;3;2)$ ,  $\vec{b}=(-1;-5;-4)$ .

9.22.  $\vec{a}=(7;-5;-2)$ ,  $\vec{b}=(8;-3;1)$ .

9.23.  $\vec{a}=(-4;0;-1)$ ,  $\vec{b}=(2;-4;-1)$ .

9.24.  $\vec{a}=(4;-3;0)$ ,  $\vec{b}=(-2;6;1)$ .

9.25.  $\vec{a}=(1;4;-6)$ ,  $\vec{b}=(-2;-1;4)$ .

9.26.  $\vec{a}=(-3;5;-3)$ ,  $\vec{b}=(2;4;3)$ .

9.27.  $\vec{a}=(5;-4;-3)$ ,  $\vec{b}=(1;-2;2)$ .

9.28.  $\vec{a}=(-3;4;5)$ ,  $\vec{b}=(-2;5;-2)$ .

9.29.  $\vec{a}=(2;-1;3)$ ,  $\vec{b}=(7;-3;1)$ .

9.30.  $\vec{a}=(0;-4;3)$ ,  $\vec{b}=(-5;4;-3)$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 21

**Завдання 10.** Дано координати вершин трикутника  $A_1A_2A_3$ . Знайти внутрішній кут трикутника при вершині  $A_2$ .

10.1.  $A_1$  3;1;2 ,  $A_2$  5;0;-1 ,  $A_3$  0;3;6 .

10.2.  $A_1$  3;1;4 ,  $A_2$  -1;6;1 ,  $A_3$  -1;1;6 .

10.3.  $A_1$  3;3;9 ,  $A_2$  6;9;1 ,  $A_3$  1;7;3 .

10.4.  $A_1$  2;4;3 ,  $A_2$  7;6;3 ,  $A_3$  4;9;3 .

10.5.  $A_1$  9;5;5 ,  $A_2$  -3;7;1 ,  $A_3$  5;7;8 .

10.6.  $A_1$  0;7;1 ,  $A_2$  4;1;5 ,  $A_3$  4;6;3 .

10.7.  $A_1$  5;5;4 ,  $A_2$  3;8;4 ,  $A_3$  3;5;10 .

10.8.  $A_1$  6;1;1 ,  $A_2$  4;6;6 ,  $A_3$  4;2;0 .

10.9.  $A_1$  7;5;3 ,  $A_2$  9;4;4 ,  $A_3$  4;5;7 .

10.10.  $A_1$  6;6;2 ,  $A_2$  5;4;7 ,  $A_3$  2;4;7 .

10.11.  $A_1$  -4;6;4 ,  $A_2$  2;1;5 ,  $A_3$  -1;-2;2 .

10.12.  $A_1$  2;-1;9 ,  $A_2$  1;1;5 ,  $A_3$  7;3;1 .

10.13.  $A_1$  1;-2;2 ,  $A_2$  -1;-3;4 ,  $A_3$  5;5;-1 .

10.14.  $A_1$  1;1;3 ,  $A_2$  7;1;1 ,  $A_3$  4;1;-1 .

10.15.  $A_1$  -3;1;-2 ,  $A_2$  2;0;-1 ,  $A_3$  3;4;-5 .

10.16.  $A_1$  -3;1;2 ,  $A_2$  5;2;-1 ,  $A_3$  1;-3;5 .

10.17.  $A_1$  -2;1;0 ,  $A_2$  1;-5;1 ,  $A_3$  3;1;4 .

10.18.  $A_1$  3;-3;1 ,  $A_2$  2;-4;1 ,  $A_3$  -1;2;3 .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 22

$$10.19. A_1 2; -4; 3, A_2 0; 5; 3, A_3 2; -3; 3 .$$

$$10.20. A_1 1; 2; 5, A_2 -2; 1; 1, A_3 3; 7; 2 .$$

$$10.21. A_1 0; 2; 1, A_2 -4; 1; -5, A_3 2; -1; 3 .$$

$$10.22. A_1 3; -5; 4, A_2 3; 8; 4, A_3 5; -1; 6 .$$

$$10.23. A_1 4; 1; 1, A_2 4; 6; 6, A_3 7; 6; 10 .$$

$$10.24. A_1 -2; 5; -3, A_2 2; 2; -3, A_3 5; 2; 1 .$$

$$10.25. A_1 3; 3; -2, A_2 5; 5; -1, A_3 2; 5; 3 .$$

$$10.26. A_1 -2; 5; 4, A_2 1; 1; 4, A_3 5; -2; 4 .$$

$$10.27. A_1 -2; -1; 5, A_2 1; 3; 5, A_3 7; 3; 1 .$$

$$10.28. A_1 1; -2; -2, A_2 1; 1; 2, A_3 5; 4; 7 .$$

$$10.29. A_1 1; 2; 3, A_2 5; 5; 3, A_3 4; 3; 5 .$$

$$10.30. A_1 -3; 1; 2, A_2 2; 4; -2, A_3 3; 2; 0 .$$

**Завдання 11.** Дано координати вершин піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ . Знайти площу грані  $A_1A_2A_3$ , об'єм піраміди та висоту піраміди  $A_4H$ .

$$11.1. A_1 7; 0; 3, A_2 3; 0; -1, A_3 3; 0; 5, A_4 4; 3; -2 .$$

$$11.2. A_1 1; -1; 6, A_2 2; 5; -2, A_3 -3; 3; 3, A_4 4; 1; 5 .$$

$$11.3. A_1 3; 6; 1, A_2 6; 1; 4, A_3 3; -6; 10, A_4 7; 5; 4 .$$

$$11.4. A_1 1; 1; 3, A_2 4; 1; 6, A_3 6; 4; 1, A_4 0; 5; 6 .$$

$$11.5. A_1 4; 4; 5, A_2 10; 2; 3, A_3 -3; 5; 4, A_4 6; -2; 2 .$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 23

11.6.  $A_1 -1;2;5$  ,  $A_2 -4;6;4$  ,  $A_3 2;1;5$  ,  $A_4 -1;-2;2$  .

11.7.  $A_1 2;-1;9$  ,  $A_2 1;1;5$  ,  $A_3 7;3;1$  ,  $A_4 2;6;-2$  .

11.8.  $A_1 1;-2;2$  ,  $A_2 -1;-3;4$  ,  $A_3 5;5;-1$  ,  $A_4 2;4;-5$  .

11.9.  $A_1 1;1;3$  ,  $A_2 7;1;1$  ,  $A_3 2;2;2$  ,  $A_4 4;1;-1$  .

11.10.  $A_1 -3;1;-2$  ,  $A_2 2;0;-1$  ,  $A_3 0;-2;6$  ,  $A_4 3;4;-5$  .

11.11.  $A_1 1;8;2$  ,  $A_2 5;2;6$  ,  $A_3 5;7;4$  ,  $A_4 4;10;9$  .

11.12.  $A_1 6;6;5$  ,  $A_2 4;9;5$  ,  $A_3 4;6;11$  ,  $A_4 6;9;3$  .

11.13.  $A_1 7;2;2$  ,  $A_2 -5;7;-7$  ,  $A_3 5;-3;1$  ,  $A_4 2;3;7$  .

11.14.  $A_1 8;-6;4$  ,  $A_2 10;5;-5$  ,  $A_3 5;6;-8$  ,  $A_4 8;10;7$  .

11.15.  $A_1 1;-2;7$  ,  $A_2 4;2;10$  ,  $A_3 2;3;5$  ,  $A_4 5;3;7$  .

11.16.  $A_1 -2;0;3$  ,  $A_2 0;0;-1$  ,  $A_3 3;0;-5$  ,  $A_4 4;-3;-2$  .

11.17.  $A_1 5;1;-2$  ,  $A_2 -2;5;-2$  ,  $A_3 -3;1;1$  ,  $A_4 2;1;5$  .

11.18.  $A_1 3;-2;1$  ,  $A_2 -1;1;4$  ,  $A_3 0;-6;3$  ,  $A_4 -7;0;2$  .

11.19.  $A_1 1;1;-2$  ,  $A_2 3;-1;6$  ,  $A_3 4;3;2$  ,  $A_4 -1;5;6$  .

11.20.  $A_1 3;3;5$  ,  $A_2 7;3;2$  ,  $A_3 -1;7;5$  ,  $A_4 -3;1;2$  .

11.21.  $A_1 -1;2;-1$  ,  $A_2 4;2;4$  ,  $A_3 7;-1;4$  ,  $A_4 -1;-2;2$  .

11.22.  $A_1 3;-1;3$  ,  $A_2 -1;1;5$  ,  $A_3 2;3;1$  ,  $A_4 -2;5;2$  .

11.23.  $A_1 -3;2;2$  ,  $A_2 4;-3;1$  ,  $A_3 2;2;-1$  ,  $A_4 1;7;-5$  .

11.24.  $A_1 -1;1;3$  ,  $A_2 -2;1;-1$  ,  $A_3 1;5;2$  ,  $A_4 5;-4;3$  .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 24

**11.25.**  $A_1$  3;1;2 ,  $A_2$  -2;0;-1 ,  $A_3$  0;0;0 ,  $A_4$  -3;2;2 .

**11.26.**  $A_1$  1;4;2 ,  $A_2$  -5;2;1 ,  $A_3$  0;3;0 ,  $A_4$  2;-3;9 .

**11.27.**  $A_1$  3;3;3 ,  $A_2$  7;-2;6 ,  $A_3$  2;1;2 ,  $A_4$  -3;-6;3 .

**11.28.**  $A_1$  1;1;1 ,  $A_2$  0;2;-5 ,  $A_3$  2;-3;1 ,  $A_4$  -2;3;7 .

**11.29.**  $A_1$  3;1;4 ,  $A_2$  7;5;6 ,  $A_3$  10;8;6 ,  $A_4$  -3;1;-7 .

**11.30.**  $A_1$  1;0;2 ,  $A_2$  4;4;2 ,  $A_3$  1;3;4 ,  $A_4$  -5;3;-2 .



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 25

### Аналітична геометрія

**Завдання 12.** Дано координати вершин трикутника  $ABC$ . Знайти:

- 1) рівняння сторони  $AB$ ; 2) рівняння висоти  $CH$ ;
- 3) рівняння медіани  $BM$ ; 4) точку перетину медіани  $BM$  і висоти  $CH$ ;
- 5) рівняння середньої лінії трикутника, яка паралельна до сторони  $AB$ .

12.1.  $A 7;3, B 3;-1, C 3;5$ .

12.2.  $A 1;-1, B 2;5, C -3;3$ .

12.3.  $A 3;6, B 6;1, C 3;-6$ .

12.4.  $A 1;3, B 1;6, C 6;2$ .

12.5.  $A 4;5, B 2;3, C -3;4$ .

12.6.  $A -1;2, B -4;6, C 2;1$ .

12.7.  $A 2;-1, B 1;5, C 3;1$ .

12.8.  $A 1;-2, B -1;-3, C 5;-1$ .

12.9.  $A 1;3, B 7;1, C 2;-2$ .

12.10.  $A 3;2, B 5;-1, C 0;6$ .

12.11.  $A 2;3, B -2;5, C -2;-1$ .

12.12.  $A 2;3, B -1;4, C -3;2$ .

12.13.  $A 3;-2, B 2;-3, C -5;-2$ .

12.14.  $A -3;1, B -5;2, C 1;-1$ .

12.15.  $A -3;-2, B 2;-2, C 1;4$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 26

12.16.  $A -1;3$  ,  $B 3;1$  ,  $C -3;2$  .

12.17.  $A 1;0$  ,  $B 2;4$  ,  $C -2;5$  .

12.18.  $A -3;5$  ,  $B 7;2$  ,  $C 1;2$  .

12.19.  $A -1;-1$  ,  $B 1;5$  ,  $C -4;2$  .

12.20.  $A -3;5$  ,  $B 2;-2$  ,  $C 0;4$  .

12.21.  $A 1;2$  ,  $B -3;-3$  ,  $C 0;1$  .

12.22.  $A -2;-1$  ,  $B -1;5$  ,  $C 3;-1$  .

12.23.  $A 0;-2$  ,  $B 1;-3$  ,  $C -5;4$  .

12.24.  $A 1;1$  ,  $B 4;5$  ,  $C 5;-2$  .

12.25.  $A 3;2$  ,  $B 4;-2$  ,  $C 1;6$  .

12.26.  $A -2;3$  ,  $B 2;-5$  ,  $C 2;7$  .

12.27.  $A 2;0$  ,  $B -1;4$  ,  $C 3;7$  .

12.28.  $A -1;-2$  ,  $B 2;-3$  ,  $C 5;3$  .

12.29.  $A 3;-1$  ,  $B -5;2$  ,  $C 4;3$  .

12.30.  $A -1;-1$  ,  $B 2;-2$  ,  $C 5;7$  .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/27

**Завдання 13.** Дано координати вершин піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ . Знайти:

- 1) довжину сторони  $A_1A_2$ ; 2) рівняння прямої  $A_1A_2$ ;  
3) рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ; 4) рівняння висоти  $A_4O$ ; 5) рівняння  
прямої, що проходить через точку  $A_4$ , паралельно площині  $A_1A_2A_3$ .

**13.1.**  $A_1$  4;2;5,  $A_2$  0;7;2,  $A_3$  0;2;7,  $A_4$  1;5;0.

**13.2.**  $A_1$  4;4;10,  $A_2$  4;10;2,  $A_3$  2;8;4,  $A_4$  9;6;9.

**13.3.**  $A_1$  4;6;5,  $A_2$  6;9;4,  $A_3$  2;10;10,  $A_4$  7;5;9.

**13.4.**  $A_1$  3;5;4,  $A_2$  8;7;4,  $A_3$  5;10;4,  $A_4$  4;7;8.

**13.5.**  $A_1$  10;6;6,  $A_2$  -2;8;2,  $A_3$  6;8;9,  $A_4$  7;10;3.

**13.6.**  $A_1$  1;8;2,  $A_2$  5;2;6,  $A_3$  5;7;4,  $A_4$  4;10;9.

**13.7.**  $A_1$  6;6;5,  $A_2$  4;9;5,  $A_3$  4;6;11,  $A_4$  6;9;3.

**13.8.**  $A_1$  7;2;2,  $A_2$  5;7;7,  $A_3$  5;3;1,  $A_4$  2;3;7.

**13.9.**  $A_1$  8;6;4,  $A_2$  10;5;5,  $A_3$  5;6;8,  $A_4$  8;10;7.

**13.10.**  $A_1$  7;7;3,  $A_2$  6;5;8,  $A_3$  3;5;8,  $A_4$  8;4;1.

**13.11.**  $A_1$  4;2;5,  $A_2$  0;7;1,  $A_3$  0;2;7,  $A_4$  1;5;0.

**13.12.**  $A_1$  4;4;10,  $A_2$  7;10;2,  $A_3$  2;8;4,  $A_4$  9;6;9.

**13.13.**  $A_1$  4;6;5,  $A_2$  6;9;4,  $A_3$  2;10;10,  $A_4$  7;5;9.

**13.14.**  $A_1$  3;5;4,  $A_2$  8;7;4,  $A_3$  5;10;4,  $A_4$  4;7;8.

**13.15.**  $A_1$  1;8;2,  $A_2$  5;2;6,  $A_3$  5;7;4,  $A_4$  4;10;9.

**13.16.**  $A_1$  -2;0;3,  $A_2$  0;0;-1,  $A_3$  3;0;-5,  $A_4$  4;-3;-2.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/28

13.17.  $A_1$  5;1;-2 ,  $A_2$  -2;5;-2 ,  $A_3$  -3;1;1 ,  $A_4$  2;1;5 .

13.18.  $A_1$  3;-2;1 ,  $A_2$  -1;1;4 ,  $A_3$  0;-6;3 ,  $A_4$  -7;0;2 .

13.19.  $A_1$  1;1;-2 ,  $A_2$  3;-1;6 ,  $A_3$  4;3;2 ,  $A_4$  -1;5;6 .

13.20.  $A_1$  3;3;5 ,  $A_2$  7;3;2 ,  $A_3$  -1;7;5 ,  $A_4$  -3;1;2 .

13.21.  $A_1$  -1;2;-1 ,  $A_2$  4;2;4 ,  $A_3$  7;-1;4 ,  $A_4$  -1;-2;2 .

13.22.  $A_1$  3;-1;3 ,  $A_2$  -1;1;5 ,  $A_3$  2;3;1 ,  $A_4$  -2;5;2 .

13.23.  $A_1$  -3;2;2 ,  $A_2$  4;-3;1 ,  $A_3$  2;2;-1 ,  $A_4$  1;7;-5 .

13.24.  $A_1$  -1;1;3 ,  $A_2$  -2;1;-1 ,  $A_3$  1;5;2 ,  $A_4$  5;-4;3 .

13.25.  $A_1$  3;1;2 ,  $A_2$  -2;0;-1 ,  $A_3$  0;0;0 ,  $A_4$  -3;2;2 .

13.26.  $A_1$  1;4;2 ,  $A_2$  -5;2;1 ,  $A_3$  0;3;0 ,  $A_4$  2;-3;9 .

13.27.  $A_1$  3;3;3 ,  $A_2$  7;-2;6 ,  $A_3$  2;1;2 ,  $A_4$  -3;-6;3 .

13.28.  $A_1$  1;1;1 ,  $A_2$  0;2;-5 ,  $A_3$  2;-3;1 ,  $A_4$  -2;3;7 .

13.29.  $A_1$  3;1;4 ,  $A_2$  7;5;6 ,  $A_3$  10;8;6 ,  $A_4$  -3;1;-7 .

13.30.  $A_1$  1;0;2 ,  $A_2$  4;4;2 ,  $A_3$  1;3;4 ,  $A_4$  -5;3;-2 .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 29

### Вступ до аналізу

**Завдання 14.** Знайти область визначення функції.

$$14.1. y = \frac{x-6}{x^2-3x+2}.$$

$$14.2. y = \frac{\sqrt{3-x}}{9+4x^2}.$$

$$14.3. y = \frac{2\cos x}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$$14.4. y = x \ln(4-x^2).$$

$$14.5. y = x - \frac{5}{\sqrt{1-x}}.$$

$$14.6. y = \frac{x^2}{\cos x - 1,5}.$$

$$14.7. y = \frac{\sin x}{2^x - 4}.$$

$$14.8. y = \frac{2^x}{27+x^3}.$$

$$14.9. y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}.$$

$$14.10. y = \frac{x+4}{\ln x}.$$

$$14.11. y = \frac{x^2-4}{\frac{\pi}{4} - \arctg x}.$$

$$14.12. y = \frac{\sqrt{x+2}}{3^x-1}.$$

$$14.13. y = \frac{2x-5}{8-x^3}.$$

$$14.14. y = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-9}.$$

$$14.15. y = \frac{x+4}{\log_2 x + 1}.$$

$$14.16. y = \frac{3x+4}{2x^2+3x-14}.$$

$$14.17. y = \frac{\sqrt{6+2x}}{1+9x^2}.$$

$$14.18. y = \frac{2\sin x}{\sqrt[3]{3x-12}}.$$

$$14.19. y = x\sqrt{4-x^2}.$$

$$14.20. y = \ln x - \frac{3}{\sqrt{2-x}}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 30

$$14.21. y = \frac{3x^2}{\sin x - 1,5}.$$

$$14.22. y = \frac{\ln x}{2^x - 8}.$$

$$14.23. y = \frac{e^x}{8 - x^3}.$$

$$14.24. y = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 - 4}.$$

$$14.25. y = \frac{3x+4}{\ln(2x-3)}.$$

$$14.26. y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{2x^2 - 8}}.$$

$$14.27. y = \frac{\sqrt{3x+6}}{3^x - 9}.$$

$$14.28. y = \frac{2x-5}{\sqrt{8-x^3}}.$$

$$14.29. y = \frac{\sqrt{3x+12}}{x^2 - 4}.$$

$$14.30. y = \frac{x+3}{\log_2(x+1)}.$$

**Завдання 15.** Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя.

$$15.1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$15.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}.$$

$$15.3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}.$$

$$15.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}.$$

$$15.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}.$$

$$15.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}.$$

$$15.7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$15.8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}.$$

$$15.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}.$$

$$15.10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$15.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}.$$

$$15.12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 31

$$15.13. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x - 4}.$$

$$15.14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$15.15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$15.16. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 7x - 15}$$

$$15.17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x - 3x^2 - 1}$$

$$15.18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 5x - 12}$$

$$15.19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 3x - 14}{3x^2 - 8x + 4}$$

$$15.20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{4 - 3x^2 - x}$$

$$15.21. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$$

$$15.22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}$$

$$15.23. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 9}$$

$$15.24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 10x + 8}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$15.25. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 3x - 4}$$

$$15.26. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + 5x + 2}$$

$$15.27. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}$$

$$15.28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 4x - 4}$$

$$15.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{2x^2 + x - 3}$$

$$15.30. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}$$

**Завдання 16.** Знайти границю, не використовуючи правило Лопітала.

$$16.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^3 + 2x - 4}.$$

$$16.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 4x - 3}{4x^2 - x - 6}.$$

$$16.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 3}{-5x^2 + x + 2}.$$

$$16.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x - 1}{x^4 - 6x + 1}.$$

$$16.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x + 1}{2x^3 + 2x - 4}.$$

$$16.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x - 3}{4x^5 - x + 6}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 32

$$16.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{-3x^3 + 4x + 14}.$$

$$16.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^4 - 7x - 1}{9x^3 - 6x + 12}.$$

$$16.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{-3x^3 + 2x - 5}.$$

$$16.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x + 7}{4x^4 - 3x - 6}.$$

$$16.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x + 1}{4x^3 + 2x^2 - 5}.$$

$$16.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{-3x^2 + x - 2}.$$

$$16.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{3x^3 + x - 2}.$$

$$16.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x + 1}{x^4 - 3x + 1}.$$

$$16.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{4x^3 + 3x - 2}.$$

$$16.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + 2x - 1}{3x^3 + x - 4}.$$

$$16.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{-3x^3 + 8x - 4}.$$

$$16.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{7x^2 + 2x - 6}.$$

$$16.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - 4x - 3}{-5x^7 + 3x + 2}.$$

$$16.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 21}{-6x^4 + x + 1}.$$

$$16.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 4x + 1}{2x^5 - 3x - 4}.$$

$$16.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 3}{-5x^2 + x - 5}.$$

$$16.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 5}{4x^2 + x + 2}.$$

$$16.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x - 1}{7x^4 - x + 2}.$$

$$16.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{-2x^3 + x + 5}.$$

$$16.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3 - 3x^4}{x^5 - x + 6}.$$

$$16.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 2 - 3x^2}.$$

$$16.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x + 4}{2x^4 + x - 3}.$$

$$16.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x - 1}{2x^2 - x + 4}.$$

$$16.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 3}{-5x^2 + 2x + 7}.$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 33

**Завдання 17.** Знайти границю, не використовуючи правило

Лопітала.

$$17.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{4-3x}-1}$$

$$17.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$$

$$17.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4-3x^2}-1}{x^2+x}$$

$$17.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$$

$$17.5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$$

$$17.6. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}$$

$$17.7. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$$

$$17.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x-2x^2}$$

$$17.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{5x}$$

$$17.10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$$

$$17.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{6-x}-2}$$

$$17.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}{x+x^2}$$

$$17.13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}$$

$$17.14. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2x+3}-1}$$

$$17.15. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{2x+9}-1}$$

$$17.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{3x}$$

$$17.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2-x}$$

$$17.18. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$$

$$17.19. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{3-\sqrt{2-x}}{x^2-49}$$

$$17.20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{5-x^2}}{x^2-1}$$

$$17.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3}}{3x-6}$$

$$17.22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{x-3}$$

$$17.23. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-\sqrt{2+x}}{x+1}$$

$$17.24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{5-x^2}}{x-2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 34

$$17.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{4x}$$

$$17.26. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x^2 - 4}$$

$$17.27. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{4-x} - 3}{x+5}$$

$$17.28. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{x^2 - x + 2}$$

$$17.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{5x}$$

$$17.30. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-1} - 2}$$

**Завдання 18.** Знайти границю, скориставшись першою визначною границею.

$$18.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$18.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 2x}.$$

$$18.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

$$18.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin 2x}.$$

$$18.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} 4x}{\sin^2 2x}.$$

$$18.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$18.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{1 - \cos 3x}.$$

$$18.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{arcsin} 4x}.$$

$$18.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{2x^2}.$$

$$18.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin}^2 3x}{4x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$18.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$18.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\sin^2 5x}.$$

$$18.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x}{\operatorname{arcsin}^2 5x}.$$

$$18.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$18.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arcsin} 5x}{\sin^2 4x}.$$

$$18.16. \lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 5x$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 35

$$18.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x}$$

$$18.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$$

$$18.19. \lim_{x \rightarrow 0} 3x \cdot \operatorname{ctg} 7x$$

$$18.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{4x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$18.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \operatorname{tg} 4x}{1 - \cos^2 3x}$$

$$18.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$18.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$$

$$18.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\sin^2 3x}$$

$$18.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 5x}$$

$$18.26. \lim_{x \rightarrow 0} 8x \cdot \operatorname{ctg} 3x$$

$$18.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{4x \cdot \sin 3x}$$

$$18.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\arcsin^2 4x}$$

$$18.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{7x}$$

$$18.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$$

**Завдання 19.** Знайти границю, скориставшись другою визначною границею.

$$19.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-4} \right)^{2x}$$

$$19.2. \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{2-x}}$$

$$19.3. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{3}{x-1}}$$

$$19.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1}$$

$$19.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+5} \right)^{3x+2}$$

$$19.6. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$$

$$19.7. \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{x}{x-1}}$$

$$19.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{2x+3}$$

$$19.9. \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{5x}{x-2}}$$

$$19.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 36

$$19.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x+3} \right)^{3x-2}.$$

$$19.12. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$19.13. \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{3}{x-2}}.$$

$$19.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{2x-1}.$$

$$19.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-2}{4x+7} \right)^{2x}.$$

$$19.16. \lim_{x \rightarrow -1} (3+2x)^{\frac{2}{x+1}}$$

$$19.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{x} \right)^{3x-4}$$

$$19.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+5} \right)^x$$

$$19.19. \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{5}{x-1}}$$

$$19.20. \lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\frac{2x}{x-1}}$$

$$19.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x} \right)^{3x-4}$$

$$19.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{2+x} \right)^{1+2x}$$

$$19.23. \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{3}{x}}$$

$$19.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x} \right)^{x-3}$$

$$19.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x}{4x+1} \right)^{2x}$$

$$19.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x} \right)^{3x}$$

$$19.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+3} \right)^{4x}$$

$$19.28. \lim_{x \rightarrow -2} (3x+7)^{\frac{2}{x+2}}$$

$$19.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{2x-5}$$

$$19.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+5} \right)^{2x}$$

**Завдання 20.** Знайти точки розриву функції та дослідити їх характер:

$$20.1 \text{ а) } f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 1, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x-6}{(x+4)(x-5)^2}$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/37

$$20.2. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2 + 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12}$$

$$20.3. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$$

$$20.4. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7 - x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 + x - 20}$$

$$20.5. \text{ а) } f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 + x - 30}$$

$$20.6. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 7 - 3x, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2 - 49}{x^2 + x - 42}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/38

$$20.7. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{3-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

$$20.8. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2+3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

$$20.9. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2+1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

$$20.10. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

$$20.11. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 39

$$20.12. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

$$20.13. \text{ а) } f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x^2-1, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x-6}{(x+4)(x-5)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

$$20.14. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2+3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

$$20.15. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2+1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

$$20.16. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 40

$$20.17. \text{ а) } f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+x-30}$$

$$20.18. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

$$20.19. \text{ а) } f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x^2-1, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x-6}{(x+4)(x-5)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

$$20.20. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2+3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

$$20.21. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2+1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/41

$$20.22. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

$$20.23. \text{ а) } f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2+2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+x-30}$$

$$20.24. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

$$20.25. \text{ а) } f(x) = 3 + 2^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x^2-1, & 1 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x-6}{(x+4)(x-5)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

$$20.26. \text{ а) } f(x) = 2 + 7^{\frac{5}{3+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4, & x < -1 \\ x^2+3, & -1 \leq x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x-3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-16}{x^2+x-12}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	<b>Ф-20.07-</b> <b>05.02/2/122.00.1/Б/ОК7-</b> <b>2021</b>
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 42

$$20.27. \text{ а) } f(x) = 5 + 3^{\frac{x}{4-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ x^2 + 1, & -2 < x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2x-3}{(x+5)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

$$20.28. \text{ а) } f(x) = 1 + 4^{\frac{x+2}{1+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 7-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(x-4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+x-20}$$

$$20.29. \text{ а) } f(x) = -1 + 8^{\frac{x+3}{5+x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2+2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{4x-2}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+x-30}$$

$$20.30. \text{ а) } f(x) = 6 + 6^{\frac{8}{5-x}} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 7-3x, & 0 < x < 2 \\ x^2-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{5x-3}{(x-7)(x+3)^2} \quad \text{г) } f(x) = \frac{x^2-49}{x^2+x-42}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 43

### Диференціальне числення

**Завдання 21.** Продиференціювати задану функцію.

$$21.1. y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x$$

$$21.2. y = \frac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x$$

$$21.3. y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x$$

$$21.4. y = \frac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \operatorname{arcsin} x$$

$$21.5. y = \frac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x$$

$$21.6. y = \frac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x$$

$$21.7. y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x$$

$$21.8. y = \frac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x$$

$$21.9. y = \frac{1}{2x^4} - 5\sqrt{x^2} + 6\sin x$$

$$21.10. y = \frac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x$$

$$21.11. y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt{x^2} - 2\operatorname{arccos} x$$

$$21.12. y = \frac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5 \cdot 4^x$$

$$21.13. y = \frac{2}{5}x^5 + 8\sqrt{x} - 3\operatorname{arccotg} x$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 44

$$21.14. y = \frac{1}{2}x^4 + 6\sqrt{x^2} - 4\log_3 x.$$

$$21.15. y = 7x^3 + 3\sqrt{x^5} - 3^x.$$

$$21.16. y = \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x^2}$$

$$21.17. y = \frac{x^5}{4} - \frac{3}{x^4} - \frac{2}{x} + 5\sqrt[3]{x^2}$$

$$21.18. y = \frac{3}{x^4} - 4x^3 + \frac{5}{x} + \sqrt[5]{x^3}$$

$$21.19. y = \frac{3}{7}x^8 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[4]{x^3}$$

$$21.20. y = \frac{x^7}{6} - \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x} + 7\sqrt[3]{x^2}$$

$$21.21. y = \frac{3}{x^4} - 5x^7 + \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^4}$$

$$21.22. y = x^3 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^5} + 4\sqrt[4]{x^5}$$

$$21.23. y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} + 7\sqrt[3]{x}$$

$$21.24. y = \frac{2}{x^4} - 7x^6 + \frac{5}{x} + 8\sqrt{x^5}$$

$$21.25. y = 3x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 6\sqrt{x^3}$$

$$21.26. y = 10x^4 - \frac{5}{x^3} - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 45

$$21.27. y = \frac{8}{x^3} - 15x^6 + \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^7}$$

$$21.28. y = 9x^4 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^5} + \sqrt{x^7}$$

$$21.29. y = \frac{x^7}{7} - \frac{5}{x^3} - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x^5}$$

$$21.30. y = \frac{2}{x^5} - 14x^5 + \frac{5}{x} + \sqrt[5]{x^9}$$

**Завдання 22.** Продиференціювати задану функцію.

$$22.1. y = \sqrt[3]{3x^2 + 5x - 4}$$

$$22.2. y = \cos(4x^2 + 3x - 2)$$

$$22.3. y = c \operatorname{tg}(2x^2 + x - 4)$$

$$22.4. y = \ln(2x^2 - 3x + 5)$$

$$22.5. y = \sqrt{x^3 - 4x + 5}$$

$$22.6. y = \operatorname{tg}(3x^2 + x - 2)$$

$$22.7. y = \operatorname{arctg}(2x^2 - 1)$$

$$22.8. y = 3^{2x^3 - 4x + 3}$$

$$22.9. y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$22.10. y = \arccos(3x^2 + 5)$$

$$22.11. y = \log_3(2x^2 - 4x + 3)$$

$$22.12. y = 2e^{4x^2 + 3x - 2}$$

$$22.13. y = \sqrt[3]{(2x^2 + 5x - 3)^2}$$

$$22.14. y = \sin(2x^2 - 3x + 5)$$

$$22.15. y = \log_4(x^2 + 2x + 7)$$

$$22.16. y = \sqrt{(3x^2 - 2x + 5)^5}$$

$$22.17. y = \frac{7}{2x^2 - 5x + 7}$$

$$22.18. y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 46

$$22.19. y = \frac{4}{(x^2 + 3x + 4)^5}$$

$$22.20. y = \arctg(2x^2 + 5x - 7)$$

$$22.21. y = \ln(x^2 - 5x + 4)$$

$$22.22. y = \sqrt[3]{(x^2 - 3x + 5)^4}$$

$$22.23. y = \frac{7}{(2x^2 + 3x + 1)^3}$$

$$22.24. y = \sqrt[5]{(x^2 - 7x - 4)^3}$$

$$22.25. y = e^{2x^2 - 4x + 3}$$

$$22.26. y = \sqrt[4]{(2x^2 + 5x - 4)^3}$$

$$22.27. y = \sqrt[5]{(2x^3 - 5x + 2)^6}$$

$$22.28. y = \cos(5x^2 - 6x + 7)$$

$$22.29. y = 2^{x^2 - 3x + 2}$$

$$22.30. y = \frac{5}{(4x^2 + 3x + 2)^6}$$

**Завдання 23.** Продиференціювати задану функцію.

$$23.1. y = 3^x \ln(4x - 3)$$

$$23.2. y = \frac{e^{5x}}{2x^2 - 3}$$

$$23.3. y = x^4 \cos(2x^2 - 5)$$

$$23.4. y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(2x + 3)}$$

$$23.5. y = e^{-2x^2} \operatorname{arctg} x$$

$$23.6. y = \frac{\sin(3x + 2)}{\ln x}$$

$$23.7. y = \cos x \cdot \ln(2x - 3)$$

$$23.8. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(2x - 1)}$$

$$23.9. y = \frac{e^{\cos x}}{3x^2 - 4}$$

$$23.10. y = \frac{\ln x}{\sin(4x + 3)}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 47

$$23.11. y = 3^{\sin x} (4x - 3)$$

$$23.12. y = \frac{7^{5x}}{2x^2 - 3}$$

$$23.13. y = \frac{4^{-x}}{2x^2 - 5}$$

$$23.14. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2x + 3)}$$

$$23.15. y = \frac{\operatorname{arccctg} 6x}{7x^3 - 3x + 2}$$

$$23.16. y = \frac{\cos 2x}{(4x + 3)^2}$$

$$23.17. y = 2^{\sin x} \cdot \arcsin x$$

$$23.18. y = \frac{e^{2x}}{7x - 2}$$

$$23.19. y = e^{2x} \cdot \cos(3x - 5)$$

$$23.20. y = \frac{\operatorname{ctgx}}{\ln(2x + 3)}$$

$$23.21. y = \frac{\cos^2 x}{3x - 4}$$

$$23.22. y = 2^{\sin x} \cdot \ln 3x$$

$$23.23. y = 2^x \cdot \ln(2x - 5)$$

$$23.24. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(4x + 3)}$$

$$23.25. y = \operatorname{ctgx} \cdot \ln 2x$$

$$23.26. y = \frac{\cos 2x}{2x^3 + 3}$$

$$23.27. y = \frac{e^{-3x}}{\ln(5x + 3)}$$

$$23.28. y = \ln x \cdot \cos(2x - 5)$$

$$23.29. y = e^{4x} \cdot \ln(3x - 2)$$

$$23.30. y = \frac{e^{5x}}{(x - 4)^4}$$

**Завдання 24.** Продиференціювати задану функцію.

$$24.1. y = x^{\sin x}$$

$$24.2. y = (\sin x)^{2x}$$

$$24.3. y = x^{\operatorname{arctg} x}$$

$$24.4. y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 48

$$24.5. y = (\ln x)^{\lg x}$$

$$24.6. y = (\arcsin x)^x$$

$$24.7. y = x^{\arccos x}$$

$$24.8. y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$$

$$24.9. y = (\sqrt{x-1})^{\sin x}$$

$$24.10. y = (\ln x)^{x^2-3}$$

$$24.11. y = (\operatorname{tg} x)^x$$

$$24.12. y = (\log_2 x)^{2x}$$

$$24.13. y = x^{\sqrt{x}}$$

$$24.14. y = x^{e^x}$$

$$24.15. y = (\arccos x)^x$$

$$24.16. y = (\cos x)^{\ln x}$$

$$24.17. y = (\sqrt{x})^{\cos x}$$

$$24.18. y = (\cos x)^{\sin x}$$

$$24.19. y = (\cos x)^x$$

$$24.20. y = (\arccos x)^{2x}$$

$$24.21. y = (\ln 2x)^x$$

$$24.22. y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$$

$$24.23. y = (\sin 2x)^{\ln x}$$

$$24.24. y = (\ln x)^{\sin x}$$

$$24.25. y = (\arcsin 2x)^{\ln x}$$

$$24.26. y = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$$

$$24.27. y = (x)^{\frac{1}{x}}$$

$$24.28. y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$$

$$24.29. y = x^{\arccos x}$$

$$24.30. y = (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}$$

**Завдання 25.** Знайти похідну функції  $y$   $x$ , що задана неявно рівнянням.

$$25.1. x^3 + y^2 - 3xy = 0$$

$$25.2. x - y = \cos(xy)$$

$$25.3. y \sin x - \cos(x - y) = 0$$

$$25.4. y \ln y = x$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 49

$$25.5. x^4 + y^4 = 3x^2y^2$$

$$25.6. x^3 + xy^2 - y = 4x$$

$$25.7. y = 1 + xe^y$$

$$25.8. \ln y - \frac{y}{x} = 7$$

$$25.9. \sin y = xy^2 + 5$$

$$25.10. y - \cos(x - y) = 0$$

$$25.11. x^4 + y^3 + \sin x = 0$$

$$25.12. x - y = \sqrt{xy}$$

$$25.13. y^2 \sin x - \cos x = e^y$$

$$25.14. x \log_3 y = x^4 - 3xy$$

$$25.15. x^3 + y^4 = 3xy^3$$

$$25.16. y^2 \ln x = x + 2$$

$$25.17. x^2 - y = \sin(xy)$$

$$25.18. x^2 + y^3 = 5x^2y$$

$$25.19. y = x^3 + 2xe^y$$

$$25.20. \cos y = x^3y^2 + 5x$$

$$25.21. \ln y - \frac{y}{x^2} = 9$$

$$25.22. yx^4 + y^2 + \cos x = 0$$

$$25.23. y - tg(x - y) = x$$

$$25.24. x^3 + xy^2 - y = 4x$$

$$25.25. x^3 - y = x\sqrt{y}$$

$$25.26. x^3 + y = 3x^2y$$

$$25.27. x \ln y = x^5 - 3xy$$

$$25.28. y^2 \sin x - x^3 = e^y$$

$$25.29. x + y = 1 + ye^x$$

$$25.30. x^2 + xy^2 - 5 = 3x$$

**Завдання 26.** Знайти похідну вказаного порядку.

$$26.1. y = x \cos x^2, \quad y'' - ?$$

$$26.2. y = (5x - 1) \ln^2 x, \quad y'' - ?$$

$$26.3. y = (4x^3 + 5) e^{2x+1}, \quad y'' - ?$$

$$26.4. y = (x^2 + 3) \ln(x - 3), \quad y'' - ?$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 50

$$26.5. y = \frac{\sin 2x}{x}, \quad y'' - ?$$

$$26.6. y = (4x + 3)2^{-x}, \quad y'' - ?$$

$$26.7. y = x \ln(1 - 3x), \quad y'' - ?$$

$$26.8. y = \frac{\log_3 x}{x^2}, \quad y'' - ?$$

$$26.9. y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}, \quad y'' - ?$$

$$26.10. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y'' - ?$$

$$26.11. y = x^2 \cos x, \quad y'' - ?$$

$$26.12. y = (5x^3 - 1) \ln x, \quad y'' - ?$$

$$26.13. y = (2x^2 - 3)e^{2x}, \quad y'' - ?$$

$$26.14. y = (x^2 + 3) \sin x, \quad y'' - ?$$

$$26.15. y = \frac{\cos 3x}{x}, \quad y'' - ?$$

$$26.16. y = x^3 \sin x, \quad y'' - ?$$

$$26.17. y = (3x^2 - 4) \ln x, \quad y'' - ?$$

$$26.18. y = x^3 e^{2x+1}, \quad y'' - ?$$

$$26.19. y = (x^2 + 3) \cos x, \quad y'' - ?$$

$$26.20. y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad y'' - ?$$

$$26.21. y = 5x 2^{3x-1}, \quad y'' - ?$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 51

$$26.22. y = x^4 \ln x, \quad y'' - ?$$

$$26.23. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y'' - ?$$

$$26.24. y = \frac{\cos(x-2)}{x-2}, \quad y'' - ?$$

$$26.25. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y'' - ?$$

$$26.26. y = x^2 \ln x, \quad y'' - ?$$

$$26.27. y = (5x^3 - 1)e^x, \quad y'' - ?$$

$$26.28. y = 4x^3 e^{2x}, \quad y'' - ?$$

$$26.29. y = x^2 \sin x, \quad y'' - ?$$

$$26.15. y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad y'' - ?$$

**Завдання 27.** Знайти похідну функції  $y(x)$ , що задана параметрично.

$$27.1. \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \frac{2}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$27.2. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$27.3. \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$$27.4. \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}$$

$$27.5. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \frac{1}{\sin 2t} \end{cases}$$

$$27.6. \begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1} \\ y = \ln t \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 52

$$27.7. \begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$$

$$27.8. \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

$$27.9. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln \cos t \end{cases}$$

$$27.10. \begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$$

$$27.11. \begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{2}{t} \end{cases}$$

$$27.12. \begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2} \\ y = \operatorname{tg} 2t \end{cases}$$

$$27.13. \begin{cases} x = \cos t \\ y = e^t + 3t \end{cases}$$

$$27.14. \begin{cases} x = 6\sqrt[3]{t^2} \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

$$27.15. \begin{cases} x = 3t^3 - 9t \\ y = \arcsin t \end{cases}$$

$$27.16. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \frac{2}{\cos t} \end{cases}$$

$$27.17. \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$27.18. \begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$$

$$27.19. \begin{cases} x = \sqrt{t^3} \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}$$

$$27.20. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$27.21. \begin{cases} x = \frac{1}{t^2} \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$27.22. \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = 5 - \sin t \end{cases}$$

$$27.23. \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$$

$$27.24. \begin{cases} x = \ln(\sin t) \\ y = \ln(\cos t) \end{cases}$$

$$27.25. \begin{cases} x = e^t \\ y = \frac{2}{t} \end{cases}$$

$$27.26. \begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = \frac{2}{t} \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 53

$$27.27. \begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$27.28. \begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 + 3t \end{cases}$$

$$27.29. \begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2} \\ y = \arctg t \end{cases}$$

$$27.30. \begin{cases} x = 3t^3 - 4t \\ y = t^2 + 5t \end{cases}$$

**Завдання 28.** Обчислити наближено значення функції  $y = f(x)$  у точці  $x_0$ , використовуючи диференціал функції.

$$28.1. y = \sqrt[3]{x}, x_0 = 7,76$$

$$28.2. y = \arcsin x, x_0 = 0,08$$

$$28.3. y = \sqrt{4x-1}, x_0 = 2,56$$

$$28.4. y = x^6, x_0 = 2,01$$

$$28.5. y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, x_0 = 1,58$$

$$28.6. y = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = 1,03$$

$$28.7. y = x^{11}, x_0 = 1,02$$

$$28.8. y = \sqrt{4x-3}, x_0 = 1,78$$

$$28.9. y = \sqrt{x^2 + x + 3}, x_0 = 1,97$$

$$28.10. y = x^5, x_0 = 2,97$$

$$28.11. y = \sqrt{x}, x_0 = 8,87$$

$$28.12. y = \arctg x, x_0 = 0,05$$

$$28.13. y = \sqrt{2x+1}, x_0 = 3,92$$

$$28.14. y = x^4, x_0 = 4,01$$

$$28.15. y = \sqrt[3]{3x-1}, x_0 = 3,06$$

$$28.16. y = \sqrt[3]{x}, x_0 = 8,03$$

$$28.17. y = \arctg x, x_0 = 0,05$$

$$28.18. y = \sqrt{4x-3}, x_0 = 1,06$$

$$28.19. y = \sqrt{x^3}, x_0 = 1,04$$

$$28.20. y = \sqrt{3x+1}, x_0 = 1,08$$

$$28.21. y = \ln x, x_0 = 1,03$$

$$28.22. y = x^5, x_0 = 1,02$$

$$28.23. y = \sqrt{4x+5}, x_0 = 1,07$$

$$28.24. y = \sqrt{2x}, x_0 = 1,97$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	<b>Ф-20.07-</b> <b>05.02/2/122.00.1/Б/ОК7-</b> <b>2021</b>
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 54

$$28.25. y = x^5, x_0 = 1,97$$

$$28.26. y = \sqrt{x}, x_0 = 16,02$$

$$28.27. y = x^2 + 1, x_0 = 2,05$$

$$28.28. y = \sqrt{2x+1}, x_0 = 4,02$$

$$28.29. y = x^3, x_0 = 4,05$$

$$28.30. y = \sqrt[3]{3x+2}, x_0 = 2,06$$

**Завдання 29.** Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y = f(x)$  у точці з абсцисою  $x_0$ .

$$29.1. y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}, x_0 = 1.$$

$$29.2. y = \frac{x}{x^2+1}, x_0 = -2.$$

$$29.3. y = 2x + \frac{1}{x}, x_0 = 1.$$

$$29.4. y = \frac{x^2+3}{x-4}, x_0 = 2.$$

$$29.5. y = \frac{x^2-3x+6}{x^2}, x_0 = 3.$$

$$29.6. y = \frac{x^3+2}{x^3-2}, x_0 = 2.$$

$$29.7. y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, x_0 = 4.$$

$$29.8. y = \sqrt[3]{x^2} - 20, x_0 = -8.$$

$$29.9. y = 8\sqrt[4]{x} - 70, x_0 = 16.$$

$$29.10. y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x_0 = 4.$$

$$29.11. y = \frac{x^2}{x^2+1}, x_0 = -3.$$

$$29.12. y = \frac{5x-x^2}{3-2x}, x_0 = -1$$

$$29.13. y = \frac{x^3}{2+x^2}, x_0 = 1.$$

$$29.14. y = 5x + \frac{1}{x^2}, x_0 = 2.$$

$$29.15. y = \frac{5x+6}{x^2}, x_0 = -1.$$

$$29.16. y = \frac{1+3x}{5+x^2}, x_0 = -1.$$

$$29.17. y = \frac{x^2}{x+1}, x_0 = -2.$$

$$29.18. y = \frac{x^2-4}{x}, x_0 = 1.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 55

$$29.19. y = \frac{x+3}{x^2-3}, \quad x_0 = 2.$$

$$29.20. y = \frac{x^2-3}{x^2}, \quad x_0 = 2.$$

$$29.21. z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$29.22. y = x^2 + 2\sqrt{x} + 4, \quad x_0 = 1.$$

$$29.23. y = \sqrt[4]{x^3} - 3, \quad x_0 = 1$$

$$29.24. y = 3\sqrt[3]{x} - 2, \quad x_0 = 27.$$

$$29.25. y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1$$

$$29.26. y = \frac{x}{x^2+1}, \quad x_0 = -1.$$

$$29.27. y = \frac{5-x^2}{3+x}, \quad x_0 = -1$$

$$29.28. y = \frac{5x}{4+x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$29.29. y = \frac{4+x^2}{x}, \quad x_0 = 2.$$

$$29.30. y = \frac{9+x^2}{x^2}, \quad x_0 = -1.$$

**Завдання 30.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = f(x)$  на відріжку  $[a, b]$ .

$$30.1. y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3, \quad x \in [1, 3].$$

$$30.2. y = (x+2) \cdot e^{-x}, \quad x \in [-2, 2].$$

$$30.3. y = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x \in [0, 3].$$

$$30.4. y = \frac{x^3+4}{x^2}, \quad x \in [1, 2].$$

$$30.5. y = (x-1) \cdot e^x, \quad x \in [0, 3].$$

$$30.6. y = x \cdot \ln x, \quad x \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right].$$

$$30.7. y = e^{4x-x^2}, \quad x \in [1, 3].$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 56

$$30.8. y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [-1, 3].$$

$$30.9. y = x^3 + 6x - 4, \quad x \in [-2, 2].$$

$$30.10. y = x^3 \cdot e^{1+x}, \quad x \in [-4, 0].$$

$$30.11. y = \frac{x}{9-x^2}, \quad x \in [-2, 2].$$

$$30.12. y = 2\sqrt{x} - x, \quad x \in [0, 4].$$

$$30.13. y = x - 4\sqrt{x} + 5, \quad x \in [1, 9].$$

$$30.14. y = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

$$30.15. y = \frac{x-1}{x+2}, \quad x \in [0, 4].$$

$$30.16. y = \frac{x^5 - 8}{x^4}, \quad [-3; -1]$$

$$30.17. y = x^3 \cdot e^{1+x}, \quad [-4; 0]$$

$$30.18. y = e^{6x-x^2}, \quad [-3; 3]$$

$$30.19. y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad [-1; 2]$$

$$30.20. y = 108x - x^4, \quad [-1; 4]$$

$$30.21. y = (x-2) \cdot e^x, \quad [-2; 1]$$

$$30.22. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \quad \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$$

$$30.23. y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}, \quad [-1; 1]$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 57

$$30.24. y = 4 - e^{-x^2}, \quad [0; 1]$$

$$30.25. y = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad \left[ \frac{1}{e}; e \right]$$

$$30.26. y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}, \quad [-1; 2]$$

$$30.27. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}, \quad [-1; 3]$$

$$30.28. y = \frac{\ln x}{x}, \quad [1; 4]$$

$$30.29. y = (3 - x) \cdot e^{-x}, \quad [1; 5]$$

$$30.30. y = \frac{x^4}{4 - 6x^3 + 7}, \quad [16; 20]$$

**Завдання 31.** Виконати загальне дослідження функції.

$$31.1. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$$31.2. y = \frac{5x}{4 - x^2}$$

$$31.3. y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

$$31.4. y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$$

$$31.5. y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

$$31.6. y = \frac{3x + 6}{x^2 - 4}$$

$$31.7. y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$31.8. y = \frac{4x}{4 + x^2}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/58

$$31.9. y = \frac{5x}{4-x^2}$$

$$31.10. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$$

$$31.11. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$$

$$31.12. y = \frac{3x^2}{8-x^3}$$

$$31.13. y = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$$

$$31.14. y = \frac{x^4}{x^3-1}$$

$$31.15. y = \frac{x^3}{x^2-x+1}$$

$$31.16. y = \frac{3x}{x^2-1}$$

$$31.17. y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

$$31.18. y = \frac{x^3}{x^2-x+1}$$

$$31.19. y = \frac{x^2+6}{x^2+1}$$

$$31.20. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

$$31.21. y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$31.22. y = \frac{4-2x}{1-x^2}$$

$$31.23. y = \frac{x^5}{x^4-1}$$

$$31.24. y = \frac{x^2}{4x^2-1}$$

$$31.25. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$31.26. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$$

$$31.27. y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$$

$$31.28. y = (x^2-1)^3$$

$$31.29. y = \frac{5x}{1+x^2}$$

$$31.30. y = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/59

### Функції двох змінних

**Завдання 32.** Знайти область визначення вказаних функції.

$$32.1. z = \frac{5x^2 y}{2x - 3y}.$$

$$32.2. z = \frac{4}{9 - x^2 - y^2}.$$

$$32.3. z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

$$32.4. z = \ln(x^2 + y^2 - 16).$$

$$32.5. z = \arccos(x + y).$$

$$32.6. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}.$$

$$32.7. z = \frac{3xy^2}{2x + 3y - 4}.$$

$$32.8. z = 4\sqrt{x} - \frac{4}{2 + 3x - 4y}.$$

$$32.9. z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$32.10. z = \sqrt{4x^2 - 9y^2}.$$

$$32.11. z = \ln(9 - x^2 - y^2).$$

$$32.12. z = \arcsin(2 - x + y).$$

$$32.13. z = \frac{\sqrt{2y}}{x^2 - 4y^2}.$$

$$32.14. z = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right).$$

$$32.15. z = \sqrt{y^2 + x^2 - 4}.$$

$$32.16. z = \ln\left(\frac{3}{16 - x^2 - y^2}\right).$$

$$32.17. z = \ln(4y - 3x + 3).$$

$$32.18. z = \arcsin(3x + 2y).$$

$$32.19. z = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 - 8}}.$$

$$32.20. z = \frac{5}{9 - 4x^2 - 4y^2}.$$

$$32.21. z = \frac{\sqrt{3 - x + y}}{2x - 3y}.$$

$$32.22. z = 2y - \frac{4}{9 - x + 3y}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 60

$$32.23. z = \frac{\ln(3-2x+y)}{x^2+y^2}.$$

$$32.24. z = \frac{9}{1-x^2-y^2}.$$

$$32.25. z = \arccos\left(\frac{x+1}{y}\right).$$

$$32.26. z = \frac{5x+2y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}.$$

$$32.27. z = \frac{4xy}{5x-3y+2}.$$

$$32.28. z = \frac{3}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

$$32.29. z = \frac{5}{\ln(x^2+y^2-4)}.$$

$$32.30. z = \frac{7}{\sqrt{x^2+y^2-16}}.$$

**Завдання 33.** Знайти частинні похідні 1-го і 2-го порядку функції  
 $z = f(x, y)$ .

$$33.1. z = e^x y - x^4 y + y^2 + 3y - x - 4.$$

$$33.2. z = 4x^3 \cos y - 3xy + 2y^2 + y - 7x + 1.$$

$$33.3. z = x^5 y - x^2 y + 2 \cos y + 3x + y + 4.$$

$$33.4. z = 5x^3 - 3xy + y^2 + 2 \operatorname{tg} y - 4x - 1.$$

$$33.5. z = 3e^x + 2x^3 y^2 - y^2 + x - 2y + x - 7.$$

$$33.6. z = 2y \sin x - x^3 y^2 + 4y^3 + y - 3x - 5.$$

$$33.7. z = 3xe^y + x^2 y + 2 \cos y + x - y + 3.$$

$$33.8. z = 2x^3 \cos y + 3x^5 y^4 - y^3 + x - 4.$$

$$33.9. z = x^3 y + y^2 \cos x + 2y^3 - 5y + 7.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 61

$$33.10. z = 5e^x y^3 - 2xy^3 + 5y - 4x + 1.$$

$$33.11. z = 4x^3 - 2xy^2 + \ln y + 3x + 5.$$

$$33.12. z = 3 \ln x - x^2 y^4 + 2y + 5x - 4.$$

$$33.13. z = 2x^4 y - y^2 + 5y - 7x + 2.$$

$$33.14. z = x^3 y^2 - 3x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5.$$

$$33.15. z = 2x^5 - 3x^2 y^4 + y^3 + 5y - x - 3.$$

$$33.16. z = x^4 - 3x^3 y^2 + 4x + 2y - 3.$$

$$33.17. z = x^3 - 2xy^3 + \ln y + 3y - x + 1.$$

$$33.18. z = 3e^x y^2 + x^2 - y^3 + 2e^y - 4.$$

$$33.19. z = 4x^5 - x^4 y + \ln y - e^x + 3.$$

$$33.20. z = 5x^2 - 2x^3 y^4 + 4x - 3 \ln y.$$

$$33.21. z = x^2 y + 2 \ln x + 7 \ln y + 3x + y.$$

$$33.22. z = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2 + 7y - 2.$$

$$33.23. z = 2x^2 y - 3x + 4y^2 + \frac{4x}{y}.$$

$$33.24. z = 3x^4 + y^2 - xy + x + y.$$

$$33.25. z = 4x^3 - 3x^2 y + 2y^3 + 5 \ln x - 6.$$

$$33.26. z = e^x - x^3 y^2 + 4y^2 + 3y - x - 1.$$

$$33.27. z = 5x^3 y^2 - 3x + y^2 + \frac{2x}{y^3} - 3.$$

$$33.28. z = xy^4 - x^3 y + 2 \sin y - x + 3.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 62

$$33.29. z = 4x^2 - xy^3 + 3 \ln y - e^x + 2.$$

$$33.30. z = 2x^2 y - \ln x + 3y^2 + \frac{4}{x}.$$

**Завдання 34.** Знайти повний диференціал функції  $z = f(x, y)$ .

$$34.1. z = \cos(x^3 - 3y).$$

$$34.2. z = \frac{3x + 2y}{3x - 2y}.$$

$$34.3. z = \sqrt{x^4 + 2y^3}.$$

$$34.4. z = x \ln \frac{x^2}{y}.$$

$$34.5. z = \frac{xy + 1}{x + y}.$$

$$34.6. z = e^{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}.$$

$$34.7. z = \ln(x^2 + xy + y^2).$$

$$34.8. z = e^{3x - y^2}.$$

$$34.9. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$34.10. z = x \ln(x^3 y).$$

$$34.11. z = 4e^{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

$$34.12. z = \sin(5x^2 + y).$$

$$34.13. z = \ln(x^3 + y^3).$$

$$34.14. z = \frac{x^2 + 3y^2}{x + y}.$$

$$34.15. z = \frac{xy}{x + y + 1}.$$

$$34.16. z = \cos \sqrt{x + y}.$$

$$34.17. z = \operatorname{tg}(x^3 y^4).$$

$$34.18. z = \frac{3x + y}{x - 3y}.$$

$$34.19. z = e^{x^2 + y^2 + xy}.$$

$$34.20. z = y \ln \frac{2y}{x^3}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 63

$$34.21. z = \arcsin(x + 3y).$$

$$34.22. z = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

$$34.23. z = \arccos \frac{y}{x}.$$

$$34.24. z = \frac{y}{y^2 - 9x^2}.$$

$$34.25. z = \sqrt{3x^2 + 2y^2}.$$

$$34.26. z = y \ln \frac{x}{y^2}.$$

$$34.27. z = e^{\frac{y}{x}}.$$

$$34.28. z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}.$$

$$34.29. z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

$$34.30. z = \ln(x^3 - 2y^2).$$

**Завдання 35.** Знайти частинні похідні 1-го порядку функції  
 $z = f(x, y)$ , заданої неявно.

$$35.1. x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$

$$35.2. e^x y - xyz + y^3 - 4xz^2 = 0.$$

$$35.3. 2x^2 y - \ln x + 3y^2 z + 2xe^z - 4 = 0.$$

$$35.4. 3ye^x + 2z^3 y^2 - y^2 + xz - 2x - 7 = 0.$$

$$35.5. 5x^3 - 3xy + z^2 + 2tgy - 4xyz - 1 = 0.$$

$$35.6. x^3 y - z^2 y + 2x \cos y + 3x + z - 3 = 0.$$

$$35.7. 3e^x y^3 - 2xy^3 z + 5y - 4z^3 + 1 = 0.$$

$$35.8. xyz \sin z - x^3 y + 4xz^3 + y - 3z = 0.$$

$$35.9. x^4 - 3x^3 yz + 4 \ln x + 2yz^2 - 3 = 0.$$

$$35.10. e^z y - x^4 y + z^2 + 4y - x - 3 = 0.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 64

$$35.11. 5x^2y - 2x^3z^4 + 4xy^2z - 3\ln z = 0.$$

$$35.12. 2x^3 \cos y + 3x^5z^4 - y^3 + \operatorname{tg}z - 4 = 0.$$

$$35.13. 3e^z y^2 + x^2 - xy^3 + 2\ln z - 1 = 0.$$

$$35.14. x^3 - 2xy^3 + x\ln z + 3y - 2z + 1 = 0.$$

$$35.15. 3e^z + 2x^3y^2 - z^2 + 3x - 2z + 4 = 0.$$

$$35.16. 4x^3 - 3x^2yz + 2z^3 + 5\ln x - 6 = 0.$$

$$35.17. 4x^5y - y^4z + \ln x - e^z + 3 = 0.$$

$$35.18. 5x^2y - 3xz^2 + 2y^2 + \frac{z}{y} = 0.$$

$$35.19. x^3 - 3x^2y + 2y^2 + \ln z - 4xz + 5 = 0.$$

$$35.20. xe^z - x^3y^2 + 4z^2 + 3xy - x - 1 = 0.$$

$$35.21. x^2y + 2x\ln y + 7\ln z + 3x + e^z = 0.$$

$$35.22. 5x^3y^2 - 3xz^2 + y^2 + \frac{2z}{y^3} - 3 = 0.$$

$$35.23. x^3 \cos z - 3xy + 2y^2 + z - 4x + 1 = 0.$$

$$35.24. 5x^3 - 2x^2yz + \ln z + 3x - 4 = 0.$$

$$35.25. 3x^4 + y^2z - xy^2 + \sin z + y = 0.$$

$$35.26. 5\ln x - x^2z^4 + 2\cos y + 3z - 1 = 0.$$

$$35.27. 2xe^y + z^2y + 2\cos z + x + 3y = 0.$$

$$35.28. 4x^3y - 6yz^2 + 3y^2 + 7\cos z - 2 = 0.$$

$$35.29. 4x^2z - xy^3 + 3\ln z - e^y + 2 = 0.$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 65

$$35.30. \quad xy^4z - x^3y + 2\sin z - y + 3 = 0.$$

**Завдання 36.** Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial u}$  і  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

$$36.1. \quad z = x^3 \cdot \ln y, \quad \text{де } x = \frac{u}{v}, \quad y = 3u - 2v.$$

$$36.2. \quad z = \operatorname{tg}x - 2x \cos y, \quad \text{де } x = v \sin u, \quad y = 3v - 2uv.$$

$$36.3. \quad z = xy^2 + \frac{x}{y}, \quad \text{де } x = v^2u - 4v, \quad y = \frac{2v}{u}.$$

$$36.4. \quad z = e^x y + \ln x, \quad \text{де } x = uv, \quad y = u^2 - 3v.$$

$$36.5. \quad z = x^2 y - 2 \cos y, \quad \text{де } x = u \ln v, \quad y = 4u^2 v.$$

$$36.6. \quad z = \cos x - 2y^3, \quad \text{де } x = \frac{u^2}{v}, \quad y = 3u \sin v.$$

$$36.7. \quad z = y \ln x - 4x, \quad \text{де } x = 2v^2 - 4u, \quad y = u - 3v^2.$$

$$36.8. \quad z = \operatorname{tg}x - 2 \ln y, \quad \text{де } x = 2uv, \quad y = 4u - 5v^3.$$

$$36.9. \quad z = 2x^3 \ln y, \quad \text{де } x = v \cos u, \quad y = 3u - \sin v.$$

$$36.10. \quad z = x^2 y + 2y, \quad \text{де } x = 5u^2 v, \quad y = uv^3.$$

$$36.11. \quad z = x^2 \sin y, \quad \text{де } x = 3uv, \quad y = u^3 - 2v.$$

$$36.12. \quad z = \cos y - 3x^2, \quad \text{де } x = 2u - v, \quad y = \frac{3u}{v^2}.$$

$$36.13. \quad z = xy^3 + \ln x, \quad \text{де } x = v + 3u^2, \quad y = 5uv.$$

$$36.14. \quad z = x^4 - 3 \sin y, \quad \text{де } x = u - 4v^2, \quad y = v - u^3.$$

$$36.15. \quad z = \arcsin x + 3 \ln y, \quad \text{де } x = 5uv, \quad y = u + v.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/66

$$36.16. z = y \ln x - x, \text{ де } x = 4v - u, y = \frac{v}{2u}.$$

$$36.17. z = \arctg y - 3x^2, \text{ де } x = 2uv, y = u^2 - 3v.$$

$$36.18. z = x^4 y - \cos x, \text{ де } x = u - 5v, y = 3uv^2.$$

$$36.19. z = xy + x^2 y^3, \text{ де } x = 5u + 2v, y = v \sin u.$$

$$36.20. z = \ln x - 2x \sin y, \text{ де } x = uv, y = v^2 - 2u.$$

$$36.21. z = xy^3 - \operatorname{tg} y, \text{ де } x = v - u, y = -2uv.$$

$$36.22. z = \operatorname{ctg} x + 2e^y, \text{ де } x = 2u + v, y = u^v.$$

$$36.23. z = x^3 - 2x \ln y, \text{ де } x = u \cos v, y = v - 3u.$$

$$36.24. z = e^x - 2xy^3, \text{ де } x = ve^u, y = 2u + v.$$

$$36.25. z = 3e^y + xy, \text{ де } x = v - \sin u, y = 3ve^u.$$

$$36.26. z = 2x^3 \cos y, \text{ де } x = 5u - v, y = uv^2.$$

$$36.27. z = \ln(xy), \text{ де } x = ue^v, y = 3v - u.$$

$$36.28. z = x^4 - 2 \cos y, \text{ де } x = \sin u - 2v, y = ve^u.$$

$$36.29. z = xy^3 - \ln y, \text{ де } x = v \ln u, y = v - 2u.$$

$$36.30. z = x^4 y^3 + \frac{3x^2}{y}, \text{ де } x = v^2 + u, y = \frac{\sin v}{u}.$$

**Завдання 37.** Знайти похідну функції  $z = f(x, y)$  у точці  $P_1(x_1; y_1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $P_2(x_2; y_2)$ .

$$37.1. z = x^4 - 3x^2 y^2 + 2xy + 1, P_1(1; -1), P_2(5; 2).$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 67

$$37.2. z = 3x^2 - 2xy^2 + y - 3, P_1(2; -2), P_2(6; 1).$$

$$37.3. z = 2x^3 - 3x^2y + 2x - y + 1, P_1(2; 3), P_2(-2; 6).$$

$$37.4. z = 3x^2 - 4xy^2 + 3y - 5, P_1(1; 3), P_2(-3; 0).$$

$$37.5. z = 4x^2y - y^3 + 2x + 4, P_1(0; 1), P_2(3; -3).$$

$$37.6. z = x^4 + 2x^2y^2 - 3x + 1, P_1(1; 1), P_2(5; -2).$$

$$37.7. z = 2x^3 - 3xy^2 + 2x - y, P_1(2; 1), P_2(-2; -2).$$

$$37.8. z = xy^4 - 3y^2 - 2x + y + 4, P_1(1; 2), P_2(5; -1).$$

$$37.9. z = x^3 + 2x^2y + x - 3y + 1, P_1(-1; 1), P_2(2; -3).$$

$$37.10. z = 4x^2 - 3xy^2 + 2x + 5y + 1, P_1(1; 1), P_2(4; -3).$$

$$37.11. z = e^x - 3x^2y^2 + 2xy - 3, P_1(0; 2), P_2(4; -1).$$

$$37.12. z = \cos x - 2x^2y + y^3 - 3, P_1(0; -1), P_2(4; 2).$$

$$37.13. z = x^4 + 2xy^2 - y^3 + 1, P_1(1; 1), P_2(5; -2).$$

$$37.14. z = 3x^2 + 4xy^2 + 2y - 1, P_1(2; 0), P_2(5; -4).$$

$$37.15. z = x^5 - x^2y + 2xy^2 - 3, P_1(1; -1), P_2(5; 2).$$

$$37.16. z = x^3 + x \cos y - y^2 - 2, P_1(1; 0), P_2(-3; 3).$$

$$37.17. z = 2x^3 - 4x^2y + 3x - y + 1, P_1(1; 1), P_2(4; -3).$$

$$37.18. z = x^4 - 4xy + 2y^2 - 3, P_1(1; 3), P_2(-3; 0).$$

$$37.19. z = 3x^2y - y^2 + 2x + 3, P_1(1; -1), P_2(5; 2).$$

$$37.20. z = x^3 - 2xy^2 + e^y - 3, P_1(2; 0), P_2(-1; 4).$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/68

$$37.21. z = xy^2 - 2x^3y + 4x - 3, P_1(2; -3), P_2(5; 1).$$

$$37.22. z = 2x^3 - 3y^2 + 4x - 5, P_1(1; 2), P_2(5; -1).$$

$$37.23. z = x^3 - 2x^2y^2 + 4y - x, P_1(1; 3), P_2(-3; 0).$$

$$37.24. z = 3x^4 - 2x^2y + 3y - 4, P_1(2; -2), P_2(6; 1).$$

$$37.25. z = 4e^x + 2xy^2 - x \ln y + 5, P_1(0; 1), P_2(-3; 5).$$

$$37.26. z = x^4 + 3x^2y - 2y^3 - 1, P_1(1; 1), P_2(-2; 5).$$

$$37.27. z = 7x^2 - 2xy^3 + y - 3x, P_1(1; -2), P_2(-3; 1).$$

$$37.28. z = x^3 - 2x \sin y + 5y - 4, P_1(2; 0), P_2(6; -3).$$

$$37.29. z = 3 \cos x - 4xy^3 + 2y - 1, P_1(0; -2), P_2(4; 1).$$

$$37.30. z = 3x^2y - xy^2 + 5y - 3x, P_1(-1; -2), P_2(2; 2).$$

**Завдання 38.** Знайти градієнт функції  $z = f(x, y)$  у точці  $P(x, y)$ .

$$38.1. z = \frac{xy+1}{x+y}, P(1; 3).$$

$$38.2. z = \frac{x^2 - y^2}{x+y+1}, P(1; 1).$$

$$38.3. z = \frac{xy+x+y}{x-y}, P(1; -2).$$

$$38.4. z = \frac{x^2 + y}{x+y^2}, P(2; -1).$$

$$38.5. z = \frac{2xy}{x-y}, P(3; 2).$$

$$38.6. z = \frac{x^2 - xy + y^2}{x-y}, P(1; 2).$$

$$38.7. z = \frac{x^2 + xy}{x-y}, P(2; 3).$$

$$38.8. z = \frac{x^2 + y^2}{x+y}, P(1; -3).$$

$$38.9. z = \frac{x^2 + 2xy}{3x - 2y}, P(1; 2).$$

$$38.10. z = \frac{xy}{x+2y}, P(1; -1).$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/69

$$38.11. z = \frac{xy + y}{x^2 - y}, P(2; -2).$$

$$38.12. z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}, P(1; -1).$$

$$38.13. z = \frac{x^2 - 2y}{2x + 3y}, P(2; -2).$$

$$38.14. z = \frac{x + 2y}{2x + y}, P(-1; 3).$$

$$38.15. z = \frac{x - y}{1 + xy}, P(2; -1).$$

$$38.16. z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}, P(1; -1).$$

$$38.17. z = \frac{2 - xy}{x + 2y}, P(1; 3).$$

$$38.18. z = \frac{x^2y - xy^2}{x + y}, P(-1; -1).$$

$$38.19. z = \frac{x + y^2}{x^2 - y}, P(1; -2).$$

$$38.20. z = \frac{x^3 + y^2}{x + y^2}, P(2; -1).$$

$$38.21. z = \frac{xy^2}{x^2 - y}, P(3; 4).$$

$$38.22. z = \frac{xy - y^2}{x^2 - y}, P(1; 2).$$

$$38.23. z = \frac{2x^2 + 3xy}{3x - 2y}, P(2; 3).$$

$$38.24. z = \frac{3x + y^2}{x^2 + 4y}, P(1; -2).$$

$$38.25. z = \frac{3x - y^3}{x^3 + y}, P(1; 3).$$

$$38.26. z = \frac{2x + y^2}{x^2 + 3y}, P(2; -1).$$

$$38.27. z = \frac{xy + y^2}{x^2 - xy}, P(2; -1).$$

$$38.28. z = \frac{4x - y^2}{x^2 + 3y}, P(-1; 1).$$

$$38.29. z = \frac{x - 5y}{4x + 3y}, P(2; -2).$$

$$38.30. z = \frac{x + y^2}{x^2 - y}, P(1; -3).$$

**Завдання 39.** Дослідити функцію  $z = f(x, y)$  на екстремуми.

$$39.1. z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

$$39.2. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 70

$$39.3. z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

$$39.4. z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

$$39.5. z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

$$39.6. z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$$

$$39.7. z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$$

$$39.8. z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$$

$$39.9. z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

$$39.10. z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$$

$$39.11. z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$$

$$39.12. z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10.$$

$$39.13. z = (x - 5)^2 + y^2 + 1.$$

$$39.14. z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$39.15. z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$$

$$39.16. z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$$

$$39.17. z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$$

$$39.18. z = xy(12 - x - y).$$

$$39.19. z = xy - x^2 - y^2 + 9.$$

$$39.20. z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$$

$$39.21. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

$$39.22. z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 71

$$39.23. z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

$$39.24. z = xy(6 - x - y).$$

$$39.25. z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$

$$39.26. z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

$$39.27. z = (x-1)^2 + 2y^2.$$

$$39.28. z = xy - 3x^2 - 2y^2.$$

$$39.29. z = x^2 + 3(y+2)^2.$$

$$39.30. z = 2(x+y) - x^2 - y^2.$$

**Завдання 40.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = f(x, y)$  в області  $D$ , що обмежена заданими лініями.

$$40.1. z = 3x + y - xy, \quad D: y = x, \quad y = 4, \quad x = 0.$$

$$40.2. z = xy - x - 2y, \quad D: x = 3, \quad y = x, \quad y = 0.$$

$$40.3. z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2.$$

$$40.4. z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

$$40.5. z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x - y + 1 = 0, \quad x = 3, \quad y = 0.$$

$$40.6. z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0.$$

$$40.7. z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 6.$$

$$40.8. z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

$$40.9. z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 3 = 0.$$

$$40.10. z = x^2 + 2xy - 10, \quad D: y = 0, \quad y = x^2 - 4.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 72

40.11.  $z = xy - 2x - y$ ,  $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$ .

40.12.  $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ ,  $D: y = 8, y = 2x^2$ .

40.13.  $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ ,  $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$ .

40.14.  $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ ,  $D: y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}, y = 0$ .

40.15.  $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ ,  $D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$ .

40.16.  $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ ,  $D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$ .

40.17.  $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ ,  $D: y = 2x, y = 2, x = 0$ .

40.18.  $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ ,  $D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$ .

40.19.  $z = xy - 3x - 2y$ ,  $D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$ .

40.20.  $z = x^2 + xy - 2$ ,  $D: y = 4x^2 - 4, y = 0$ .

40.21.  $z = x^2y(4 - x - y)$ ,  $D: x = 0, y = 0, y = 6 - x$ .

40.22.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ,  $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$ .

40.23.  $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ ,  $D: x + 2y = 4, x - 2y = 4$ .

40.24.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ ,  $D: x = 3, y = 0, y = x + 1$ .

40.25.  $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ ,  $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ .

40.26.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ ,  $D: y = x + 2, y = 0, x = 2$ .

40.27.  $z = 4 - 2x^2 - y^2$ ,  $D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$ .

40.28.  $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ ,  $D: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1$ .



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 73

$$40.29. z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad D: x + y + 2 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$40.30. z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 6.$$

**Завдання 41.** Знайти екстремуми функції  $z = f(x, y)$  за умови, що змінні  $x$  і  $y$  задовольняють рівняння  $\varphi(x, y) = 0$ .

$$41.1. z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1 \text{ за умови } x - 3y + 2 = 0.$$

$$41.2. z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108x - 3 \text{ за умови } 3y - x - 4 = 0.$$

$$41.3. z = 5x^3 + 7xy^2 - 3y^2 - 15x - 4 \text{ за умови } 2x + 4y + 1 = 0.$$

$$41.4. z = 6y^3 + 10x^2y + 2x^2 - 2y + 9 \text{ за умови } 3x - y + 5 = 0.$$

$$41.5. z = 7x^3 + 6xy^2 + y^2 - \frac{21}{4}x + 1 \text{ за умови } 4x - 3y + 1 = 0.$$

$$41.6. z = 5y^3 + 7x^2y - 3x^2 - 15y + 2 \text{ за умови } 2y - 2x - 3 = 0.$$

$$41.7. z = 6x^3 + 10xy^2 + 2y^2 - 2x + 7 \text{ за умови } x + 2y - 2 = 0.$$

$$41.8. z = 3y^3 + \frac{3}{2}x^2y - 2x^2 - 25y + 3 \text{ за умови } y - 3x - 1 = 0.$$

$$41.9. z = 2x^3 + 5xy^2 + 8y^2 - 24x - 10 \text{ за умови } 2y - 3x + 2 = 0.$$

$$41.10. z = 2y^3 + 5x^2y + 8x^2 - 24y + 8 \text{ за умови } 4x + 2y - 3 = 0.$$

$$41.11. z = 4x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 108x - 6 \text{ за умови } 2y - 4x + 3 = 0.$$

$$41.12. z = y^3 + 4x^2y + 5x^2 - 48y + 7 \text{ за умови } x + 2y - 1 = 0.$$

$$41.13. z = 3x^3 - 4y^2 + 2xy^2 - 49x + 4 \text{ за умови } 2y - 6x - 3 = 0.$$

$$41.14. z = 7y^3 + 6x^2y + x^2 - \frac{21}{4}y + 4 \text{ за умови } 3x + 2y + 3 = 0.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 74

$$41.15. z = 3x^3 + \frac{3}{2}xy^2 - 2y^2 - 25x - 5 \text{ за умови } 2x - 4y - 3 = 0.$$

$$41.16. z = 8y^3 + 2y^3 + 5x^2y - 24y - 3 \text{ за умови } x + 4y - 4 = 0.$$

$$41.17. z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20 \text{ за умови } x - 3y + 2 = 0.$$

$$41.18. z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10 \text{ за умови } 3x + 2y - 4 = 0.$$

$$41.19. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5 \text{ за умови } 2x - 3y - 3 = 0.$$

$$41.20. z = y^3 + x^2 - 6xy - 39y + 18x + 5 \text{ за умови } x - 2y + 4 = 0.$$

$$41.21. z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5 \text{ за умови } x + 2y - 3 = 0.$$

$$41.22. z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1 \text{ за умови } x - 3y + 2 = 0.$$

$$41.23. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3 \text{ за умови } 2y - 2x + 3 = 0.$$

$$41.24. z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1 \text{ за умови } x - 3y + 2 = 0.$$

$$41.25. z = 3x^3 + 2xy^2 - 49x + 4 \text{ за умови } 2y - 6x - 3 = 0.$$

$$41.26. z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1 \text{ за умови } x - 3y + 2 = 0.$$

$$41.27. z = x^3 + 6y^2 - 4x + 5 \text{ за умови } 4x - 3y + 5 = 0.$$

$$41.28. z = x^2 + y^3 + 5y^2 + 48x + 2 \text{ за умови } 2x - 4y + 3 = 0.$$

$$41.29. z = x^3 + 3xy^2 + 4y^2 - 5x + 2 \text{ за умови } 3x - 4y + 1 = 0.$$

$$41.30. z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 6x + 7 \text{ за умови } 5x + y - 3 = 0.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 75

### Приклади розв'язування

Добутком матриці  $A = (a_{ij})_{m \times p}$  на матрицю  $B = (b_{ij})_{p \times n}$  називають матрицю  $C = AB$  розміру  $m \times n$ , елементи  $c_{ij}$  якої обчислюються за правилом:  $c_{ij}$  є сумою попарних добутків елементів  $i$ -го рядка матриці  $A$  та відповідних елементів  $j$ -го стовпця матриці  $B$ . Добуток  $AB$  визначений, якщо число стовпців матриці  $A$  дорівнює числу рядків матриці  $B$ . В загальному випадку  $AB \neq BA$ .

1. Обчислити добуток матриць  $A$  та  $B$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \Gamma \quad AB &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}. \quad \lceil \end{aligned}$$

2. Обчислити  $AB$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \Gamma \quad AB &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 76

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \quad \_ ]$$

Визначник є числовою характеристикою квадратної матриці. Визначником матриці  $A$  розміру  $2 \times 2$  або визначником другого порядку називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Визначником матриці  $A$  розміру  $3 \times 3$  або визначником третього порядку називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити визначники: 
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

┌ Застосовуючи послідовно вищенаведені формули, знаходимо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot ((-10) \cdot 6 - (-1) \cdot 2) - 2 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot (-1)) + (-5) \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot (-10)) =$$

$$= 58 - 18 - 160 = -120. \quad \_ ]$$

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$$

┌ Виключимо невідоме  $x_1$  з другого рівняння. Для цього можна додати до другого рівняння перше рівняння, помножене на  $\left(-\frac{3}{2}\right)$ . Проте, щоб уникнути дій з дробами, краще помножити друге рівняння на 2 і

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 77

додати до нього перше рівняння, помножене на  $(-3)$ . Опускаючи запис вказаних обчислень, дістанемо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ -x_2 = 1. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо  $x_2 = -1$ . Підставляючи знайдене значення  $x_2$  в перше рівняння, знаходимо  $x_1$ :

$$2x_1 + 5 \cdot (-1) = 1, \quad x_1 = \frac{6}{2} = 3.$$

Отже, задана система має розв'язок  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -1$ .  $\square$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 16 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, використовуючи поняття розширеної матриці. Розширена матриця заданої системи має вигляд

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & -8 & 16 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

Виключенню невідомого  $x_1$  з 2-го та 3-го рівнянь системи відповідає утворення нулів у першому стовпці розширеної матриці. Для цього виконаємо послідовно такі дії над рядками матриці: 1) додамо до 2-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на  $(-2)$ ; 2) додамо до 3-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на  $(-4)$ . Запишемо в умовних позначеннях вказані дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & -8 & 16 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-2) \\ (-4)}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 9 & -21 \end{array} \right).$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 78

До 3-го рядка отриманої матриці додамо 2-й рядок, помножений на 5 (виключаємо невідоме  $x_2$  з 3-го рівняння системи):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 9 & -21 \end{array} \right) \xrightarrow{5} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array} \right).$$

Зауважимо, що у квадратній таблиці чисел, які записані ліворуч від риски, під діагоналлю стоять нулі.

Випишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ -11x_3 = -11. \end{cases}$$

Отримали систему (\*). Її розв'язок  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 1$ .  $\square$

**6.** Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -35 \\ -x_1 + x_2 = 16. \end{cases}$$

Для заданої системи рівнянь матриця системи, вектор-стовпець вільних членів та вектор-стовпець невідомих мають відповідно вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -35 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці  $|A| = 9$ . За формулою (5) знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (10), дістанемо

$$X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -35 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \cdot (-35) + (-4) \cdot 16 \\ 1 \cdot (-35) + 5 \cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 79

Таким чином,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Звідси, прирівнюючи відповідні елементи вектор-стовпців, знаходимо  $x_1 = -11$ ,  $x_2 = 5$ . ▮

7. . Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 & = 11 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 & = -2 \\ 6x_1 - 6x_2 - 3x_3 & = -15. \end{cases}$$

▮ Для заданої системи

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці  $A$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Для знаходження оберненої матриці  $A^{-1}$  обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-6) = 3,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -(-7) \cdot (-3) + 1 \cdot 6 = -15,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = (-7) \cdot (-6) - 1 \cdot 6 = 36,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-6) = 6,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3) - 0 \cdot 6 = -21,$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/80

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-6) + 2 \cdot 6 = 54,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 2,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot 1 + 0 \cdot (-7) = -7,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - 2 \cdot (-7) = 21.$$

Знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix}.$$

Дістанемо

$$X = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 11 + 6 \cdot (-2) + 2 \cdot (-15) \\ (-15) \cdot 11 + (-21) \cdot (-2) + (-7) \cdot (-15) \\ 36 \cdot 11 + 54 \cdot (-2) + 21 \cdot (-15) \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  або  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . ┘

8. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 5x_1 + 9x_2 = 130. \end{cases}$$

┌ Знаходимо визначник матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 9 - (-5) = 14 \neq 0.$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 81

Знаходимо визначник  $\Delta_1$ , який дістаємо в результаті заміни першого стовпця визначника  $\Delta$  на стовпець вільних членів, та визначник  $\Delta_2$ , який дістаємо в результаті заміни другого стовпця визначника  $\Delta$  на стовпець вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 130 & 9 \end{vmatrix} = 112, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 130 \end{vmatrix} = 140.$$

Отже, за формулами Крамера отримуємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{112}{14} = 8, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{140}{14} = 10. \quad \lrcorner$$

**9.** Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 11 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -15. \end{cases}$$

┌ Знаходимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 0 = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 15 = -9 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -15 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -15 & -3 \end{vmatrix} = -9,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 6 & -15 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -15 & -3 \end{vmatrix} - 11 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 11 \\ -7 & 1 & -2 \\ 6 & -6 & -15 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 6 & -15 \end{vmatrix} + 11 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -27.$$

За формулами Крамера отримуємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-27}{-9} = 3. \quad \lrcorner$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/82

10.

### Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною *схемою*.

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак  $y'$  на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак  $y''$  на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки ( $x$ )	
$y'$	

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 83

$y''$	
$y$	

а) Використовуючи  $y'$  з'ясуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи  $y''$ , досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

**6.** Будуємо графік функції.

**Приклад 1.** Виконати загальне дослідження функції

$$y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

**1** а) Область визначення функції –  $D = (-\infty; +\infty)$ .

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю  $Oy$  обчислимо значення функції у точці  $x = 0$ :

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь  $Oy$  у точці  $y = 0$ , тобто проходить через початок координат – точку  $O(0;0)$ .

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю  $Ox$  слід розв'язати рівняння  $y(x) = 0$ :

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 84

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x \left( 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь  $Ox$  у точках  $x_1 \approx -6,4$ ,  $x_2 \approx 1,9$  та у точці  $x = 0$  (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки  $y(-x) \neq y(x)$  та  $y(-x) \neq -y(x)$ .

**2** Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b, \quad (1)$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx), \quad (2)$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма  $x = x_0$  є *вертикальною асимптотою* графіка функції  $y(x)$ , якщо

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 85

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \infty. \quad (3)$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

**3** Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left( 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

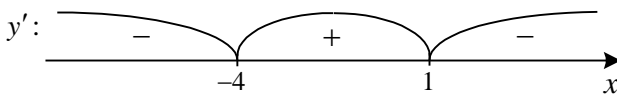
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а)  $y' = 0$ ; б)  $y'$  не існує.

а)  $y' = 0$ :  $2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$ , або  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , звідки  $x = -4$  та  $x = 1$ .

б)  $y'$  не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому  $x \in D$ .

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду  $x = -4$ ,  $x = 1$ .

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y'$  на отриманих інтервалах:



(наприклад,  $y'(-6) = -25 < 0$ ,  $y'(0) = 2 > 0$ ,  $y'(2) = -3 < 0$ ).

**4** Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left( 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right)' = -\frac{3}{2} - x.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 86

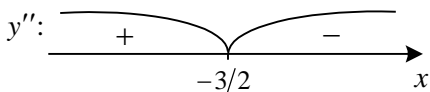
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а)  $y'' = 0$ ; б)  $y''$  не існує.

а)  $y'' = 0: -\frac{3}{2} - x = 0, x = -\frac{3}{2}$ .

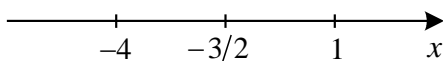
б)  $y''$  не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду  $x = -\frac{3}{2}$ .

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак  $y''$  на отриманих інтервалах:



**5** Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали:  $(-\infty; -4)$ ,  $(-4; -1,5)$ ,  $(-1,5; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають  $y'$  та  $y''$ , використовуємо результати досліджень у пунктах **3** та **4**.

$x$	$(-\infty; -4)$	$-4$	$(-4; -1,5)$	$-1,5$	$(-1,5; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
-----	-----------------	------	--------------	--------	-------------	-----	----------------

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/87

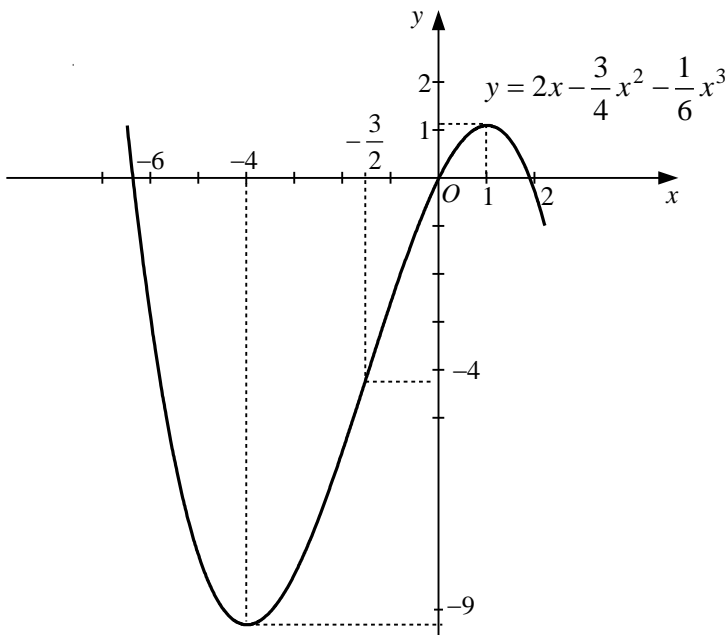
$y'$	-	0	+		+	0	-
$y''$	+		+	0	-		-
$y$	$\searrow \cup$	min $y(-4) = -9\frac{1}{3}$	$\nearrow \cup$	т. п. $y(-1,5) = -4\frac{1}{8}$	$\nearrow \cap$	max $y(1) = 1\frac{1}{12}$	$\searrow \cap$

Позначення:

- $\searrow$  – функція спадає;
- $\nearrow$  – функція зростає;
- $\cup$  – графік угнутий;
- $\cap$  – графік опуклий;
- т.п. – точка перегину графіка.

**6** Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів **1**, **2**, **5**.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/88



**Приклад 2.** Виконати загальне дослідження функції  $y = \frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2}$ .

1 а) Область визначення функції –  $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ .

б) Графік перетинає вісь  $Oy$  у точці  $y = -0,5$ .

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю  $Ox$  :

$$\frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2} = 0, \quad \frac{2x^4 - x^3 - 1}{2(x^3 + 1)} = 0.$$

Звідси маємо рівняння  $2x^4 - x^3 - 1 = 0$ . Розклавши ліву частину на множники



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/89

$$2x^4 - x^3 - 1 = (x^4 - x^3) + (x^4 - 1) = x^3(x-1) + (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(2x^3 + x^2 + x + 1),$$

знаходимо корінь  $x=1$ . Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння  $2x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі  $(-1; 0)$ . Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов'язане з використанням громіздких формул, то обмежимося вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю  $Oy - x = 1$ .

г) Функція ні парна, ні непарна.

**2** Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{x^3+1} - \frac{1}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^3}} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{1+0} - 0 = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x(x^3+1)}{x^3+1} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^3+1} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}} - \frac{1}{2} = \frac{0}{0+1} - \frac{1}{2} = -0,5;$$

підставляємо  $k$  та  $b$  у формулу (1):  $y = 1 \cdot x + (-0,5) = x - 0,5$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 90

Отже, графік функції має похилу асимптоту  $y = x - 0,5$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

б) Оскільки точка  $x_0 = -1$  не належить області визначення  $D$  заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 1) = 0$ , а

$\lim_{x \rightarrow -1} x^4 = 1 \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2} \right) = \infty.$$

Звідси випливає, що пряма  $x = -1$  є вертикальною асимптотою.

**3** Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{x^4}{x^3 + 1} - \frac{1}{2} \right)' = \left( \frac{x^4}{x^3 + 1} \right)' - \left( \frac{1}{2} \right)' = \frac{(x^4)'(x^3 + 1) - x^4(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} - 0 = \\ &= \frac{4x^3(x^3 + 1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Критичні точки 1-го роду:

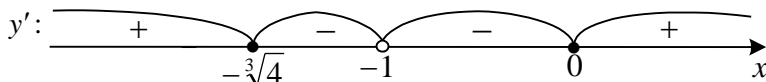
а)  $y' = 0$ :  $\frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2} = 0$ ,  $x^3(x^3 + 4) = 0$ , звідки  $x = 0$ ,  $x = -\sqrt[3]{4}$ ;

б)  $y'$  не існує:  $\emptyset$ .

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду  $x = -\sqrt[3]{4} \approx -1,59$  та  $x = 0$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/91

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y'$  на отриманих інтервалах (точка  $x = -1$  виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад,  $y'(-2) = \frac{32}{49} > 0$ ,  $y'(-\sqrt[3]{2}) = -4 < 0$ ,  $y'(-\frac{1}{2}) = -\frac{31}{49} < 0$ ,

$y'(1) = 1 > 0$ ).

**4** Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$\begin{aligned}
 y'' &= \left( \frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2} \right)' = \frac{(x^6 + 4x^3)'(x^3 + 1)^2 - (x^6 + 4x^3)((x^3 + 1)^2)'}{\left( (x^3 + 1)^2 \right)^2} = \\
 &= \frac{(6x^5 + 12x^2)(x^3 + 1)^2 - (x^6 + 4x^3)(x^3 + 1)3x^2}{(x^3 + 1)^4} = \\
 &= \frac{6x^2(x^3 + 1)[(x^3 + 2)(x^3 + 1) - (x^6 + 4x^3)]}{(x^3 + 1)^4} = \\
 &= \frac{6x^2(x^6 + 3x^3 + 2 - x^6 - 4x^3)}{(x^3 + 1)^3} = \frac{6x^2(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^3}.
 \end{aligned}$$

Критичні точки 2-го роду:

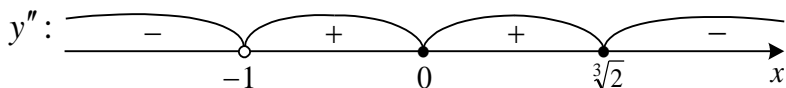
а)  $y'' = 0$ :  $\frac{6x^2(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^3} = 0$ ,  $x^2(2 - x^3) = 0$ , звідки  $x = 0$ ,  $x = \sqrt[3]{2}$ ;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 92

б)  $y''$  не існує:  $\emptyset$ .

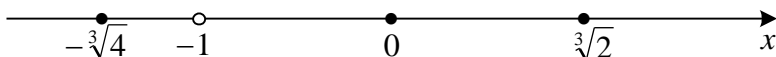
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду  $x = 0$  та  $x = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$ .

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y''$  на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки  $-2$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $1$ ,  $2$ ).

**5** Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п'ять інтервалів:  $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$ ,  $(-\sqrt[3]{4}, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, \sqrt[3]{2})$ ,  $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ .

Заповнимо таблицю.

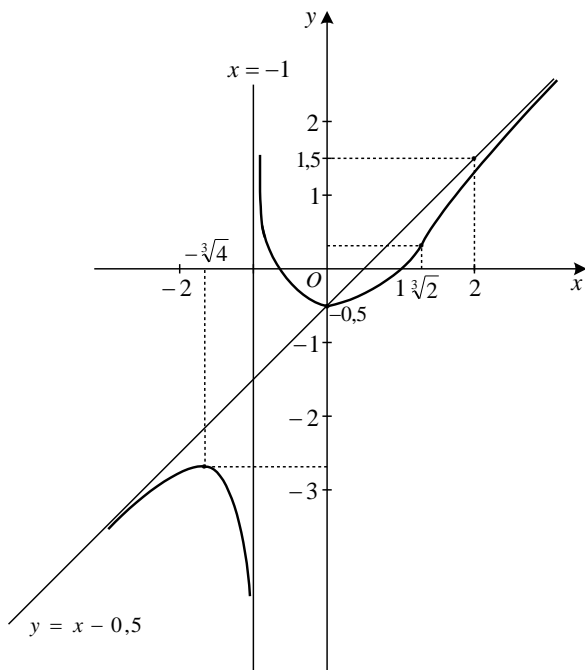
$x$	$(-\infty; -\sqrt[3]{4})$	$-\sqrt[3]{4}$	$(-\sqrt[3]{4}; -1)$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}; +\infty)$
$y'$	+	0	-	-	0	+		+
$y''$	-		-	+	0	+	0	-
$y$	$\nearrow \cap$	max	$\searrow \cap$	$\searrow \cup$	min	$\nearrow \cup$	т.п.	$\nearrow \cap$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __ / 93

		$y(-\sqrt[3]{4}) \approx$ $\approx -2,62$			$y(0) = -0,5$		$y(\sqrt[3]{2}) \approx$ $\approx 0,34$	
--	--	--	--	--	---------------	--	--	--

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів 1, 2, 5.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 94



**Приклад 3.** Виконати загальне дослідження функції  $y = \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}$ .

1 а) Область визначення функції –  $D = (-\infty; +\infty)$ .

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю  $Oy$  обчислимо значення функції у точці  $x = 0$ :

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/95

$$y(0) = \sqrt[3]{0^2} \cdot e^{\frac{2 \cdot 0}{3}} = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь  $Oy$  у точці  $y = 0$ , тобто проходить через початок координат – точку  $O(0;0)$ .

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю  $Ox$  Слід розв'язати рівняння  $y(x) = 0$ :

$$\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x^2} = 0. \text{ Звідси } x = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь  $Ox$  у точці  $x = 0$  (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки  $y(-x) \neq y(x)$  та  $y(-x) \neq -y(x)$ .

**2** Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) для знаходження похилих асимптот розглянемо окремо два випадки:  $x \rightarrow -\infty$  та  $x \rightarrow +\infty$ :

Якщо  $x \rightarrow +\infty$ , маємо за формулами (2):

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/96

$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( e^{\frac{2x}{3}} \right)'}{\left( \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{-2}{3} x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2x}{3}} = \infty.
 \end{aligned}$$

отже, похилих асимптот при  $x \rightarrow +\infty$  графік функції не має.

Якщо  $x \rightarrow -\infty$ , маємо

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-\frac{2x}{3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left( \sqrt[3]{x^2} \right)'}{\left( e^{-\frac{2x}{3}} \right)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{2}{3} e^{-\frac{2x}{3}}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{2x}{3}}} = 0.
 \end{aligned}$$

Отже, за формулою (1) при  $x \rightarrow -\infty$  похилою асимптотою є пряма  $y = 0$ .

б) Оскільки функція елементарна і область визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

**3** Знайдемо похідну 1-го порядку:



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 97

$$y' = \left( \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} \right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot e^{\frac{2x}{3}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = \frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Критичні точки 1-го роду:

а)  $y' = 0$ :  $2e^{\frac{2x}{3}}(1+x) = 0$ , або  $1+x = 0$ , звідки  $x = -1$ .

б)  $y'$  не існує:  $\sqrt[3]{x} = 0$ , звідки  $x = 0$ .

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду  $x = -1$ ,  $x = 0$ .

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y'$  на отриманих інтервалах:



(наприклад,  $y'(-6) \approx 0,03 > 0$ ,  $y'(-0,5) \approx -0,3 < 0$ ,  $y'(2) \approx 6,02 > 0$ ).

**4** Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left( \frac{2e^{\frac{2x}{3}}(1+x)}{3\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{e^{\frac{2x}{3}}(4x^2 + 8x - 2)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Критичні точки 2-го роду:

а)  $y'' = 0$ :  $4x^2 + 8x - 2 = 0$ .

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right); \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1.$$

б)  $y''$  не існує:  $\sqrt[3]{x^4} = 0$ , звідки  $x = 0$ .

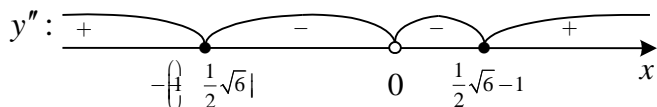
Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРЬСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідє ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 98

Отже, маємо три критичних точки 2-го роду

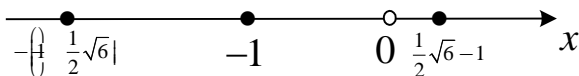
$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx -2,2; \quad x_2 = 0,$$

$$x_3 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1 \approx 0,2.$$

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак  $y''$  на отриманих інтервалах:



5 Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п'ять інтервалів:  $\left(-\infty; -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$ ,  $\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 1; +\infty\right)$ .

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають  $y'$  та  $y''$ , використовуємо результати досліджень у пунктах 3 та 4.

$x$	$\left(-\infty; -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$	$-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}; -1\right)$	$-1$
-----	--	----------------------------	---	------

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/99

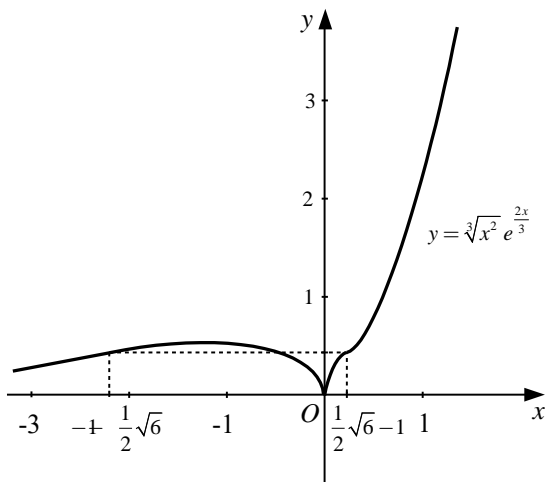
$y'$	+		+	0
$y''$	+	0	-	
$y$	$\searrow \cup$	т.п. $y\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \approx 0,4 \nearrow \cap$		max $y(-1) \approx 0,5$

Продовження таблиці

$(-1; 0)$		0	$\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{6}-1$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1; +\infty\right)$
-		не	+		+
-		не	-	0	+
$\searrow \cap$		min $y(0) = 0$	$\nearrow \cap$	т.п. $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right) \approx 0,4 \nearrow \cup$	

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 100

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів 1, 2, 5.



### Функції двох змінних

Частинні похідні функції двох змінних.

За означенням частинні похідні функції двох змінних  $z = f(x, y)$  у точці  $P(x; y)$  обчислюються за формулами:

по змінній  $x$  –

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

по змінній  $y$  –

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___/101

Поряд з позначеннями  $z'_x$  та  $z'_y$  використовують також інші позначення – відповідно  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $f'_x(x, y)$  та  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $f'_y(x, y)$ .

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

**Приклад 1.** Знайти частинні похідні функції  $z = 5x^4y^2 + 3x^2 - 4y^3 + 7$ .

▮ Вважаючи  $y$  сталою, знаходимо

$$\begin{aligned} z'_x &= 5y^2 \cdot (x^4)'_x + 3(x^2)'_x - 4(y^3)'_x + (7)'_x = \\ &= 5y^2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x - 0 + 0 = 20x^3y^2 + 6x. \end{aligned}$$

Вважаючи  $x$  сталою, знаходимо

$$\begin{aligned} z'_y &= 5x^4 \cdot (y^2)'_y + (3x^2)'_y - 4(y^3)'_y + (7)'_y = \\ &= 5x^4 \cdot 2y + 0 - 4 \cdot 3y^2 + 0 = 10x^4y - 12y^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти частинні похідні функції  $z = \arccos \frac{x^2}{y}$ .

▮ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$\begin{aligned} z'_x &= \left( \arccos \frac{x^2}{y} \right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{y} \right)^2}} \cdot \left( \frac{x^2}{y} \right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x^2)'_x = \\ &= -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x = -\frac{2xy}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y} = -\frac{2x}{\sqrt{y^2 - x^4}}, \\ z'_y &= \left( \arccos \frac{x^2}{y} \right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{y} \right)^2}} \cdot \left( \frac{x^2}{y} \right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{y^2}}} \cdot x^2 \cdot \left( \frac{1}{y} \right)'_y = \\ &= -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^4}} \cdot x^2 \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) = \frac{x^2y}{\sqrt{y^2 - x^4} \cdot y^2} = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2 - x^4}}. \quad \square \end{aligned}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 102

Частинними похідними другого порядку функції  $z = f(x, y)$  називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

**Приклад 3.** Знайти частинні похідні другого порядку функції  $z = 3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1$ .

$$\Gamma z'_x = (3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1)'_x = 3y^4 + 15x^2,$$

$$z'_y = (3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1)'_y = 12xy^3 - 4y,$$

$$z''_{xx} = (3y^4 + 15x^2)'_x = 30x,$$

$$z''_{xx} = (12xy^3 - 4y)'_y = 36xy^2 - 4,$$

$$z''_{xy} = (3y^4 + 15x^2)'_y = 12y^3,$$

$$z''_{yx} = (12xy^3 - 4y)'_x = 12y^3. \quad \perp$$

*Диференціал функції двох змінних.*

Диференціал функції  $z = f(x, y)$  обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

**Приклад 4.** Знайти повний диференціал функції  $z = \ln(x^2 + y^2)$

Γ Знайдемо частинні похідні функції  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  та підставимо їх у

вираз  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x^2 + y^2))'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x^2 + y^2))'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy \quad \perp$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 103

### Диференціювання функцій заданих неявно

Якщо рівняння  $F(x, y, z) = 0$ , де  $F(x, y, z)$  – диференційовна функція змінних  $x, y$  і  $z$ , визначає  $z$  як функцію незалежних змінних  $x$  і  $y$  і  $F'_z(x, y, z) \neq 0$ , то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},$$

де  $z = z(x, y)$ .

**Приклад 5.** Знайти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , якщо  $x^3y - 2y^2 + 3z^2 - y \cos z + 7 = 0$ .

□ Позначимо  $F(x, y, z) = x^3y - 2y^2 + 3z^2 - y \cos z + 7$ .

Знайдемо частинні похідні:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2y,$$

$$F'_y(x, y, z) = x^3 - 4y - \cos z,$$

$$F'_z(x, y, z) = 6z + y \sin z.$$

За формулами  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2y}{6z + y \sin z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^3 - 4y - \cos z}{6z + y \sin z}. \quad \square$$

### Диференціювання складних функцій

Якщо  $z$  є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад,  $z = f(x, y)$ , де  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  ( $u, v$  – незалежні

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 104

змінні;  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  – диференційовні функції), то частинні похідні  $z$  по  $u$  і  $v$  знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

**Приклад 6.** Знайти  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , якщо  $z = x^2 y - y^2 x$ , де  $x = u \cdot \cos v$ ,

$$y = u \cdot \sin v.$$

▮ Знайдемо похідні з правих частин формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^2 - y^2x)'_x = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y - y^2x)'_y = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u \cdot \cos v)'_u = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u \cdot \cos v)'_v = -u \sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (u \cdot \sin v)'_u = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = (u \cdot \sin v)'_v = u \cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули для диференціювання складних функцій. Тоді, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= (2xy - y^2) \cdot \cos v + (x^2 - 2xy) \cdot \sin v = \\ &= (2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v) \cdot \cos v + \\ &+ (u^2 \cos^2 v - 2u \cos v \cdot u \sin v) \cdot \sin v = \\ &= u^2 \sin v \cos v (2 \cos v - \sin v) + u^2 \sin v \cos v (\cos v - 2 \sin v) = \\ &= u^2 \sin v \cos v (2 \cos v - \sin v + \cos v - 2 \sin v) = \\ &= u^2 \sin v \cos v (3 \cos v - 3 \sin v) = 3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= (2xy - y^2) \cdot (-u \sin v) + (x^2 - 2xy) \cdot u \cos v = \\ &= (2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v) \cdot (-u \sin v) + (u^2 \cos^2 v - 2u^2 \cos v \sin v) \times \\ &\times u \cos v = -u^3 \sin^2 v (2 \cos v - \sin v) + u^3 \cos^2 v (\cos v - 2 \sin v) = \end{aligned}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 105

$$\begin{aligned}
&= u^3 \left( \underline{-2 \sin^2 v \cos v} + \underline{\sin^3 v} + \underline{\cos^3 v} - \underline{2 \cos^2 v \sin v} \right) = \\
&= u^3 \left[ -2 \sin v \cos v (\sin v + \cos v) + (\sin v + \cos v) \times \right. \\
&\left. \times (\sin^2 v - \sin v \cos v + \cos^2 v) \right] = u^3 (\sin v + \cos v)(1 - 3 \sin v \cos v). \quad \square
\end{aligned}$$

### Похідна функції за напрямом

Похідною функції  $z = f(x, y)$  у точці  $P(x; y)$  за напрямом  $\vec{e} = \overline{PP_1}$  називається

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \lim_{PP_1 \rightarrow 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{PP_1},$$

де  $f(P)$  і  $f(P_1)$  – значення функції у точках  $P$  і  $P_1$ ,  $PP_1$  – відстань між цими точками.

Якщо функція  $z$  диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут, що утворює вектор  $\vec{e}$  з віссю  $Ox$ .

**Приклад 7.** Знайти похідну функції  $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$  у точці  $P(2; -1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $N(5; 2)$ .

□ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці  $P$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2; \quad \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_P = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 = 27;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy; \quad \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_P = -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \cdot (-1) = -24.$$

Знайдемо координати вектора  $\vec{a} = \overline{PN}$ :  $\vec{a} = \{5 - 2; 2 - (-1)\} = \{3; 3\}$ .

Знайдемо координати орта  $\vec{a}_0$  вектора  $\vec{a}$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}, \quad \vec{a}_0 = \left\{ \frac{3}{3\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Звідси  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 106

За формулою  $\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$  :

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 27 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-24) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} . \quad \lrcorner$$

### Градiєнт функції

Градiєнтом функції  $z = f(x, y)$  у точці  $P(x, y)$  називається вектор, проєкціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} .$$

**Приклад 8.** Знайти градiєнт функції  $z = x^2 y$  у точці  $P(1; 1)$ .

┌ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці  $P$  :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy ; \quad \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 ; \quad \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_P = 1^2 = 1 .$$

Отже,  $\overrightarrow{\text{grad}} z = 2\vec{i} + \vec{j} . \quad \lrcorner$

### Рівняння дотичної площини і нормалі

Дотичною площиною до поверхні у точці  $M$  (точка дотику) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці  $M$  до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі  $z = f(x, y)$ , де  $f(x, y)$  – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці  $M(x_0; y_0; z_0)$  поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Рівняння нормалі має вигляд

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/107

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

**Приклад 9.** Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні  $z = \frac{x^2}{2} - y^2$  у точці  $M(2; -1; 1)$ .

□ Рівняння дотичної площини у точці  $M(x_0; y_0; z_0)$  поверхні має вигляд  $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ .

Рівняння нормалі має вигляд  $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$ .

Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці  $M$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

Звідси маємо:

$z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$  або  $2x + 2y - z - 1 = 0$  – рівняння дотичної площини;

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 1}{-1} \text{ – рівняння нормалі. } \square$$

### Локальний екстремум функції двох змінних

Функція  $f(x, y)$  має локальний максимум (мінімум)  $f(a, b)$  у точці  $P(a, b)$ , якщо для всіх відмінних від  $P$  точок  $P'(x, y)$  з деякого околу точки  $P$  виконується нерівність  $f(a, b) > f(x, y)$  (відповідно  $f(a, b) < f(x, y)$ ). Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 108

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція  $f(x, y)$  може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки даної системи називають стаціонарними точками.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці  $P(a; b)$  знаходимо

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b), \quad \Delta = AC - B^2.$$

Тоді: 1) якщо  $\Delta > 0$ , то функція має екстремум у точці  $P(a; b)$ , а саме – максимум, якщо  $A < 0$ , і мінімум, якщо  $A > 0$ ;

2) якщо  $\Delta < 0$ , то екстремуму в точці  $P(a; b)$  немає;

3) якщо  $\Delta = 0$ , то потрібні подальші дослідження.

**Приклад 10.** Дослідити на екстремуми функцію  $z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108y - 3$ .

Г Знайдемо частинні похідні і складемо систему  $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12y + 3x^2 - 108,$$

$$\begin{cases} 6xy - 4x = 0 \\ 12y + 3x^2 - 108 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x(6y - 4) = 0 \\ 12y + 3x^2 - 108 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо три стаціонарні точки:  $P_1\left(0; \frac{5}{6}\right)$ ,

$$P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Знайдемо похідні 2-го порядку  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12$  і

обчислимо  $\Delta = AC - B^2$  для кожної стаціонарної точки.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 109

$$1) \text{ Точка } P_1 \left( 0; \frac{5}{6} \right): A = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{P_1} = 6 \cdot \frac{5}{6} = 5, B = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{P_1} = 6 \cdot 0 = 0,$$

$$C = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{P_1} = 12.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 5 \cdot 12 - 0 = 60.$$

Оскільки  $\Delta > 0$  і  $A > 0$ , то у точці  $P_1$  функція має мінімум.

$$2) \text{ Точка } P_2 \left( \frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3} \right): A = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4, B = 6 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}, C = 12;$$

$$\Delta = 4 \cdot 12 - (20\sqrt{3})^2 = 48 - 1200 = -1152.$$

Оскільки  $\Delta < 0$ , то у точці  $P_2$  функція не має екстремуму.

$$3) \text{ Точки } P_3 \left( -\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3} \right): A = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4, B = 6 \cdot \left( -\frac{10\sqrt{3}}{3} \right) = -20\sqrt{3},$$

$$C = 12; \Delta = 4 \cdot 12 - (-20\sqrt{3})^2 = 48 - 1200 = -1152.$$

Оскільки  $\Delta < 0$ , то у точці  $P_3$  екстремуму немає. ]

### Умовний екстремум

Умовним екстремумом функції  $f(x, y)$  називають екстремум цієї функції за умови, що її аргументи пов'язані рівнянням зв'язку  $\varphi(x, y) = 0$ . Для знаходження умовного екстремуму функції  $f(x, y)$  за умови  $\varphi(x, y) = 0$  складають функцію Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

де  $\lambda$  – невизначений сталий множник. Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими  $x, y, \lambda$ :

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/OK7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/110

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай  $x_0, y_0, \lambda_0$  – розв’язок системи. Складемо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Якщо  $\Delta < 0$ , то функція  $f(x, y)$  має у точці  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  умовний максимум; якщо  $\Delta > 0$  – умовний мінімум.

**Приклад 11.** Знайти екстремуми функції  $z = 6 - 4x - 3y$  за умови, що змінні  $x$  і  $y$  задовольняють рівняння  $x^2 + y^2 = 1$ .

Г Геометрично задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень аплікати  $z$  площини  $z = 6 - 4x - 3y$  для точок її перетину із циліндром  $x^2 + y^2 = 1$ .

Складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\text{Маємо } \frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1.$$

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв’язуючи яку знаходимо

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/111

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{3}{5} \text{ і } \lambda_2 = -\frac{5}{2}, x_2 = -\frac{4}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

При  $\lambda = \frac{5}{2}, x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$  маємо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1,4 \\ 0 & 5 & 1,2 \\ 1,4 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Отже, у точці  $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$  функція має умовний мінімум.

При  $\lambda = -\frac{5}{2}, x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}$  маємо визначник

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

Отже, у точці  $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$  функція має умовний максимум.

Таким чином,

$$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11,$$

$$z_{\min} = 6 - \frac{16}{5}$$

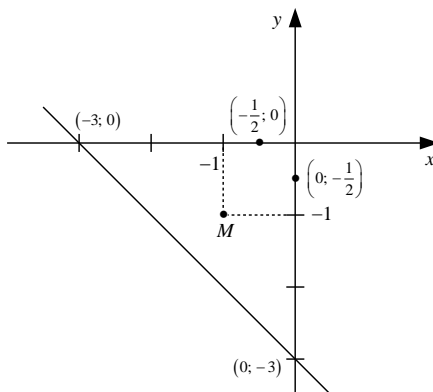
### Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

**Приклад 12.** Визначити найбільше і найменше значення функції  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$  в області  $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ .

┌ Зазначена область є трикутником.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк ___ / 112



1) Знайдемо стаціонарні точки:  $z'_x = 2x - y + 1$ ,  $z'_y = 2y - x + 1$ ,

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}. \text{Розв'язуючи систему, знаходимо } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases} \text{Точка}$$

$M(-1; -1)$  належить області.

У точці  $M$  значення функції  $z(M) = -1$ . Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо  $x = 0$ , то  $z = y^2 + y$  і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку  $-3 \leq y \leq 0$ . Похідна функції:

$$z' = (y^2 + y)' = 2y + 1. \text{ Знаходимо критичні точки з умови } z' = 0:$$

$2y + 1 = 0$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ . Ця точка належить відрізку  $[-3, 0]$ . Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.07- 05.02/2/122.00.1/Б/ОК7- 2021
	Екземпляр № 1	Арк __/113

При  $y = 0$  маємо  $z = x^2 + x$ . Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відріжку  $-3 \leq x \leq 0$ .

$$z' = (x^2 + x)' = 2x + 1.$$

$$z' = 0: 2x + 1 = 0, x = -\frac{1}{2} \in [-3, 0].$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При  $x + y = -3$ , або  $y = -3 - x$  маємо функцію

$z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$  на відріжку  $-3 \leq x \leq 0$ . Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$$z' = (3x^2 + 9x + 6)' = 6x + 9.$$

$$z' = 0: 6x + 9 = 0, x = -\frac{3}{2} \in [-3, 0].$$

$$z\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -\frac{3}{4},$$

$$z(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 6 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 + 6 = 6.$$

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції  $z$ . Робимо висновок, що  $z_{\text{найб.}} = 6$  у точках  $(0; -3)$  і  $(-3; 0)$ ;

$z_{\text{найм.}} = -1$  у стаціонарній точці  $M(-1; -1)$ . ▮